

MÁQUINAS ELÉCTRICAS ROTATIVAS: Introducción a la Teoría General

José Manuel Aller
UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
Departamento de Conversión y Transporte de Energía





**MÁQUINAS ELÉCTRICAS ROTATIVAS:
INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA GENERAL**

José Manuel Aller

©2007 EDITORIAL EQUINOCCIO

Todas las obras publicadas bajo nuestro sello
han sido sometidas a un proceso de arbitraje.

Valle de Sartenejas, Baruta, Edo. Miranda
Apartado postal 89000, Caracas 1080-A, Venezuela
Teléfono (0212)9063160/3162/3164, fax (0212)9063159

Hecho el depósito de ley
Reservados todos los derechos

Coordinación editorial: Carlos Pacheco

Producción:

Composición gráfica: José Manuel Aller

Corrección:

ISBN 980-237-223-4

Depósito legal LF: 2442004600958

al profesor Gastón Pesse, quien dedicó muchos años para
enseñarnos su visión de las máquinas eléctricas

y

a todos aquellos estudiantes que durante tantos años han
contribuido y enriquecido este libro con sus valiosas sugerencias

Índice general

I. Fundamentos Generales de las Máquinas Eléctricas	11
1. Conversión de Energía Eléctrica	13
1.1. Conceptos básicos	13
1.2. Convertidor electromecánico elemental	18
1.3. Curvas características	23
1.4. Balance energético	26
1.5. Sumario	28
1.6. Ejemplos resueltos	29
1.7. Ejercicios propuestos	38
2. Fundamentos de Conversión	43
2.1. Energía y coenergía en el campo	44
2.2. Balance energético	53
2.3. Ecuaciones internas del convertidor	58
2.4. Ecuaciones de potencia	62
2.5. Generalización de las ecuaciones	64
2.6. Sumario	67
2.7. Ejemplos resueltos	68
2.8. Ejercicios propuestos	74
3. Circuitos Acoplados Magnéticamente	81
3.1. Definiciones básicas	81
3.2. Ecuaciones de tensión	84
3.3. Coeficientes de acoplamiento y dispersión	85
3.4. El transformador como circuito acoplado	86
3.5. Sumario	92
3.6. Ejercicios propuestos	92

4. Máquinas Eléctricas Rotativas	97
4.1. Características comunes	97
4.2. Bobinas ortogonales	101
4.3. Múltiples pares de polos.	102
4.4. La máquina generalizada	104
4.5. Cálculo del par eléctrico	107
4.6. Par eléctrico y fuerzas magnetomotrices	111
4.7. El campo magnético rotatorio	115
4.8. La máquina trifásica	115
4.9. Transformación de Coordenadas	117
4.10. Transformación de coordenadas $\alpha\beta - dq$	120
4.11. Ecuaciones generales en coordenadas $\alpha\beta dq$	122
4.12. Sumario	123
4.13. Ejemplo resuelto	125
4.14. Ejercicios propuestos	128

II. Máquinas Eléctricas Rotativas **133**

5. Máquinas de Conmutador	135
5.1. Introducción	135
5.2. Ecuaciones de las máquinas de conmutador	146
5.3. Características de operación de las diferentes conexiones	147
5.4. Control de velocidad	155
5.5. Valores nominales y bases	157
5.6. Reacción de armadura	158
5.7. Saturación de la máquina de corriente continua	159
5.8. La conmutación	162
5.9. Pérdidas en las máquinas de corriente continua	165
5.10. Controladores electrónicos de velocidad	168
5.11. Máquinas especiales de corriente continua	172
5.12. Sumario	175
5.13. Ejemplos resueltos	177
5.14. Ejercicios propuestos	183
6. La Máquina de Inducción	193
6.1. Introducción	193
6.2. Modelo de la máquina de inducción	196
6.3. Vectores espaciales	198
6.4. Modelo en régimen permanente	202
6.5. Ecuaciones de la máquina de inducción	206
6.6. Característica par-deslizamiento	208
6.7. Puntos de operación	210
6.8. El punto nominal	212
6.9. Sistema en por unidad	214
6.10. Determinación de los parámetros	216

6.11. Condiciones de operación	223
6.12. Características normalizadas	227
6.13. Diagrama de círculo	229
6.14. Sumario	241
6.15. Ejemplos resueltos	244
6.16. Ejercicios propuestos	252
7. Operación de la Máquina de Inducción	259
7.1. Introducción	259
7.2. Arranque de motores de inducción	259
7.3. El rotor de jaula de ardilla	261
7.4. Corriente de arranque	265
7.5. Régimen desequilibrado de las máquinas de inducción	268
7.6. Armónicas temporales en la máquina de inducción	278
7.6.1. Sistema de terceras armónicas $3\omega_e$	279
7.6.2. Sistema de quintas armónicas $5\omega_e$	279
7.6.3. Sistema de séptimas armónicas $7\omega_e$	281
7.6.4. Sistema armónico de orden "h" $h\omega_e$	282
7.7. Armónicas espaciales en la máquina de inducción	285
7.8. La máquina de inducción bifásica	288
7.9. Análisis transitorio	299
7.10. Control de velocidad	306
7.10.1. Control tensión-frecuencia	306
7.10.2. Control por campo orientado	308
7.10.3. Control directo de par	312
7.11. Sumario	314
7.12. Ejemplos resueltos	316
7.13. Ejercicios propuestos	327
8. La Máquina Sincrónica	333
8.1. Descripción de la máquina sincrónica	335
8.2. Modelo de la máquina sincrónica	338
8.3. Transformación a vectores espaciales	341
8.4. Transformación a coordenadas rotóricas	343
8.5. Transformación de Park	344
8.6. Régimen permanente	349
8.7. Diagrama fasorial	349
8.8. Potencia y par eléctrico	352
8.9. Convenciones de la máquina sincrónica	355
8.10. Valores nominales de la máquina sincrónica	357
8.11. Lugares geométricos	359
8.12. Circuito equivalente de la máquina sincrónica	364
8.13. Curvas en "V"	365
8.14. Medición de las reactancias permanentes	367
8.15. Análisis de la máquina sincrónica considerando la saturación	370
8.16. La máquina sincrónica en el sistema eléctrico	375

8.17. Sumario	377
8.18. Ejemplos resueltos	379
8.19. Ejercicios propuestos	388
9. Régimen Transitorio de la Máquina Sincrónica	397
9.1. Transitorios electromagnéticos	398
9.1.1. Solución mediante autovalores-autovectores	399
9.1.2. Solución mediante la transformada de Laplace	401
9.2. Cortocircuito brusco de la máquina sincrónica	402
9.3. Interpretación física de las inductancias transitorias	405
9.4. Tensión de armadura en circuito abierto	406
9.5. Sistema adimensional de unidades	407
9.6. Análisis transitorio con resistencias	411
9.7. Constantes de tiempo en circuitos acoplados magnéticamente	414
9.8. Análisis transitorio aproximado	417
9.9. Pequeñas oscilaciones de la máquina sincrónica	419
9.10. Efecto del devanado amortiguador	424
9.11. Análisis subtransitorio aproximado	426
9.12. Determinación de las inductancias transitorias y subtransitorias	429
9.13. Régimen desequilibrado de la máquina sincrónica	432
9.14. Estabilidad de la máquina sincrónica	434
9.15. Diagrama de bloques de la máquina sincrónica	441
9.16. Sumario	441
9.17. Ejemplo resuelto	445
9.18. Ejercicios propuestos	450
Índice alfabético	455

Prefacio

En los últimos veintiseis años, en el Departamento de Conversión y Transporte de Energía de la Universidad Simón Bolívar se ha desarrollado un método eficiente y sistemático para la docencia de los cursos de Conversión de Energía Eléctrica¹. Se fundamenta en la experiencia aportada originalmente por el Profesor Gastón Pesse Vidal después de más de 45 años de fructífera labor universitaria, unida al trabajo sistemático de varios profesores de la sección de Conversión de Energía Eléctrica de este Departamento. Esto ha permitido ampliar la visión de centenares de ingenieros electricistas egresados de la Universidad Simón Bolívar, facilitando la incorporación de los nuevos desarrollos en electrónica de potencia, computación y sistemas de control.

A diferencia de los métodos convencionales para el análisis de las máquinas eléctricas, el método que se desarrolla en este texto permite el estudio de los convertidores electromecánicos mediante una modelación generalizada, donde las diferencias se establecen fundamentalmente a partir de la configuración de las fuentes de alimentación. El texto utiliza ampliamente el álgebra lineal con la finalidad de simplificar las ecuaciones necesarias para el análisis permanente y transitorio de las máquinas eléctricas e incorpora simultáneamente la concepción física de los fenómenos involucrados para permitir una comprensión más completa de cada tema.

El objetivo general consiste en ofrecer al futuro ingeniero electricista aquellos fundamentos teóricos y conceptuales necesarios para comprender los principios, analizar y evaluar las diferentes condiciones de operación de las máquinas eléctricas convencionales y permitir su interrelación con el sistema eléctrico de potencia. El texto se orienta fundamentalmente al análisis de los convertidores, pero en algunos casos se introducen algunas ideas generales que podrían servir de pie a cursos posteriores que desarrollen los temas relativos al diseño y construcción de los convertidores electromecánicos.

El perfil profesional del ingeniero electricista está en continuo cambio, cada día el desarrollo tecnológico evoluciona rápidamente. Nuevas máquinas y aplicaciones aparecen en el horizonte. Es necesario preparar a las generaciones de ingenieros que estamos formando para que puedan afrontar los retos que se presentan. Por esta razón, es necesario incorporar herramientas modernas y conceptos adecuados que flexibilicen el conocimiento de estas tecnologías en continuo

¹Máquinas eléctricas y controladores electrónicos de potencia.

desarrollo. Para cumplir con este cometido es indispensable romper con aquellos esquemas conceptuales que eran válidos cuando las máquinas eléctricas cumplían una función mucho más restringida. La investigación metódica y las continuas asesorías profesionales permiten el desarrollo de esta visión conceptual de las máquinas eléctricas, dentro de los alcances y limitaciones impuestos por el nivel académico a quien van dirigidos este texto². La incorporación de armónicas en las fuentes, desequilibrios en la red, controladores electrónicos en los accionamientos han hecho que los conceptos clásicos sean insuficientes para afrontar el reto que representa la industria actual.

La necesidad permanente de actualizar conocimientos, y la definición constante de nuevas metas y objetivos hacen indispensable la revisión periódica de este material. Con este espíritu ha sido concebido. Es un deseo que el material contenido en este texto ayude a simplificar la difícil labor del docente en esta área, y el aun más complejo proceso de aprendizaje a los estudiantes de ingeniería eléctrica. El estudio de este tema requiere una fuerte conceptualidad física y matemática, debido a que los fenómenos de conversión electromecánica de la energía requieren interpretaciones espaciales y temporales simultaneas. Se ha incluido un número importante de ilustraciones, gráficos y diagramas para facilitar la comprensión de aquellas ideas que tienden a ser difíciles para el estudiante. En esta edición se han incorporado ejemplos resueltos que ilustran los conceptos desarrollados, ejercicios propuestos que permiten desarrollar las habilidades necesarias para cumplir con los objetivos de cada tema y un sumario en cada capítulo que expone de forma concisa las ideas fundamentales. En varios temas se han incluido pequeños programas desarrollados mediante herramientas de cálculo de alto nivel³ que permiten obtener resultados prácticos de los modelos y constituyen en si mismos una poderosa herramienta de aprendizaje.

Este libro comienza presentando las bases fundamentales que permiten un análisis sistemático de las máquinas eléctricas: la ley de Lorenz, el principio de los trabajos virtuales y el análisis de circuitos acoplados magnéticamente. Posteriormente se desarrollan en detalle los principios básicos de conversión electromecánica, el planteamiento de las ecuaciones diferenciales que rigen su comportamiento y las transformaciones necesarias para su solución eficaz y eficiente. Las máquinas de conmutador, de inducción y sincrónica se presentan a partir de estas ideas y se obtienen modelos para el análisis en régimen permanente y transitorio de los convertidores electromecánicos. Algunos temas importantes tales como armónicos, saturación, desequilibrios, limitaciones de diseño, ensayos de laboratorio, estimación paramétrica y valores esperados se han incluido a través de todo el texto.

Quisiera terminar el prólogo a la presente edición agradeciendo a los innumerables colaboradores que han contribuido a su realización durante todos estos años, especialmente a las generaciones de ingenieros electricistas que permanente, entusiasta y desinteresadamente han revisado, discutido y hecho sugerencias sobre todos los temas desarrollados. Desde su primera publicación en Internet en el año 2002, se han incrementado notablemente los comentarios y sugerencias que han ido enriqueciendo el material.

Prof. José Manuel Aller Castro

Valle de Sartenejas, 2006

²Fundamentalmente estudiantes no graduados de ingeniería eléctrica

³Matlab®, Scilab® y Octave®.

Parte I

Fundamentos Generales de las Máquinas Eléctricas

CAPÍTULO 1

Conversión de Energía Eléctrica

En la historia del desarrollo de la humanidad se han buscado muchas fuentes de energía para movilizarse, construir viviendas, arar, segar, procesar los alimentos e iluminar. Hombres y bestias fueron las primeras fuentes de energía, incluso la esclavitud fue ampliamente justificada durante milenios con esta finalidad. La leña y el carbón desempeñaron un papel protagónico durante la revolución industrial, con la invención de la máquina de vapor. El desarrollo de la electricidad a finales del siglo XIX permitió el desarrollo de la industria moderna y requirió la conversión de diversas fuentes de energía en energía eléctrica y viceversa. En la actualidad el desarrollo de la electrónica y en especial de la electrónica de potencia, permite el control efectivo y eficiente de los procesos de conversión de energía eléctrica.

En este capítulo analizaremos los conceptos fundamentales involucrados en la conversión de energía, los principios básicos que permiten la conversión electromecánica de energía y las técnicas matemáticas que permiten analizar el comportamiento de los convertidores electromecánicos de energía.

1.1. Conceptos básicos

La energía es uno de los conceptos más importantes en el estudio de las máquinas eléctricas. La *energía* es la capacidad de realizar un trabajo. La energía se presenta en la naturaleza en diferentes formas. El objetivo de las máquinas eléctricas consiste en convertir la energía de una forma en otra.

En la tabla 1.1 se presenta un resumen de las *densidades de energía* que pueden ser almacenadas en diversos procesos físicos.

Se puede observar que los sistemas eléctricos y magnéticos no son buenos acumuladores de energía porque las máximas densidades de energía que se pueden obtener con los materiales existentes en la actualidad, son relativamente pequeñas al compararse con la energía por unidad

Tabla 1.1 Densidades de energía que pueden ser almacenadas en diversos procesos físicos

1.	Gravitación (100 m)	0,0098	MJ/kg
2.	Energía Cinética (5000 rpm)	0,053	MJ/kg
3.	Campo Magnético (2 Wb/m)	0,0016	MJ/litro
4.	Campo Eléctrico (6,5 MV/m)	0,006	MJ/litro
5.	Batería de plomo ácido $Pb + 2O \rightarrow PbO_2$	0,16	MJ/kg
6.	Calor de reacción del combustible fósil	44,0	MJ/kg
7.	Calor de combinación $H + H \rightarrow H_2$	216,0	MJ/kg
8.	Energía de Ionización	990,0	MJ/kmol
9.	Fisión U^{235}	83000	MJ/kg
10.	Fusión $Deuterio + Tritio \rightarrow He + 17,6 MeV$	340000	MJ/kg

de peso que puede ser almacenada en una batería o en los combustibles fósiles. Por esta razón es necesario realizar la *conversión* electromecánica de la energía para obtener energía eléctrica en grandes cantidades. La conversión electromecánica de energía permite transmitir, consumir, modificar o transformar la energía electromagnética de una forma en otra, pero no es posible almacenarla en cantidades importantes¹.

El segundo concepto físico importante en los fenómenos de conversión de energía es la *fuerza*. La fuerza en un sistema físico se manifiesta mediante la presencia de *interacciones* entre la materia. Aún cuando parece que las fuerzas pueden ser de muy diferentes formas y tipos, se conocen en la actualidad sólo cuatro fuerzas:

1. Interacciones gravitacionales entre masas (gravitones).
2. Interacciones eléctricas entre las cargas (electrón-protón-fotón).
3. Interacciones nucleares débiles (bosones intermedios).
4. Interacciones nucleares fuertes (protón-neutrón-pión).

Si se asocia a las fuerzas nucleares fuertes de cohesión protón-protón por intercambio de piones entre protones y neutrones el valor unitario, las interacciones nucleares débiles de las partículas nucleares con rareza se encuentran en el orden de 10^{-14} . Las fuerzas gravitacionales se encuentran, en la misma base de comparación, en el orden de 10^{-37} . Las fuerzas de atracción y repulsión de cargas eléctricas por intercambio de fotones están en el rango de 10^{-2} .

El tercer concepto básico es el de *campo*. La palabra campo posee la interpretación geométrica de extensión, superficie o espacio. Sin embargo, en física el concepto de campo consiste en la descripción del espacio donde se produce algún tipo de fuerzas. El campo gravitatorio es la zona del espacio donde una masa ejerce su influencia atrayendo a otras masas. El *campo eléctrico* se define exactamente igual, pero considerando las interacciones entre las *cargas eléctricas*. El *campo magnético* se define a través de las fuerzas entre *dipolos magnéticos*. La medición de un campo se realiza colocando en un punto del espacio una partícula de prueba (masa, carga o dipolo magnético) y se mide la fuerza ejercida sobre ella. El cociente entre la fuerza en dicho

¹Existen algunas excepciones como pueden ser los voltímetros electrostáticos y ciertos sensores de posición que utilizan el campo eléctrico en el proceso de conversión de energía.

punto y la magnitud de interés de la partícula es la intensidad del campo en el punto. Por ejemplo, si en un punto en la superficie de la tierra se mide la fuerza de atracción gravitatoria sobre la masa de prueba m , el dinamómetro indicará $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$, donde \mathbf{g} es la aceleración de gravedad en el punto donde se realiza la medida, y su dirección apunta hacia el centro de la tierra. El campo gravitatorio es el cociente entre la fuerza y la masa. En otras palabras la aceleración de gravedad en cada punto determina el valor de la intensidad del campo gravitatorio. De igual forma, el campo eléctrico es el cociente entre la fuerza eléctrica sobre una partícula cargada, y el valor de la carga de esa partícula $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}$.

Para el fenómeno eléctrico se plantea una ecuación de equilibrio de fuerzas en función del campo eléctrico \mathbf{E} y el campo magnético \mathbf{B} de un sistema dado. Esta ecuación de equilibrio se conoce como *relación de Lorentz*:

$$\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.1)$$

donde:

\mathbf{F}	es el vector de la fuerza resultante sobre la partícula cargada.
q	es la carga eléctrica de la partícula.
\mathbf{E}	es el vector intensidad del campo eléctrico.
\mathbf{v}	es el vector velocidad.
\mathbf{B}	es el vector densidad de campo magnético.

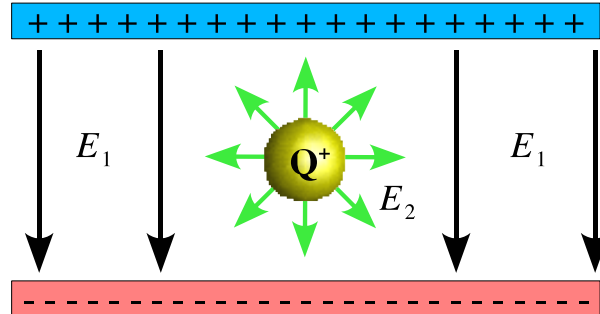


Figura 1.1 Carga eléctrica en un campo eléctrico

En la ecuación 1.1 todas las cantidades vectoriales deben estar referidas a un sistema de referencia único. Además, el campo eléctrico \mathbf{E} y el campo magnético \mathbf{B} deben ser producidos externamente a la carga q . Para que ocurra una interacción electromagnética sobre la carga q es necesaria la existencia de otras cargas. La figura 1.1 ilustra esta idea. En el punto que ocupa la carga q , el campo eléctrico \mathbf{E}_1 se debe a las otras cargas presentes en el sistema y no a sí misma. En estas condiciones existe una interacción eléctrica entre la carga puntual q y el campo eléctrico \mathbf{E}_1 producido por las cargas distribuidas en las dos placas.

En un convertidor electromagnético de energía es necesario analizar el mecanismo de creación de campo eléctrico \mathbf{E} y magnético \mathbf{B} . Para este fin se recurre a las *ecuaciones de Maxwell* y a las condiciones de contorno impuestas por el equipo.

Para determinar la solución del campo electromagnético, se parte de las siguientes premisas:

1. Las partículas eléctricas q se desplazan en campos eléctricos \mathbf{E} y magnéticos \mathbf{B} .
2. Estos campos son producidos externamente a las cargas, por otras partículas cargadas.

Con las premisas anteriores, las *leyes de Maxwell* expresadas en su forma diferencial para un punto cualquiera del espacio son:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (1.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.5)$$

y las *relaciones constitutivas* debidas al medio material:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1.6)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (1.7)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (1.8)$$

donde μ , ε y σ pueden ser tensores que dependen del tipo de material y orientación, pero que en los casos más simples son cantidades escalares.

Las ecuaciones 1.2 a 1.5 se pueden escribir en forma integral:

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.9)$$

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.10)$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho_v \cdot d\mathbf{v} \quad (1.11)$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1.12)$$

En general, cuando se analizan casos prácticos de los convertidores electromecánicos de energía, la variación de la densidad del campo eléctrico \mathbf{D} con respecto al tiempo es despreciable comparada con la *densidad de corriente* \mathbf{J} . Este término representa las corrientes capacitivas debidas a las variaciones del campo eléctrico y se conoce como *corrientes de desplazamiento*. Las

corrientes de desplazamiento son importantes cuando el campo eléctrico es muy intenso - *alta tensión* - o cuando su variación es muy rápida - *alta frecuencia* -. Ninguna de estas condiciones es frecuente en las máquinas eléctricas convencionales en condiciones normales de operación.

Para resolver las ecuaciones de Maxwell en un problema concreto, se define a las corrientes como las variables independientes. A partir de ellas se calcula el campo magnético \mathbf{B} con las ecuaciones 1.3 y 1.5, el campo eléctrico \mathbf{E} de la ecuación 1.2 y las fuerzas electromotrices por integración lineal del campo eléctrico en la trayectoria de interés. Las condiciones de contorno del sistema físico relacionan las fuerzas electromotrices con las corrientes que han sido previamente consideradas como variables independientes. Este proceso de cálculo se utilizará en el próximo capítulo para obtener el modelo de un sistema electromecánico simple, pero es totalmente general. La ecuación 1.4 no se utiliza en este análisis ya que se supone que en el medio no se encuentran disponibles cargas libres, es decir la densidad de carga ρ es cero.

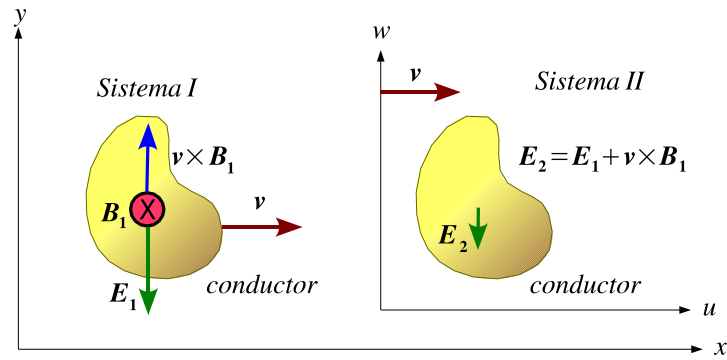


Figura 1.2 Efecto del cambio del sistema de referencia sobre el campo eléctrico

En la figura 1.2 se ilustra un par de conductores idénticos. El primero se desplaza a una velocidad \mathbf{v} diferente de cero, en la presencia de los campos \mathbf{E}_1 y \mathbf{B}_1 . El segundo conductor es idéntico al primero pero el observador se mueve a la misma velocidad \mathbf{v} y considera por esta razón que el conductor está en reposo. En esta condición el observador detecta el campo \mathbf{E}_2 .

Si se introduce una partícula en cada uno de los conductores anteriores cuya carga es q_1 , en el primer sistema la fuerza sobre la partícula, de acuerdo con la relación de Lorentz 1.1, es:

$$\mathbf{F}_1 = q_1 (\mathbf{E}_1 + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_1) \quad (1.13)$$

Si la velocidad es constante, la fuerza \mathbf{F}_1 es nula y de la ecuación 1.13 se deduce:

$$\mathbf{E}_1 = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1 \quad (1.14)$$

En el sistema II, como la velocidad relativa es cero, el observador sólo puede atribuir la fuerza actuante sobre la partícula q_1 al campo eléctrico \mathbf{E}_2 :

$$\mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{F}_2}{q_1} \quad (1.15)$$

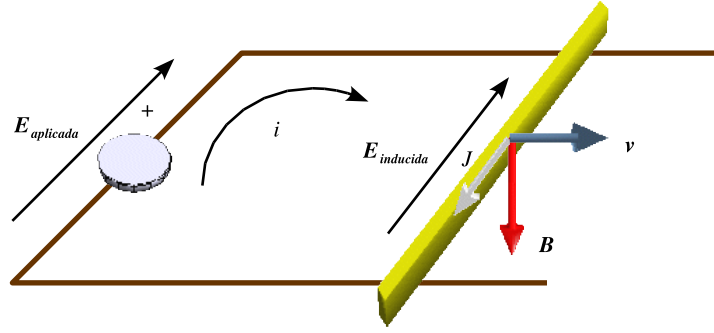


Figura 1.3 Conductor en movimiento en presencia de campos eléctricos y magnéticos

Como los conductores son idénticos en los dos sistemas, a excepción de su sistema de referencia, se puede establecer la transformación de Lorentz mediante las expresiones 1.13 y 1.15, debido a que $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2$:

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_1 + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_1 \quad (1.16)$$

La ecuación 1.16 permite calcular el campo eléctrico equivalente de un *sistema de referencia* solidario a los conductores del convertidor electromecánico de energía, conociendo vectorialmente el campo eléctrico y el campo magnético, del sistema fijo y externo al conductor.

En la figura 1.3 se ha esquematizado un segmento conductor al cual se le aplica entre sus extremos el campo eléctrico \mathbf{E} . El circuito se encuentra inmerso en un campo magnético uniforme \mathbf{B} . La densidad de corriente \mathbf{J} que circula por el conductor depende de la superposición de los campos eléctricos aplicados sobre él y de la conductividad σ del material, según la relación constitutiva 1.8, también conocida como ley de Ohm:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = \sigma (\mathbf{E}_{\text{aplicada}} - \mathbf{E}_{\text{inducida}}) \quad (1.17)$$

El campo eléctrico producido por el movimiento del conductor a la velocidad \mathbf{v} en un campo magnético \mathbf{B} se calcula según la ecuación 1.14, y por lo tanto la expresión 1.17 queda:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = \sigma (\mathbf{E}_{\text{aplicada}} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.18)$$

La expresión anterior determina la densidad de corriente \mathbf{J} por el conductor. Una vez conocida la densidad de corriente se puede evaluar el campo eléctrico o magnético en cualquier punto del espacio utilizando las ecuaciones de Maxwell 1.2 a 1.5. Conocidos los campos se pueden evaluar las fuerzas sobre cualquier partícula eléctrica cargada o sobre cualquier dipolo magnético. De esta forma queda resuelto el problema de la conversión electromecánica de la energía.

1.2. Convertidor electromecánico elemental

En general las máquinas eléctricas tienen por finalidad transformar la energía mecánica en energía eléctrica y viceversa. Cuando la conversión es de energía mecánica en energía eléctrica se

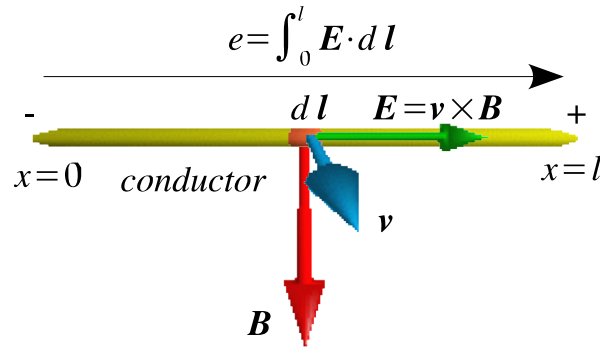


Figura 1.4 Convertidor electromagnético elemental

dice que la máquina está funcionando como *generador* y en el caso contrario opera como *motor*. Tal vez la máquina eléctrica más simple es la que se representa en la figura 1.4. Este dispositivo es un *convertidor electromagnético elemental* y está constituido solamente por un conductor rectilíneo, moviéndose ortogonalmente a un campo magnético uniforme.

En la figura 1.4, el conductor longitudinal se mueve en el interior de un campo magnético \mathbf{B} ,

siendo:

\mathbf{E}	es el vector intensidad de campo eléctrico.
e	es la fuerza electromotriz.
\mathbf{B}	es el vector densidad de campo magnético.
\mathbf{v}	es el vector velocidad del conductor lineal.

Las variables anteriores se relacionan a partir de la ecuación 1.13, considerando que no existe campo eléctrico externo:

$$\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (1.19)$$

Si en la ecuación 1.19, se supone que el campo magnético \mathbf{B} es uniforme en todos los puntos del conductor y la velocidad \mathbf{v} es constante, la fuerza electromotriz e de todo el conductor es:

$$e = \int_0^l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.20)$$

Si al conductor anterior se le conecta una resistencia entre sus extremos, circularán cargas por el conductor y se producirá una corriente de valor:

$$i = \frac{e}{R} \quad (1.21)$$

En el conductor de la figura 1.5 se produce una fuerza \mathbf{F}_e , que se opone al movimiento. Esta fuerza puede calcularse a partir de la *relación de Lorentz* 1.1, expresada como función de la corriente i por el conductor:

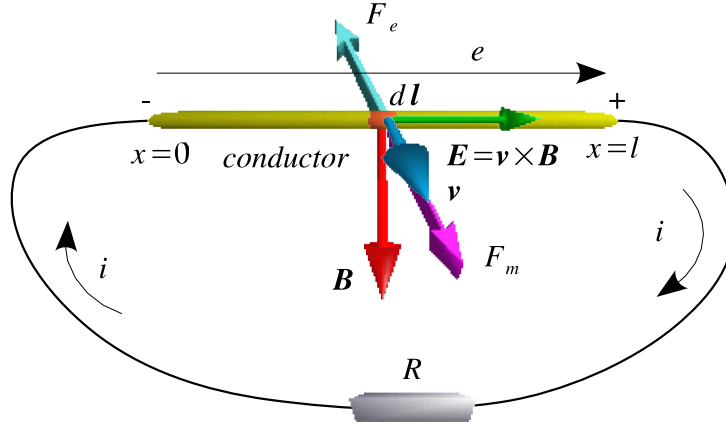


Figura 1.5 Corriente circulando por un conductor

$$\mathbf{F}_e = l \cdot \mathbf{i} \times \mathbf{B} \quad (1.22)$$

La fuerza calculada en la expresión anterior muestra que el sistema se opone a la extracción de energía. Para obtener la energía, es necesario forzar el movimiento del conductor. Si no actúa ninguna otra fuerza que mantenga el movimiento, y si la velocidad es diferente de cero, el sistema tendrá un movimiento retardado de aceleración negativa. El conductor convertirá la energía que estaba inicialmente almacenada en su masa, en pérdidas en la resistencia R del circuito externo. En estas condiciones, la velocidad decae exponencialmente a cero.

Para mantener una velocidad constante en el conductor de la figura 1.5, es necesario aplicar una fuerza externa al conductor que se oponga a \mathbf{F}_e . Esta fuerza es de origen mecánico y se denomina \mathbf{F}_m . En la figura 1.5 se observa el *equilibrio de fuerzas* necesario para mantener constante la velocidad \mathbf{v} del conductor.

El sistema mecánico entrega potencia al sistema eléctrico para mantener la velocidad \mathbf{v} , la potencia mecánica instantánea entregada por el sistema externo se calcula mediante la relación siguiente:

$$P_m = \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{v} \quad (1.23)$$

y la potencia eléctrica instantánea en el conductor es:

$$P_e = e \cdot i \quad (1.24)$$

Si se realiza un *balance de potencia*, considerando que las cantidades vectoriales son ortogonales entre si, se obtiene el siguiente resultado:

$$P_m = \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{v} = i \cdot B \cdot v \cdot l = i \cdot E \cdot l = i \cdot e = P_e \quad (1.25)$$

La ecuación 1.25 demuestra que la conversión de energía mecánica en energía eléctrica ha sido completa. En el proceso no hay pérdidas debido a que la potencia disipada en la resistencia del circuito es externa a la máquina.

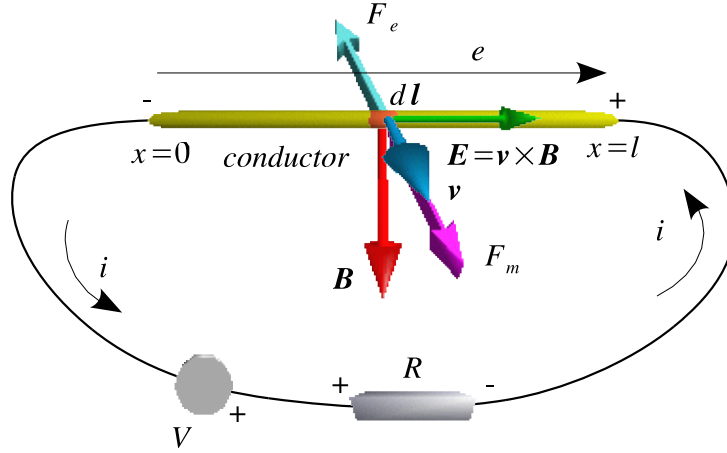


Figura 1.6 Conductor alimentado por una fuente de tensión V

Añadiendo una fuente de tensión al conductor anterior con el conductor inicialmente en reposo, tal como se ilustra en la figura 1.6, la fuente de tensión V hace circular una corriente i por el circuito. Esta corriente produce, según la ecuación 1.22 una fuerza eléctrica F_e . Si no actúa ninguna otra fuerza sobre el conductor, este comienza a moverse con aceleración.

Cuando el conductor se mueve en un campo magnético, se origina a su vez un campo eléctrico \mathbf{E} . Como se puede apreciar en la figura 1.6, la fuente de tensión produce una corriente que se opone al campo eléctrico \mathbf{E} inducido por el movimiento. La corriente se puede calcular como:

$$i = \frac{V - e}{R} \quad (1.26)$$

De esta forma, en la medida que aumenta la fuerza electromotriz e inducida por el movimiento del conductor, disminuye la corriente en el circuito. Al decrecer la corriente, se reduce la fuerza eléctrica sobre el conductor. El proceso continúa hasta que la fuerza eléctrica F_e se hace cero. En esta condición la tensión aplicada por la batería V es igual a la fuerza electromotriz e , inducida por el movimiento del conductor en el campo magnético y la corriente i se anula.

La velocidad del conductor en que la fuerza eléctrica es cero, debido al equilibrio entre la tensión aplicada y la fuerza electromotriz inducida por el movimiento, se define como velocidad sincrónica del conductor. En esta situación:

$$e = V = l \cdot v_s \cdot B \quad (1.27)$$

donde v_s es la velocidad sincrónica y se calcula de la expresión anterior como:

$$v_s = \frac{V}{l \cdot B} \quad (1.28)$$

Una vez que el conductor alcanza la velocidad sincrónica ($V = e$; $i = 0$), si se aplica una fuerza resistente al conductor, el sistema comienza a retardarse y la fuerza electromotriz inducida e disminuye, aumenta la corriente en el conductor debido a que la tensión V de la batería supera

a la fuerza electromotriz e . La aceleración o retardo del sistema se puede calcular aplicando convenientemente la *segunda ley de Newton*:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{M} \sum \mathbf{F} = \frac{\mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m}{M} \quad (1.29)$$

donde:

$\sum \mathbf{F}$	es la sumatoria de fuerzas aplicadas.
\mathbf{F}_e	es la fuerza eléctrica sobre el conductor.
\mathbf{F}_m	es la fuerza mecánica resistente.
M	es la masa del conductor.

Cuando la fuerza mecánica \mathbf{F}_m equilibra a la fuerza eléctrica \mathbf{F}_e , la aceleración es cero y en ese instante se cumple que:

$$\mathbf{F}_m = \mathbf{F}_e = l \cdot B \cdot i = l \cdot B \cdot \left(\frac{V - B \cdot l \cdot v_0}{R} \right) \quad (1.30)$$

De la ecuación 1.30 se obtiene la velocidad de operación v_0 en función de la fuerza mecánica resistente:

$$v_0 = \frac{V - \frac{F_m \cdot R}{B \cdot l}}{B \cdot l} \quad (1.31)$$

La velocidad v_0 corresponde a la operación de la máquina cuando las fuerzas eléctricas y mecánicas sobre el conductor están en equilibrio. Si en este momento se elimina la fuerza resistente \mathbf{F}_m , el conductor se acelera en la dirección de la fuerza eléctrica \mathbf{F}_e hasta alcanzar nuevamente la velocidad sincrónica.

La exposición anterior permite resumir en seis ecuaciones los principios que rigen la conversión electromecánica de energía:

$$\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (1.32)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{i} \times \mathbf{B} \quad (1.33)$$

$$e = \int_o^l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E \cdot l = v \cdot B \cdot l \quad (1.34)$$

$$F = \int_o^l \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = f \cdot l = i \cdot B \cdot l \quad (1.35)$$

$$i = \frac{V - e}{R} \quad (1.36)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{M}\mathbf{F}_a = \frac{\mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m}{M} \quad (1.37)$$

En el sistema de ecuaciones representado por las expresiones 1.32 a 1.37 se destacan los siguientes puntos:

1. La ecuación 1.34 calcula una variable eléctrica (e) en función de una variable mecánica (v) y el campo (B).
2. La ecuación 1.35 determina una variable mecánica (F) en función de una variable eléctrica (i) y el campo (B).
3. Las ecuaciones 1.34 y 1.35 dependen del conductor y del campo en el cual está inmerso, por esta razón se denomina las del convertidor electromecánico.
4. Las ecuaciones 1.36 y 1.37 representan las relaciones entre el conductor - *máquina eléctrica* - y el resto del universo. Estas ecuaciones se denominan *ecuaciones de ligazón*, *ecuaciones de borde*, *ecuaciones de contorno* o *ecuaciones de frontera*.

1.3. Curvas características

Para representar la de la fuerza eléctrica sobre el conductor en función de la velocidad, se puede utilizar la ecuación 1.30:

$$F_e = i \cdot B \cdot l = \left(\frac{V - e}{R} \right) \cdot B \cdot l = \frac{V \cdot B \cdot l}{R} - \frac{(B \cdot l)^2}{R} v \quad (1.38)$$

La ecuación 1.38 representa a la fuerza eléctrica F_e como una recta en función de la velocidad v del conductor. Cuando el conductor se encuentra en reposo ($v = 0$), la fuerza eléctrica es igual al término independiente en velocidad. Si la fuerza eléctrica es cero, la velocidad corresponde a la velocidad sincrónica de la máquina. Si se opone una fuerza constante de valor conocido, como se observa en la figura 1.7, se determina un punto de equilibrio v_0 en la intersección de las características eléctrica y mecánica. En este caso v_0 corresponde a la velocidad en la cual la fuerza eléctrica F_e equilibra a la fuerza mecánica F_m , y constituye un punto de equilibrio estable debido a que cualquier perturbación en la velocidad mecánica del sistema tenderá a ser restituida a las condiciones previas por las fuerzas actuantes sobre el conductor. Esta intersección es un punto de operación de régimen permanente para la máquina.

En la figura 1.7 se han marcado dos zonas (1) y (2). En la zona (1), si la máquina arranca en contra de una fuerza mecánica resistente constante, se acelera hasta alcanzar el punto de operación permanente o punto de equilibrio v_0 -intersección de las características-. Esto ocurre debido a que esta zona de operación, la fuerza eléctrica F_e , siempre es superior a la fuerza mecánica F_m .

Si el sistema se encuentra originalmente en vacío, es decir, operando a *velocidad sincrónica*, sin carga mecánica y repentinamente se añade una fuerza mecánica resistente, la fuerza eléctrica es

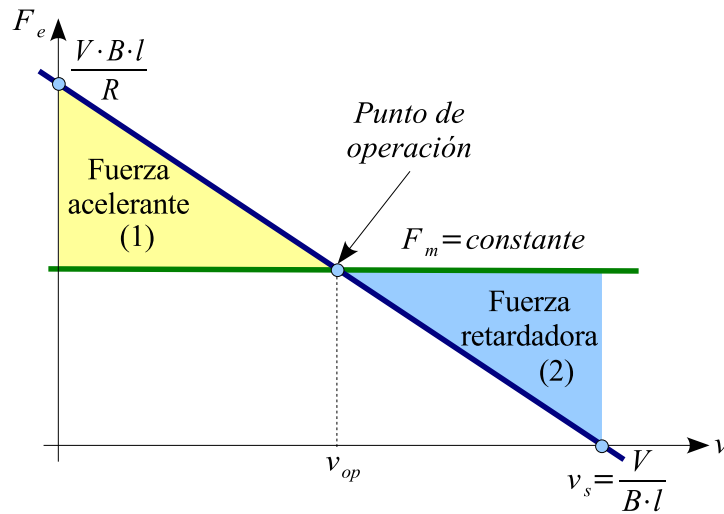


Figura 1.7 Curva característica de la máquina

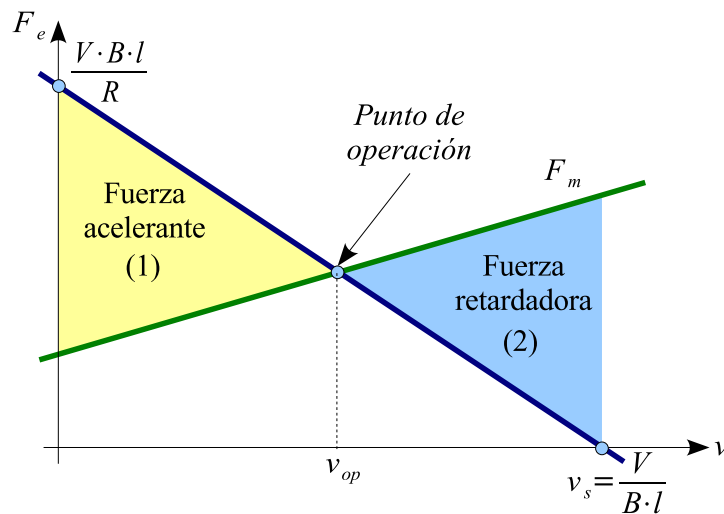


Figura 1.8 Fuerza mecánica variable con la velocidad

inferior a la mecánica y ocurre un proceso de retardo en la zona (2) de la figura 1.7. La velocidad disminuye desde la sincrónica hasta la velocidad de operación, v_0 en el punto de equilibrio.

La fuerza mecánica F_m , depende en general, para un accionamiento físico, de la velocidad del conductor. En la figura 1.8 se muestra la curva característica de la máquina eléctrica anterior, pero sometida a una fuerza mecánica dependiente de la velocidad.

En este caso, al igual que en el anterior, v_0 es un punto de equilibrio estable ya que si se aumenta un diferencial la velocidad del conductor por encima de v_0 , se origina una fuerza retardadora que hace regresar el conductor a la anterior condición de operación. Por el contrario, si la velocidad del conductor disminuye en un diferencial, se produce una fuerza acelerante que incrementa la velocidad del conductor hasta alcanzar el punto de equilibrio en v_0 .

Al producirse un cambio en la tensión de la batería que alimenta al convertidor, la velocidad sincrónica de la máquina también varía, debido a que esta velocidad se determina cuando existe

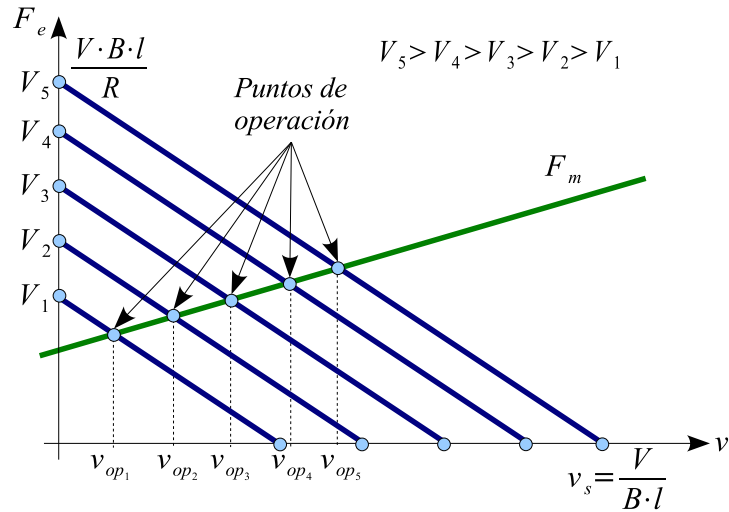


Figura 1.9 Efecto de la variación de la tensión de alimentación

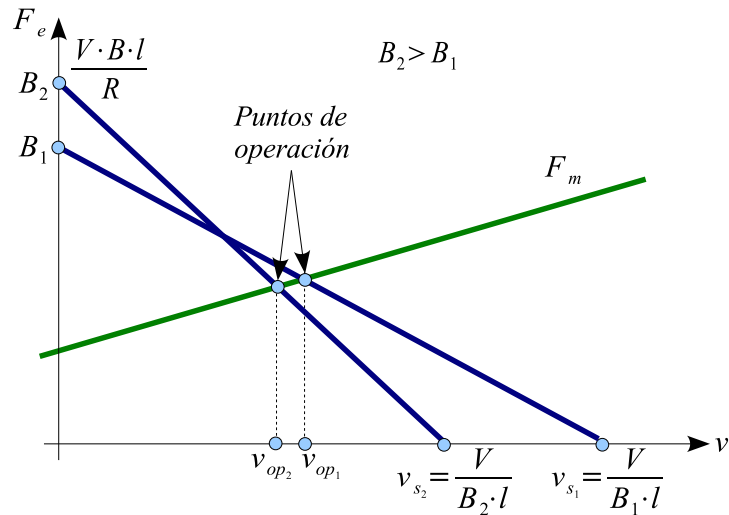


Figura 1.10 Efecto de la variación del campo B del convertidor

equilibrio entre la tensión de la batería y la fuerza electromotriz inducida en el conductor. Es posible definir en la figura 1.8 una familia de curvas de acuerdo a como se varíe la tensión de la fuente. Mediante la variación de la tensión de la batería se puede controlar la *velocidad de operación* de la máquina.

También se puede controlar la máquina elemental variando la densidad de flujo magnético B. La variación del campo produce un cambio en la pendiente de la curva característica de la máquina, ya que como se observa en la ecuación 1.38, esta variación altera la pendiente de la característica de forma cuadrática y el punto de corte en el eje de la fuerza - $v = 0$ -, de forma lineal. En la figura 1.10 se ilustra esta situación y como es posible cambiar el punto de operación de la máquina mediante variaciones del campo magnético B.

De los dos métodos analizados para controlar el punto de operación de la máquina, la variación del campo magnético tiene un inconveniente. Cuando el campo se reduce demasiado, la

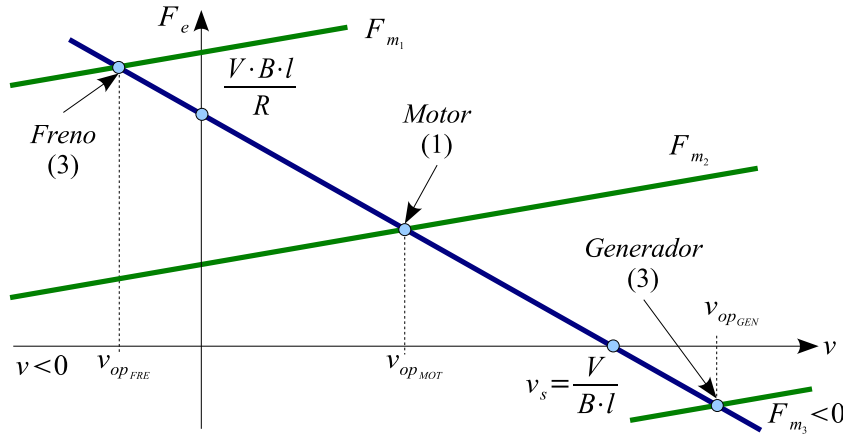


Figura 1.11 Modos de operación del convertidor

velocidad sincrónica aumenta considerablemente y se puede producir un fenómeno denominado embalamiento. El *embalamiento* es una aceleración súbita debida a la pérdida del campo en una máquina eléctrica sin carga. Si la velocidad sube a niveles peligrosos, puede ocurrir deterioro de la máquina por fallas eléctricas y mecánicas. En las máquinas eléctricas rotativas este problema es muy grave como se observa del siguiente ejemplo:

Una máquina de 3600 rpm con un radio de 50 cm gira a una velocidad angular de:

$$\omega = 2\pi \frac{n}{f} = 377 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

La aceleración centrípeta que aparece sobre los conductores de la periferia del rotor de la máquina se calculan como:

$$a_c = \omega^2 r = 71,061 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Esta aceleración es aproximadamente 7252 veces superior a la de gravedad, por lo tanto sobre cada gramo de material en la periferia aparece una fuerza de 7 kg tratando de mover el material conductor de sus ranuras. Como la aceleración varía con el cuadrado de la velocidad angular, si se duplica la velocidad angular, la aceleración aumenta cuatro veces.

1.4. Balance energético

En el *balance de potencias* desarrollado en la ecuación 1.25 se llegó a la conclusión de que todo el proceso es conservativo en base a que la potencia eléctrica desarrollada por la máquina es igual a la potencia mecánica entregada por el sistema externo.

En general, todas las máquinas eléctricas son reversibles y su funcionamiento depende del sentido en que se transmite la potencia. Si la energía fluye del sistema eléctrico al mecánico, la

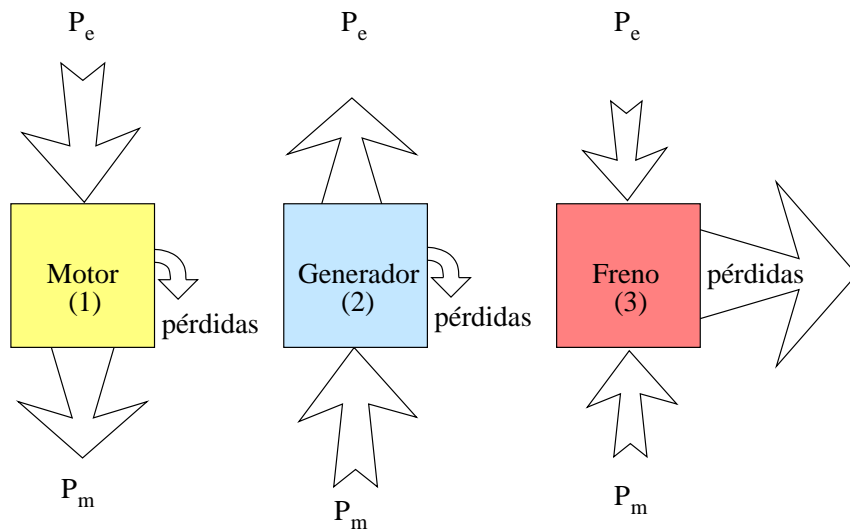


Figura 1.12 Balance de potencia en los diversos modos de operación

máquina funciona como *motor*. Si el flujo de energía es del sistema mecánico al eléctrico, el convertidor es un *generador*. Cuando el sistema eléctrico y mecánico inyectan energía a la máquina, y esta energía se consume totalmente como pérdidas en el interior de la misma, se denomina *freno* a esta condición. La máquina se puede alimentar indistintamente con energía eléctrica o con energía mecánica. En la figura 1.11 se presenta un gráfico de la característica fuerza-velocidad de la máquina analizada anteriormente, con los diferentes modos de operación posibles para este convertidor. En la figura 1.12 se muestra un esquema donde se realiza el balance energético de la máquina en las tres condiciones de operación posibles, motor, generador y freno.

En la zona (1), la velocidad del conductor es menor que la velocidad sincrónica, la fuerza electromotriz inducida es menor que la tensión aplicada externamente y la corriente tiene signo contrario a la fuerza electromotriz. En estas condiciones el conductor se desplaza en el mismo sentido de la fuerza eléctrica, es decir, esta fuerza realiza trabajo positivo y por lo tanto se está transformando energía eléctrica en mecánica. La máquina está actuando como un motor. En esta zona se satisfacen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} e &> 0 \\ e &< V \\ i &> 0 \end{aligned}$$

En la zona (2), la velocidad del conductor es mayor que la velocidad sincrónica y la fuerza electromotriz es mayor que la tensión aplicada, por esta razón la corriente y la fuerza eléctrica invierten su sentido. Para encontrar un punto de equilibrio la fuerza mecánica también debe invertir su sentido original. La fuerza mecánica ahora está entregando energía y el sistema se comporta como un generador. Las condiciones que imperan en esta zona de trabajo son:

$$\begin{aligned} e &> 0 \\ e &> V \\ i &< 0 \end{aligned}$$

En la zona (3), tanto la velocidad, como la fuerza electromotriz son negativas. La fuerza mecánica está aplicada en el mismo sentido de la velocidad -negativa en esta condición-, por lo tanto el sistema mecánico entrega energía a la máquina. Simultáneamente, la fuente de tensión entrega potencia eléctrica a la carga. En esta condición toda la potencia entregada por el sistema mecánico y por el sistema eléctrico se consume en la resistencia interna del conductor y se produce un gran calentamiento de la máquina. Esta condición se conoce con el nombre de frenado eléctrico y se caracteriza por las siguientes condiciones de operación:

$$\begin{aligned} e &< 0 \\ e &< V \\ i &> 0 \end{aligned}$$

1.5. Sumario

1. La *conversión de energía* es necesaria para utilizar los diferentes recursos disponibles en la naturaleza. El campo magnético permite acumular energía con una densidad mayor que la del campo eléctrico, esto ha favorecido el desarrollo de las máquinas eléctricas basadas en campo magnético. El campo magnético acumula cantidades muy pequeñas de energía al ser comparado con las densidades obtenidas en otros procesos físicos, esto hace necesaria la conversión de energía para poder obtener electricidad a partir de estos procesos - tabla 1.1 -.
2. *Energía, fuerza y campo* son conceptos físico-matemáticos de gran utilidad en los procesos que involucran conversión de energía.
3. La ley de Lorentz 1.1, las leyes de Maxwell 1.2 a 1.5 y las relaciones constitutivas de la materia 1.6 a 1.8, constituyen un marco matemático que permiten determinar el comportamiento de los convertidores electromecánicos de energía.
4. El convertidor electromecánico elemental está constituido por un conductor rectilíneo moviéndose ortogonalmente a una velocidad \mathbf{v} en un campo magnético \mathbf{B} , en estas condiciones aparece en cada punto del conductor un campo eléctrico constante de valor $\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Cuando este conductor se conecta a un circuito eléctrico externo, se obtiene una máquina eléctrica que es capaz de comportarse como *motor*, *generador* o *freno*.
5. El sistema formado por las ecuaciones internas y las relaciones con el exterior del convertidor, determinan completamente el comportamiento eléctrico y mecánico del convertidor electromecánico. Las ecuaciones internas definen la fuerza electromotriz e , y la fuerza

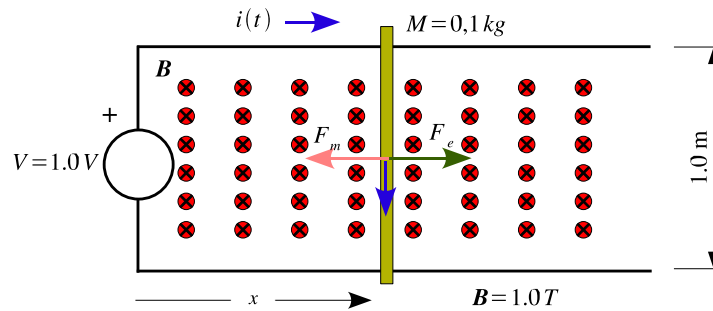


Figura 1.13 Conductor moviéndose en un campo uniforme

eléctrica F_e sobre el conductor. Las relaciones externas son la ecuación de Kirchoff para el sistema eléctrico y la segunda ley de Newton para el sistema mecánico.

- La ecuación característica, permite obtener el punto de operación. El punto de operación está determinado por aquella velocidad donde se alcanza el equilibrio entre las fuerzas actuantes.

1.6. Ejemplos resueltos

Ejemplo 1: Conductor moviéndose en un campo uniforme

En la figura 1.13 se muestra el diagrama esquemático de un convertidor electromecánico de energía constituido por una fuente de tensión $V = 1,0 \text{ V}$ y un conductor de masa $M = 0,1 \text{ kg}$, que se mueve ortogonalmente a un campo magnético uniforme $B = 1,0 \text{ T}$. La resistencia de los conductores está distribuida y depende de la longitud del camino que conecta la fuente con el conductor móvil ($R = 1 + 2x \Omega$). Al movimiento del conductor se opone una fuerza mecánica $F_m = 1,0 \text{ N}$. En estas condiciones determine:

- Las ecuaciones diferenciales completas que rigen el comportamiento del convertidor electromecánico.
- La trayectoria descrita por el conductor móvil si en el instante inicial $t = 0$, la posición de este elemento es $x(0) = 1,0 \text{ m}$ y parte de la condición de reposo².
- La trayectoria del conductor utilizando métodos analíticos de solución suponiendo que ahora la resistencia es concentrada y de valor constante³ 5Ω .

Solución:

1.- Es necesario determinar tanto las ecuaciones internas⁴, como las relaciones con el mundo externo⁵. Las ecuaciones internas del convertidor son:

²debido a la no-linealidad existente en el modelo matemático del convertidor utilice un programa para resolver numéricamente este problema

³Las condiciones iniciales coinciden con las indicadas en el punto (2) de este problema.

⁴fuerza electromotriz y fuerza eléctrica.

⁵ecuación de la malla y segunda ley de Newton.

$$e = \int_0^l E \cdot dl = v \cdot B \cdot l \quad (1.39)$$

$$F_e = \int_0^l f \cdot dl = i \cdot B \cdot l \quad (1.40)$$

Las ecuaciones que relacionan al convertidor electromecánico con el mundo externo son:

$$i = \frac{V - e}{R} \quad (1.41)$$

$$F_e - F_m = M\ddot{a} \quad (1.42)$$

Sustituyendo las ecuaciones internas 1.39 y 1.40 en las relaciones con el mundo externo 1.41 y 1.42 se obtiene:

$$i = \frac{V - v \cdot B \cdot l}{R(x)} \quad (1.43)$$

$$F_e - F_m = i \cdot B \cdot l - F_m = M\ddot{a} \quad (1.44)$$

Reemplazando el resultado de la expresión 1.43 en la ecuación 1.44 se obtiene la ecuación diferencial que determina el comportamiento dinámico del conductor móvil:

$$Ma = \frac{V - v \cdot B \cdot l}{R(x)} \cdot B \cdot l - F_m = \frac{V \cdot B \cdot l - v \cdot (B \cdot l)^2}{R(x)} \quad (1.45)$$

2.- La resistencia de los conductores está distribuida y depende de la posición x , la ecuación diferencial que define el comportamiento dinámico del conductor móvil es:

$$M\ddot{x} - \frac{V \cdot B \cdot l - \dot{x} \cdot (B \cdot l)^2}{1 + 2x} + F_m = 0 ; \quad \begin{cases} x(0) = 1,0 \text{ m} \\ \dot{x}(0) = 0,0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases} \quad (1.46)$$

Para resolver el problema planteado en la ecuación 1.46 es necesario utilizar un método numérico debido a la dependencia de la posición en los coeficientes que acompañan a las derivadas de esta variable de estado. La ecuación 1.46 se puede descomponer en un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{1}{M} \left(\frac{V \cdot B \cdot l - u \cdot (B \cdot l)^2}{(1+2x)} - F_m \right) \\ \dot{x} = u \end{cases} ; \quad \begin{cases} x(0) = 1,0 \text{ m} \\ \dot{x}(0) = 0,0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases} \quad (1.47)$$

El sistema de ecuaciones planteado en 1.47 puede ser integrado numéricamente. En el listado se reproduce un código fuente MATLAB⁶ que permite realizar esta operación. En la figura 1.14 se

⁶Un código parecido puede ser adaptado para resolver el problema utilizando herramientas de licencia libre y código abierto como pueden ser Octave y Scilab.

Algoritmo 1 Rutina para la solución del problema utilizando el entorno MATLAB

```
%*****
% Programa para el cálculo de la trayectoria de un conductor
% que se mueve en un campo magnético uniforme. Matlab
%*****
global m l B Fm V % Traspaso de variables a la función conductor
% Definición de los parámetros y variables de entrada
m=0.1; l=1.0; B=1.0; Fm=.1; V=1;
% Condiciones iniciales de las variables de estado
y0=[0 1]; % u(0)= 0 m/s x(0)=1.0 m
Ta=0:.001:10; % Definición de tiempos y pasos de integración
% Integración de las variables de estado por un método Runge-Kutta
% con paso variable
[T,X]=ode23('conductor',Ta,y0);
% Gráfico de las variables de estado
[AX,H1,H2]=plotyy(T,X(:,1),T,X(:,2)) xlabel('tiempo (s)','FontName','times')
set(get(AX(1),'Ylabel'),'String','velocidad u(t) (m/s)','FontName','times')
set(get(AX(2),'Ylabel'),'String','posicion x(t) (m)','FontName','times')
set(H2,'LineStyle',':')
grid
%*****
% Ecuaciones diferenciales del problema 1
function pX=conductor(t,X)
global m l B Fm V % Traspaso de variables a la función conductor
% Conversión de las variables de estado a definiciones nemotécnicas
u=X(1); x=X(2);
% Cálculo de las derivadas de las variables de estado
pu=((V*B*l-(B*l)^2*u)/(1+2*x)-Fm)/m;
px=u;
% Asignación de las variables de estado al vector de salida de la función
pX=[pu;px];
%*****
```

observa el resultado de esta integración, donde se ha representado la posición de la pieza móvil en función del tiempo para los datos de este problema:

En el listado 2 se presenta un código que resuelve el mismo problema en el entorno de código abierto y libre distribución Scilab 3.1.1, que está disponible⁷ para varios sistemas operativos entre los cuales se puede destacar Windows®, Linux, MacOS® y Unix®.

El código incluido en el listado 3 resuelve este ejemplo utilizando el programa Octave⁸, entorno similar a Matlab, pero cuyo código es abierto y de distribución libre.

3.- Si la resistencia R no cambia con la posición x , la ecuación diferencial que determina el comportamiento dinámico del convertidor es lineal:

$$M\ddot{x} + \frac{(B \cdot l)^2}{R}\dot{x} - \frac{V \cdot B \cdot l}{R} + F_m = 0 \quad \begin{cases} x(0) = 1,0 \text{ m} \\ \dot{x}(0) = 0,0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases} \quad (1.48)$$

Sustituyendo los valores de los parámetros M y l , así como de las fuentes V , B y F_m en la expresión 1.48, se obtiene:

⁷Las diferentes versiones y distribuciones pueden ser descargadas desde el enlace <http://www.scilab.org>

⁸<http://www.octave.org>

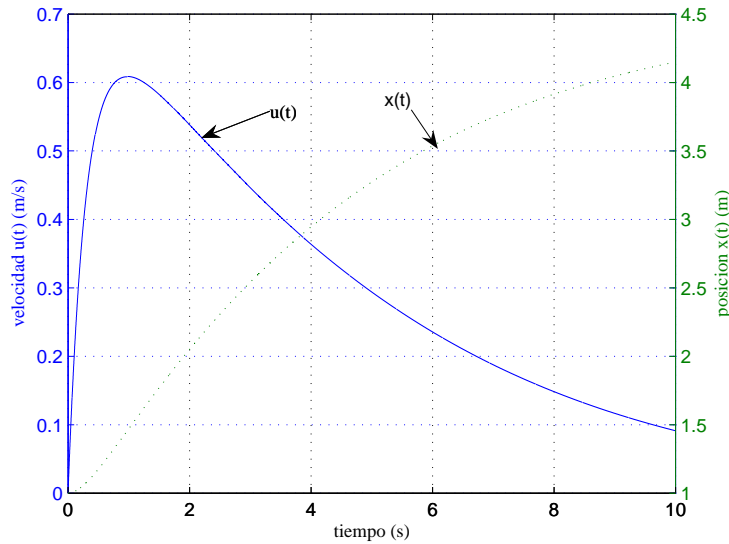


Figura 1.14 Velocidad y posición del conductor - solución numérica utilizando Matlab 7.0

Algoritmo 2 Rutina para la solución del problema utilizando el entorno SCILAB

```
// Ecuaciones diferenciales del problema 1 programado en el entorno Scilab
//
// Definición de la función conductor
function pX=conductor(t,X)
    global m l B Fm V // Traspaso de variables a la función conductor
// Conversión de las variables de estado a definiciones nemotécnicas
    u=X(1); x=X(2);
// Cálculo de las derivadas de las variables de estado
    pu=((V*B*l-(B*l)^2*u)/(1+2*x)-Fm)/m;
    px=u;
// Asignación de las variables de estado al vector de salida de la función
    pX=[pu;px];
endfunction
//*****
// Programa para el cálculo de la trayectoria de un conductor
// que se mueve en un campo magnético uniforme. Scilab 3.1.1
//*****
    global m l B Fm V // Traspaso de variables a la función conductor
// Definición de los parámetros y variables de entrada
    m=0.1; l=1.0; B=1.0; Fm=.1; V=1;
// Condiciones iniciales de las variables de estado
    y0=[0;1]; // u(0)= 0 m/s x(0)=1.0 m
    Ta=0:.001:10; // Definición de tiempos y pasos de integración
// Integración de las variables de estado por el método Runge-Kutta
    X=ode(y0,0,Ta,conductor);
// Gráfico de las variables de estado
    subplot(121)
    plot2d(Ta,X(1,:),'',frameflag=6)
    xtitle('velocidad [m/s]','t [s]','u(t)')
    xgrid(2)
    subplot(122)
    plot2d(Ta,X(2,:),'',frameflag=6)
    xtitle('posicion [m]','t [s]','x(t)')
    xgrid(2)
//*****
```

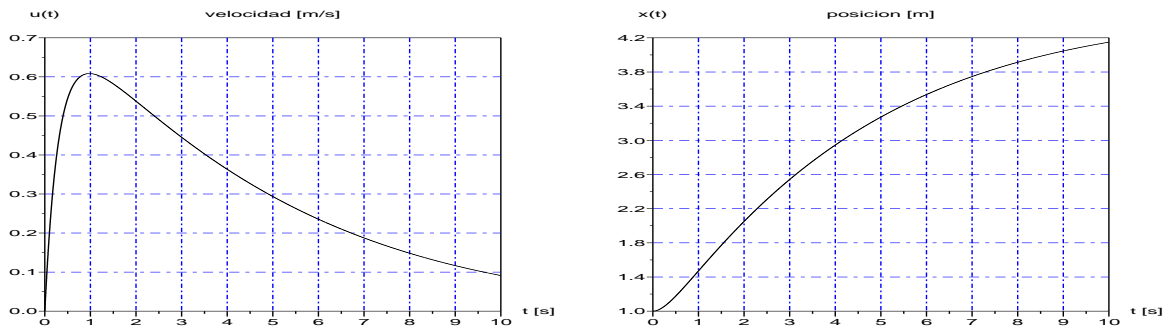


Figura 1.15 Resultados del ejemplo obtenidos en el entorno Scilab-3.0

Algoritmo 3 Rutina para la solución del problema utilizando el entorno OCTAVE

```
# *****
# Programa para el cálculo de la trayectoria de un conductor
# que se mueve en un campo magnético uniforme. Octave
# *****
global m l B Fm V # Traspaso de variables a la función conductor
# Definición de los parámetros y variables de entrada
m=0.1; l=1.0; B=1.0; Fm=.1; V=1;
# Condiciones iniciales de las variables de estado
y0=[0;1]; # u(0)= 0 m/s x(0)=1.0 m
Ta=linspace(0,10,200); # Definición de tiempos y pasos de integración
# Integración de las variables de estado por el método Runge-Kutta
X=lsode('conductor',y0,Ta);
# Gráficos de la velocidad y posición
gset nokey
gset term postscript color
plot(Ta,X(:,1))
grid(); xlabel('tiempo [s]');ylabel('velocidad [m/s]')
gset output "ej_1_la_octave.ps"
replot
plot(Ta,X(:,2))
xlabel('tiempo [s]');ylabel('posicion [m/s]')
gset output "ej_1_lb_octave.ps"
replot
# *****
function pX=conductor(X,t)
global m l B Fm V # Traspaso de variables a la función conductor
# Conversión de las variables de estado a definiciones nemotécnicas
u=X(1); x=X(2);
# Cálculo de las derivadas de las variables de estado
pu=((V*B*l-(B*l)^2*u)/(l+2*x)-Fm)/m;
px=u;
# Asignación de las variables de estado al vector de salida de la función
pX=[pu;px];
endfunction
```

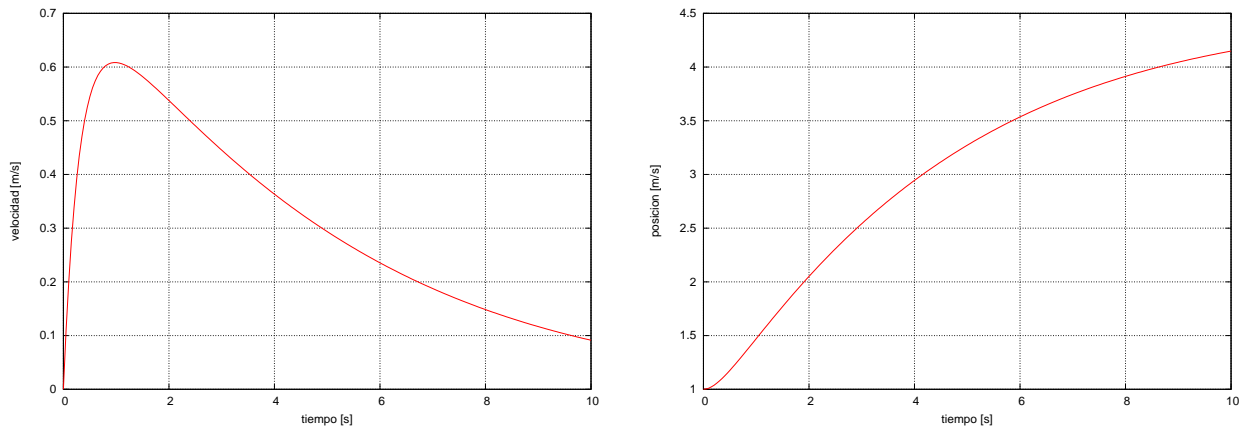


Figura 1.16 Resultados del ejemplo utilizando el entorno Octave 2.1.50

$$\ddot{x} + 2\dot{x} = 1 ; \quad \begin{cases} x(0) = 1,0 \text{ m} \\ \dot{x}(0) = 0,0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases} \quad (1.49)$$

La expresión 1.49 se puede resolver más fácilmente si se sustituye la definición de la velocidad u :

$$\dot{u} + 2u = 1 ; \quad u(0) = 0,0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (1.50)$$

Aplicando la transformada de Laplace, se obtiene el siguiente resultado:

$$sU(s) + 2U(s) = \frac{1}{s} \quad (1.51)$$

$$U(s) = \frac{1}{s(s+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \right) \quad (1.52)$$

Antitransformando la expresión 1.52 se obtiene la velocidad $u(t)$:

$$u(t) = \frac{1}{2} (1 - e^{-2t}) \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (1.53)$$

La posición se obtiene integrando la solución 1.53:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t u(\tau) d\tau = 1 + \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} e^{-2t} - \frac{1}{2} \right) \quad (1.54)$$

En la figura se puede observar esta solución obtenida numéricamente con el programa anterior.

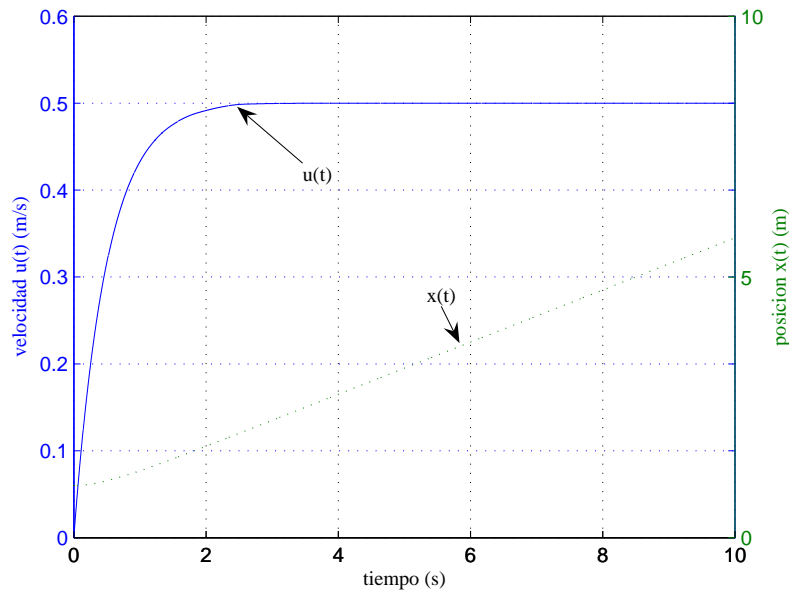


Figura 1.17 Velocidad y posición del conductor en función del tiempo - solución analítica

Ejemplo 2: Rueda de Farady

En la figura 1.18 se muestra el diagrama esquemático de un convertidor electromecánico de energía constituido por una rueda metálica cuyos radios conductores unen el eje con la periferia. En cada momento uno de los conductores del dispositivo se encuentra en presencia de un campo magnético uniforme $B = 1 \text{ T}$. Entre los extremos del conductor *activo* se aplica una fuente de tensión $V = 1 \text{ V}$. La resistencia equivalente entre el eje y el punto de contacto periférico es de $0,1 \Omega$. La longitud de cada uno de los radios es de $1,0 \text{ m}$. La máquina mueve un ventilador cuyo par mecánico es proporcional al cuadrado de la velocidad angular $T_m = k\omega_m^2$. Si el convertidor gira a la velocidad sincrónica del sistema, se obtiene un par mecánico de $0,1 \text{ Nm}$. Se puede considerar que el número de radios de la rueda es prácticamente infinito, de tal forma que siempre existe un radio bajo el campo magnético uniforme. La masa de la rueda se puede considerar distribuida y tiene por valor $0,2 \text{ kg}$. Con estos parámetros determine:

1. Las ecuaciones diferenciales completas que rigen el comportamiento del convertidor electromecánico.
2. El punto de operación (ω_m, i) cuando se acopla el ventilador al eje de la rueda.
3. Determine la velocidad angular y la corriente en función del tiempo, si el dispositivo parte del reposo en el instante inicial, en vacío y cargado con el ventilador.

Solución:

1.- Al igual que en el ejemplo anterior, en este caso también es necesario determinar las ecuaciones internas y las relaciones con el mundo externo. Como el movimiento de los conductores es

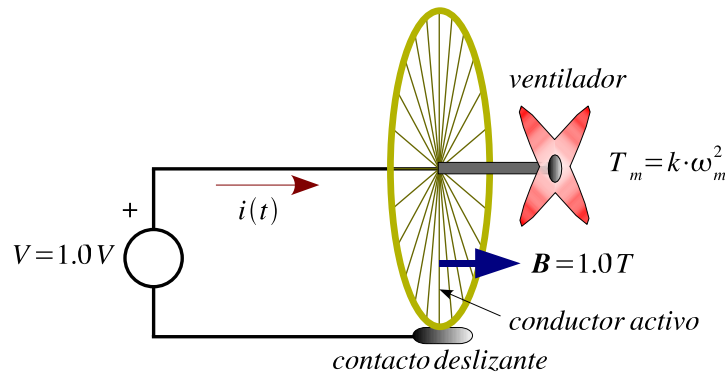


Figura 1.18 Diagrama esquemático de la rueda de Faraday

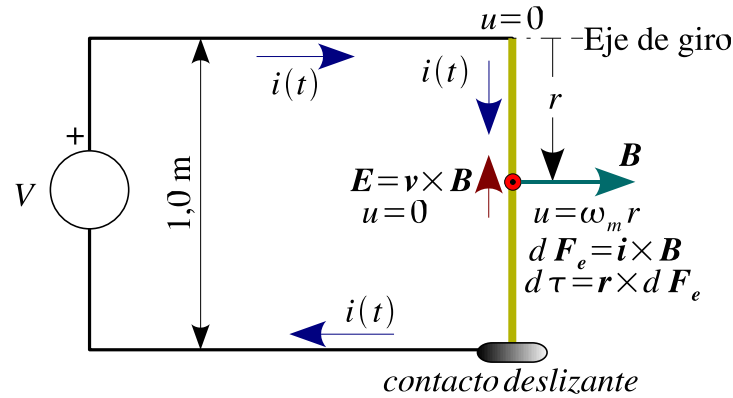


Figura 1.19 Diagrama esquemático del conductor activo

circular, el análisis dinámico se realiza sobre el balance de par sobre el eje mecánico del dispositivo. Para comprender el problema es necesario analizar en detalle el diagrama del conductor activo en un determinado instante de tiempo. En la figura 1.19 se han representado esquemáticamente las consideraciones fundamentales.

En la figura 1.19 se puede observar que a la distancia r del eje de giro, el módulo de la velocidad de giro es $u = \omega_m r$, y el vector sale del plano del papel. Con esa velocidad y el campo B se obtiene en ese mismo punto el campo eléctrico E . La circulación de la corriente $i(t)$ por todo el conductor produce en cada punto del mismo un diferencial de fuerza eléctrica $dF_e = i \times B dr$, y un diferencial de par eléctrico $d\tau_e = r \times dF_e$. Con las consideraciones anteriores, las ecuaciones internas del convertidor son:

$$e = \int_0^l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^l \mathbf{u} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^l \omega_m r B dr = \left[\frac{1}{2} \omega_m B r^2 \right]_0^l = \frac{1}{2} \omega_m B l^2 \quad (1.55)$$

$$T_e = \int_0^l d\tau_e = \int_0^l \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_e = \int_0^l \mathbf{r} \times \mathbf{i} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \left[\frac{1}{2} i B r^2 \right]_0^l = \frac{1}{2} i B l^2 \quad (1.56)$$

Las ecuaciones externas del convertidor son:

$$V = Ri + e \quad (1.57)$$

$$T_e - T_m = J\dot{\omega}_m \quad (1.58)$$

La inercia de una masa distribuida en una rueda es $\frac{1}{2}Mr^2$. Sustituyendo los resultados de las expresiones 1.55 a 1.57 en la ecuación diferencial 1.58 se obtiene la ecuación diferencial que determina el comportamiento dinámico del convertidor analizado:

$$J\dot{\omega}_m = \frac{1}{2} \left(\frac{V - \frac{1}{2}\omega_m Bl^2}{R} \right) Bl^2 - k\omega_m^2 \quad (1.59)$$

Reagrupando los términos en velocidad angular de la ecuación diferencial 1.59 se obtiene:

$$J\dot{\omega}_m + \frac{1}{4} \frac{B^2 l^4}{R} \omega_m + k\omega_m^2 = \frac{1}{2} \frac{V Bl^2}{R} \quad (1.60)$$

Para determinar el valor del coeficiente k del ventilador es necesario calcular la expresión de la velocidad sincrónica en función de los parámetros y variables conocidas, porque un dato del problema es que a la velocidad sincrónica del sistema, el ventilador requiere 0,1 Nm de par mecánico. Para determinar la velocidad sincrónica es necesario eliminar de la expresión 1.60 la contribución del par mecánico⁹ y considerar el punto de equilibrio en régimen permanente $p\omega_m = 0$, así se obtendría lo siguiente:

$$\omega_{ms} = \frac{2V}{Bl^2} = 2,0 \frac{rad}{s} \quad (1.61)$$

Como se conoce que a esta velocidad el ventilador requiere de par mecánico se puede determinar el coeficiente k de la bomba:

$$k = \frac{T_m}{\omega_m^2} = \frac{0,1 Nm}{(2,0 \frac{m}{s})^2} = 0,025 \frac{Nm.s^2}{rad^2} \quad (1.62)$$

En valores numéricos la ecuación diferencial 1.60 quedaría de la forma siguiente:

$$\dot{\omega}_m + 25\omega_m + 2,5\omega_m^2 = 50 \quad (1.63)$$

Para poder resolver la ecuación diferencial 1.63 y obtener el comportamiento dinámico del convertidor es necesario incluir la condición inicial del problema $\omega_m(0) = \omega_{m0}$.

2.- El punto de operación se determina directamente de la solución de régimen permanente de la ecuación diferencial 1.63, de esta forma:

$$2,5\omega_m^2 + 25\omega_m - 50 = 0 \Rightarrow \omega_m = \begin{cases} 1,708 \\ -11,708 \end{cases} \frac{rad}{s}$$

⁹condición de vacío $k\omega_m^2 = 0$.

La solución negativa no se considera en este caso, debido a que el ventilador se utiliza para impulsar aire y para esto debe girar en sentido positivo. Cuando la velocidad angular de la máquina es conocida se puede determinar la corriente de operación:

$$i = \frac{V - e}{R} = \frac{V - \frac{1}{2}\omega_m B \cdot l^2}{R} = \frac{1,0 - \frac{1}{2}1,708 \cdot 1 \cdot 1^2}{0,1} = 1,459 \text{ A}$$

3.- Si el convertidor se encuentra en vacío, la ecuación diferencial que determina el comportamiento del sistema es lineal. En la parte (1) de este problema fue determinada la velocidad angular sincrónica $\omega_{ms} = 2,0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, que corresponde en este caso de excitación constante a una solución particular de la ecuación diferencial. Es necesario superponer la solución homogénea y determinar a partir de las condiciones iniciales, el coeficiente indeterminado correspondiente. De esta forma, la solución homogénea sería:

$$\dot{\omega}_m + 25\omega_m = 0 \Rightarrow \omega_{mh} = Ae^{-25t}$$

La solución general sería:

$$\omega_m(t) = \omega_{mh}(t) + \omega_{mp}(t) = Ae^{-25t} + 2,0 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Recordando que el sistema parte del reposo, se obtendría la siguiente solución en la condición de vacío:

$$\omega_m(t) = 2,0 (1 - e^{-25t}) \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Cuando el ventilador está acoplado al convertidor, la solución analítica es posible, sin embargo la solución numérica puede ser útil en este caso. Un algoritmo semejante al utilizado en el Ejemplo No. 1 puede ser adaptado para resolver este nuevo problema. La función que calcula las derivadas debería ser programada con la siguiente ecuación:

$$\dot{\omega}_m = 50 - 25\omega_m - 2,5\omega_m^2$$

En la figura 1.20 se han representado las dos soluciones de este problema, en vacío y en carga.

1.7. Ejercicios propuestos

1. Repetir el ejemplo No. 1 con las siguientes variantes:

- Considerando que la fuerza mecánica es constante de valor $0,1 \text{ N}$.
- Cambiando la tensión de la fuente $V = \{-1, 0, \frac{1}{2}, 2\} \text{ V}$
- Asumiendo la densidad de campo magnético $B = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}\} \text{ T}$

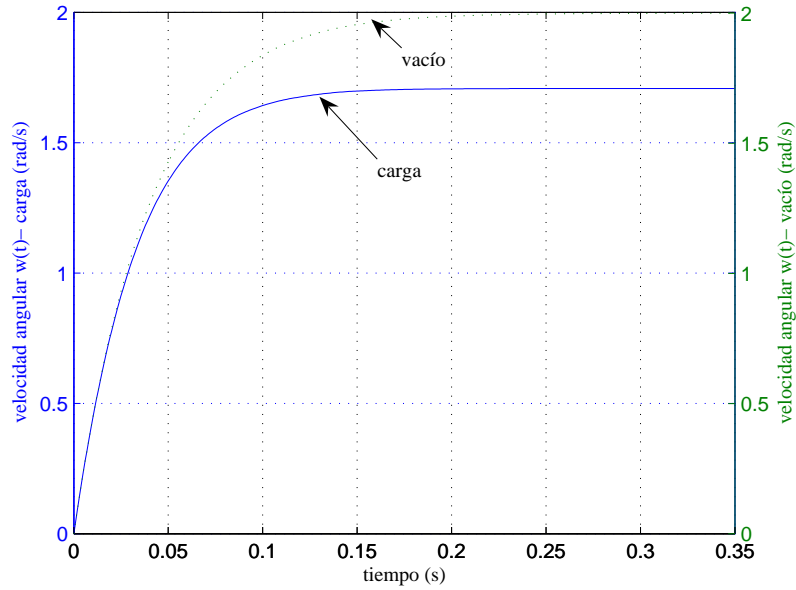


Figura 1.20 Gráfico de la respuesta dinámica del convertidor en las dos condiciones de operación, vacío y cargado con el ventilador.

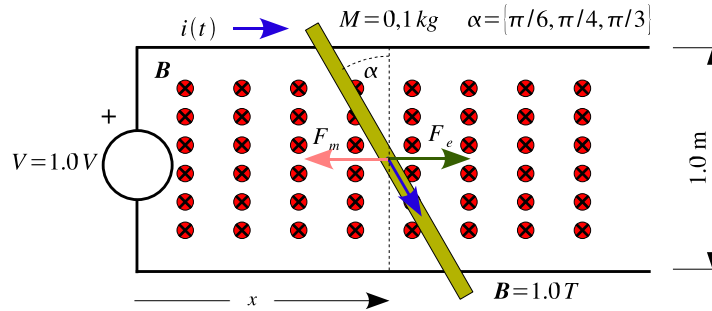


Figura 1.21 Diagrama esquemático del Ejercicio No. 3

2. Repetir el ejemplo No. 1 suponiendo que la fuente de voltaje es variable en el tiempo $v(t) = \sqrt{2}V \sin \omega t$, donde: $\omega = \left\{ \frac{1}{10}, \frac{1}{2}, 1 \right\} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.
3. Repetir el Ejemplo 1 suponiendo que el conductor se desplaza inclinado en los ángulos α tal como se ilustra en la figura 1.21. La resistencia del elemento móvil es proporcional a su longitud medida entre los puntos de contacto con los conductores riel.
4. Repetir el Ejemplo No. 2 con las siguientes variantes:
 - a) Considerando que la carga mecánica es constante de valor $0,1 \text{ Nm}$.
 - b) Cambiando la tensión de la fuente $V = \left\{ -1, 0, \frac{1}{2}, 2 \right\}$.

- c) Asumiendo la densidad de campo magnético $B = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4} \right\} T$.
5. Repetir el Ejemplo No. 2 suponiendo que la fuente de voltaje es variable en el tiempo $v(t) = \sqrt{2}V \sin \omega t$, donde: $\omega = \left\{ \frac{1}{10}, \frac{1}{2}, 1 \right\} \frac{rad}{s}$.
6. Repetir el Ejemplo No. 2 suponiendo que el campo magnético aumenta linealmente desde el centro de la rueda hacia la periferia, siendo $0,5 T$ en el eje y $1,0 T$ en el otro extremo.
7. Un conductor semicircular de radio $0,5 m$ rota en un campo magnético que varía sinusoidalmente en el tiempo a una frecuencia de $100 Hz$. El conductor tiene una resistencia de 2Ω y está alimentado por una fuente de corriente alterna de $10 V$ y de la misma frecuencia. Si se desprecia la inductancia del conductor, y se considera operación en régimen permanente del convertidor, determine:
- El par eléctrico del convertidor en función de su velocidad angular.
 - La velocidad de operación cuando se acciona una carga mecánica al 75 % del par máximo como motor.
 - La tensión inducida sobre el conductor a una velocidad de $628 \frac{rad}{s}$.
 - La corriente necesaria en el arranque, en función de la posición inicial del conductor.
8. Un conductor rectilíneo de longitud " l " se mueve perpendicularmente a un campo magnético uniforme de magnitud B . El conductor posee una resistencia R y está excitado mediante una fuente de tensión continua V , que se utiliza para acelerar la máquina hasta la velocidad de operación. Esta velocidad se establece cuando el conductor vence una fuerza mecánica uniforme y constante que se opone al movimiento del conductor. En estas condiciones determine:
- La ecuación mecánica característica y la velocidad de operación de la máquina.
 - Las ecuaciones diferenciales completas del convertidor electromecánico.
 - La máxima velocidad que puede adquirir el convertidor cuando se debilita el campo B .
 - Las condiciones que se deben establecer sobre las funciones forzantes para obtener la operación del convertidor en la condición de freno, si originalmente la máquina se encuentra a velocidad constante como motor.

Bibliografía

- [1] I. Asimov, "Understanding Physics: Light, Magnetic and Electricity," George Allen & Unwin, Vol. 2, 1966.
- [2] D. Halliday & R. Resnick, "Física," Parte I y II. John Wiley & Sons, 1974.
- [3] W. H. Hayt, Jr., "Teoría Electromagnética," McGraw-Hill, quinta edición, segunda edición en español, 1991.
- [4] C. T. A. Johnk, "Engineering Electromagnetic Fields & Waves," Wiley International Edition, 1975.
- [5] J. C. Maxwell, "A Treatise on Electricity and Magnetism," Dover Publications, Unabridged Third Edition, Volume one and two, 1954.
- [6] "Encyclopedia Britannica," William Benton Publisher, Vol. 9, pp. 802-806, 1964.

CAPÍTULO 2

Fundamentos de Conversión

En el capítulo anterior se analizó el comportamiento dinámico de un convertidor electromecánico elemental. El planteamiento de estas ecuaciones fue una tarea realizable con nociones básicas de cálculo numérico aplicado a unas condiciones geométricas simples. Las ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial y la relación de Lorenz se aplican infinitesimalmente y están sujetas a condiciones de contorno que no siempre pueden ser integradas directamente, al menos mediante herramientas analíticas. Los convertidores electromagnéticos prácticos están constituidos por muchos conductores y materiales inmersos en campos eléctricos y magnéticos que pueden ser muy difíciles de modelar mediante la aplicación directa de las leyes físicas fundamentales.

Un vendedor en una ferretería no está obligado a registrar la ganancia unitaria de cada tornillo que vende, ni a calcular las ganancias totales de un determinado mes sumando cada una de estas ganancias parciales. Desde hace muchos siglos los comerciantes confían en los principios de contabilidad general para conocer la utilidad obtenida en la actividad económica que realizan. Un método similar a los balances contables permite determinar el comportamiento de los convertidores electromecánicos, el balance de energía¹.

Este capítulo presenta las herramientas fundamentales para el análisis práctico de los convertidores electromecánicos de energía. Balances de energía, balances de coenergía y el principio de los trabajos virtuales permiten la determinación de las fuerzas eléctricas involucradas en la conversión electromecánica de energía. El método desarrollado en este capítulo permite generalizar una técnica que puede ser aplicada al análisis de cualquier convertidor electromecánico.

¹Tal vez no sea una casualidad que Lavoisier, quien descubriera en el siglo XVIII el principio de conservación de la masa y figura fundamental en el desarrollo teórico de la Química, fuese contador de profesión. Ya en el siglo XX Einstein amplió el ámbito de este principio al incluir la energía en el balance.

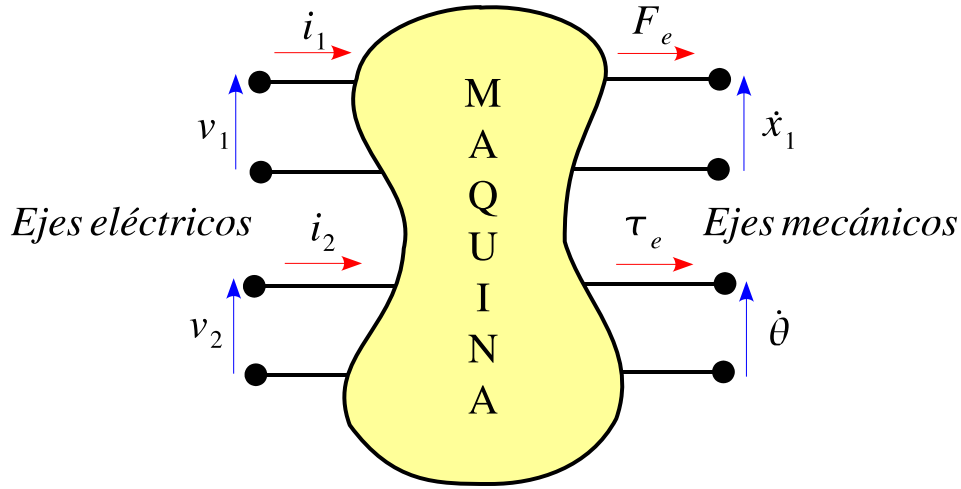


Figura 2.1 Máquina eléctrica y algunos de sus posibles ejes

2.1. Energía y coenergía en el campo

Un convertidor electromecánico de energía es una máquina eléctrica. En general una máquina eléctrica posee varios ejes o puertos por los cuales fluye la energía. Estos ejes pueden ser de dos tipos: eléctricos o mecánicos. Esquemáticamente se representan en la figura 2.1.

En los ejes eléctricos de la máquina, las interacciones se analizan conociendo las corrientes y tensiones. En los ejes mecánicos las variables que determinan la condición de operación de la máquina son las velocidades y fuerzas, si el movimiento es lineal, o el par² y la velocidad angular, si el movimiento es rotativo.

La máquina eléctrica más simple requeriría al menos un eje eléctrico y un eje mecánico. El esquema básico de esta máquina se ilustra en la figura 2.2. En esta figura, ΔW_e es el incremento de energía eléctrica que entra en el convertidor por el eje eléctrico, ΔW_m es el incremento de energía mecánica que sale por el eje mecánico y ΔW_c es el incremento de energía que se almacena en los campos eléctrico y magnético de la máquina.

En las máquinas eléctricas, no toda la energía introducida en los ejes eléctricos se entrega en los ejes mecánicos o viceversa. Es necesario que parte de la energía eléctrica se almacene en los campos electromagnéticos del convertidor. En un balance de la energía en la máquina eléctrica es necesario tener en cuenta la parte de la energía que fluye hacia y desde los campos eléctricos y magnéticos. En la figura 2.2 esta energía se representa por ΔW_c .

En el siguiente ejemplo se compara la capacidad de acumular energía que tienen los campos eléctrico y magnético respectivamente:

Como se estudia en Teoría Electromagnética, la energía acumulada en el campo eléctrico viene dada por la expresión:

$$\Delta W_{c_{elct}} = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon} = \frac{1}{2} \epsilon E^2$$

²En algunos textos se utiliza la palabra torque, pero esta expresión no pertenece actualmente al idioma Castellano.

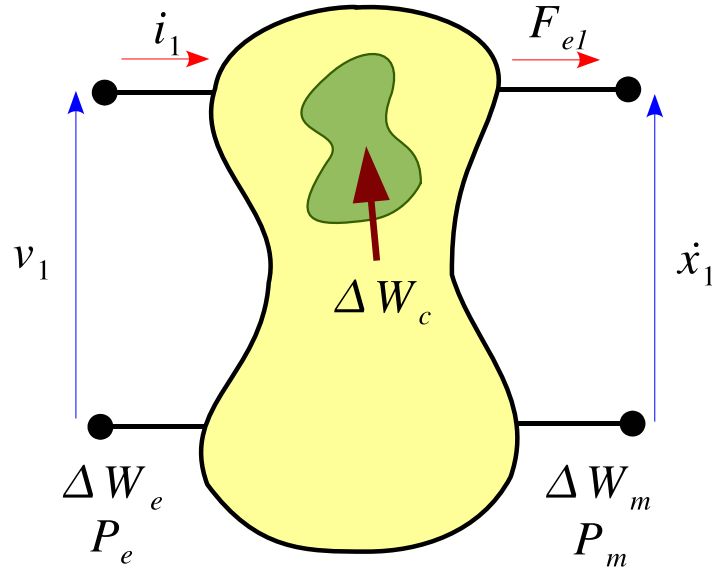


Figura 2.2 Máquina eléctrica con un eje eléctrico y un eje mecánico

pero la resistencia dieléctrica del aire es aproximadamente $3 \times 10^6 \frac{V}{m}$, y considerando que la permitividad del aire es igual a la del vacío, es decir $\epsilon = 8,85 \times 10^{-12} \frac{F}{m}$, la máxima densidad de energía del campo eléctrico en el aire a presión atmosférica, sin que se produzca arco disruptivo es:

$$\Delta W_{elect} = 39,82 \frac{J}{m^2}$$

La energía almacenada en el campo magnético es:

$$\Delta W_{mag.} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$$

La permitividad del aire es $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$, y considerando una densidad de flujo de $1,0 \frac{Wb}{m^2}$, que es un valor frecuentemente encontrado en dispositivos de conversión, se obtiene una energía de:

$$\Delta W_{mag.} = 3,98 \times 10^5 \frac{J}{m^3}$$

Como se puede observar, los dispositivos magnéticos que utilizan densidades de flujo \mathbf{B} conservadoras, pueden contener 10^4 veces la densidad de energía máxima disponible en el campo eléctrico de una máquina electrostática. Por esta razón las máquinas que utilizan el campo magnético en la conversión de la energía eléctrica son mucho más pequeñas que una máquina equivalente que utilice campo eléctrico.

Del principio de conservación de la energía se determina:

$$\Delta W_e = \Delta W_c + \Delta W_m \quad (2.1)$$

La energía acumulada en el campo no puede ser medida, pero es posible calcularla por la diferencia entre la energía eléctrica y la mecánica:

$$\Delta W_c = \Delta W_e - \Delta W_m \quad (2.2)$$

La energía eléctrica se determina a partir de la integral de la potencia eléctrica en el tiempo. Esta energía puede ser calculada directamente en el eje eléctrico de la máquina a partir de las medidas de tensión y corriente instantánea:

$$\Delta W_e = \int_0^t P_e(\tau) d\tau = \int_0^t v(\tau) \cdot i(\tau) d\tau \quad (2.3)$$

Transformando las variables de la expresión anterior se puede reescribir esta ecuación en una forma más conveniente. Considerando que el sistema es conservativo, es decir, no existen pérdidas en elementos resistivos, la tensión $v(t)$ aplicada a la máquina y la fuerza electromotriz inducida son iguales, y por lo tanto:

$$v(t) = e(t) = \frac{d\lambda}{dt} \quad (2.4)$$

En este caso, a partir de 2.3 y 2.4 se determina que:

$$\Delta W_e = \int_0^t v(\tau) \cdot i(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{d\lambda}{dt} \cdot i(\tau) d\tau = \int_{\lambda(0)}^{\lambda(t)} i(x, \lambda) d\lambda \quad (2.5)$$

La ecuación 2.5 indica que para obtener la energía eléctrica que fluye por la máquina es necesario conocer solamente la dependencia de la corriente $i(x, \lambda)$ con respecto al flujo λ y a la posición x del convertidor.

Para determinar la variación de la energía mecánica es necesario conocer la velocidad y la fuerza en función del tiempo:

$$\Delta W_m = \int_0^t P_m(\tau) d\tau = \int_0^t F(\tau) \cdot \dot{x}(\tau) d\tau \quad (2.6)$$

Realizando cambio de variables sobre la ecuación 2.6, se obtiene:

$$\Delta W_m = \int_0^t F(\tau) \cdot \frac{dx}{d\tau} d\tau = \int_{x(0)}^{x(t)} F(x, \lambda) dx \quad (2.7)$$

Para analizar las relaciones anteriores se puede utilizar como ejemplo el electroimán que se ilustra en la figura 2.3. En esta figura se ha representado un gráfico de la relación existente entre los enlaces de flujo λ y la corriente i , para dos condiciones extremas de la posición relativa

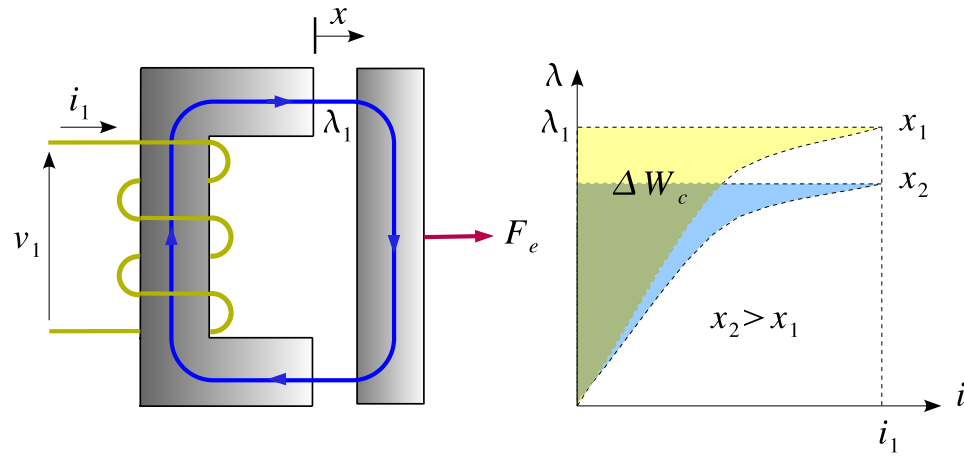


Figura 2.3 Diagrama $\lambda - i$ de un electroimán elemental

del yugo del electroimán. Para la misma corriente i , al disminuir la distancia x , disminuye la reluctancia y se incrementan los enlaces de flujo λ .

En el gráfico $\lambda - i$, la región sombreada representa la integral de la corriente $i(\lambda)$ con respecto a λ para una posición x fija. Como se ha determinado en la ecuación 2.5, esta región representa la variación de la energía eléctrica en un circuito magnético que se energiza manteniendo constante la posición del yugo (x).

En un sistema conservativo, la energía es una función de estado. Esto quiere decir que en estos sistemas el incremento de energía acumulada no depende de la trayectoria utilizada para alcanzar un determinado estado, sino del valor de las variables en los estados iniciales y finales del proceso.

Para determinar la energía acumulada en el campo, es necesario calcular la diferencia entre las energías eléctrica y mecánica del sistema después del proceso. Si el sistema mecánico está detenido, no existe variación en la energía mecánica del convertidor y por lo tanto toda la energía eléctrica que entra en la máquina se convierte en energía acumulada en el campo, entonces:

$$\Delta W_e = \int_{\lambda(0)}^{\lambda(t)} i(x, \lambda) d\lambda = \Delta W_c, \text{ si } x = cte \quad (2.8)$$

La ecuación 2.8 se puede integrar por partes y se obtiene:

$$\Delta W_c = i(x, \lambda) \cdot \lambda \Big|_{\lambda(0)}^{\lambda(t)} - \int_{i(0)}^{i(t)} \lambda(x, i) di \quad (2.9)$$

En la ecuación 2.9, el término integral se define como coenergía en el campo y se expresa como $\Delta W'_c$. En la figura 2.4 se observa que la coenergía es el área bajo la característica $\lambda - i$.

En la figura 2.4 se observa que un sistema electromecánico donde la posición x es constante cumple la siguiente relación:

$$\lambda \cdot i = \Delta W_c + \Delta W'_c \quad (2.10)$$

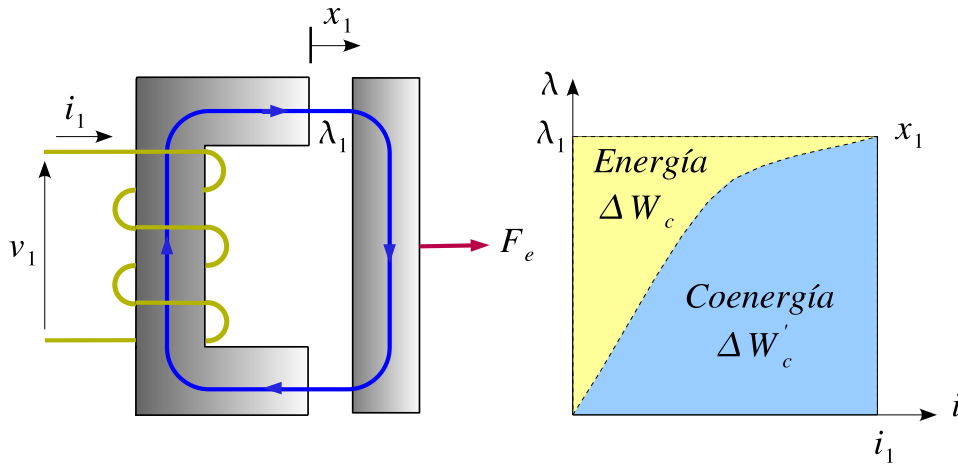


Figura 2.4 Energía y coenergía en el campo

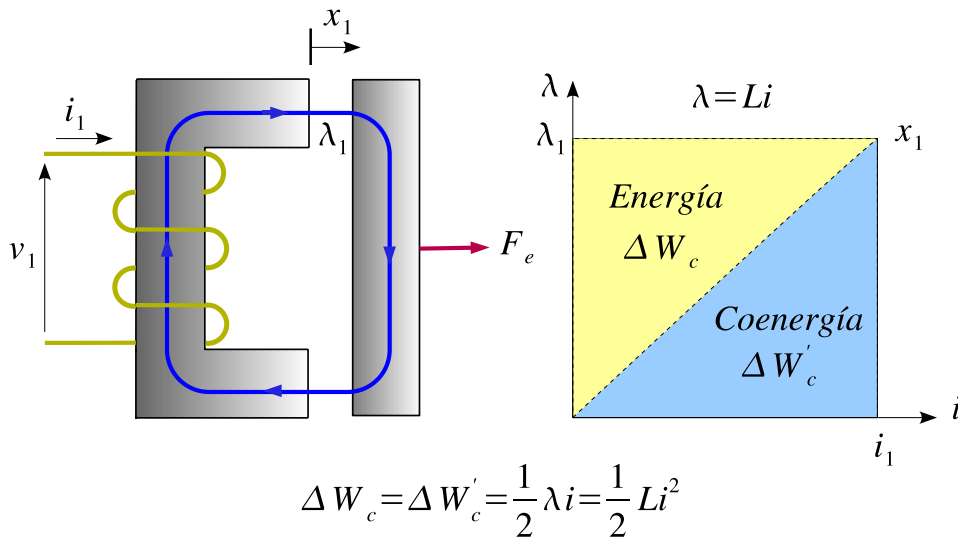


Figura 2.5 Convertidor electromecánico lineal

De las definiciones anteriores de energía y coenergía en el campo magnético se destacan las siguientes observaciones:

1. Para la energía, el enlace de flujo λ es la variable independiente, y la corriente i es la variable dependiente.
2. Para la coenergía, la corriente i es la variable independiente y el enlace de flujo λ es la variable dependiente.

Si el sistema físico es lineal, es decir, si la relación entre los enlaces de flujo λ y la corriente i del convertidor electromecánico es proporcional, la energía y la coenergía son iguales, esto se puede observar en la figura 2.5.

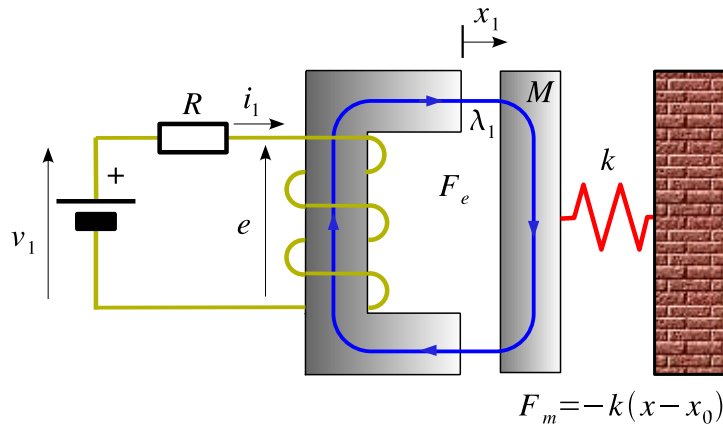


Figura 2.6 Electroimán en un sistema mecánico

En la figura 2.6, se ilustra un electroimán cuyo yugo está conectado a un sistema mecánico constituido por un resorte unido sólidamente en un extremo al propio yugo y en el otro extremo a un sistema en reposo. Los valores de la posición del yugo y de los enlaces al inicio del proceso, en el instante de tiempo t son:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 & x(t) &= x_f \\ \lambda(0) &= \lambda_0 & \lambda(t) &= \lambda_f \end{aligned}$$

Para calcular el incremento de energía acumulada en el campo hasta el instante de tiempo t es necesario considerar que en el proceso real varía la potencia eléctrica y la potencia mecánica. Es posible realizar un experimento teórico para determinar la energía acumulada en el campo. Dicho experimento comprende dos fases:

1. Desplazamiento de la pieza móvil desde $x(0)$ a $x(t)$ con el circuito eléctrico desenergizado, es decir, con $i(0) = 0$. En estas condiciones la fuerza eléctrica F_e es cero y no es necesario consumir energía mecánica para desplazar el yugo a la posición final $x(t)$.
2. Se fija la posición final de la pieza móvil y se incrementan los enlaces de flujo desde el valor λ_0 hasta λ_f .

En las condiciones del experimento teórico anterior, para determinar la variación de la energía en el campo de la máquina es suficiente evaluar la integral de la corriente con respecto a los enlaces de flujo cuando la pieza móvil está en su posición final x_f . La trayectoria real depende de la máquina y de las condiciones de frontera o ligazón, pero en cualquier caso es posible evaluar la energía almacenada en el campo. En la figura 2.7 se presenta gráficamente el experimento teórico realizado para la determinación de la energía en el campo. De esta forma, la evaluación se reduce a determinar el área sombreada en la figura.

Mediante el convertidor electromecánico ilustrado en la figura 2.6, se puede realizar un análisis más complejo de los procesos involucrados. Considerando que inicialmente el yugo se encuentra fijo en la posición x , al cerrar el interruptor, la corriente aumenta exponencialmente cuando el sistema tiene un comportamiento lineal :

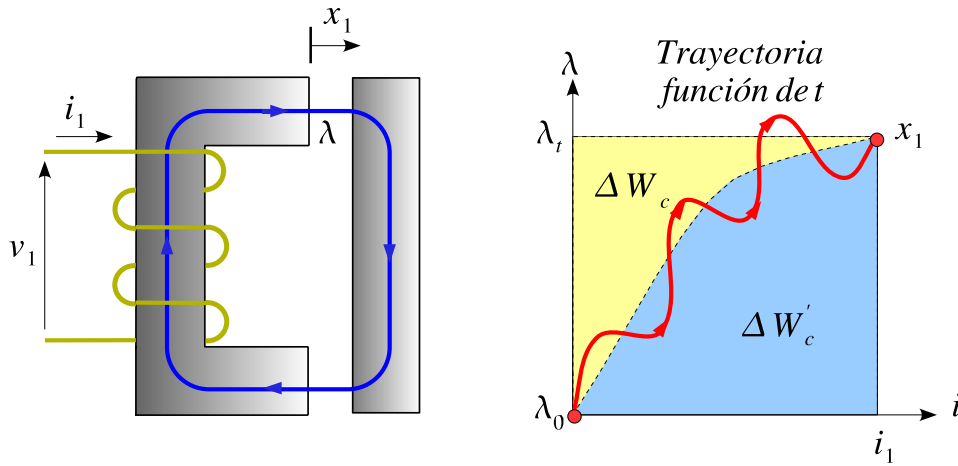


Figura 2.7 Determinación de la energía en el campo

$$\lambda = L \cdot i \quad (2.11)$$

La ecuación de mallas correspondiente a la red eléctrica es:

$$v = R \cdot i + e = R \cdot i + \frac{d\lambda}{dt} \quad (2.12)$$

Sustituyendo la expresión 2.11 en la ecuación 2.12 se obtiene la ecuación diferencial que rige el comportamiento de la corriente eléctrica en el circuito:

$$v = R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} \quad (2.13)$$

La solución en el tiempo de la ecuación diferencial 3.14 es una corriente exponencial cuyo valor en régimen permanente es:

$$i_f = \frac{v}{R} \quad (2.14)$$

El conocimiento de la trayectoria de la corriente en función del tiempo no es necesaria por las consideraciones realizadas previamente relativas a las funciones de estado.

Una vez que la corriente i aumenta hasta su valor final i_f , con la posición x_1 fija, se permite el movimiento de la pieza hasta una segunda posición x_2 . Después que finalizan los procesos transitorios, el sistema alcanza el régimen permanente en la segunda posición con una corriente i igual a la primera, debido a que en régimen permanente no varían los enlaces de flujo. En la figura 2.8 se muestra la trayectoria seguida por la corriente.

En la figura 2.8 se han marcado dos trayectorias tentativas de la corriente cuando la pieza móvil pasa de la posición x_1 a la x_2 . Para determinar la trayectoria correcta - (A) ó (B) -, se debe recordar que:

$$i = \frac{V - e}{R} \quad (2.15)$$

El paso de x_1 a x_2 requiere del incremento de los enlaces de flujo y por lo tanto la derivada

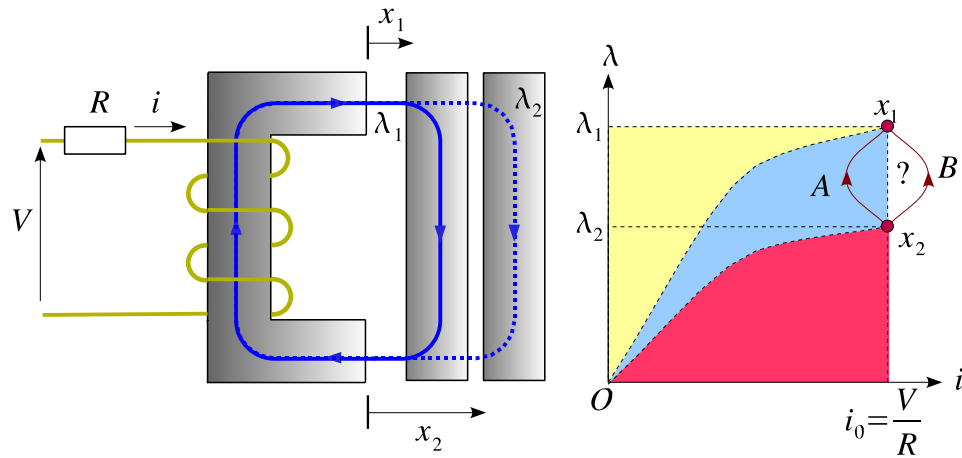


Figura 2.8 Trayectoria de la corriente en una energización con desplazamiento

de estos enlaces (e), es positiva durante el proceso transitorio, por esta razón inicialmente la corriente i disminuye y la trayectoria se ajusta al caso (A). Cuando la pieza alcanza la posición final, el enlace en régimen permanente no varía y la corriente regresa a su valor inicial.

El proceso seguido por el convertidor ilustrado en la 2.8 es el siguiente:

Originalmente el sistema está desenergizado, la pieza móvil se encuentra en la posición inicial x_1 y al cerrar el interruptor que alimenta el magneto, aumenta la corriente hasta el valor i_f . En ese momento se permite la reducción de la posición del yugo hasta x_2 por efecto de la fuerza electromagnética y finalmente se abre el interruptor del circuito eléctrico para desenergizar el sistema. El área sombreada en la figura 2.8 representa la energía eléctrica que el convertidor cede al sistema mecánico.

Otra posibilidad es que el dispositivo móvil se encuentre inicialmente en la posición x_2 , se energice el circuito, se desplace la pieza móvil hasta la posición x_1 y finalmente se desenergice el circuito. En este caso, la trayectoria se representa en la figura 2.9. Al desplazar la pieza móvil desde la posición inicial a la posición final, es necesario reducir los enlaces de flujo y por esta razón se induce en el circuito eléctrico una fuerza electromotriz negativa que aumenta transitoriamente la corriente, para regresar nuevamente al valor primitivo i_f , cuando cesa la variación de los enlaces de flujo.

Ahora bien, si en la primera condición analizada, se desea desplazar el yugo desde la posición x_2 a x_1 , manteniendo constante la corriente, es necesario mover la pieza muy lentamente, para que varíen los enlaces de flujo, pero su derivada sea prácticamente cero. A medida que el dispositivo se cierra con mayor velocidad, las trayectorias se muestran en la figura 2.10.

La trayectoria D corresponde a un yugo que se cierra a velocidad infinita, es decir la pieza pasa de la posición x_1 a la x_2 en un tiempo cero. En esta situación límite, ni el flujo ni el tiempo han variado al pasar de la posición x_1 a x_2 y por lo tanto la derivada del enlace de flujo con respecto al tiempo tiene un valor finito que permite que la corriente en el circuito eléctrico varíe instantáneamente desde i_0 a i_x , como se observa en la figura 2.10.

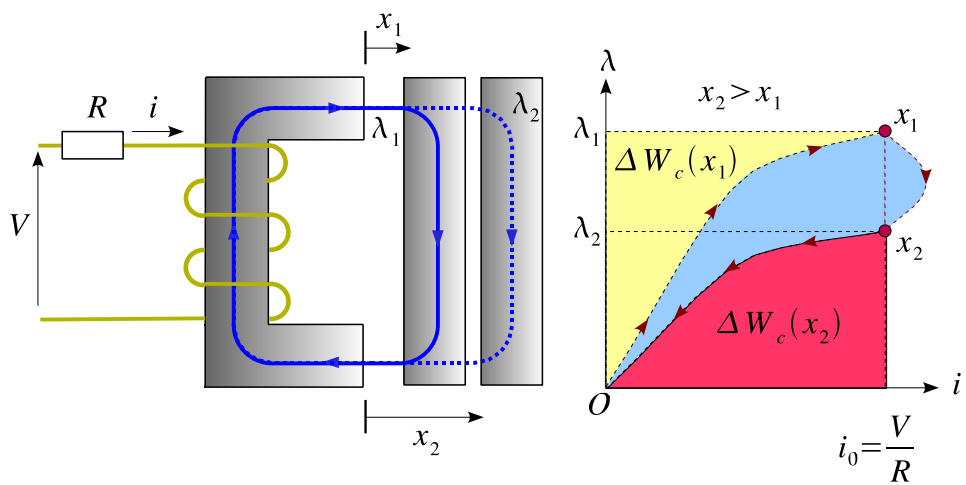


Figura 2.9 Movimiento de apertura del yugo

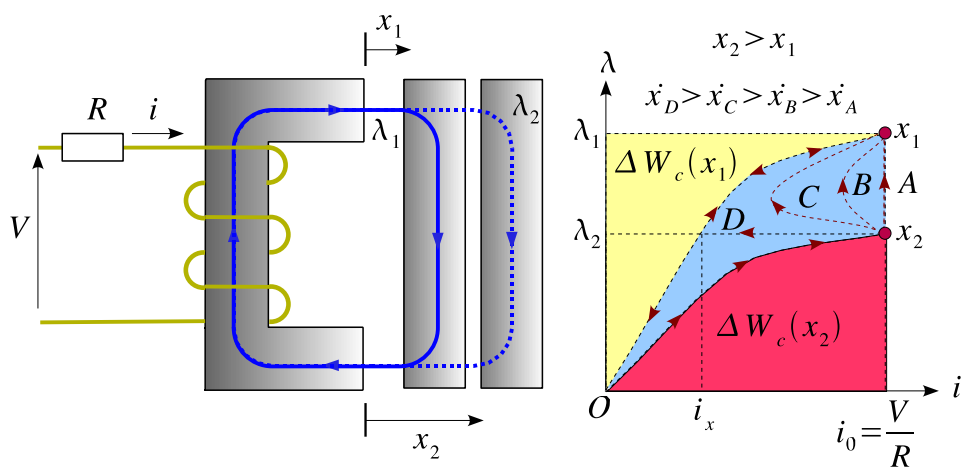


Figura 2.10 Desplazamiento del yugo a diferentes velocidades

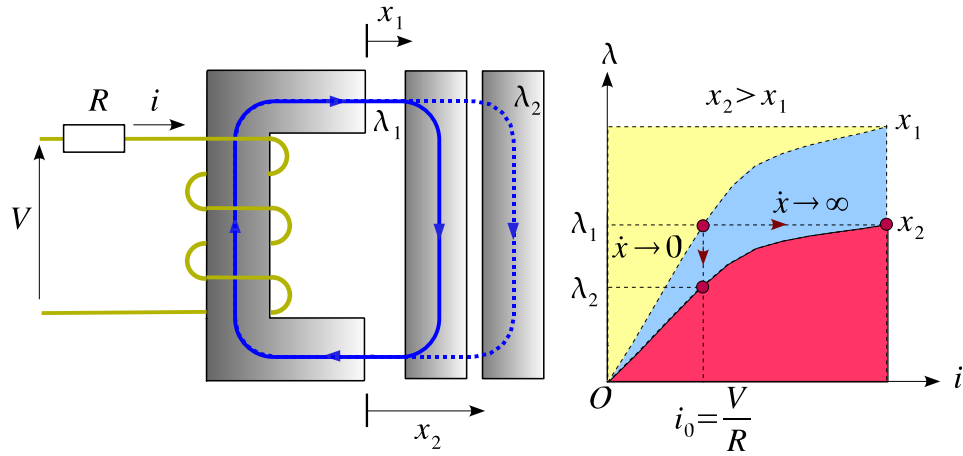


Figura 2.11 Apertura del yugo a velocidad cero e infinita

Si la pieza móvil sigue la segunda trayectoria, es decir, se mueve de la posición x_2 a x_1 y todo esto a velocidad prácticamente cero, el recorrido se efectúa a corriente constante. En la figura 2.11 se puede observar el proceso cuando el yugo se desplaza a una velocidad teóricamente infinita.

Si la velocidad de la pieza es teóricamente infinita, la corriente crece considerablemente debido a que la fuerza electromotriz es negativa y se superpone a la tensión aplicada por la fuente. Cuando la saturación del circuito magnético es muy intensa, los picos de corriente que aparecen en la operación del electroimán pueden ser de gran magnitud.

2.2. Balance energético

Mediante el diagrama de la figura 2.12 se puede realizar un balance energético del proceso descrito en la sección anterior.

La operación del electroimán se divide en tres trayectorias:

1. Trayecto $O - A$: Desde que se cierra el interruptor, energizando el circuito eléctrico con el yugo en la posición x_1 .
2. Trayecto $A - B$: Cuando se permite el movimiento mecánico de la pieza hasta alcanzar la posición x_2 .
3. Trayecto $B - O$: Representa la apertura del interruptor para desenergizar el sistema.

A partir de la ecuación 2.5 se puede calcular el incremento de energía eléctrica por tramos de la siguiente forma:

$$\Delta W_{e_{O-A}} = \int_0^{\lambda_1} i(x_1, \lambda) d\lambda = \overline{OAD} \quad (2.16)$$

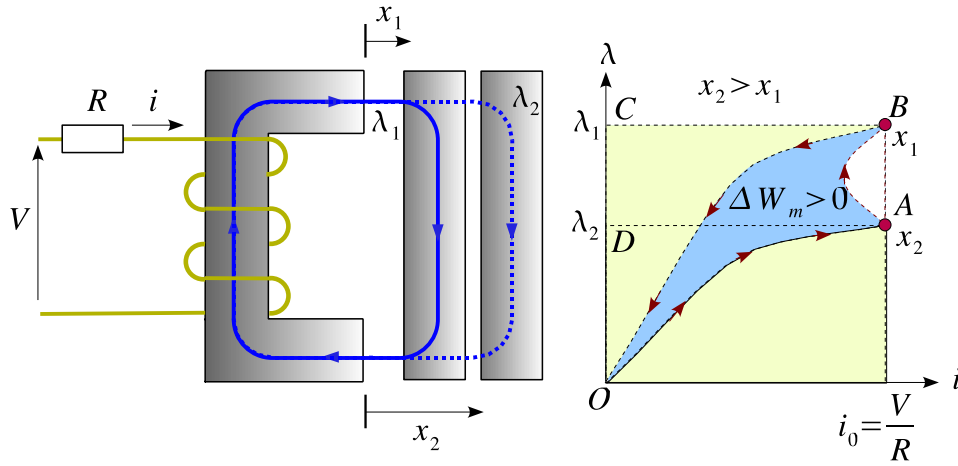


Figura 2.12 Balance energético del electroimán

$$\Delta W_{e_{A-B}} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} i(x, \lambda) d\lambda = \overline{DABC} \quad (2.17)$$

$$\Delta W_{e_{B-O}} = \int_{\lambda_2}^{\lambda_1} i(x_2, \lambda) d\lambda = -\overline{BCO} \quad (2.18)$$

La energía acumulada en el campo viene determinada por:

$$\Delta W_{c_{O-A}} = \overline{OAD} \quad (2.19)$$

La ecuación 2.19 determina la energía acumulada en el campo, debido a que en este proceso la posición se mantiene constante y la variación de energía mecánica ΔW_m es nula. Toda la energía eléctrica se almacena en el campo del convertidor. De las otras trayectorias se deduce que:

$$\Delta W_{c_{A-B}} = \Delta W_{c_B} - \Delta W_{c_A} = \overline{OBC} - \overline{OAD} \quad (2.20)$$

$$\Delta W_{c_{B-O}} = -\overline{BCO} = \Delta W_{e_{B-O}} \quad (2.21)$$

El cálculo del incremento de energía mecánica, se obtiene de las diferencias entre los incrementos de energía eléctrica y energía acumulada en el campo del convertidor durante todo el trayecto:

$$\Delta W_m = \Delta W_e - \Delta W_c \quad (2.22)$$

donde:

$$\Delta W_e = \Delta W_{e_{O-A}} + \Delta W_{e_{A-B}} + \Delta W_{e_{B-O}} = \overline{OAD} + \overline{DABC} - \overline{BCO} \quad (2.23)$$

$$\Delta W_c = \Delta W_{c_{O-A}} + \Delta W_{c_{A-B}} + \Delta W_{c_{B-O}} = \overline{OAD} + \overline{OBC} - \overline{OAD} - \overline{BCO} \quad (2.24)$$

De las ecuaciones 2.22, 2.23 y 2.24 se obtiene:

$$\begin{aligned} \Delta W_m &= (\overline{OAD} + \overline{DABC} - \overline{BCO}) - (\overline{OAD} + \overline{OBC} - \overline{OAD} - \overline{BCO}) = \\ &= \overline{DABC} + \overline{OAD} - \overline{OBC} = \\ &= \overline{OABO} \end{aligned} \quad (2.25)$$

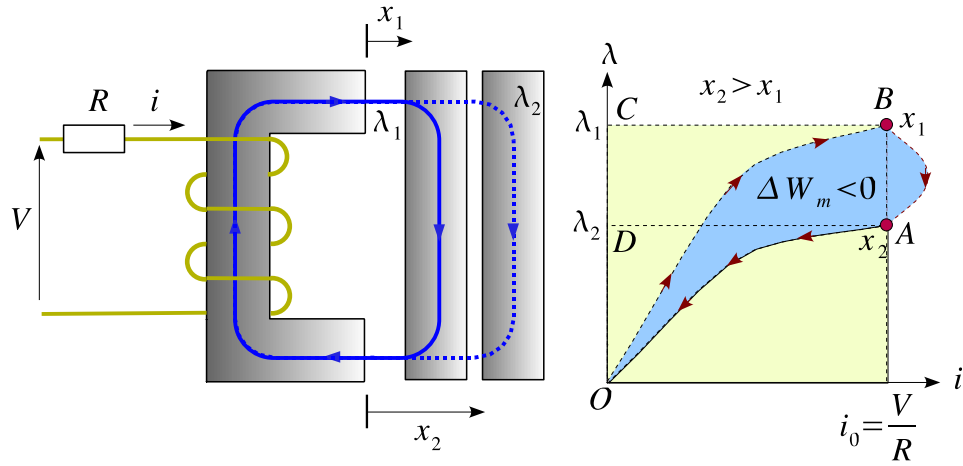


Figura 2.13 Trabajo mecánico negativo

La expresión anterior indica que el incremento en la energía mecánica en el proceso es igual al área encerrada en la trayectoria \overline{OABO} , que es precisamente la región sombreada en el esquema de la figura 2.12. En este caso, la energía mecánica realiza un trabajo positivo porque la fuerza sobre el yugo y el desplazamiento tienen la misma dirección. Si inicialmente el convertidor tiene el yugo muy cerca del electroimán y se alejan estas dos piezas, el trabajo mecánico realizado es negativo, ya que en este caso la fuerza sobre la pieza móvil tiene dirección opuesta a su desplazamiento. En la figura 2.13 se muestra esta condición. El área sombreada corresponde al incremento de la energía mecánica, y el sentido del recorrido, determina el signo del trabajo realizado, negativo según las agujas del reloj y positivo en el sentido contrario.

En la figura 2.14 se representa el proceso electromecánico descrito anteriormente pero el movimiento de acercamiento del yugo se ha realizado a una velocidad teórica infinita. En este caso los enlaces de flujo no pueden variar instantáneamente y de acuerdo con la ecuación 2.5, el incremento de energía eléctrica en este tramo es cero. Recordando la expresión 2.1, se determina para los procesos electromagnéticos que mantienen constante el enlace de flujo:

$$\Delta W_m = -\Delta W_c, \text{ si } \lambda = cte. \quad (2.26)$$

Por esta razón, si el dispositivo se desplaza manteniendo constante el enlace de flujo, no se incrementa la energía eléctrica y toda la energía mecánica empleada en el movimiento es suministrada por el campo de la máquina.

Para calcular la fuerza F_e , se reducen los incrementos de energía mecánica y de energía en el campo a valores diferenciales. Recordando que la energía acumulada en el campo de la máquina depende de los enlaces de flujo y de la posición de la pieza móvil:

$$W_c = W_c(x, \lambda) \quad (2.27)$$

El trabajo mecánico se define en su forma diferencial como:

$$dW_m = F_e \cdot dx \quad (2.28)$$

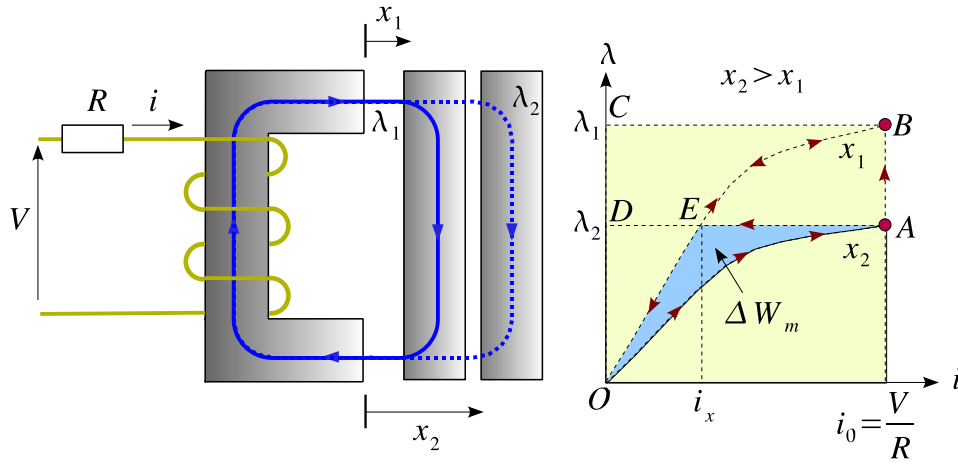


Figura 2.14 Cálculo de la energía mecánica en un desplazamiento rápido del yugo

A partir de las ecuaciones 3.27 y 3.29 se obtiene:

$$dW_m = F_e \cdot dx = -dW_c(x, \lambda) \quad , \quad \text{si } \lambda = \text{cte.} \quad (2.29)$$

El diferencial total de la energía en el campo es:

$$dW_c(x, \lambda) = \frac{\partial W_c}{\partial x} dx + \frac{\partial W_c}{\partial \lambda} d\lambda \quad (2.30)$$

Como el enlace se considera constante, el segundo término de la sumatoria de la ecuación 2.30 es nulo y por lo tanto se deduce de 2.29 y de 2.30 que:

$$F_e \cdot dx = \frac{\partial W_c(x, \lambda)}{\partial x} dx \quad , \quad \text{si } \lambda = \text{cte.} \quad (2.31)$$

Por identificación de términos en la ecuación 2.31 se puede calcular la fuerza sobre la pieza móvil en un proceso a enlace de flujo constante como:

$$F_e = -\frac{\partial W_c(x, \lambda)}{\partial x} \quad , \quad \text{si } \lambda = \text{cte.} \quad (2.32)$$

La ecuación anterior, también denominada principio de los trabajos virtuales, indica que para calcular la fuerza F_e sobre la pieza móvil, es necesario conocer la variación de la energía del campo en función del desplazamiento, cuando se mantiene constante el enlace de flujo λ . Cuando en el convertidor, la energía acumulada en el campo es independiente de la posición, la fuerza eléctrica es cero.

Si el convertidor electromecánico analizado anteriormente, mantiene una característica lineal entre el enlace de flujo y la corriente, la energía en el campo se puede evaluar mediante la siguiente expresión:

$$W_c = \frac{1}{2} \lambda \cdot i = \frac{1}{2} L(x) \cdot i^2 = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{L(x)} \quad (2.33)$$

En la ecuación anterior, $L(x)$ representa la inductancia en función de la posición de la pieza móvil. La inductancia de una bobina se determina a partir del número de vueltas N y de la permeancia del circuito magnético \wp como:

$$L(x) = N^2 \cdot \wp(x) \quad (2.34)$$

Para el electroimán en análisis, la permeancia del circuito magnético es:

$$\wp(x) = \frac{\mu_o \cdot A}{2(x + d)} \quad (2.35)$$

donde:

μ_o	es la permeabilidad del vacío $4\pi \times 10^{-7} \frac{H}{m}$
A	es el área efectiva del magneto.
x	es la separación del yugo.
d	es la distancia entre el yugo y el circuito electroimán.

Sustituyendo la expresión 2.35 en 2.34 y este resultado en 2.33 se obtiene:

$$W_c(x) = \frac{1}{2} \frac{2(x + d)}{\mu_o A \cdot N^2} \lambda^2 \quad (2.36)$$

y aplicando 2.32 a 2.36:

$$F_e = -\frac{\partial W_c(x, \lambda)}{\partial x} = -\frac{\lambda^2}{\mu_o A \cdot N^2} \quad (2.37)$$

El mismo electroimán, permite analizar lo que sucede si el movimiento se realiza muy lentamente. Si el yugo se desplaza a una velocidad prácticamente cero, la corriente se mantiene constante porque no se induce fuerza electromotriz debido a que los enlaces de flujo cambian muy lentamente y su derivada con respecto al tiempo es prácticamente nula. En la figura 2.15 se muestra la situación anterior. En este caso, la energía mecánica se puede evaluar mediante las diferencias de la coenergía en el campo entre la posición x_1 y la posición x_2 . En la figura 2.15 se observa que para la condición descrita:

$$\Delta W_m = \Delta W'_c, \text{ si } i = cte. \quad (2.38)$$

La coenergía en el campo se calcula de la siguiente forma:

$$W'_c = \int_{i(0)}^{i(t)} \lambda(x, i) di \quad (2.39)$$

La coenergía en el campo depende de la posición de la pieza móvil y de la corriente, por lo tanto:

$$dW_m = F_e \cdot dx = dW'_c = \frac{\partial W'_c(x, i)}{\partial x} dx + \frac{\partial W'_c(x, i)}{\partial i} di \quad (2.40)$$

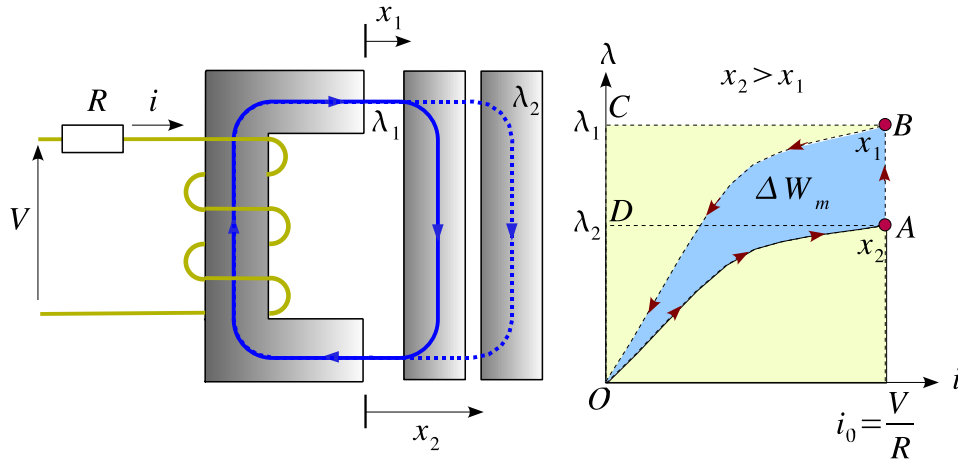


Figura 2.15 Cálculo de la energía con desplazamientos muy lentos del yugo

Durante el proceso, la corriente i no varía, y por esta razón se puede determinar a partir de 2.40 que:

$$F_e = \frac{\partial W'_c(x, i)}{\partial x} \text{ si } i = cte. \quad (2.41)$$

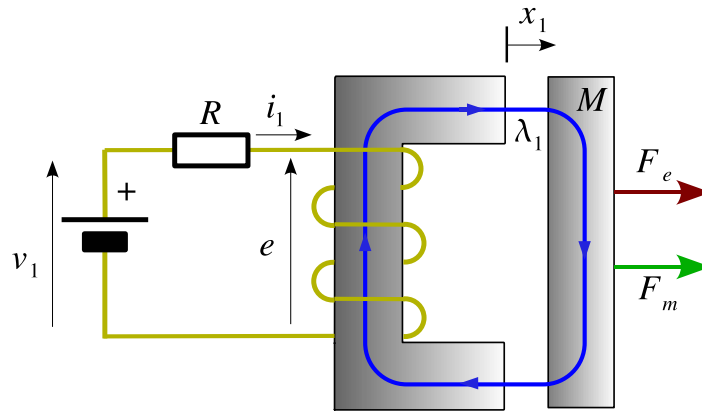
La fuerza eléctrica originada en el convertidor electromagnético depende de la variación de la energía en el campo en función del desplazamiento cuando el movimiento se realiza manteniendo constantes los enlaces de flujo. Si el movimiento se realiza manteniendo constante la corriente, la fuerza eléctrica depende de la variación de la coenergía en función de la posición.

Para calcular o medir una fuerza se utiliza el principio de los trabajos virtuales. Este método consiste en evaluar las variaciones de la energía o coenergía en el campo ante un desplazamiento diferencial. Cualquiera de los dos métodos analizados anteriormente, permite calcular las fuerzas que aparecen sobre el sistema. Sin embargo, dependiendo de la forma como se presenten los datos del convertidor es más fácil para determinar la fuerza, utilizar los conceptos de energía o de coenergía. En los sistemas lineales el cálculo puede ser realizado con igual facilidad por ambos métodos. Cuando el sistema no es lineal, la facilidad o dificultad del cálculo de fuerzas por uno u otro método depende de quienes sean las variables independientes y cuales las dependientes. Si se conoce el enlace de flujo en función de las corrientes, el cálculo por medio de la coenergía simplifica el problema. Si la corriente se expresa como función de los enlaces, la energía es el mejor método para determinar la fuerza que aparece en la máquina.

2.3. Ecuaciones internas del convertidor

En la figura 2.16 se representa una máquina eléctrica constituida por un electroimán alimentado por una bobina y una pieza móvil sobre la que actúan dos fuerzas, la fuerza eléctrica F_e producida por la interacción electromagnética del dispositivo y una fuerza externa F_m de naturaleza mecánica.

En general la fuerza eléctrica no tiene porque ser igual a la fuerza mecánica. En el sistema



$$\sum F_i = F_e + F_m = M \ddot{x} + \alpha \dot{x}$$

Figura 2.16 Electroimán sometido a fuerzas internas y externas

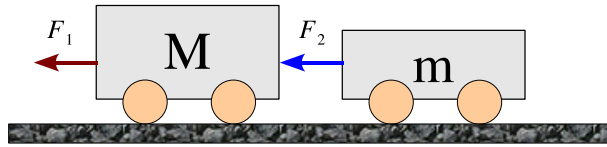


Figura 2.17 Sistema mecánico elemental sin equilibrio de fuerzas

mecánico ilustrado en la figura 2.17, las tensiones de las cuerdas no están necesariamente equilibradas.

En el ejemplo de la figura 2.17, la fuerza F_1 es diferente a la fuerza F_2 , ya que:

$$F_1 = (m + M) \cdot a \quad (2.42)$$

$$F_2 = m \cdot a \quad (2.43)$$

El razonamiento anterior es válido también para el electroimán de la figura 2.16. La fuerza mecánica en el extremo del yugo se determina mediante la segunda ley de Newton:

$$F_m = -F_e + M \cdot \ddot{x} + \alpha \cdot \dot{x} \quad (2.44)$$

donde:

F_e	es la fuerza eléctrica.
$M \cdot \ddot{x}$	es la fuerza producida por la aceleración de la pieza móvil.
$\alpha \cdot \dot{x}$	es la fuerza producida por el rozamiento de la pieza.
α	es el coeficiente de roce.

La ecuación 2.44 se puede escribir mediante la expresión 2.41 como:

$$F_m = -\frac{\partial W'_c(x, i)}{\partial x} + M \cdot \ddot{x} + \alpha \cdot \dot{x} \quad (2.45)$$

La ecuación del equilibrio eléctrico en la máquina es:

$$v = R \cdot i + e = R \cdot i + \frac{d\lambda(x, i)}{dt} \quad (2.46)$$

Si se conoce la relación entre los enlaces de flujo $\lambda(x, i)$ ó la corriente $i(\lambda, x)$, el sistema queda completamente definido ya que se puede evaluar la energía o la coenergía en el campo:

$$W_c = \int_0^\lambda i(\lambda, x) d\lambda \quad (2.47)$$

$$W'_c = \int_0^i \lambda(i, x) di \quad (2.48)$$

La expresión 2.45 determina el comportamiento dinámico del sistema ilustrado en la figura 2.16 si se conoce la fuerza mecánica F_m .

Si el sistema es lineal, la relación entre los enlaces de flujo y la corriente viene expresada mediante la ecuación 2.11. En esa ecuación, la inductancia L depende de la posición del yugo, es decir $L = L(x)$. Por esta razón:

$$i = i(\lambda, x) = \frac{1}{L(x)} \cdot \lambda(i, x) = \Gamma(x) \cdot \lambda(i, x) \quad (2.49)$$

donde:

$\Gamma(x)$ es la inductancia inversa L^{-1} .

Mediante la ecuación 2.49, la dinámica del electroimán queda completamente determinada. Como el sistema es lineal:

$$W'_c = \int_0^i \lambda(i, x) di = \int_0^i L(x) \cdot i \cdot di = \frac{1}{2} L(x) \cdot i^2 \quad (2.50)$$

Sustituyendo la ecuación 2.50 en la ecuación 2.45 se obtiene:

$$F_m = -\frac{\partial W'_c}{\partial x} + M\ddot{x} + \alpha\dot{x} = -\frac{1}{2} \frac{dL(x)}{dx} \cdot i^2 + M\ddot{x} + \alpha\dot{x} \quad (2.51)$$

La ecuación 2.51, representa el equilibrio de fuerzas sobre la pieza móvil. La ecuación que representa el circuito eléctrico del sistema es:

$$v = R \cdot i + \frac{d}{dt} (L(x) \cdot i) = R \cdot i + \frac{dL(x)}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot i + L(x) \cdot \frac{di}{dt} \quad (2.52)$$

Definiendo $\tau(x)$ como:

$$\tau(x) \equiv \frac{dL(x)}{dt} \quad (2.53)$$

la ecuación eléctrica de la máquina, a partir de 2.52 y 2.53, es:

$$v = R \cdot i + \tau(x) \cdot \dot{x} \cdot i + L(x) \cdot \frac{di}{dt} \quad (2.54)$$

En la expresión anterior, el primer sumando representa la caída de tensión en la resistencia de la bobina, el segundo representa la fuerza electromotriz inducida en la bobina por el movimiento del yugo y el tercer sumando representa la fuerza electromotriz inducida por variación de la corriente en la bobina. De forma compacta, la ecuación 2.54 se puede escribir como:

$$v = R \cdot i + e_G + e_T \quad (2.55)$$

donde:

- e es la fuerza electromotriz total compuesta por e_G y e_T .
- e_G es el término que depende de la velocidad de la pieza móvil de la máquina, denominado término de generación.
- e_T es el término que depende de la variación la corriente en la máquina, denominado término de transformación.

Cuando la corriente es cero, puede existir fuerza electromotriz de transformación, pero no de generación como se observa en la ecuación 2.54.

En conclusión, las ecuaciones internas de la máquina se pueden escribir, en función de la coenergía:

$$F_m = -\frac{1}{2}\tau(x) \cdot i^2 + M \cdot \ddot{x} + \alpha \cdot \dot{x} \quad (2.56)$$

o, en función de la energía:

$$F_m = \frac{1}{2} \frac{d\Gamma(x)}{dx} \cdot \lambda^2 + M \cdot \ddot{x} + \alpha \cdot \dot{x} \quad (2.57)$$

y la ecuación eléctrica 2.54.

Las variables que definen el estado del sistema en las ecuaciones 2.56, 2.57 y 2.54 son la corriente i , la posición x y la velocidad \dot{x} . Realizando el cambio de variables $x \doteq u$, las ecuaciones anteriores se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\begin{cases} F_m = -\frac{1}{2}\tau(x) \cdot i^2 + M \cdot \dot{u} + \alpha \cdot u \\ v = R \cdot i + \tau(x) \cdot u \cdot i + \dot{L}(x) \cdot \frac{di}{dt} \\ \dot{x} = u \end{cases} \quad (2.58)$$

Representando el sistema de ecuaciones diferenciales 2.58 en la forma canónica $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{B}u$, se obtiene:

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = -\frac{1}{L(x)} [R \cdot i + \tau(x) \cdot i \cdot u] + \frac{1}{L(x)} v(t) \\ \dot{u} = \frac{1}{M} \left[\frac{1}{2}\tau(x) \cdot i^2 - \alpha \cdot u \right] + \frac{1}{M} F_m(t) \\ \dot{x} = u \end{cases} \quad (2.59)$$

Para determinar la solución de este sistema de ecuaciones diferenciales no lineales, es necesario conocer:

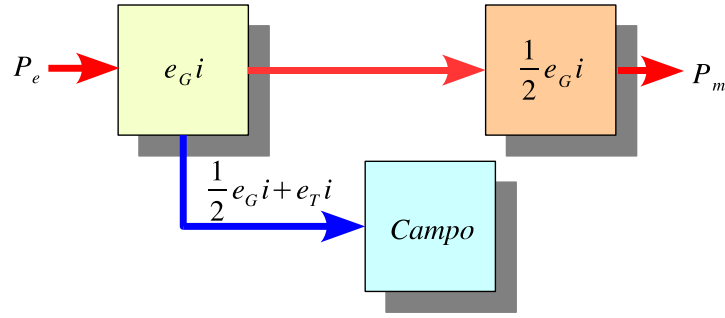


Figura 2.18 Balance energético de una máquina eléctrica en régimen continuo

1. Las condiciones iniciales de las variables de estado $i(0)$, $u(0)$ y $x(0)$.
2. Las condiciones de borde o ligazones externas. En el presente caso definidas por las excitaciones en el tiempo de la fuerza mecánica $F_m(t)$ aplicada al yugo y la tensión $v(t)$ aplicada a la bobina del electroimán.

2.4. Ecuaciones de potencia

La potencia utilizada por el convertidor electromecánico en el eje mecánico de la máquina de la figura 2.16 se puede calcular a partir de la fuerza mecánica y de la velocidad del yugo:

$$P_m = F_m \cdot \dot{x} = -\frac{1}{2}\tau(x) \cdot \dot{i}^2 \cdot \dot{x} + M \cdot \ddot{x} \cdot \dot{x} + \alpha \cdot \dot{x}^2 \quad (2.60)$$

La potencia absorbida por el eje eléctrico es:

$$P_e = v \cdot i = R \cdot i^2 + \tau(x) \cdot \dot{x} \cdot i + L(x) \cdot \frac{di}{dt} \cdot i = R \cdot i^2 + e_G \cdot i + e_T \cdot i \quad (2.61)$$

Para que la máquina anterior pueda trabajar en un régimen continuo, con corriente y velocidad constante, despreciando las pérdidas de fricción ($\alpha = 0$), y las pérdidas por efecto Joule en los conductores ($R = 0$), mediante las ecuaciones 2.60 y 2.61 se observa que:

$$P_m = \frac{1}{2}e_G \cdot i \quad (2.62)$$

$$P_e = e_G \cdot i \quad (2.63)$$

Las expresiones 2.60 y 2.61 indican, que en las condiciones anteriores, la máquina absorbe permanentemente por el eje eléctrico el doble de la potencia mecánica que está utilizando. La diferencia entre estas dos potencias sólo puede ser almacenada en el campo. En la figura 2.18 se representa esta situación. De toda la potencia que es inyectada en el eje eléctrico, el 50 % se convierte en energía mecánica y el otro 50 % se almacena en el campo. Como la corriente es constante, el término de transformación $e_T \cdot i$ es cero y el campo no puede devolver al sistema la energía que le ha sido entregada en el proceso de conversión.

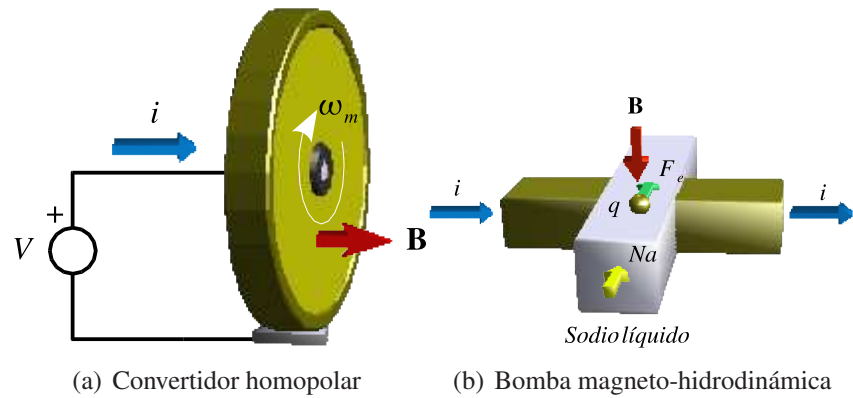


Figura 2.19 Máquinas de corriente continua

Si una máquina eléctrica se mantiene permanentemente operando en esta situación, acumula indefinidamente energía en el campo. Esto lógicamente no es factible para un sistema físico real. La solución del problema planteado consiste en permitir la variación de la corriente. Con la variación de la corriente aparece el término de transformación $e_T \cdot i$ que compensa el término de generación $\frac{1}{2}e_G \cdot i$. Por esta razón no es posible construir una máquina que funcione sólo con corriente continua. En todas las máquinas eléctricas es necesaria la variación de las corrientes para permitir una operación en régimen permanente.

La argumentación anterior se puede cuestionar debido a que son muy frecuentes en la industria las "Máquinas de corriente continua". Sin embargo en este caso el término corriente continua se aplica a la fuente utilizada para alimentar el convertidor. Las máquinas de corriente continua requieren de un dispositivo inversor electromecánico - las escobillas y el colector - que permite la variación de las corrientes en los devanados de la máquina.

También parece contradecir esta argumentación los principios de funcionamiento de las máquinas homopolares y los convertidores magneto-hidrodinámicos, - ver figura 2.19-. En ambos casos, estas máquinas funcionan con corriente continua, pero la corriente no siempre circula por el mismo material. Si un observador se mueve solidario con el medio conductor, el disco en el caso homopolar, y el fluido en la máquina magnetohidrodinámica, puede medir la variación de las corrientes al aproximarse y alejarse del punto de inyección. En otras palabras, estas máquinas son equivalentes a las de corriente continua, pero si en estas máquinas el proceso de variación de las corrientes se realiza de forma discreta mediante el colector y las escobillas, en las homopolares y magnetohidrodinámicas el proceso de variación de las corrientes se lleva a cabo de forma continua mediante un proceso de acercamiento y alejamiento del punto de inyección de la corriente.

Por lo tanto en ningún caso conocido, la experiencia contradice la necesidad teórica de variación de la corriente para el funcionamiento en régimen permanente de los convertidores electromecánicos de energía.

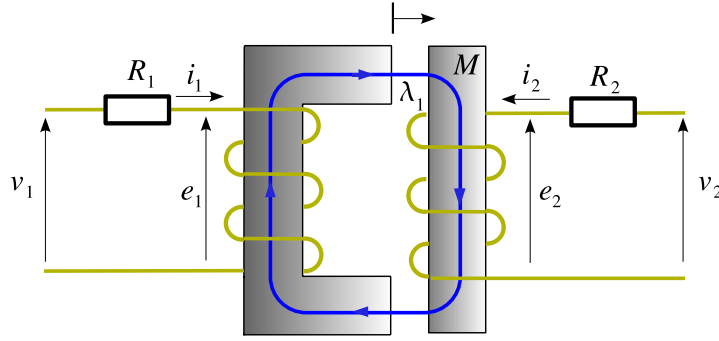


Figura 2.20 Máquina con dos ejes eléctricos y un eje mecánico

2.5. Generalización de las ecuaciones

En una máquina con dos ejes eléctricos y un eje mecánico, como la ilustrada en la figura 2.20, se satisface la siguiente relación para la evaluación de la fuerza eléctrica sobre la pieza móvil:

$$F_e = - \frac{\partial W_c(x, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial x} \quad (2.64)$$

Para demostrar la validez de la ecuación 2.64 se debe recordar que en un sistema mecánico de este tipo, si se varía la posición x , el intercambio energético se produce entre los ejes eléctricos y el eje mecánico. Si la posición permanece fija, el intercambio energético se realiza entre los ejes eléctricos únicamente. La ecuación 2.64 mantiene la validez en el cálculo de la fuerza en un sistema con dos ejes eléctricos ya que la ecuación 2.33 se demostró para el caso en que los enlaces de flujo se mantienen constantes. Si el enlace de flujo es constante, las fuerzas electromotrices son cero y no puede entrar energía desde ninguno de los ejes eléctricos hacia el campo. Por esta razón se cumplen las mismas condiciones en la expresión 2.64 que en la 2.33. De todo esto se concluye que es completamente general su aplicación.

Cualquiera que sea el número de ejes eléctricos o mecánicos de un convertidor electromecánico, para calcular la fuerza eléctrica se puede utilizar una expresión similar a la ecuación 2.64, siempre y cuando el movimiento se realice sólo en uno de los ejes mecánicos y se mantengan constantes todos los enlaces de flujo en los ejes eléctricos. La expresión generalizada para el cálculo de la fuerza eléctrica es:

$$F_{e_r} = - \frac{\partial W_c(x_1, x_2, \dots, x_r, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)}{\partial x_r} \quad (2.65)$$

La ecuación 2.65, determina la fuerza eléctrica que aparece sobre el eje mecánico r . Para este fin, se calcula la derivada parcial de la energía en el campo con respecto a la posición del eje r , manteniendo constantes las posiciones de los otros ejes mecánicos y los enlaces de flujo de todos los ejes eléctricos.

En el sistema de la figura 2.20, si la posición x se mantiene constante, la energía acumulada en el campo es igual a la energía eléctrica:

$$dW_c = dW_e, \text{ si } x = cte. \quad (2.66)$$

La energía eléctrica se puede calcular como:

$$dW_c = dW_e = i_1 d\lambda_1 + i_2 d\lambda_2, \text{ si } x = cte. \quad (2.67)$$

Si se conocen como varían las corrientes con los enlaces de flujo y con la posición, el problema queda resuelto, es decir:

$$\begin{cases} i_1 = f_1(x, \lambda_1, \lambda_2) \\ i_2 = f_2(x, \lambda_1, \lambda_2) \end{cases} \quad (2.68)$$

En los casos lineales se puede establecer:

$$\begin{cases} \lambda_1 = L_{11}i_1 + L_{12}i_2 \\ \lambda_2 = L_{21}i_1 + L_{22}i_2 \end{cases} \quad (2.69)$$

Matricialmente la expresión 2.67 se puede escribir como:

$$[\lambda] = [L] [i] \quad (2.70)$$

donde:

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} ; [i] = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} ; [L] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}$$

Empleando álgebra matricial, se puede determinar la corriente $[i]$ en función de los enlaces $[\lambda]$:

$$[i] = [L]^{-1} [\lambda] = [\Gamma] [\lambda] \quad (2.71)$$

La expresión 2.71 en forma explícita es:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11}(x) & \Gamma_{12}(x) \\ \Gamma_{21}(x) & \Gamma_{22}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

Para calcular la energía en el campo, es necesario variar cada uno de los parámetros en forma sucesiva, desde su valor inicial a su valor final, mientras todas las otras variables de estado se mantienen constantes. Para evaluar la energía acumulada en el campo, se realiza el siguiente procedimiento:

$$\Delta W_c = \int_{(0,0,0)}^{(x,\lambda_1,\lambda_2)} dW_c = \int_{(0,0,0)}^{(x,0,0)} dW_c + \int_{(x,0,0)}^{(x,\lambda_1,0)} dW_c + \int_{(x,\lambda_1,0)}^{(x,\lambda_1,\lambda_2)} dW_c \quad (2.73)$$

La primera integral de la sumatoria de la ecuación 2.73 es cero, debido a que los enlaces de flujo son cero mientras se mueve el yugo de la máquina. Como no existe variación de los enlaces, no existen fuerzas electromotrices y por lo tanto no se inyecta potencia eléctrica desde los ejes eléctricos hacia el campo. Al no existir enlaces de flujo, para realizar el desplazamiento mecánico x , no es necesario consumir ni suministrar energía. Para la evaluación de los dos términos

restantes de la ecuación 2.73, se sustituyen las ecuaciones 2.67 y 2.72:

$$\begin{aligned}\Delta W_c &= \int_{(x,0,0)}^{(x,\lambda_1,0)} (\Gamma_{11}\lambda_1 + \Gamma_{12}\lambda_2)d\lambda_1 + (\Gamma_{21}\lambda_1 + \Gamma_{22}\lambda_2)d\lambda_2 + \\ &+ \int_{(x,\lambda_1,0)}^{(x,\lambda_1,\lambda_2)} (\Gamma_{11}\lambda_1 + \Gamma_{12}\lambda_2)d\lambda_1 + (\Gamma_{21}\lambda_1 + \Gamma_{22}\lambda_2)d\lambda_2 = \\ &= \frac{1}{2}\Gamma_{11}\lambda_1^2 + \Gamma_{21}\lambda_1\lambda_2 + \frac{1}{2}\Gamma_{22}\lambda_2^2\end{aligned}\quad (2.74)$$

En el cálculo de las integrales de la ecuación 2.74 se asume que Γ_{12} es igual a Γ_{21} , condición de simetría siempre válida para los sistemas físicos.

Generalizando el cálculo anterior mediante el algebra de matrices, se tiene:

$$dW_c = dW_e = [i]^t [d\lambda] \quad , \quad si \quad x = cte. \quad (2.75)$$

De la ecuación 2.72 y recordando la propiedad sobre la traspuesta de un producto de matrices:

$$[i]^t = [\lambda]^t [\Gamma]^t \quad (2.76)$$

Se obtiene la energía acumulada en el campo como:

$$\Delta W_c = \int_{(0,0,0)}^{(x,\lambda_1,\lambda_2)} [\lambda]^t [\Gamma(x)]^t [d\lambda] = \frac{1}{2} [\lambda]^t [\Gamma(x)]^t [\lambda] \quad (2.77)$$

Si se deriva parcialmente la ecuación 2.77 con respecto a la posición x , se encuentra la fuerza eléctrica F_e que actúa sobre la pieza móvil:

$$F_e = -\frac{\partial W_c(x, [\lambda])}{\partial x} = -\frac{1}{2} [\lambda]^t \frac{d}{dx} ([\Gamma(x)]^t) [\lambda] \quad (2.78)$$

Por un razonamiento semejante, pero aplicado a la coenergía se puede deducir que:

$$\Delta W'_c = \frac{1}{2} [i]^t [L(x)]^t [i] \quad (2.79)$$

La fuerza eléctrica sobre la pieza se puede calcular como:

$$F_e = \frac{\partial W'_c(x, [i])}{\partial x} = \frac{1}{2} [i]^t \frac{d}{dx} ([L(x)]^t) [i] = \frac{1}{2} [i]^t [\tau(x)]^t [i] \quad (2.80)$$

Las ecuaciones 2.78 y 2.80 son válidas para un número cualquiera de ejes eléctricos, pero para un eje mecánico solamente. La mayoría de las máquinas eléctricas poseen un solo eje mecánico, pero si existen más, es necesario calcular las derivadas parciales de la energía o de la coenergía, según sea el caso, con respecto a cada una de las variables que definen la posición de cada eje mecánico - $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ -.

Si el eje mecánico es rotativo o giratorio como se representa en la figura 2.21, la matriz de

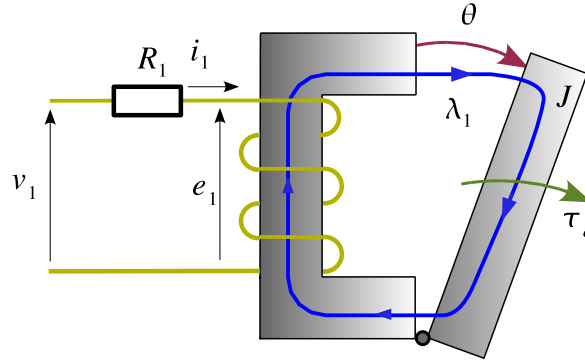


Figura 2.21 Electroimán con yugo rotativo

inductancia se define en función del ángulo θ y no se calculan fuerzas sino pares eléctricos y mecánicos.

Las ecuaciones del convertidor en este caso son:

$$T_e = \frac{1}{2} [i]^t [\tau(\theta)]^t [i] \quad (2.81)$$

donde:

$$[\tau(\theta)] = \frac{d}{d\theta} [L(\theta)]$$

Las ecuaciones de equilibrio eléctrico y mecánico de un convertidor electromecánico lineal con múltiples ejes eléctricos y un eje mecánico son:

$$\begin{aligned} [i] &= [R] [i] + [e] = \\ &= [R] [i] + \frac{d}{dt} [\lambda] = \\ &= [R] [i] + \frac{d}{dx} [L(x)] \dot{x} [i] + [L(x)] \frac{d[i]}{dt} = \\ &= [R] [i] + [\tau(x)] \dot{x} [i] + [L(x)] \frac{d[i]}{dt} \end{aligned} \quad (2.82)$$

$$F_m = -\frac{1}{2} [i]^t [\tau(x)]^t [i] + M\ddot{x} + \alpha\dot{x} \quad (2.83)$$

En las ecuaciones 2.82 y 2.83 se observa que la información que determina la dinámica y el comportamiento de la máquina eléctrica está contenida en la matriz $[L(x)]$. A partir de esta matriz, se obtiene la matriz $[\tau(x)]$, y con estas dos matrices y los elementos de ligazón con los sistemas eléctricos y mecánicos externos, se formulan las ecuaciones completas del convertidor.

2.6. Sumario

1. Para el análisis de convertidores electromecánicos resulta de utilidad la aplicación de los *balances de energía* o *coenergía* como método para la determinación de las *fuerzas eléctricas* involucradas en el proceso. Los métodos de análisis directo a partir de las *leyes de*

Maxwell y la relación de Lorenz pueden ser muy difíciles de aplicar en las máquinas reales.

2. Los convertidores electromecánicos pueden poseer varios ejes o *puertos eléctricos y mecánicos*. Al menos un eje eléctrico y uno mecánico son indispensables para definir que una máquina es un convertidor electromecánico. Los ejes o puertos son las puertas de entrada y salida de la energía. Los puertos eléctricos están definidos por la fuerza electromotriz y la corriente. Los puertos mecánicos por la velocidad angular o lineal y por el par o la fuerza.
3. El *principio de los trabajos virtuales* permite la evaluación de la fuerza o el par en un sistema electromecánico. Conocida la energía o coenergía en función de las variables de estado, la derivada parcial de la energía o coenergía con respecto a la posición - desplazamiento virtual -, determinan la fuerza o el par de acuerdo con las expresiones 2.65 y 2.80.
4. Las *ecuaciones internas* de fuerza electromotriz se obtienen por derivación con respecto al tiempo de los enlaces de flujo. En los sistemas lineales, la matriz de inductancia determina el comportamiento electromagnético completo del convertidor.
5. Cuando se incluyen las *condiciones de contorno* que unen la máquina con los sistemas eléctricos y mecánicos, utilizando las leyes de Kirchhoff y la segunda ley de Newton, se completa el conjunto de ecuaciones diferenciales que definen el comportamiento dinámico del convertidor.

2.7. Ejemplos resueltos

Ejemplo 1: Determinación de las ecuaciones internas del convertidor

De un convertidor electromecánico se conocen las relaciones no lineales existentes entre los enlaces de flujo y la corriente por sus respectivas bobinas:

$$\lambda_1 = k_1 x i_1^2 + k_2 i_1 i_2 + k_3 y i_2^2$$

$$\lambda_2 = k_3 y i_1^2 + k_2 i_1 i_2 + k_1 x i_2^2$$

Determine las ecuaciones internas de esta máquina.

Solución:

El convertidor está constituido por dos ejes eléctricos (bobinas 1 y 2) y dos ejes mecánicos (x, y). Existen por tanto cuatro ecuaciones internas, dos de fuerza electromotriz y dos de fuerza, una por cada puerto.

Las ecuaciones de fuerza electromotriz en cada una de las bobinas se obtienen derivando los enlaces de flujo con respecto al tiempo:

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = k_1(2x i_1 \frac{di_1}{dt} + i_1^2 \frac{dx}{dt}) + k_2(i_1 \frac{di_2}{dt} + i_2 \frac{di_1}{dt}) + k_3(2y i_2 \frac{di_2}{dt} + i_2^2 \frac{dy}{dt})$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = k_3(2y i_1 \frac{di_1}{dt} + i_1^2 \frac{dy}{dt}) + k_2(i_1 \frac{di_2}{dt} + i_2 \frac{di_1}{dt}) + k_1(2x i_2 \frac{di_2}{dt} + i_2^2 \frac{dx}{dt})$$

El cálculo de la fuerza eléctrica en cada uno de los ejes mecánicos requiere la determinación de la coenergía en función de las posiciones x y y de dichos ejes. Una vez determinada la expresión de la coenergía es necesario derivarla parcialmente con respecto a cada posición mecánica para obtener la fuerza eléctrica instantánea en los puertos mecánicos:

$$\begin{aligned} W'_c(x, y, i_1, i_2) &= \int_{(0,0,0,0)}^{(x,y,i_1,i_2)} \lambda_1 di_1 + \lambda_2 di_2 = \\ &= \int_{(x,y,0,0)}^{(x,y,i_1,0)} \lambda_1 di_1 + \int_{(x,y,i_1,0)}^{(x,y,i_1,i_2)} \lambda_2 di_2 = \\ &= \int_{(x,y,0,0)}^{(x,y,i_1,0)} (k_1 x i_1^2) di_1 + \\ &\quad + \int_{(x,y,i_1,0)}^{(x,y,i_1,i_2)} (k_3 y i_1^2 + k_2 i_1 i_2 + k_1 x i_2^2) di_2 = \\ &= \frac{k_1}{3} x i_1^3 + k_3 y i_1^2 i_2 + \frac{k_2}{2} i_1 i_2^2 + \frac{k_1}{3} x i_2^3. \end{aligned}$$

Las fuerzas eléctricas instantáneas en cada eje son:

$$F_{ex} = \frac{\partial W'_c}{\partial x} = \frac{k_1}{3} (i_1^3 + i_2^3)$$

$$F_{ey} = \frac{\partial W'_c}{\partial y} = k_3 i_1^2 i_2$$

Ejemplo 2: Ecuación del par de un convertidor rotativo

La relación entre las corrientes y los enlaces de flujo de un convertidor electromecánico rotativo se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_3 \cos 2\theta \\ \Gamma_3 \cos 2\theta & \Gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Determine el par eléctrico instantáneo de este convertidor y la condición necesaria para obtener un par eléctrico promedio diferente de cero, si el enlace λ_1 es constante y λ_2 varía sinusoidalmente con el tiempo a una frecuencia ω_2 .

Solución:

En este problema existe una relación lineal entre las corrientes en las dos bobinas del convertidor y sus respectivos enlaces de flujo. Aun cuando existe la posibilidad de invertir la matriz y obtener una relación explícita entre los enlaces y las corrientes, en este caso resulta más simple determinar el par eléctrico mediante el concepto de energía en el campo:

$$\begin{aligned}
 W_c(\theta, \lambda_1, \lambda_2) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_3 \cos 2\theta \\ \Gamma_3 \cos 2\theta & \Gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \\
 \tau_e &= -\frac{\partial W_c(\theta, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial \theta} = \\
 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2\Gamma_3 \sin 2\theta \\ -2\Gamma_3 \sin 2\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \\
 &= -2\Gamma_3 \sin 2\theta \lambda_1 \lambda_2.
 \end{aligned}$$

Conocida la expresión del par eléctrico instantáneo, es posible integrarla en un período para obtener la condición necesaria de par promedio diferente de cero:

$$\begin{aligned}
 \langle \tau_e \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-2\Gamma_3 \sin 2\theta \lambda_1 \lambda_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)) d\theta = \\
 &= \frac{-2\Gamma_3 \lambda_1 \lambda_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sin 2\theta \cdot \sin(\omega_2 t + \phi_2)) d\theta = \\
 &= \frac{-2\Gamma_3 \lambda_1 \lambda_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\cos(2\theta - \omega_2 t - \phi_2) - \cos(2\theta + \omega_2 t + \phi_2)) d\theta.
 \end{aligned}$$

Las integrales entre 0 y 2π de las funciones sinusoidales son cero, para que la expresión anterior pueda tener promedio diferente de cero es indispensable que alguno de los dos argumentos del integrando sea independiente de θ , en otras palabras:

$$2\theta \pm (\omega_2 t) = \text{constante}.$$

Derivando la expresión anterior se obtiene la condición necesaria, pero no suficiente para obtener un par promedio diferente de cero en este convertidor:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_{mec} = \pm \frac{1}{2} \omega_2.$$

En otras palabras, es necesario que la velocidad angular de giro del eje mecánico del convertidor esté sincronizado a la mitad de la velocidad angular del segundo eje eléctrico, para poder obtener un par promedio diferente de cero.

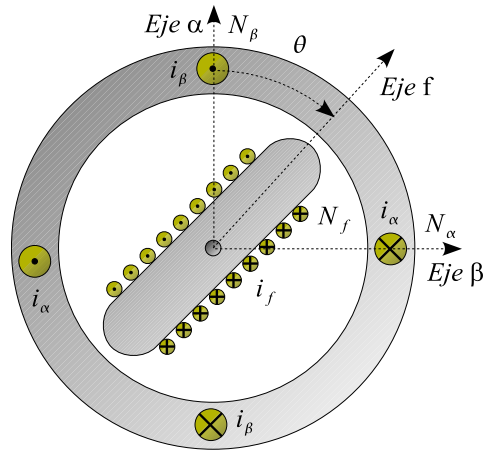


Figura 2.22 Convertidor rotativo

Ejemplo 3: Modelación del convertidor por inspección

Un convertidor electromecánico como el ilustrado en la figura 2.22 tiene dos bobinas ortogonales (α, β) en un estator cilíndrico y un rotor de polos salientes f , con un devanado a lo largo de la pieza magnética. Se desconocen las dimensiones, los materiales de construcción y sus características. Determine:

1. El modelo matemático completo del convertidor mediante inspección del diagrama ilustrado en la figura 2.22. Puede considerar que las variaciones de la reluctancia son aproximadamente sinusoidales. El número de vueltas de las bobinas son diferentes, $N_\alpha = N_\beta \neq N_f$.
2. Los ensayos necesarios para determinar los parámetros del modelo desarrollado.

Solución:

1. El modelo matemático completo del convertidor mediante inspección del diagrama ilustrado en la figura 2.22. Puede considerar que las variaciones de la reluctancia son aproximadamente sinusoidales. El número de vueltas de las bobinas α y β son iguales, $N_\alpha = N_\beta \neq N_f$.

El modelo de la máquina determinado por inspección implica la representación matemática de las inductancias propias y mutuas en función de la posición angular del rotor θ . En la figura 2.23 se muestra la dependencia de las inductancias propias del estator L_α y L_β , mutuas entre las bobinas α y β del estator $L_{\alpha\beta}$, los acoplamientos mutuos entre las bobinas del estator y rotor, $L_{\alpha f}$ y $L_{\beta f}$, así como la inductancia propia del rotor L_f . El período de repetición de las inductancias propias y mutuas del estator dependen del doble del ángulo θ debido a que con cada giro de π de la posición del rotor, las reluctancias se repiten. Los acoplamientos estator-rotor tienen un comportamiento diferente porque la polaridad relativa entre las bobinas invierten su signo con un giro de π en la posición del rotor. La inductancia del rotor es constante debido a que el estator es cilíndrico y por lo tanto la

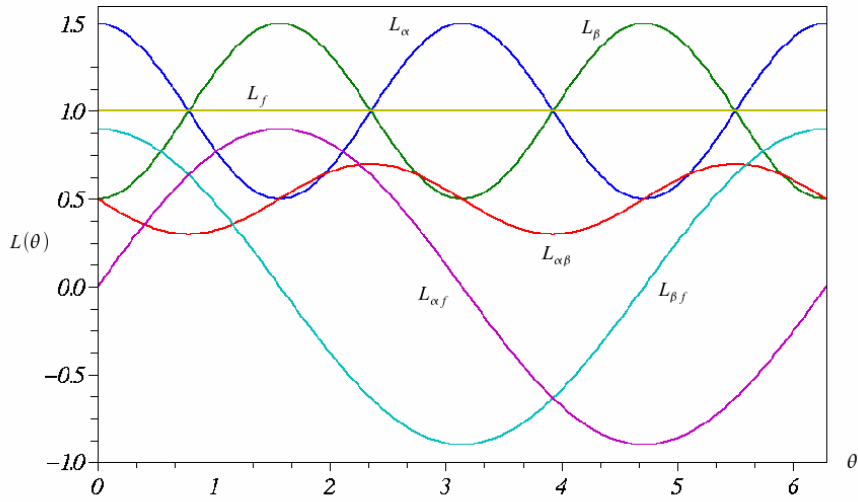


Figura 2.23 Inductancias del convertidor

permeanza de la bobina rotórica f , es independiente de la posición angular θ ³.

Las expresiones analíticas de estas inductancias obtenidas por inspección se pueden representar de la siguiente forma aproximada⁴:

$$\begin{aligned}
 L_{\alpha}(\theta) &\approx L_{e1} + L_{e2} \cos 2\theta + \dots \\
 L_{\beta}(\theta) &\approx L_{e1} + L_{e2} \cos 2\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + \dots \\
 L_{\alpha\beta}(\theta) &\approx L_{e3} + L_{e4} \cos 2\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + \dots \\
 L_{\alpha f}(\theta) &\approx L_{ef} \cos \theta + \dots \\
 L_{\beta f}(\theta) &\approx L_{ef} \sin \theta + \dots \\
 L_f(\theta) &= L_f = cte.
 \end{aligned}$$

Una vez conocidas las funcionalidades de las inductancias con la posición, las ecuaciones del convertidor electromecánico se obtienen directamente:

$$\begin{bmatrix} v_{\alpha} \\ v_{\beta} \\ v_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_e & 0 & 0 \\ 0 & R_e & 0 \\ 0 & 0 & R_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{\alpha} \\ i_{\beta} \\ i_f \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} L_{\alpha}(\theta) & L_{\alpha\beta}(\theta) & L_{\alpha f}(\theta) \\ L_{\alpha\beta}(\theta) & L_{\beta}(\theta) & L_{\beta f}(\theta) \\ L_{\alpha f}(\theta) & L_{\beta f}(\theta) & L_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{\alpha} \\ i_{\beta} \\ i_f \end{bmatrix}$$

³Un observador ubicado en el rotor no percibe cambios del entrehierro a medida que la pieza gira. En el estator sucede lo contrario, el observador detecta mínimo entrehierro cada vez que el eje magnético positivo o negativo del rotor pasa por el frente.

⁴Las funciones de las inductancias con respecto al ángulo θ son periódicas y es posible utilizar series de Fourier para representarlas mediante senos y cosenos. En este caso se ha truncado la serie en la primera armónica espacial.

$$T_e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_f \end{bmatrix}^t \frac{\partial}{\partial \theta} \begin{bmatrix} L_\alpha(\theta) & L_{\alpha\beta}(\theta) & L_{\alpha f}(\theta) \\ L_{\alpha\beta}(\theta) & L_\beta(\theta) & L_{\beta f}(\theta) \\ L_{\alpha f}(\theta) & L_{\beta f}(\theta) & L_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_f \end{bmatrix} = T_m + J \frac{d^2\theta}{dt^2} + \rho \frac{d\theta}{dt}$$

2. Los ensayos necesarios para determinar los parámetros del modelo desarrollado.

Es necesario determinar las inductancias propias y mutuas del modelo para lo cual es necesario diseñar un ensayo que permita reproducir el gráfico 2.23. Las inductancias propias se miden aplicando corriente en la bobina y midiendo el enlace de flujo que se produce. La medida directa del flujo requiere dispositivos invasores dentro del entrehierro, por esta razón es preferible aplicar una tensión alterna en la bobina de prueba y medir la corriente que consume para una posición fija θ . El enlace de flujo en la bobina se obtiene por integración de la fuerza electromotriz inducida:

$$\begin{aligned} e(t) &= v(t) - R \cdot i(t) = \frac{d\lambda(t)}{dt} = L(\theta) \frac{di(t)}{dt} \\ v(t) &= \sqrt{2}V \cos \omega t ; i(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega t - \phi) \Rightarrow \\ V \cos \omega t &= RI \cos(\omega t - \phi) + \omega L(\theta) I \sin(\omega t - \phi) \Rightarrow \\ V \cos \omega t &= \sqrt{R^2 + (\omega L(\theta))^2} I \cdot \cos(\omega t - \phi + \arctan \frac{\omega L(\theta)}{R}) \Rightarrow \\ L(\theta) &= \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{V^2}{I^2} - R^2} = \frac{1}{\omega} \sqrt{Z^2 - R^2} = \frac{X}{\omega} = \frac{R}{\omega} \tan \phi \end{aligned} \quad (2.84)$$

La expresión 2.84 determina la inductancia propia para una posición fija θ del rotor midiendo la resistencia de la bobina R , la tensión efectiva aplicada V , la corriente efectiva I y la frecuencia angular $\omega = 2\pi f$.

Las impedancias mutuas estator-estator o estator-rotor deben medirse aplicando tensión alterna en la bobina excitadora y y midiendo la fuerza electromotriz inducida en la bobina de prueba x , para cada posición angular θ fija:

$$\lambda_x = L_{xy}(\theta) \cdot i_y \Rightarrow v_x = L_{xy}(\theta) \cdot \frac{di_y}{dt}$$

La corriente i_y se obtiene alimentando la bobina y con una fuente de tensión v_y tal como se hizo en el caso de inductancia propia:

$$\begin{aligned} i_y(t) &= \sqrt{2}I_y \cos(\omega t - \phi_y) \\ I_y &= \frac{V_y}{\sqrt{R_y^2 + (\omega L_y(\theta))^2}} ; \phi_y(\theta) = -\arctan \frac{\omega L_y(\theta)}{R_y} \\ \sqrt{2}V_x \cos(\omega t - \phi_x) &= \sqrt{2}I_y \omega L_{xy}(\theta) \cdot \cos(\omega t - \phi_y - \frac{\pi}{2}) \\ L_{xy}(\theta) &= \frac{1}{\omega} \sqrt{R_y^2 + (\omega L_y(\theta))^2} \frac{V_x}{V_y} = \frac{Z_y(\theta)}{\omega} \frac{V_x}{V_y} = \frac{V_x}{\omega I_y} \end{aligned} \quad (2.85)$$

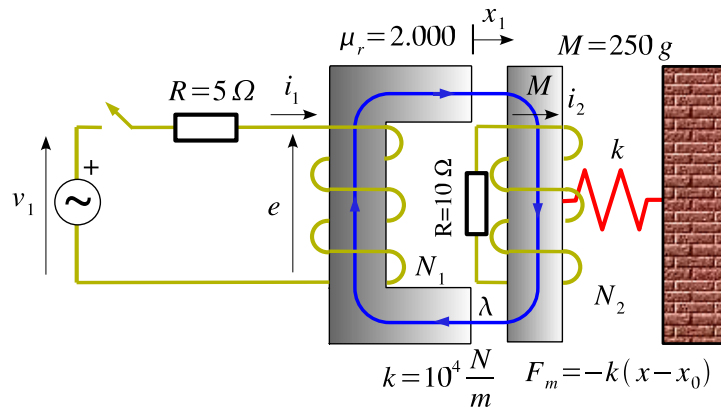


Figura 2.24 Diagrama esquemático del Ejercicio No.1

2.8. Ejercicios propuestos

- En la figura 2.24 se ha representado un convertidor electromecánico compuesto por un electroimán y su yugo. El electroimán tiene una bobina de 1,000 vueltas, alimentada con una fuente de corriente alterna de 100 V efectivos, su resistencia es de 5Ω . En el yugo existe otra bobina de 500 vueltas que se encuentra en cortocircuito y posee una resistencia de 10Ω . El yugo tiene una masa de 250 g y está conectado mediante un resorte de 10^4 N/m a un sistema inercial. En la posición de reposo del resorte, el yugo se encuentra a 5 mm del electroimán. La sección transversal del material electromagnético es de 25 cm^2 y la longitud media del camino magnético (sin considerar el entrehierro) es de 48 cm. La permeabilidad relativa del material magnético es 2,000. El material se considera lineal en todo el rango de la densidad de flujo. En estas condiciones determine:
 - La relación entre los enlaces de flujo y las corrientes en función de la posición del yugo.
 - Las ecuaciones dinámicas completas del convertidor.
 - La solución en régimen permanente, considerando que la inercia mecánica del sistema elimina las vibraciones mecánicas del yugo. (Posición de equilibrio)
 - La potencia de pérdidas del convertidor en régimen permanente.
- El convertidor electromecánico que se muestra en la figura 2.25 está compuesto por un condensador, una fuente de tensión alterna de 100 V pico, una pieza móvil que entra en el interior del condensador y un resorte que lo conecta a un sistema inercial, cuya posición de equilibrio es $x_0 = 5 \text{ cm}$. La masa de la pieza móvil es de 10 g. La constante k del resorte es de $0,3 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$. La separación de las placas cuadradas es de 1,0 cm, siendo cada uno de sus lados de 10 cm. La permitividad relativa ϵ_r de la pieza móvil es 5,0. La frecuencia de la fuente es de 60 Hz. Determine en estas condiciones:

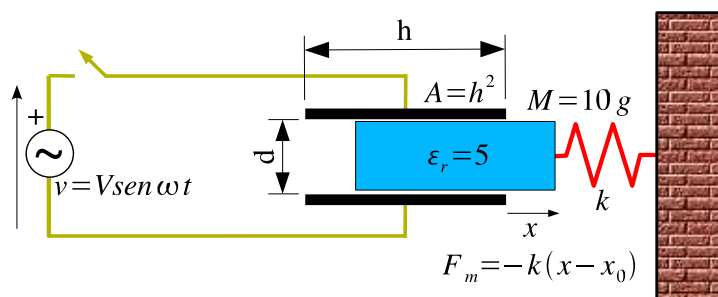


Figura 2.25 Diagrama esquemático del Ejercicio No.2

- La fuerza eléctrica sobre la pieza móvil utilizando el concepto de coenergía.
 - La fuerza eléctrica sobre la pieza móvil utilizando el concepto de energía.
 - Las ecuaciones dinámicas completas del convertidor.
 - La solución analítica de régimen permanente.
 - La amplitud de la tensión si la pieza móvil se desplaza 5 cm de su posición de equilibrio⁵
- La máquina que se muestra en la figura 2.22 posee dos bobinas en el estator con N_e vueltas cada una y un devanado en el rotor con N_f vueltas. Las dos bobinas del estator tienen la misma resistencia R_e y se alimentan mediante dos fuentes sinusoidales de tensión desfasadas $\frac{\pi}{2}$ y cuya frecuencia es ω_e . El rotor tiene una resistencia R_f y se alimenta mediante una *fuerza de corriente* constante de valor I_r . Las dimensiones y los parámetros del convertidor electromecánico de energía son bien conocidos. Determine:
 - Las ecuaciones completas⁶ del convertidor expresadas en forma canónica ($p\mathbf{x} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$).
 - La condición necesaria para poder obtener par promedio diferente de cero cuando el equipo se encuentra operando a velocidad constante en régimen permanente ($\omega_m = cte$).
 - Repita la pregunta anterior si el rotor está en cortocircuito ($v_r = 0$).
 - Repita el ejercicio considerando que la bobina del rotor está abierta ($i_r = 0$).
 - En el diagrama de la figura 2.26 se tiene un electroimán y una pieza magnética que puede atravesar el entrehierro a diferentes velocidades. Utilizando diagramas de energía y/o coenergía en el campo, determine el trabajo realizado por el sistema en las siguientes condiciones:

⁵Sugerencia: $Q = C \cdot e$; $C = \epsilon \frac{A}{d}$; $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$; $e = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$; $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$

⁶Internas y externas.

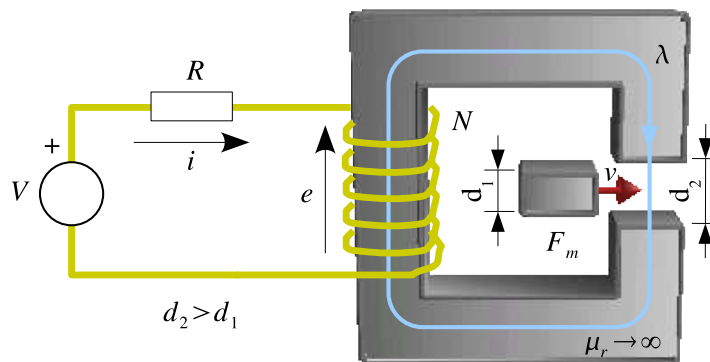


Figura 2.26 Diagrama esquemático del convertidor electromecánico del Ejercicio No. 4

- a) Cuando la pieza cruza el entrehierro a una velocidad extremadamente reducida (prácticamente cero).
 - b) Cuando la pieza cruza el entrehierro a una velocidad extremadamente rápida (prácticamente infinita).
 - c) Cuando la pieza cruza el entrehierro a una velocidad intermedia.
 - d) Determine las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento del convertidor.
5. Repita el Ejemplo No.1, figura 2.24, considerando una característica de magnetización $\mathbf{B} - \mathbf{H}$ no lineal tal como se ilustra en la figura 2.27. Determine en estas nuevas condiciones:
- a) La relación entre los enlaces de flujo y las corrientes en función de la posición del yugo.
 - b) Las ecuaciones dinámicas completas del convertidor.
 - c) La solución en régimen permanente, considerando que la inercia mecánica del sistema elimina las vibraciones mecánicas del yugo. (Posición de equilibrio).
 - d) La potencia de pérdidas del convertidor en régimen permanente.

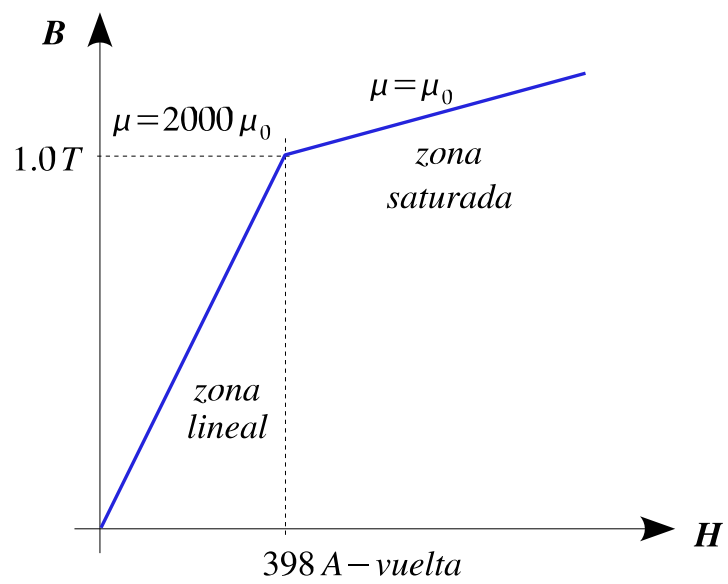


Figura 2.27 Característica B-H del material magnético del convertidor

Bibliografía

- [1] B. Adkins, "The General Theory of Electric Machines," Chapman and Hall, London 1957.
- [2] A. E. Fitzgerald, C. Kingsley, Jr. & A. Kusko, "Electric Machinery: The Processes, Devices, and Systems of Electromechanical Energy Conversion," McGraw-Hill, Third Edition, 1971.
- [3] S. A. Nasar & L.E. Unnewehr, "Electromechanics and Electric Machines," John Wiley & Sons, 1983.
- [4] M.G. Say "Introduction to the Unified Theory of Electromagnetic Machines," Pitman Press, Great Britain, 1971.
- [5] D.P. Sen; D.P. Gupta & J.W. Lynn; "Electrical Machine Dynamics," Ed. Macmillan Press LTD, 1980.
- [6] G. Thaler & M. Wilcox, "Máquinas Eléctricas," Editorial Limusa, Mexico, 1979.
- [7] D. C. White & H. H. Woodson, "Electromechanical Energy Conversion," John Wiley & Sons, New York 1959.

CAPÍTULO 3

Circuitos Acoplados Magnéticamente

3.1. Definiciones básicas

En este capítulo se estudia el comportamiento de los circuitos acoplados magnéticamente, fijos en el espacio. El medio magnético se considera con permeabilidad μ , constante y homogénea. En todo el capítulo se asume linealidad entre el flujo y las corrientes.

En primer lugar se considera el diagrama de la figura 3.1, en la cual se han representado n circuitos magnéticamente acoplados. En el circuito k se coloca una fuente de tensión v_k , que inyecta en esa bobina la corriente i_k .

Las líneas de la figura 3.1, representan la distribución del flujo cuando se excita la bobina k . El flujo total que enlaza la bobina k se representa por ϕ_{kk} , y se puede descomponer en dos flujos:

donde,

ϕ_{mk}	es el flujo que enlaza a las otras bobinas.
ϕ_{lk}	es el flujo que enlaza solamente a la bobina k .

De esta forma, se establece:

$$\phi_{kk} = \phi_{mk} + \phi_{lk} \quad (3.1)$$

En la figura 3.2, se representa el caso contrario, donde todas las bobinas están excitadas, menos la bobina k .

El flujo mutuo que enlaza la bobina k , debido a la excitación de las otras bobinas se denomina ϕ_{MK} y comprende $n - l$ componentes:

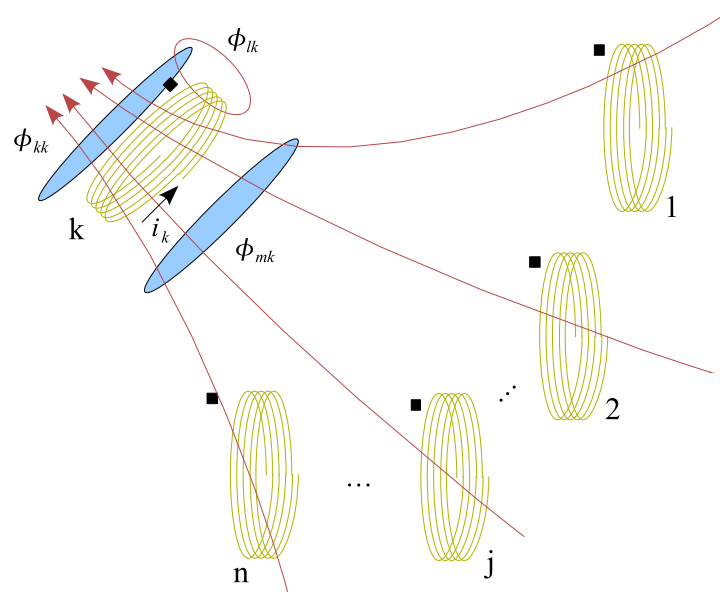


Figura 3.1 Representación del flujo propio

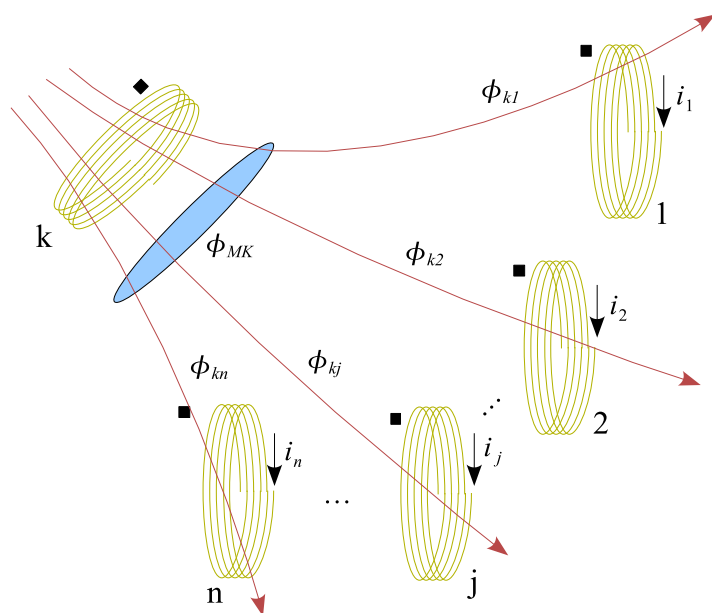


Figura 3.2 Representación de los flujos mutuos

$$\phi_{MK} = \sum_{\forall j \neq k}^n \phi_{kj} \quad (3.2)$$

En la ecuación 3.2, ϕ_{kj} representa el flujo mutuo producido por la bobina j que enlaza a la bobina k . Por superposición, el flujo magnético total enlazado por la bobina k es:

$$\phi_k = \phi_{kk} + \phi_{MK} = \phi_{lk} + \phi_{mk} + \phi_{MK} = \phi_{lk} + \phi_{mk} + \sum_{\forall j \neq k}^n \phi_{kj} \quad (3.3)$$

Los enlaces de flujo correspondientes son:

$$\lambda_k = N_k \phi_k = \lambda_{lk} + \lambda_{mk} + \sum_{\forall j \neq k}^n \lambda_{kj} \quad (3.4)$$

Si los enlaces de flujo de la ecuación 3.4 se expresan en función de la permeanza magnética y de las corrientes de excitación de las bobinas, se obtiene:

$$\lambda_{lk} = N_k \phi_{lk} = P_{lk} N_k^2 i_k \quad (3.5)$$

$$\lambda_{mk} = N_k \phi_{mk} = P_{mk} N_k^2 i_k \quad (3.6)$$

$$\lambda_{kj} = N_k \phi_{kj} = P_{kj} N_k N_j i_j \quad (3.7)$$

Se pueden definir las siguientes inductancias:

$$L_{lk} = P_{lk} N_k^2 = \frac{N_k \phi_{lk}}{i_k} \quad (3.8)$$

$$L_{mk} = P_{mk} N_k^2 = \frac{N_k \phi_{mk}}{i_k} \quad (3.9)$$

$$L_k = (P_{lk} + P_{mk}) N_k^2 = \frac{N_k \phi_{kk}}{i_k} \quad (3.10)$$

Donde L_{lk} es la inductancia de dispersión, L_{mk} es la inductancia de magnetización y L_k es la inductancia propia. Las inductancias mutuas se definen como:

$$M_{kj} = P_{kj} N_k N_j = \frac{N_k \phi_{kj}}{i_j} \quad (3.11)$$

$$M_{jk} = P_{jk} N_j N_k = \frac{N_j \phi_{jk}}{i_k} \quad (3.12)$$

Como las permeancias P_{kj} y P_{jk} son iguales, se demuestra que:

$$M_{kj} = M_{jk} \quad (3.13)$$

Si se expresa la ecuación 3.4 en términos de las inductancias definidas en 3.8, 3.9, 3.10, 3.11 y 3.12 se obtiene para la bobina k :

$$\lambda_k = L_k i_k + \sum_{\forall j \neq k}^n M_{kj} i_j \quad (3.14)$$

La ecuación 3.14 se puede escribir en forma matricial para todas las bobinas del sistema:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_k \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M_{12} & \cdots & M_{1k} & \cdots & M_{1n} \\ M_{21} & L_2 & \cdots & M_{2k} & \cdots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ M_{k1} & M_{k2} & \cdots & L_k & \cdots & M_{kn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \cdots & M_{nk} & \cdots & L_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_k \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

La ecuación 3.15 en forma compacta se escribe así:

$$[\lambda] = [L] [i] \quad (3.16)$$

3.2. Ecuaciones de tensión

La tensión instantánea aplicada en la bobina k del sistema acoplado magnéticamente de las figuras 3.1 y 3.2 es:

$$v_k = R_k i_k + p \lambda_k \quad (3.17)$$

En la ecuación 3.17 el operador p se refiere a la derivada con respecto al tiempo $\frac{d}{dt}$. Para las n bobinas acopladas se cumple:

$$[v] = [R] [i] + [L] p [i] = ([R] + [L] p) [i] \quad (3.18)$$

donde:

- $[R]$ es una matriz diagonal.
- $[L]$ está definida por la ecuación 3.15.

3.3. Coeficientes de acoplamiento y dispersión

Multiplicando las ecuaciones 3.11 y 3.12 término a término, se obtiene:

$$M_{jk}^2 = \frac{N_k N_j \phi_{jk} \phi_{kj}}{i_k i_j} \quad (3.19)$$

De la ecuación 3.10 se puede deducir que:

$$\frac{N_k}{i_k} = \frac{L_k}{\phi_{kk}} ; \quad \frac{N_j}{i_j} = \frac{L_j}{\phi_{jj}} \quad (3.20)$$

Sustituyendo 3.20 en 3.19 se obtiene:

$$M_{jk}^2 = L_k L_j \frac{\phi_{jk} \phi_{kj}}{\phi_{kk} \phi_{jj}} \quad (3.21)$$

El cociente de los flujos representa la fracción del flujo total propio de la bobina k que enlaza a la bobina j , estos coeficientes son constantes y se definen como:

$$k_k = \frac{\phi_{jk}}{\phi_{kk}} ; \quad k_j = \frac{\phi_{kj}}{\phi_{jj}} \quad (3.22)$$

En 3.22, k_k y k_j se denominan factores de acoplamiento e indican la cantidad de flujo existente entre las dos bobinas. A medida que decrece la separación entre las bobinas, se incrementa el valor del coeficiente de acoplamiento. El valor máximo teórico para un acoplamiento perfecto es la unidad.

Reemplazando las definiciones de 3.22 en la ecuación 3.21 se obtiene:

$$M_{jk}^2 = k_j k_k L_j L_k \Rightarrow M_{jk} = \sqrt{k_j k_k} \sqrt{L_j L_k} \quad (3.23)$$

En la ecuación 3.23, a la media geométrica de los factores de acoplamiento se le denomina coeficiente de acoplamiento entre la bobina j y la bobina k , k_{jk} y puede variar entre los valores cero y uno. Otro coeficiente ampliamente utilizado es σ_{jk} o coeficiente de dispersión y queda definido por:

$$\sigma_{jk} = 1 - k_{jk}^2 \quad (3.24)$$

Como:

$$M_{jk} = k_{jk} \sqrt{L_j L_k} \quad (3.25)$$

Por lo tanto, sustituyendo 3.25 en la ecuación 3.24 se obtiene:

$$\sigma_{jk} = 1 - \frac{M_{jk}^2}{L_j L_k} \quad (3.26)$$

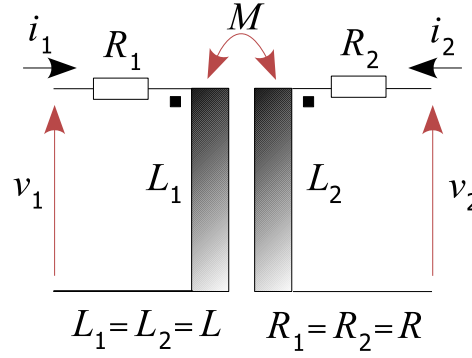


Figura 3.3 Transformador de dos devanados

3.4. El transformador como circuito acoplado

En la figura 3.3, se presenta un transformador de dos devanados. Cada bobina posee una inductancia propia de valor L_1 y L_2 respectivamente, una inductancia mutua M y una resistencia propia en cada bobina, R_1 y R_2 .

Aplicando la ecuación 3.18, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} p \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Despejando la derivada de las corrientes con respecto al tiempo, se transforma la ecuación diferencial 3.27 a su forma canónica:

$$p[i] = -[L]^{-1}[R][i] + [L]^{-1}[v] \quad (3.28)$$

En forma explícita el sistema representado en la ecuación 3.28 es:

$$p \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}^{-1} \left[- \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right] \quad (3.29)$$

Considerando que los dos devanados del transformador son idénticos se obtiene $L_1 = L_2 = L$ y $R_1 = R_2 = R$. Con estas condiciones y evaluando la matriz inversa de la ecuación 3.29, se obtiene:

$$p \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = -\frac{R}{L^2 - M^2} \begin{bmatrix} L & -M \\ -M & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{L^2 - M^2} \begin{bmatrix} L & -M \\ -M & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Los valores propios de la matriz característica del sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer grado se pueden calcular a partir de:

$$\det \{[A] - \gamma [I]\} = 0 \quad (3.31)$$

Reemplazando la matriz característica de la ecuación 3.30 en 3.31:

$$\det \left\{ -\frac{R}{L^2 - M^2} \begin{bmatrix} L - \gamma & -M \\ -M & L - \gamma \end{bmatrix} \right\} = 0 \quad (3.32)$$

Calculando el determinante de la ecuación 3.32 se obtiene:

$$\gamma^2 + \frac{2RL}{L^2 - M^2}\gamma + \frac{R^2}{L^2 - M^2} = 0 \quad (3.33)$$

El polinomio de segundo grado en γ 3.33, también denominado polinomio característico, posee dos raíces que corresponden a los autovalores de la matriz característica $[A]$:

$$\gamma_1 = -\frac{R}{L + M} = -\frac{1}{\tau_M} \quad (3.34)$$

$$\gamma_2 = -\frac{R}{L - M} = -\frac{1}{\tau_F} \quad (3.35)$$

donde:

τ_M es la constante de tiempo de magnetización $[s]$.
 τ_F es la constante de tiempo de fuga o dispersión $[s]$.

Como L y M son valores positivos, γ_2 es mucho mayor que γ_1 si el coeficiente de acoplamiento mutuo k_{12} es cercano a la unidad. De la ecuación 3.25 se obtiene, para el transformador de la figura 3.3:

$$M = k_{12}\sqrt{L_1 L_2} = k_{12}L \quad (3.36)$$

A partir de 3.34, 3.35 y 3.36, se determinan τ_M y τ_F como:

$$\tau_M = \frac{L + M}{R} = (1 + k_{12}) \frac{L}{R} \quad (3.37)$$

$$\tau_F = \frac{L - M}{R} = (1 - k_{12}) \frac{L}{R} \quad (3.38)$$

Para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales 3.27, se determina la solución homogénea a partir de los autovalores y autovectores de la matriz característica, calculados mediante las expresiones 3.34 y 3.35. La solución completa se obtiene superponiendo a la solución homogénea, la solución particular y determinando los coeficientes constantes a partir de las condiciones iniciales del problema. La solución homogénea del problema es:

$$\begin{aligned} i_{1h}(t) &= Ae^{\gamma_1 t} + Be^{\gamma_2 t} \\ i_{2h}(t) &= Ce^{\gamma_1 t} + De^{\gamma_2 t} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Los coeficientes indeterminados A , B , C y D no son arbitrarios, se obtienen a partir de los autovectores de la matriz característica. Para calcular los autovectores es necesario resolver el sistema de ecuaciones:

$$\{[A] - \gamma_i [I]\} [V_i] = [0] \quad (3.40)$$

Aplicando la ecuación 3.40 para el primer autovalor γ_1 :

$$\begin{bmatrix} -\frac{RL}{L^2-M^2} + \frac{R}{L+M} & \frac{RM}{L^2-M^2} \\ \frac{RM}{L^2-M^2} & -\frac{RL}{L^2-M^2} + \frac{R}{L+M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

El sistema 3.41 se puede reducir a:

$$-\frac{RM}{L^2-M^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Del sistema 3.42 se observa que $A = C$. Del autovalor γ_2 de la matriz característica, se determina el segundo autovector:

$$\frac{RM}{L^2-M^2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

A partir de 3.43 se obtiene que $B = -D$. Sustituyendo los autovectores correspondientes en la ecuación 3.39:

$$\begin{aligned} i_{1h}(t) &= Ae^{-\frac{R}{L+M}t} + Be^{-\frac{R}{L-M}t} \\ i_{2h}(t) &= Ae^{-\frac{R}{L+M}t} - Be^{-\frac{R}{L-M}t} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Si el sistema no está alimentado por fuentes forzantes y se sustituyen en 3.44 las condiciones iniciales $i_1(0) = I$ e $i_2(0) = 0$:

$$\begin{aligned} I &= A + B \\ 0 &= A - B \end{aligned} \quad (3.45)$$

La solución del sistema 3.45 es:

$$A = B = \frac{1}{2} I \quad (3.46)$$

Reemplazando el resultado 3.46 en la ecuación 3.44 se obtiene la siguiente solución:

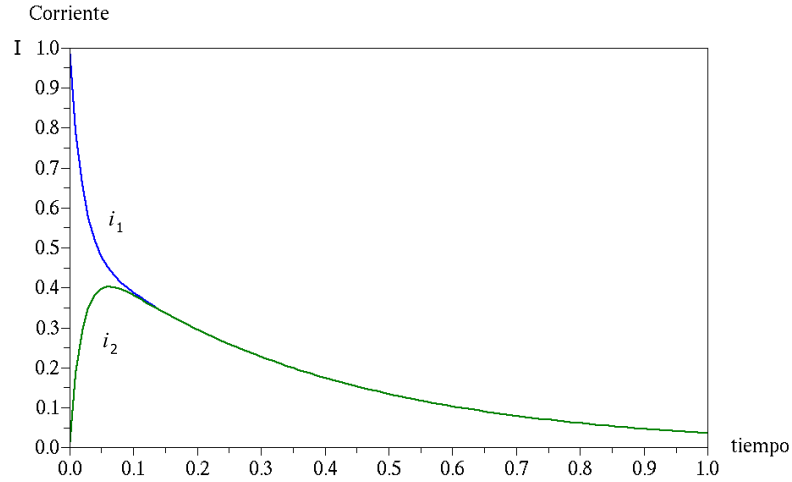


Figura 3.4 Corrientes en el transformador

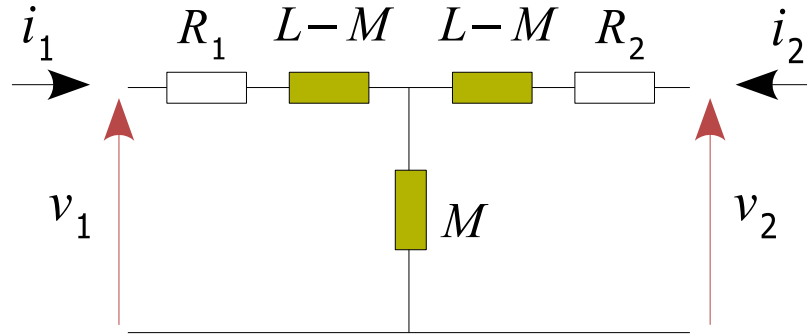


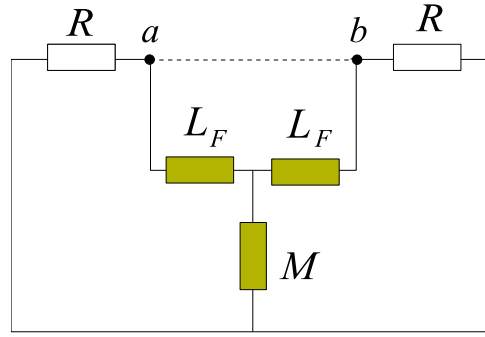
Figura 3.5 Circuito equivalente del transformador de dos bobinas

$$\begin{aligned} i_{1h}(t) &= \frac{I}{2}e^{-\frac{R}{L+M}t} + \frac{I}{2}e^{-\frac{R}{L-M}t} \\ i_{2h}(t) &= \frac{I}{2}e^{-\frac{R}{L+M}t} - \frac{I}{2}e^{-\frac{R}{L-M}t} \end{aligned} \quad (3.47)$$

En la figura 3.4, se observa el diagrama en el tiempo de las corrientes en el primario y secundario del transformador.

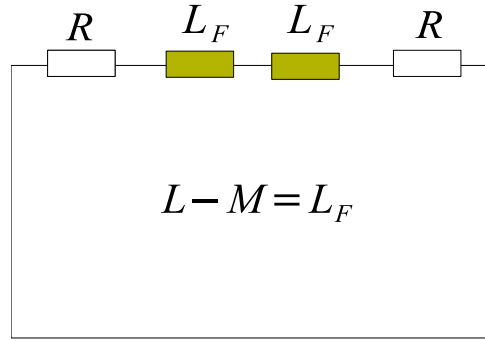
El circuito de la figura 3.5 satisface la ecuación 3.27 para el transformador de la figura 3.3. Para obtener las ecuaciones homogéneas de este circuito equivalente es necesario cortocircuitar los dos puertos del transformador.

En la figura 3.6(a) se presenta una interpretación en el circuito equivalente del transformador, de la constante de tiempo de magnetización. Si se unen los puntos "a" y "b" de la figura, entre estos puntos y tierra, la constante de tiempo del circuito es:



$$L - M = L_F$$

(a) Circuito de magnetización



(b) Circuito de fuga

Figura 3.6 Constante de tiempo del circuito magnético

$$\tau_M = \frac{\frac{1}{2}L_F + M}{\frac{1}{2}R} = \frac{L_F + 2M}{R} = \frac{L + M}{R} \quad (3.48)$$

En la figura 3.6(b) se presenta el circuito equivalente para la constante de tiempo de fuga. En este caso se desprecia la inductancia mutua M del circuito equivalente:

$$\tau_F = \frac{L_F}{R} = \frac{L - M}{R} \quad (3.49)$$

Una forma más directa para calcular la respuesta transitoria y permanente de sistemas acoplados magnéticamente consiste en aplicar la Transformada de Laplace. Si al sistema 3.27, se le aplica esta transformación, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas:

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} s \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Agrupando el vector de corrientes y sustituyendo los valores del transformador de la figura 3.4:

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R + sL & sM \\ sM & R + sL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

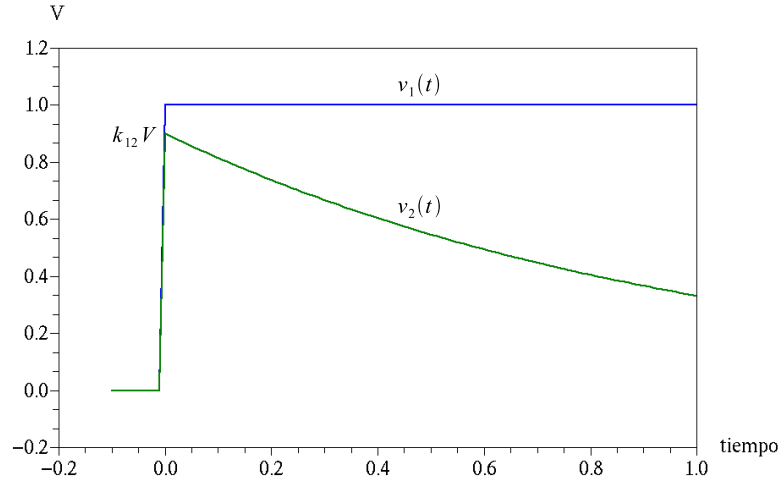


Figura 3.7 Respuesta en el tiempo del transformador al escalón de tensión

A partir de la ecuación 3.51, se puede determinar la transferencia transitoria de tensiones en el secundario de un transformador. Si el transformador se encuentra en vacío, la corriente del circuito secundario i_2 es cero y por tanto, $I_2(s)$ es cero también. En estas condiciones:

$$V_1(s) = (R + sL) I_1(s) \quad (3.52)$$

$$V_2(s) = sM I_1(s) \quad (3.53)$$

Dividiendo la ecuación 3.53 por la ecuación 3.52 se obtiene la función de transferencia operacional entre las tensiones secundaria y primaria del transformador:

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{sM}{R + sL} \quad (3.54)$$

Si se aplica un escalón de tensión en la bobina primaria, la tensión secundaria se calcula a partir de la ecuación 3.54 como:

$$V_2(s) = \frac{M}{R + sL} V \quad (3.55)$$

Antitransformando la ecuación 3.55:

$$v_2(t) = \frac{M}{L} V e^{-\frac{R}{L}t} = k_{12} V e^{-\frac{R}{L}t} \quad (3.56)$$

La ecuación 3.56 se ha determinado, haciendo uso de la definición del coeficiente de acoplamiento mutuo de la ecuación 3.19. En la figura 3.7 se representa la respuesta al impulso del transformador de dos devanados con el secundario en vacío.

Si se aplica al transformador una tensión sinusoidal en el primario en lugar de un escalón, para el tiempo mayor o igual que cero, se tiene:

$$v_1(t) = V \sin \omega t \Rightarrow V_1(s) = \frac{\omega V}{s^2 + \omega^2}, \quad \forall t \geq 0 \quad (3.57)$$

Sustituyendo la ecuación 3.57 en 3.54 se obtiene:

$$V_2(s) = \frac{\omega MV}{L} \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (3.58)$$

Reagrupando la ecuación 3.58 en fracciones parciales y antitransformando:

$$v_2(t) = \frac{\omega MV}{L(\omega^2 + \frac{R^2}{L^2})} \left[\frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} + \omega \sin \omega t + \frac{R}{L} \cos \omega t \right] \quad (3.59)$$

La ecuación 3.59 representa una respuesta sinusoidal en régimen permanente superpuesta a un decaimiento exponencial, similar al obtenido en la ecuación 3.56, cuando se aplica un escalón de tensión al primario del transformador.

3.5. Sumario

1. Las máquinas eléctricas están constituidas en general por varios circuitos acoplados magnéticamente. Su comportamiento electromagnético puede ser estudiado mediante la técnica de autovectores y autovalores o a través de la Transformada de Laplace si el convertidor es lineal, o cuando se linealiza su comportamiento en torno a un punto de operación.
2. Si la máquina no es lineal y es necesario evaluar su comportamiento a grandes perturbaciones, las ecuaciones diferenciales deben ser integradas por métodos numéricos tales como los algoritmos de Simpson, Euler, Euler Modificado, Regla Trapezoidal, Runge Kutta de varios órdenes o mediante métodos de predicción y corrección de error como el de Adams o el de Adams-Merson.

3.6. Ejercicios propuestos

1. El circuito magnético acoplado que se ilustra en la figura 3.8 posee tres bobinas con 100, 200 y 300 vueltas respectivamente. El circuito magnético que cierra las tres bobinas tiene una longitud media de 60 cm, un área de 25 cm² y una permeabilidad relativa μ_r de 1000. Las tres bobinas están constituidas por conductores de cobre del mismo diámetro (2 mm² y $1,75 \times 10^{-8} \Omega m$). El flujo de dispersión de cada bobina es proporcional a su respectivo número de vueltas y el coeficiente de acoplamiento entre la bobina de 100 y 200 vueltas es 0,95. Determine:

a) Las resistencias e inductancias propias y mutuas de este transformador.

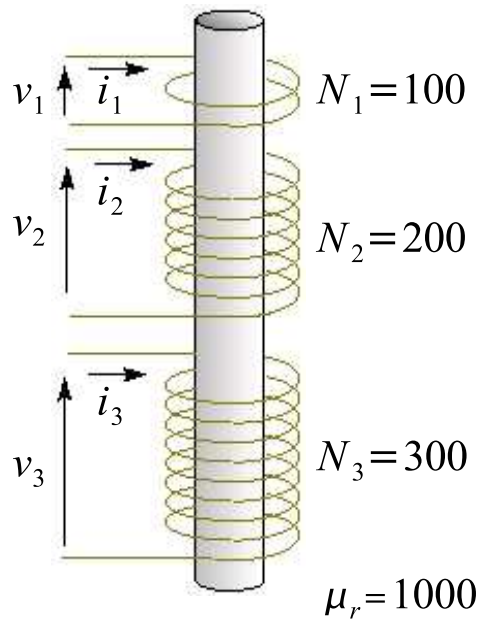


Figura 3.8 Circuito magnético con tres bobinas acopladas

- b) Los respectivos coeficientes de acoplamiento y dispersión.
 - c) Las constantes de tiempo del circuito si la bobina de 100 vueltas está en cortocircuito y las otra dos bobinas se conectan en serie pero en contrafase (polaridad opuesta), excitadas con una fuente sinusoidal de 50 V efectivos.
 - d) La corriente resultante en cada bobina si se excita en el instante inicial la bobina de 100 vueltas con 12 V continuos, mientras que las otras dos bobinas están cortocircuitadas independientemente.
2. En la figura 3.9 se representa un transformador de dos devanados conectado como auto-transformador. Se desea hacer un análisis lo más detallado posible de la operación en régimen permanente y transitorio de este convertidor. La carga del auto-transformador es un condensador y se excita mediante un escalón de tensión continua en la entrada. Determine las corrientes y tensiones permanentes y transitorias tanto en la entrada como en condensador.

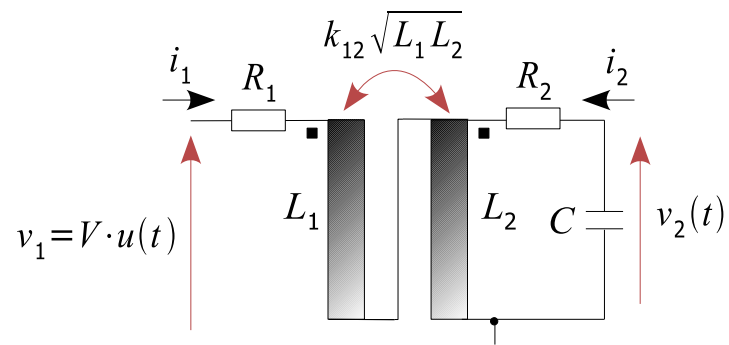


Figura 3.9 Diagrama esquemático del autotransformador

Bibliografía

- [1] O. Kelly & S. Simmons; "Introduction to Generalized Machine Theory," McGraw and Hall, 1968.
- [2] MIT ; "Circuitos Magnéticos y Transformadores," Editorial Reverté, Madrid, 1965.
- [3] E. Ras; "Transformadores, de Potencia, de Medida y de Protección," Ediciones Técnicas Marcombo, Tercera Edición, 1975

CAPÍTULO 4

Máquinas Eléctricas Rotativas

Las máquinas eléctricas se han desarrollado en un frenético proceso evolutivo que comienza a mediados del siglo XIX y que aun continúa en la actualidad. Innumerables patentes de conocidos inventores tales como Edison y Tesla entre muchos otros, realizaron contribuciones significativas que lograron eficacia y eficiencia en la conversión electromecánica de energía. Después de todo este proceso las máquinas convencionales presentan características comunes que permiten generalizar la descripción matemática de su comportamiento mediante las herramientas discutidas en los dos capítulos anteriores. Los modelos analíticos de las máquinas eléctricas convencionales pueden ser notablemente simplificados cuando se realizan las hipótesis apropiadas y se utilizan transformaciones de las coordenadas de las variables de estado, a sistemas de coordenadas donde el comportamiento de estos convertidores se independizan de la posición angular del rotor.

4.1. Características comunes

Las máquinas eléctricas rotativas convencionales, presentan generalmente las siguientes características comunes:

1. Poseen un *eje mecánico* a través del cual se realiza el intercambio de energía.
2. Tienen una pieza estática o inmóvil denominada *estator*.
3. Disponen de una pieza móvil denominada *rotor* en el caso particular de las máquinas cilíndricas.
4. Generalmente son *cilíndricas*.
5. El flujo en el entrehierro de la máquina es *periódico*.

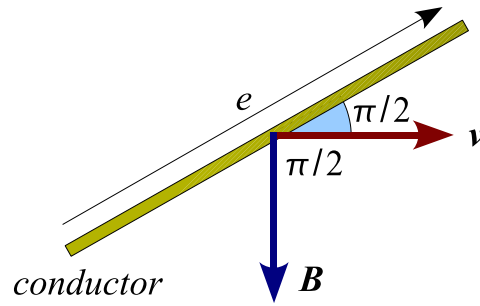


Figura 4.1 Conductor en condiciones óptimas de operación

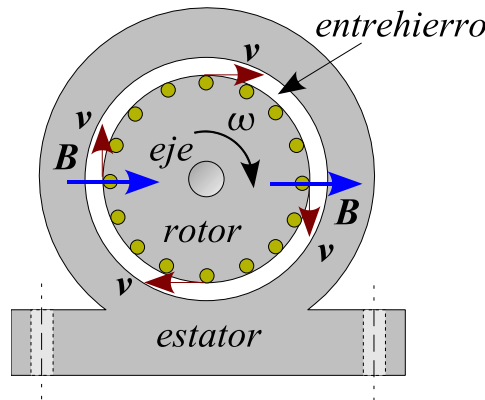


Figura 4.2 Configuración cilíndrica de los conductores en una máquina

Al estudiar el conductor en presencia de un campo magnético, resulta conveniente para obtener la mayor fuerza eléctrica posible, que el conductor, su velocidad de desplazamiento y el campo magnético se encuentren perpendiculares entre sí. Además, de esta forma la fuerza electromotriz e aparece disponible en el sentido del conductor como se puede observar en la figura 4.1.

La mayor parte de las máquinas eléctricas convencionales son cilíndricas porque en esta geometría se obtiene una disposición de todos los conductores en la cual, la velocidad, el campo magnético y los conductores son perpendiculares entre sí. En la figura 4.2 se muestra un diagrama de este tipo de configuración.

En la superficie de revolución o manto del cilindro, se encuentran los conductores dispuestos en forma axial y simétrica. La simetría evita vibraciones en la máquina, pero además es necesario que la corriente se distribuya uniformemente por todos los conductores.

En una máquina cilíndrica, se garantiza la periodicidad del flujo porque la divergencia de la densidad de campo magnético es nula - $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ -. En otras palabras, todo el flujo que penetra la superficie cilíndrica sale de ella como se ilustra en la figura 4.3.

Ahora bien:

$$\phi = \int_0^{2\pi} d\phi \quad (4.1)$$

donde:

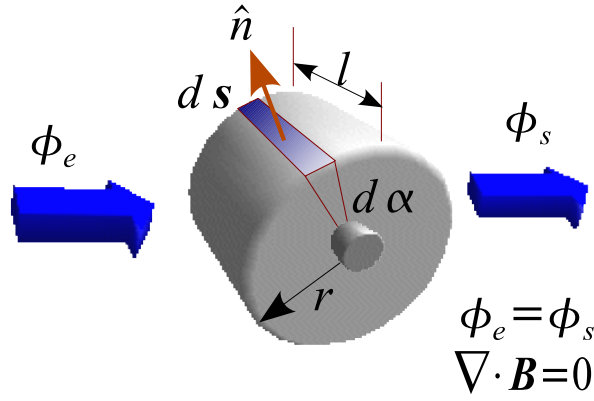


Figura 4.3 Flujo entrando y saliendo de un cilindro

$$d\phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (4.2)$$

De la figura 4.3 se puede deducir que:

$$d\mathbf{s} = r \cdot l \cdot \hat{\mathbf{n}} d\theta \quad (4.3)$$

y sustituyendo 4.3 en 4.2:

$$d\phi = \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \cdot r \cdot l d\theta \quad (4.4)$$

Como todo el flujo que penetra en el cilindro es igual al que sale de él:

$$\int_0^{2\pi} d\phi = 0 \Rightarrow \int_0^{2\pi} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (4.5)$$

A partir de la ecuación 4.5 se determina que el diferencial de flujo en un período de revolución del cilindro es cero. Por lo tanto, la distribución del campo magnético \mathbf{B} en función del ángulo, es periódica y existe alternancia en el signo del campo. Por otra parte se determina a partir de la expresión 4.5, que para anular la integral en un período completo, las áreas positiva y negativa de la función densidad del campo magnético \mathbf{B} en función del ángulo tienen que ser iguales, tal como se observa en la figura 4.4.

Como la distribución de la densidad de campo \mathbf{B} , en función del ángulo es periódica, se puede descomponer en series de Fourier espaciales. En la figura 4.5 se ha representado la primera armónica o componente fundamental del campo, suponiendo que éste presenta simetría impar. Para calcular el valor de la densidad de campo correspondiente a la primera armónica en el punto δ de la figura 4.5, se tiene:

$$\mathbf{B}_1(\delta) = B_{1max} \cdot \cos\delta \quad (4.6)$$

donde B_{1max} es la amplitud del campo \mathbf{B}_1 . En la figura -47-, se ha representado la distribución del campo alrededor del cilindro.

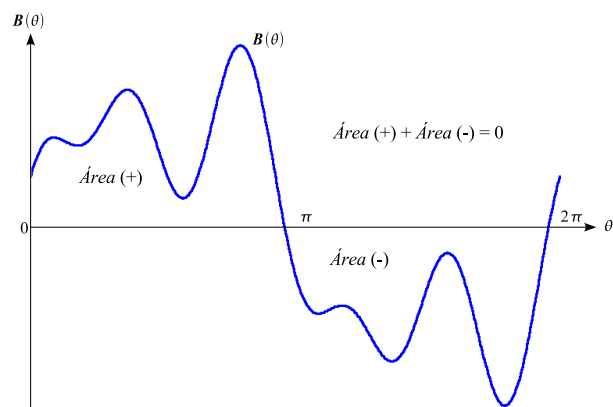


Figura 4.4 Distribución de la densidad de campo \mathbf{B} en un cilindro

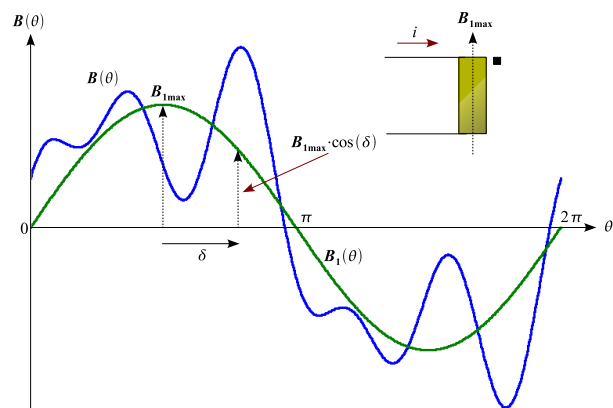


Figura 4.5 Primera armónica de la densidad de campo \mathbf{B}

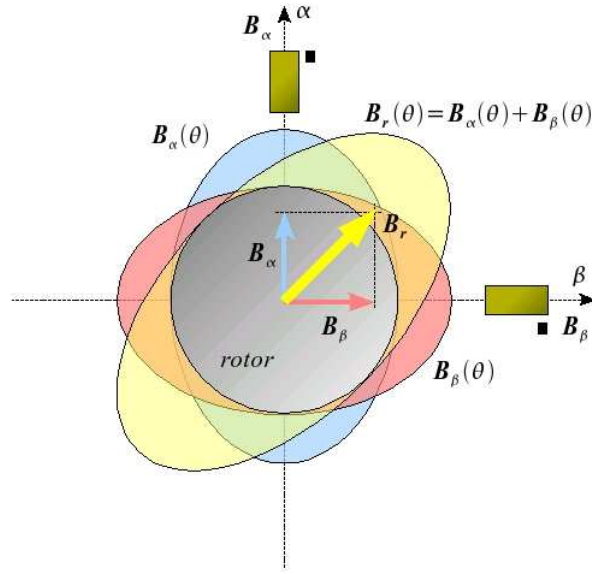


Figura 4.6 Distribución espacial del campo en el cilindro

4.2. Bobinas ortogonales

Cualquier distribución sinusoidal en el espacio de la densidad de campo, puede ser obtenida a partir de la suma vectorial de dos componentes ortogonales tales como B_α y B_β de la figura 4.6. Dado que B_1 es sinusoidal, la distribución de los campos B_α y B_β también deben ser sinusoidales. En las máquinas eléctricas convencionales se distribuyen los conductores en la periferia de la máquina para que al inyectar las corrientes i_α e i_β que se muestran en la figura, la configuración espacial del flujo en la periferia del cilindro resulte aproximadamente sinusoidal. En esta figura se han representado dos bobinas colineales con los ejes α y β respectivamente cuyo eje magnético coincide con la amplitud de la distribución espacial del campo. Cuando por cualquiera de las bobinas circula corriente, se produce un campo en toda la periferia de la máquina, cuya amplitud se encuentra orientada según su respectivo eje.

En general B_α , es un vector que representa la magnitud y dirección de la primera armónica del campo en el cilindro según el eje α . B_β , es el vector que representa la amplitud y dirección de la primera armónica del campo según el eje β . Por lo tanto:

$$B_{1max} = B_\alpha + B_\beta \quad (4.7)$$

Tanto B_α como B_β tienen un solo grado de libertad, es decir, solamente puede variar en magnitud o signo, pero no en dirección. Las dos componentes poseen el mismo período espacial y se encuentran en cuadratura, según la posición relativa de los devanados. Para obtener cualquier valor de B_α o B_β , es suficiente con ajustar las corrientes i_α e i_β . Estas consideraciones son válidas tanto para el rotor como para el estator de las máquinas eléctricas rotativas.

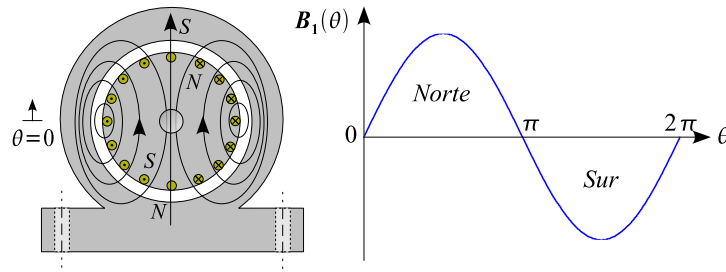


Figura 4.7 Polo norte y sur de un cilindro

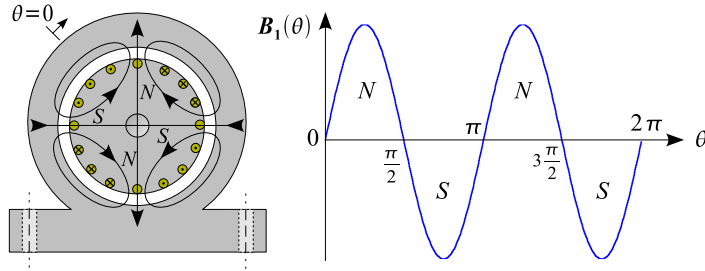


Figura 4.8 Cilindro con dos pares de polos

4.3. Múltiples pares de polos.

Cuando se analiza la distribución del flujo en la máquina, se observa que en una zona de los 2π radianes, el campo es positivo - *el flujo sale de la superficie* - y en el resto del cilindro, es negativo - *el flujo penetra en la superficie del cilindro* -. La zona del cilindro en el cual hay salida del flujo se define como polo norte y la región por la cual penetra el flujo a la superficie se define como polo sur. En la figura 4.7 se ilustra el polo norte y sur de un cilindro elemental excitado por dos conductores.

Las máquinas eléctricas pueden ser diseñadas de tal manera que en el desarrollo de 2π radianes existan varios polos norte y varios polos sur. En la figura 4.8 se muestra un ejemplo de un cilindro en el cual existen dos polos norte y dos polos sur alternados entre si. Esta situación corresponde a una máquina con dos pares de polos, pero se puede repetir con cualquier cantidad de pares de polos. Como en las máquinas eléctricas cada par de polos se repite exactamente igual, es suficiente analizar el primer par de polos y extender los resultados obtenidos a la totalidad de la máquina.

En una máquina con múltiples pares de polos se definen ángulos eléctricos y mecánicos. Los ángulos mecánicos o ángulos físicos son los que se han utilizado en todo el análisis y son ángulos reales. Para definir los ángulos eléctricos se acota un paso polar de la máquina, es decir la zona comprendida por un par de polos y se define este ángulo mecánico como 2π radianes eléctricos. En la figura 4.9, se ilustra este concepto con una máquina de tres pares de polos. Entre 0 y $\frac{2\pi}{3}$ radianes mecánicos se definen 2π radianes eléctricos.

Si se define como p el número de pares de polos de la máquina, entonces:

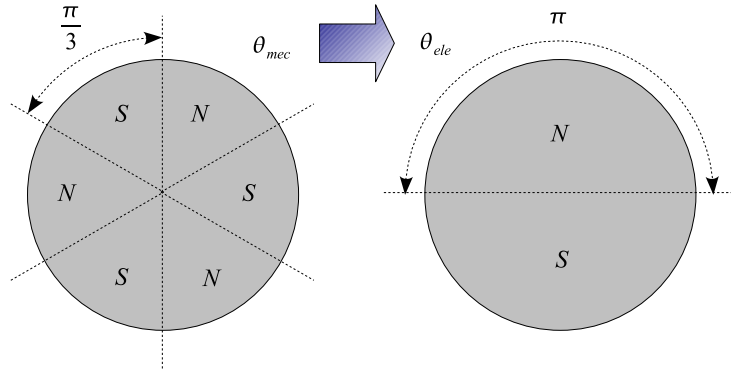


Figura 4.9 Definición de ángulos eléctricos y mecánicos

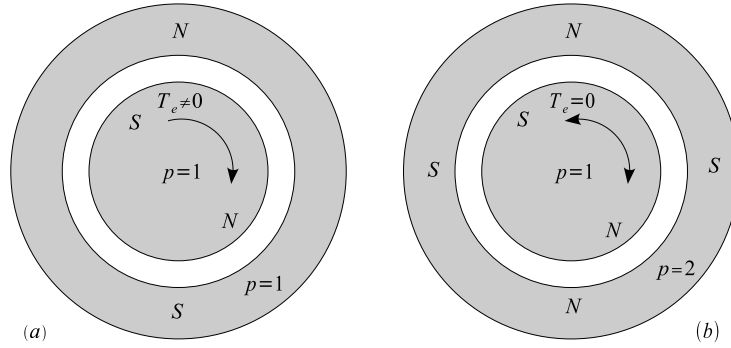


Figura 4.10 Máquina con iguales (a) y diferentes (b) números de pares de polos en el rotor y en el estator

$$\theta_{elctrico} = p \cdot \theta_{mecnico} \quad (4.8)$$

Mediante la ecuación 4.8 se puede estudiar la configuración y operación de una parte de la máquina, recordando que en el resto se repite el proceso tantas veces como número de pares de polos p tenga el convertidor. Para calcular el par, es necesario recordar que cada uno de los elementos de repetición produce un par idéntico, por lo tanto, el par en el eje mecánico de la máquina real se calcula como:

$$T_{total} = p \cdot T_{elctrico} \quad (4.9)$$

El rotor y el estator de una máquina deben tener siempre el mismo número de pares de polos, porque en caso contrario no es posible producir par promedio neto diferente de cero. En la figura 4.10 se muestra un ejemplo de esta situación. En la máquina (a) los polos norte y sur intentan alinearse, para reducir al mínimo posible la longitud de los enlaces de flujo y, por lo tanto, la energía almacenada en el campo. En la máquina (b) se producen pares iguales y opuestos, y por esta razón el par total sobre el eje es nulo.

En los análisis de los capítulos posteriores, se considera siempre un par de polos extendido a 2π radianes eléctricos. No se utiliza un índice específico para diferenciar los ángulos eléctricos de los ángulos mecánicos. En los casos en que es necesario, se indica en las expresiones el número

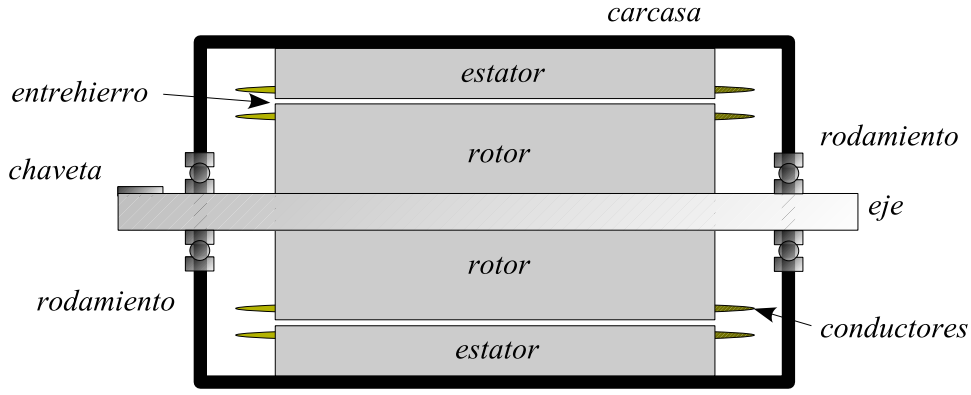


Figura 4.11 Partes de una máquina eléctrica rotativa

de pares de polos p de la máquina en estudio.

4.4. La máquina generalizada

Las máquinas eléctricas rotativas poseen características comunes entre si, y en general se asemejan al modelo representado en la figura 4.11. En algunas ocasiones el elemento interior de la máquina es fijo y el exterior móvil, incluso pueden ser móviles los dos elementos, pero lo más característico de las máquinas eléctricas rotativas es la existencia de dos superficies cilíndricas con movimiento relativo entre una y otra.

El flujo puede ser descompuesto en dos componentes ortogonales α y β . Para representar el flujo producido en el rotor se inyectan corrientes en las bobinas α_r y β_r , fijas en el rotor. El flujo del estator se obtiene inyectando corrientes en las bobinas α_e y β_e fijas en el estator. Estos devanados no tienen necesariamente existencia física, pero pueden reproducir los campos en el interior de la máquina. La posición relativa entre el rotor y el estator queda determinada mediante el ángulo θ , medido entre los ejes magnéticos α_e y α_r respectivamente.

La máquina eléctrica generalizada posee cuatro ejes eléctricos α_e , α_r , β_e y β_r por los cuales se inyectan las corrientes y un eje mecánico o eje de giro. El flujo en el entrehierro de la máquina cambia su distribución cuando varían las corrientes i_{α_r} , i_{β_r} , i_{α_e} e i_{β_e} . En la figura 4.12 se representa el esquema de las bobinas ortogonales de la máquina generalizada.

Definiendo a T_m como el par mecánico en el eje de la máquina, las ecuaciones de la máquina en forma matricial compacta, son:

$$\begin{aligned} [v] &= [R] [i] + \dot{\theta} [\tau(\theta)] [i] + [L(\theta)] \frac{d}{dt} [i] \\ T_m &= -\frac{1}{2} [i]^t [\tau(\theta)] [i] + J \ddot{\theta} + \rho \dot{\theta} \end{aligned} \quad (4.10)$$

En el sistema de ecuaciones 4.10, ρ es el coeficiente de fricción y J es la inercia del eje de rotación. Las variables de estado de este sistema de ecuaciones diferenciales son las corrientes $[i]$, el ángulo θ y la velocidad angular $\frac{d\theta}{dt}$, denominada también ω_m .

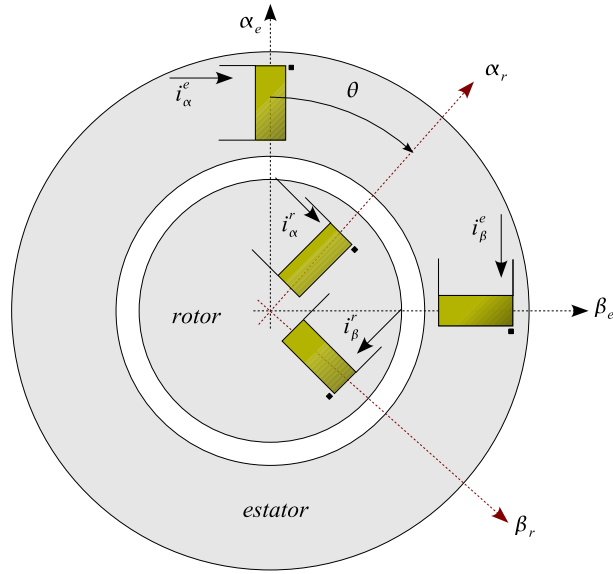


Figura 4.12 Esquema de la máquina generalizada

Para poder plantear el sistema 4.10, es necesario determinar las matrices de *resistencias* $[R]$, *inductancias* en función del ángulo $[L(\theta)]$, así como la derivada con respecto al ángulo θ de la matriz de inductancias, también denominada *matriz de par* $[\tau(\theta)]$.

La matriz de resistencias

La matriz de resistencias de la máquina eléctrica generalizada es diagonal porque todas las resistencias son propias de cada bobina y no existen resistencias mutuas debido a que los devanados están aislados galvánicamente:

$$[R] = \begin{bmatrix} R_{e\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{e\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{r\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{r\beta} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

La matriz de inductancias

Si la máquina posee un rotor cilíndrico y homogéneo, al girar no se modifica la permeanza del camino magnético, por esta razón la inductancia propia del estator no depende de la posición del rotor. La inductancia propia del estator es constante e independiente del ángulo θ . Esta inductancia se puede calcular como:

$$L_e = N_e^2 \cdot P_e \quad (4.12)$$

Si el estator es cilíndrico, la inductancia propia del rotor es constante por el mismo razonamiento anterior. Si todos los devanados del estator poseen el mismo número de vueltas y lo mismo ocurre con las bobinas del rotor, los términos de la diagonal de la matriz de inductancia son:

$$[L] = \begin{bmatrix} L_e & ? & ? & ? \\ ? & L_e & ? & ? \\ ? & ? & L_r & ? \\ ? & ? & ? & L_r \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Las inductancias mutuas entre los devanados α y β del estator son cero porque estas bobinas son ortogonales y el flujo que se produce en una de ellas no puede enlazar a la otra. La misma situación sucede con los devanados del rotor:

$$[L] = \begin{bmatrix} L_e & 0 & ? & ? \\ 0 & L_e & ? & ? \\ ? & ? & L_r & 0 \\ ? & ? & 0 & L_r \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

La inductancia mutua entre la bobina α del estator y α del rotor es máxima cuando ambos devanados se encuentran alineados, es decir con $\theta = 0$. Para representar este valor de la inductancia mutua se debe utilizar un término en $\cos\theta$.

Una situación semejante se presenta entre el eje β del estator y el eje β del rotor. La inductancia mutua entre las bobinas α del rotor y β del estator es máxima cuando $\theta = \frac{\pi}{2}$; esto se representa mediante un término en $\sin\theta$. La inductancia mutua entre el devanado β del rotor y α del estator es máxima cuando $\theta = -\frac{\pi}{2}$; por esta razón esta inductancia se puede representar mediante un término $-\sin\theta$.

De esta forma y recordando que la matriz de inductancias es simétrica, se obtiene:

$$[L] = \begin{bmatrix} L_e & 0 & L_{er}\cos\theta & -L_{er}\sin\theta \\ 0 & L_e & L_{er}\sin\theta & L_{er}\cos\theta \\ L_{er}\cos\theta & L_{er}\sin\theta & L_r & 0 \\ -L_{er}\sin\theta & L_{er}\cos\theta & 0 & L_r \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Matriz de par

La matriz de par $[\tau(\theta)]$ se calcula derivando con respecto al ángulo θ la matriz de inductancias de la máquina:

$$[\tau(\theta)] = \frac{d}{d\theta} [L] \quad (4.16)$$

De esta forma se obtiene:

$$[\tau(\theta)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -L_{er}\sin\theta & -L_{er}\cos\theta \\ 0 & 0 & L_{er}\cos\theta & -L_{er}\sin\theta \\ -L_{er}\sin\theta & L_{er}\cos\theta & 0 & 0 \\ -L_{er}\cos\theta & -L_{er}\sin\theta & 0 & 0_r \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

4.5. Cálculo del par eléctrico

A partir de las matrices 4.15 y 4.17 se puede calcular el par eléctrico de la máquina:

$$T_e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i_{e\alpha} \\ i_{e\beta} \\ i_{r\alpha} \\ i_{r\beta} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} L_e & 0 & L_{er}\cos\theta & -L_{er}\sin\theta \\ 0 & L_e & L_{er}\sin\theta & L_{er}\cos\theta \\ L_{er}\cos\theta & L_{er}\sin\theta & L_r & 0 \\ -L_{er}\sin\theta & L_{er}\cos\theta & 0 & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{e\alpha} \\ i_{e\beta} \\ i_{r\alpha} \\ i_{r\beta} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Efectuando los productos matriciales en la ecuación 4.18 se obtiene:

$$T_e = L_{er} \{ \sin\theta (-i_{e\alpha} \cdot i_{r\alpha} - i_{e\beta} \cdot i_{r\beta}) + \cos\theta (-i_{e\alpha} \cdot i_{r\beta} + i_{e\beta} \cdot i_{r\alpha}) \} \quad (4.19)$$

Si las corrientes del estator o del rotor son cero, todos los términos del par eléctrico en la ecuación 4.19 se anulan y no se produce par. Si se inyectan corrientes constantes en todas las bobinas del rotor y del estator el par eléctrico que se obtiene es de la forma:

$$T_e = L_{er} \{ A \cdot \sin\theta + B \cdot \cos\theta \} \quad (4.20)$$

En la ecuación 4.20 se observa que para cada valor de la posición del rotor θ existe un par eléctrico, pero el promedio de ese par en un giro completo de la máquina es cero. Esta es una razón que refuerza el concepto de la imposibilidad de que una máquina eléctrica pueda funcionar en régimen permanente con corriente continua en todos sus devanados.

Calculando el par eléctrico promedio de la máquina bifásica en un período, se obtiene:

$$\langle T_e \rangle = \frac{L_{er}}{T} \int_0^T \{ \sin\theta (-i_{e\alpha} \cdot i_{r\alpha} - i_{e\beta} \cdot i_{r\beta}) + \cos\theta (-i_{e\alpha} \cdot i_{r\beta} + i_{e\beta} \cdot i_{r\alpha}) \} d\theta \quad (4.21)$$

El ángulo θ en la expresión 4.21, considerando que el rotor gira a velocidad angular constante ω_m , se puede expresar como:

$$\theta = \omega_m t + \theta_0 \quad (4.22)$$

Sustituyendo la expresión 4.22 en 4.21, se obtiene:

$$\begin{aligned} \langle T_e \rangle = \frac{L_{er}}{T} \int_0^T \{ & \sin(\omega_m t + \theta_0) (-i_{e\alpha} \cdot i_{r\alpha} - i_{e\beta} \cdot i_{r\beta}) + \\ & + \cos(\omega_m t + \theta_0) (-i_{e\alpha} \cdot i_{r\beta} + i_{e\beta} \cdot i_{r\alpha}) \} d\omega_m t \end{aligned} \quad (4.23)$$

Si se expresan las corrientes en forma de cosenos:

$$\begin{aligned}
i_{e\alpha} &= \sqrt{2}I_{e\alpha}\cos(\omega_{e\alpha}t + \theta_{e\alpha}) \\
i_{e\beta} &= \sqrt{2}I_{e\beta}\cos(\omega_{e\beta}t + \theta_{e\beta}) \\
i_{r\alpha} &= \sqrt{2}I_{r\alpha}\cos(\omega_{r\alpha}t + \theta_{r\alpha}) \\
i_{r\beta} &= \sqrt{2}I_{r\beta}\cos(\omega_{r\beta}t + \theta_{r\beta})
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Recordando que:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin\theta \cdot \cos\theta d\theta = 0 \tag{4.25}$$

Los únicos términos que pueden producir por promedio diferente de cero son los productos de *cosenos*, por lo tanto:

$$\langle T_e \rangle = \frac{L_{er}}{T} \int_0^T \{ \cos(\omega_m t + \theta_0) \cdot (-i_{e\alpha} \cdot i_{r\beta} + i_{e\beta} \cdot i_{r\alpha}) \} d\theta \tag{4.26}$$

Si las corrientes estatóricas y rotóricas son periódicas, es posible expresarlas mediante series de Fourier. Utilizando expansión de las funciones en series de *cosenos*:

$$i_e = \sum_{k=1}^{\infty} I_{ke} \cos(k\omega_e t - \gamma_e) \tag{4.27}$$

$$i_r = \sum_{j=1}^{\infty} I_{jr} \cos(j\omega_r t - \gamma_r) \tag{4.28}$$

Los términos del par son de la forma:

$$\cos(\omega_m t + \theta_0) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} I_{ke} \cos(k\omega_e t - \gamma_e) \cdot \sum_{j=1}^{\infty} I_{jr} \cos(j\omega_r t - \gamma_r) \tag{4.29}$$

Recordando la propiedad trigonométrica:

$$\begin{aligned}
\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma &\equiv \frac{1}{4} [\cos(\alpha + \beta + \gamma) + \cos(\alpha + \beta - \gamma) + \dots \\
&\dots + \cos(\alpha - \beta + \gamma) + \cos(-\alpha + \beta + \gamma)]
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Se puede aplicar esta propiedad al término genérico del par eléctrico 4.29. El término genérico queda entonces así:

$$\cos(\omega_m t + \theta_0 \pm k\omega_e t \pm j\omega_r t \pm \gamma_e \pm \gamma_r) \tag{4.31}$$

Para que un término igual al 4.31 tenga un promedio diferente de cero en un período, es necesario que se anule la dependencia del tiempo en el argumento de la función coseno:

$$\omega_m \pm k\omega_e \pm j\omega_r = 0 \tag{4.32}$$

La ecuación 4.42 es fundamental en el análisis de las máquinas eléctricas rotativas y se conoce como condición necesaria para par promedio. En la ecuación 4.42, ω_m es la velocidad mecánica del sistema, ω_e representa la frecuencia angular de las corrientes inyectadas en las bobinas del estator y ω_r es la frecuencia angular de las corrientes inyectadas en el rotor.

Los tipos más comunes de máquinas eléctricas convencionales se diferencian por el mecanismo que utilizan para dar cumplimiento a la ecuación 4.42. Las *máquinas sincrónicas*, de *inducción* y de *corriente continua* utilizan diferentes mecanismos de excitación de sus bobinas rotóricas y estatóricas, pero siempre deben satisfacer la condición necesaria de par promedio para permitir la conversión de energía.

La máquina sincrónica

A las máquinas sincrónicas se les inyecta corriente continua en las bobinas rotóricas, por esta razón:

$$\omega_r = 0 \quad (4.33)$$

Aplicando la condición necesaria de par promedio 4.42 con la restricción 4.43 para las máquinas sincrónicas, se obtiene:

$$\omega_m \pm k\omega_e = 0 \quad (4.34)$$

La ecuación 4.44 justifica el nombre de estas máquinas, ya que las máquinas sincrónicas sólo pueden producir par promedio diferente de cero cuando la velocidad mecánica coincide con la velocidad angular de las corrientes inyectadas en el estator. En otras palabras la máquina debe girar en sincronismo con las corrientes estatóricas.

Las máquinas de corriente continua son un caso particular de máquina sincrónica, donde la igualdad de frecuencias entre las corrientes -rotóricas en este caso- y la velocidad mecánica se obtiene mediante un inversor mecánico constituido por un colector y un juego de carbones que conmuta las corrientes en las bobinas del rotor con una frecuencia igual a la velocidad mecánica de giro.

La máquina de inducción

En la máquina de inducción se permite un grado de libertad adicional. En esta máquina se puede obtener par promedio diferente de cero en un amplio rango de velocidades mecánicas. Las corrientes que circulan por el rotor se ajustan - *por el fenómeno de inducción electromagnética* - y cumplen la condición 4.42. En la máquina de inducción se fija la frecuencia de las corrientes en el estator ω_e , se produce un campo electromagnético en el entrehierro de la máquina que gira mecánicamente con la frecuencia angular de estas corrientes. Como el rotor gira a la velocidad mecánica ω_m , los conductores del rotor cortan el campo magnético producido en el estator con una velocidad que es la diferencia entre ω_e y ω_m . La diferencia porcentual entre estas dos

velocidades se conoce como *deslizamiento* de la máquina:

$$s = \frac{\omega_e - \omega_m}{\omega_e} \times 100 \quad (4.35)$$

La velocidad angular ω_e se conoce como velocidad sincrónica de la máquina de inducción.

La máquina de corriente continua

En la figura 4.13 se muestra una máquina de corriente continua simplificada. Esta máquina posee un devanado estatórico por el cual se inyecta corriente continua y una armadura en el rotor alimentada mediante una fuente de corriente continua y un colector que permite la inversión de las corrientes en la armadura. Para calcular el par eléctrico que produce esta máquina se utiliza la expresión deducida en el capítulo 2 para los sistemas lineales:

$$T_e = \frac{1}{2} [i]^t [\tau(\theta)] [i] \quad (4.36)$$

Desarrollando explícitamente la ecuación 4.46 se obtiene:

$$T_e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i_e & i_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -M \sin \theta \\ -M \sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_e \\ i_r \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

En la expresión anterior, M es la inductancia mutua entre el estator y el rotor. Realizando las operaciones matriciales en la ecuación 4.47:

$$T_e = -M \cdot i_e \cdot i_r \cdot \sin \theta \quad (4.38)$$

El colector o conmutador mecánico de la máquina de corriente continua permite alternar la polaridad de la tensión de alimentación de la bobina del rotor V_r al mismo tiempo que gira el rotor. En la figura 4.13 se observa también la corriente que circula por la *armadura* (rotor) de la máquina.

El par promedio en el eje de la máquina se calcula como:

$$\langle T_e \rangle = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^\pi -M I_e I_r \sin \theta d\theta + \int_\pi^{2\pi} M I_e I_r \sin \theta d\theta \right\} \quad (4.39)$$

Resolviendo las integrales de la ecuación 4.49, se obtiene:

$$\langle T_e \rangle = -\frac{2M}{\pi} I_e I_r = k I_e I_r \quad (4.40)$$

La expresión anterior determina el par eléctrico promedio en la máquina de corriente continua. El coeficiente k depende de la construcción física de los devanados del rotor y del estator.

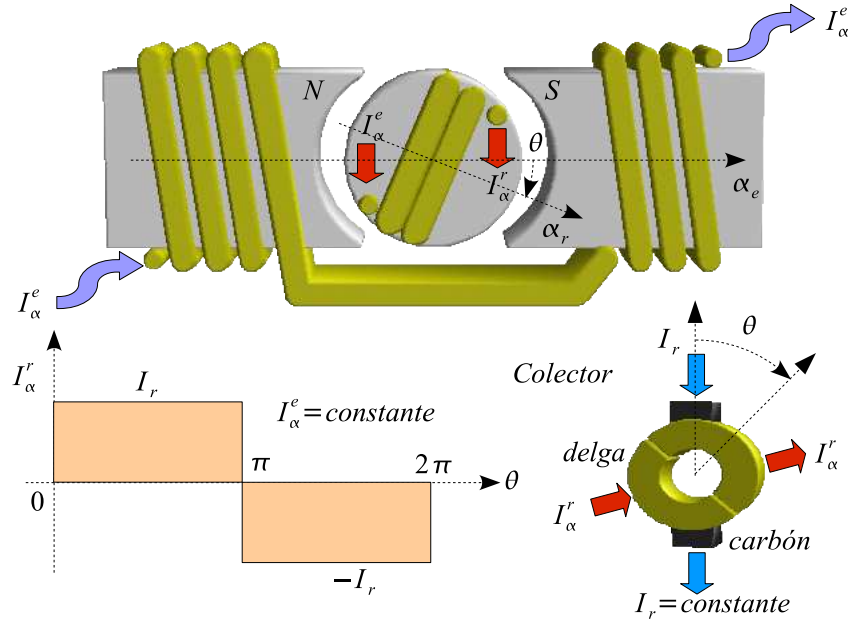


Figura 4.13 Diagrama esquemático de una máquina elemental de corriente continua

4.6. Par eléctrico y fuerzas magnetomotrices

En la figura 4.14 se representa el diagrama de una máquina eléctrica cilíndrica con un *estator* y un *rotor*. En el estator y rotor, se producen las fuerzas magnetomotrices \mathbf{F}_e y \mathbf{F}_r respectivamente, cuya amplitud y dirección se representa vectorialmente en la figura. Estas fuerzas magnetomotrices se encuentran separadas en un ángulo θ una de la otra. La suma de las fuerzas magnetomotriz del rotor y del estator produce la fuerza magnetomotriz resultante en el entrehierro de la máquina \mathbf{F}_t . Para calcular el par eléctrico de una máquina en función de las fuerzas electromotrices, se determina la coenergía en el campo y luego se deriva con respecto a la posición angular θ :

$$T_e = \frac{\partial W'_c(\mathbf{F}, \theta)}{\partial \theta} \quad (4.41)$$

De la figura 4.14 se deduce:

$$\mathbf{F}_t^2 = \mathbf{F}_r^2 + \mathbf{F}_e^2 + 2\mathbf{F}_r\mathbf{F}_e\cos\theta \quad (4.42)$$

Si la permeabilidad del material magnético es muy grande, es decir μ_r tiende a infinito, toda la energía está concentrada en el entrehierro y la coenergía se puede calcular de la siguiente forma:

$$W'_c = W_c = \text{volumen} \times \langle w_c \rangle \quad (4.43)$$

En la ecuación 4.43, $\langle w_c \rangle$ representa la energía promedio en el campo por unidad de volumen. De esta forma:

$$W'_c = 2\pi r \delta l \left\langle \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \right\rangle \quad (4.44)$$

Donde:

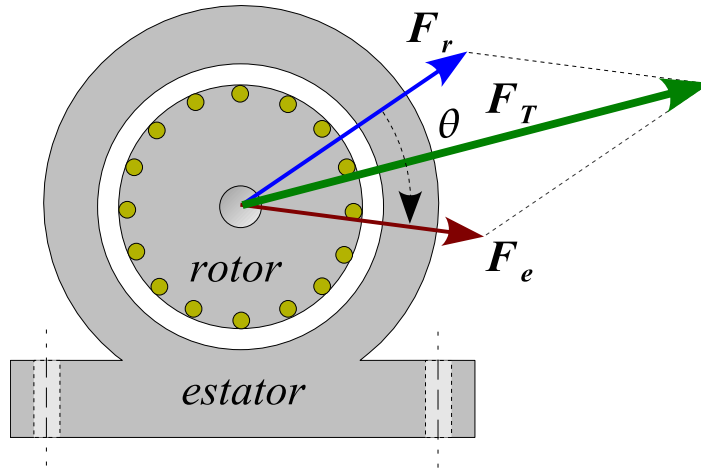


Figura 4.14 Par eléctrico a partir de las fuerzas magnetomotrices

- r es el radio medio del entrehierro [m].
 δ es el espesor del entrehierro [m].
 l es la longitud activa de la máquina [m].

Como la densidad de campo magnético \mathbf{B} en el entrehierro es igual a $\mu_0 \mathbf{H}$:

$$W'_c = 2\pi r \delta l \left\langle \frac{1}{2} \mu_0 \mathbf{H}^2 \right\rangle \quad (4.45)$$

La primera armónica de la intensidad de campo magnético \mathbf{H} es sinusoidal y su valor promedio es:

$$\langle \mathbf{H}^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (H_{max} \sin \theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} H_{max}^2 \quad (4.46)$$

Sustituyendo 4.46 en 4.45:

$$W'_c = 2\pi r \delta l \frac{1}{2} H_{max}^2 \quad (4.47)$$

En la ecuación 4.47, es necesario expresar la amplitud de la intensidad de campo magnético de primera armónica en función de las fuerzas magnetomotrices. En la figura -57-, se representa una máquina con un devanado en el estator. Como la permeabilidad del hierro es infinita toda la fuerza magnetomotriz se utiliza para que el flujo cruce el entrehierro. Aplicando la ley de Ampere a esta máquina, se tiene:

$$\mathbf{F} = NI = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{H}_{aire} \cdot d\mathbf{l}_{aire} + \int \mathbf{H}_{hierro} \cdot d\mathbf{l}_{hierro} \quad (4.48)$$

El segundo término integral es cero ya que:

$$\mathbf{H}_{hierro} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0 \mu_{hierro}} = 0 \quad (4.49)$$

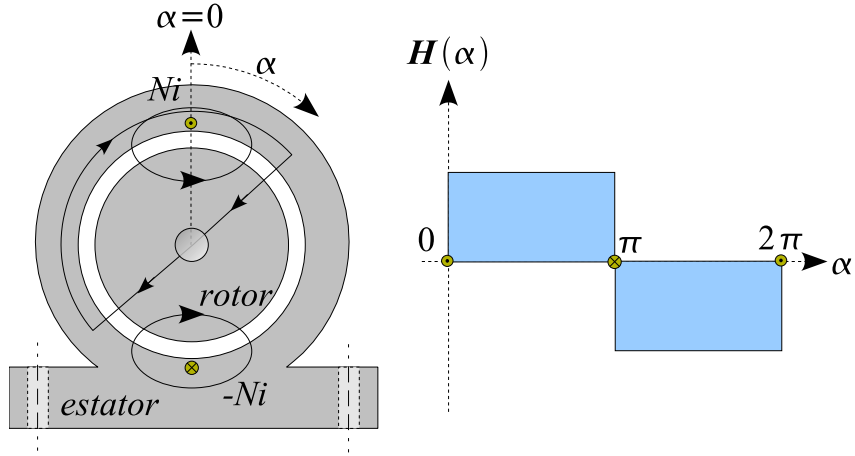


Figura 4.15 Fuerzas magnetomotrices e intensidades de campo magnético

Sustituyendo 4.49 en 4.48:

$$\mathbf{F} = NI = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{H}_{aire} \cdot d\mathbf{l}_{aire} \quad (4.50)$$

En la figura 4.15 también se representa la distribución de la intensidad del campo magnético en función de la posición θ de la trayectoria de Ampère. De esta forma se obtiene:

$$\mathbf{F} = NI = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{H}_{aire} \cdot d\mathbf{l}_{aire} = 2\delta \cdot H_{aire} \quad (4.51)$$

Despejando de la ecuación 4.51 la intensidad de campo magnético en función de la fuerza electromotriz:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{F}}{2\delta} \quad (4.52)$$

Sustituyendo la ecuación 4.52 en la ecuación 4.47 se obtiene:

$$W'_c = \frac{\pi r l \mu_0}{8\delta} \mathbf{F}^2 \quad (4.53)$$

Reemplazando la ecuación 4.42 en la ecuación 4.53:

$$W'_c = \frac{\pi r l \mu_0}{8\delta} (\mathbf{F}_r^2 + \mathbf{F}_e^2 + 2\mathbf{F}_r \mathbf{F}_e \cos\theta) \quad (4.54)$$

Para calcular el par eléctrico se utiliza la ecuación 4.31:

$$T_e = \frac{\partial W'_c(\mathbf{F}, \theta)}{\partial \theta} = -\frac{\pi r l \mu_0}{4\delta} \mathbf{F}_r \mathbf{F}_e \sin\theta \quad (4.55)$$

Mediante la ecuación 4.55 se puede calcular el par eléctrico en función de las fuerzas magnetomotrices de la máquina. La fuerza magnetomotriz depende de las corrientes y del número de

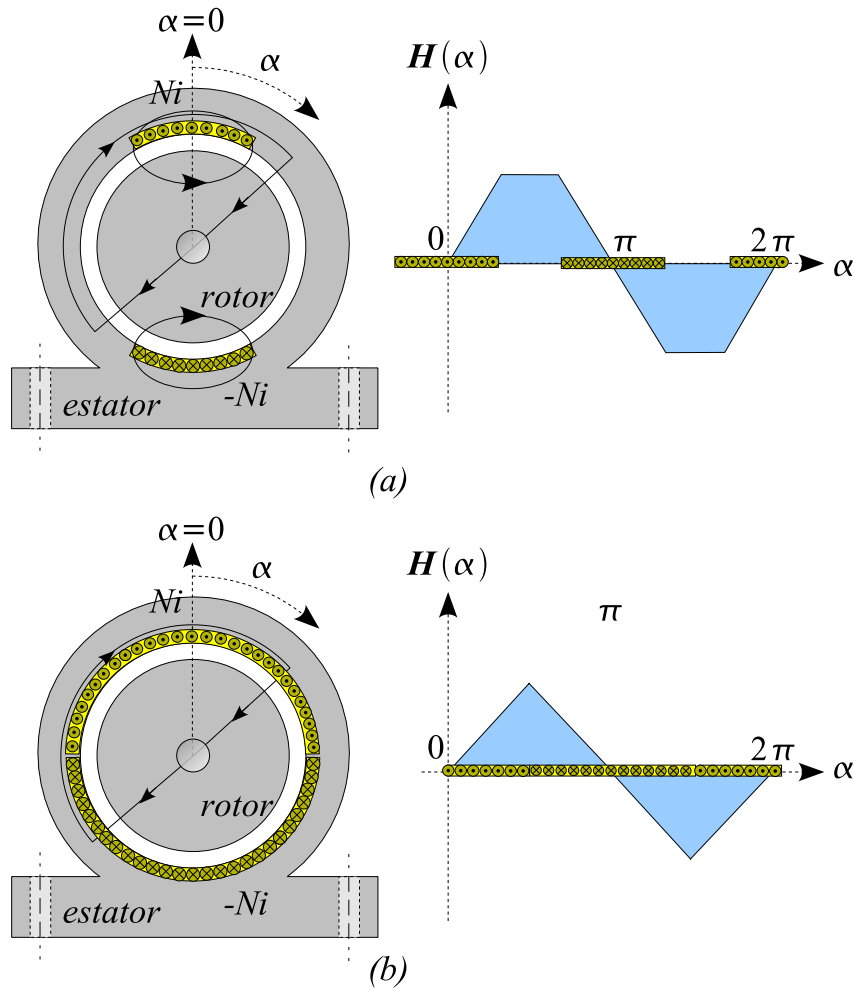


Figura 4.16 Diferentes distribuciones de conductores y campos en las máquinas

vueltas de las bobinas. Si se conocen las dimensiones de la máquina, las corrientes y el número de conductores de cada bobina, es posible utilizar la ecuación 4.55 para determinar el par.

Si la distribución de las corrientes en la máquina no es puntual, se puede utilizar la misma técnica para calcular la intensidad de campo magnético \mathbf{H} pero se tiene en cuenta que:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \quad (4.56)$$

En la figura 4.16 se muestran dos distribuciones diferentes de los conductores en la superficie de una máquina así como su respectiva distribución de intensidades de campo magnético \mathbf{H} . Cuando el entrehierro es constante la densidad de campo magnético \mathbf{B} posee la misma distribución que la intensidad de campo magnético \mathbf{H} .

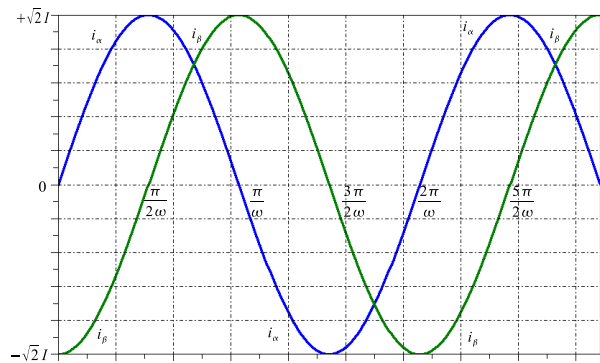


Figura 4.17 Corrientes inyectadas en la máquina generalizada

4.7. El campo magnético rotatorio

Cuando se analizaron las bases de la máquina eléctrica generalizada, se utilizaron dos grados de libertad para la representación del campo magnético, uno dado por la bobina α y el otro por la bobina β . Mediante este esquema se puede determinar el campo en cualquier punto del plano.

En la figura 4.17 se muestran dos corrientes i_α e i_β que pueden ser inyectadas en las bobinas α y β de la máquina.

En el instante inicial $-t = 0$ —la corriente i_α vale cero e i_β es $-I$, por lo tanto el campo resultante apunta en la dirección negativa del eje β . Cuando el tiempo se incrementa y llega al instante $\frac{\pi}{2\omega}$, la corriente i_β se anula, mientras que la corriente i_α es $+I$, el campo en estas condiciones apunta en la dirección positiva del eje α . En el instante $\frac{\pi}{\omega}$ el flujo se orientará según la dirección positiva del eje β , ya que la corriente i_β tiene como valor $+I$ y la corriente i_α es cero. Para el instante de tiempo $\frac{2\pi}{\omega}$, la corriente i_α es cero, la corriente i_β vale $-I$ y el vector del campo apunta nuevamente en la dirección negativa del eje β , repitiéndose de esta forma las condiciones iniciales. En la figura 4.18 se representa la situación anterior.

El análisis anterior señala las corrientes que varían en el tiempo, producen un campo magnético que gira en el espacio. Aun cuando los campos de cada eje tienen igual amplitud, el desfase en el tiempo y en el espacio origina un *campo magnético rotatorio*. La frecuencia de giro del campo magnético en el espacio es igual a la frecuencia de variación de las corrientes en el tiempo.

Si la bobina α no es idéntica a la bobina β , o las corrientes inyectadas a la máquina en cada eje difieren en amplitud, el campo no es circular sino elíptico. Los campos elípticos también son considerados campos magnéticos rotatorios o rotantes. Las máquinas trifásicas también funcionan mediante el principio del campo magnético rotatorio.

4.8. La máquina trifásica

La máquina trifásica dispone de tres devanados repartidos simétricamente en la periferia del cilindro. En la figura 4.19 se representa la configuración esquemática de este tipo de máquinas así como las tres corrientes que se han inyectado en las bobinas a , b , y c . En la figura se representan las corrientes a , b , c y las fuerzas magnetomotrices que estas corrientes producen en el tiempo

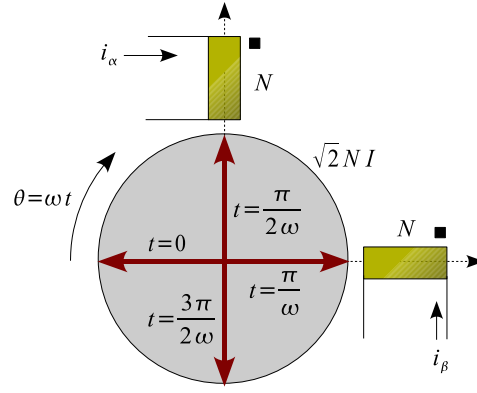


Figura 4.18 Campo magnético rotatorio

inicial ($t = 0$) como fasores. En el instante inicial las corrientes que circulan por las tres bobinas son:

$$\begin{aligned} i_a(0) &= I_{max} \\ i_b(0) &= -\frac{1}{2}I_{max} \\ i_c(0) &= -\frac{1}{2}I_{max} \end{aligned} \quad (4.57)$$

Para demostrar que el campo magnético originado por las corrientes de la figura 4.19 es rotatorio, se expresan estas corriente como:

$$\begin{aligned} i_a(t) &= I \cos(\omega t - \alpha) \\ i_b(t) &= I \cos(\omega t - \alpha - \frac{2\pi}{3}) \\ i_c(t) &= I \cos(\omega t - \alpha - \frac{4\pi}{3}) \end{aligned} \quad (4.58)$$

Si θ es la dirección de un punto cualquiera en el entrehierro medido a partir del eje magnético de la bobina a , se obtiene:

$$\mathbf{F}(\theta, t) = N i_a \cos \theta + N i_b \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) + N i_c \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \quad (4.59)$$

Sustituyendo las expresiones 4.58 en la ecuación 4.59 se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\theta, t) &= N I \{ \cos(\omega t - \alpha) \cdot \cos \theta + \dots \\ &\dots + \cos(\omega t - \alpha - \frac{2\pi}{3}) \cdot \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) + \dots \\ &\dots + \cos(\omega t - \alpha - \frac{4\pi}{3}) \cdot \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \} \end{aligned} \quad (4.60)$$

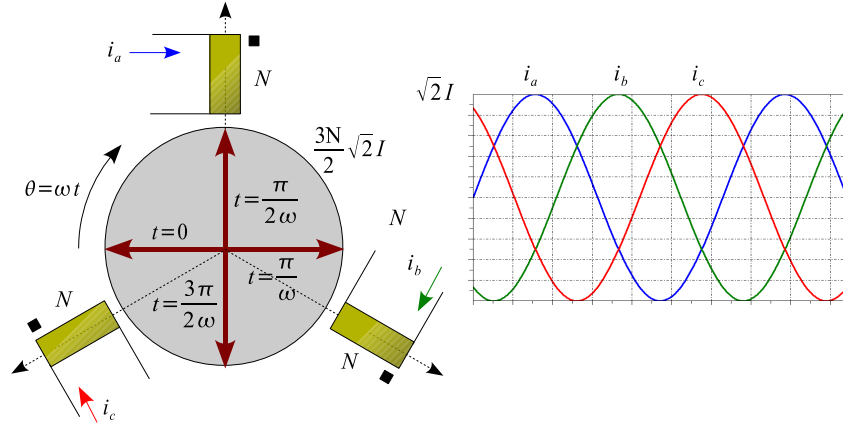


Figura 4.19 Corrientes y fuerzas magnetomotrices de la máquina trifásica

Aplicando las propiedades trigonométricas para el producto de cosenos se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}(\theta, t) = & \frac{NI}{2} \{ \cos(\omega t - \alpha + \theta) + \cos(\omega t - \alpha - \theta) + \dots \\
 & \dots + \cos(\omega t - \alpha + \theta + \frac{2\pi}{3}) + \cos(\omega t - \alpha - \theta) + \dots \\
 & \dots + \cos(\omega t - \alpha + \theta - \frac{2\pi}{3}) + \cos(\omega t - \alpha - \theta) \} \quad (4.61)
 \end{aligned}$$

En la ecuación anterior los términos primero, tercero y quinto de la sumatoria de *cosenos* suman cero porque el desfase entre ellos es de $\frac{2\pi}{3}$. Con esta consideración, se obtiene:

$$\mathbf{F}(\theta, t) = \frac{3}{2} NI \cos(\omega t - \alpha - \theta) \quad (4.62)$$

Esta expresión permite determinar la fuerza magnetomotriz en el espacio y en el tiempo. Si se fija la posición, es decir, el ángulo θ es constante, la ecuación 4.62 determina que en esa posición la fuerza magnetomotriz varía sinusoidalmente en el tiempo. Si se congela el tiempo en un instante determinado, la expresión 4.62 determina una distribución sinusoidal de la fuerza magnetomotriz en el espacio. La ecuación 4.62 demuestra que en una máquina eléctrica trifásica, alimentada por tres corrientes balanceadas y desfasadas $\frac{2\pi}{3}$ en el tiempo produce un campo magnético rotatorio similar al producido por dos devanados ortogonales a los cuales se les inyecten corrientes sinusoidales desfasadas $\frac{\pi}{2}$.

4.9. Transformación de Coordenadas

El sistema de ecuaciones diferenciales 4.10, que modela el comportamiento de la máquina eléctrica, no es lineal. La dependencia en θ de este modelo dificulta notablemente la solución de cualquier problema. La transformación de las ecuaciones diferenciales a nuevos sistemas de coordenadas simplifica en muchos casos este modelo.

Un nuevo sistema de coordenadas se puede definir mediante una matriz de transformación aplicada a las variables en coordenadas primitivas α y β . Las tensiones y corrientes en el nuevo sistema transformado son:

$$[v_{\alpha\beta e, \alpha r \beta r}] = [A_{wxyz}] [v_{wxyz}] \quad (4.63)$$

$$[i_{\alpha\beta e, \alpha r \beta r}] = [A_{wxyz}] [i_{wxyz}] \quad (4.64)$$

donde:

A_{wxyz}	es la matriz de transformación.
$v_{\alpha\beta e, \alpha r \beta r}$	son las tensiones en coordenadas primitivas.
v_{wxyz}	son las tensiones en las nuevas coordenadas.
$i_{\alpha\beta e, \alpha r \beta r}$	son las corrientes en coordenadas primitivas.
i_{wxyz}	son las corrientes en las nuevas coordenadas.

La potencia en coordenadas primitivas se puede calcular mediante la expresión:

$$p = [i_{\alpha\beta e, \alpha r \beta r}]^{*t} \cdot [v_{\alpha\beta e, \alpha r \beta r}] \quad (4.65)$$

En la expresión 4.65, el asterisco (*) indica que el vector de corrientes se debe conjugar en caso de ser complejo y el super índice "t" representa una trasposición del vector de corrientes para que el producto matricial con el vector de tensiones sea conformable. Sustituyendo en la ecuación 4.65 las definiciones 4.63 y 4.64, se obtiene:

$$p = [i_{wxyz}]^{*t} \cdot [A_{wxyz}]^{*t} \cdot [A_{wxyz}] [v_{wxyz}] \quad (4.66)$$

Para que la transformación utilizada $[A_{wxyz}]$ sea invariante en potencia es necesario que:

$$[A_{wxyz}]^{*t} \cdot [A_{wxyz}] = [I] \quad (4.67)$$

En la ecuación 4.67, $[I]$ es la matriz identidad. De esta expresión se obtiene:

$$[A_{wxyz}]^{*t} = [A_{wxyz}]^{-1} \quad (4.68)$$

Una matriz que satisface la condición 4.68 se denomina *hermitiana* o *hermítica*. La ecuación 4.68 indica que si en la matriz de transformación de coordenadas, su conjugada traspuesta es idéntica a la matriz inversa, dicha transformación es conservativa en potencia. En otras palabras, una transformación hermitiana permite calcular las potencias en las variables transformadas sin necesidad de regresar a las coordenadas primitivas.

Las ecuaciones de los ejes eléctricos de la máquina se pueden escribir como:

$$[v_{\alpha\beta, \alpha\beta}] = \left[[R_{\alpha\beta, \alpha\beta}] + [L_{\alpha\beta, \alpha\beta}] p + \dot{\theta} [\tau_{\alpha\beta, \alpha\beta}] \right] [i_{\alpha\beta, \alpha\beta}] \quad (4.69)$$

Transformando las coordenadas en la ecuación 4.69, se obtiene:

$$[A_{wxyz}] [v_{wxyz}] = \left[[R_{\alpha\beta, \alpha\beta}] + [L_{\alpha\beta, \alpha\beta}] p + \dot{\theta} [\tau_{\alpha\beta, \alpha\beta}] \right] [A_{wxyz}] [i_{wxyz}] \quad (4.70)$$

Despejando de 4.70 el vector de tensiones, se obtiene:

$$\begin{aligned}
[v_{wxyz}] = & \left\{ [A_{wxyz}]^{-1} [R_{\alpha\beta,\alpha\beta}] [A_{wxyz}] + \dots \right. \\
& \dots + [A_{wxyz}]^{-1} [L_{\alpha\beta,\alpha\beta}] [A_{wxyz}] p + \dots \\
& \dots + [A_{wxyz}]^{-1} [L_{\alpha\beta,\alpha\beta}] \frac{d}{dt} [A_{wxyz}] + \dots \\
& \left. \dots + \dot{\theta} [A_{wxyz}]^{-1} [\tau_{\alpha\beta,\alpha\beta}] [A_{wxyz}] \right\} [i_{wxyz}]
\end{aligned} \quad (4.71)$$

La ecuación 4.71 se puede escribir utilizando las siguientes definiciones:

$$[R_{wxyz}] \equiv [A_{wxyz}]^{-1} [R_{\alpha\beta,\alpha\beta}] [A_{wxyz}] \quad (4.72)$$

$$[L_{wxyz}] \equiv [A_{wxyz}]^{-1} [L_{\alpha\beta,\alpha\beta}] [A_{wxyz}] \quad (4.73)$$

$$[\tau_{wxyz}] \equiv [A_{wxyz}]^{-1} [\tau_{\alpha\beta,\alpha\beta}] [A_{wxyz}] \quad (4.74)$$

Como la matriz de transformación puede depender en general de la posición angular θ , se obtiene:

$$\frac{d}{dt} [A_{wxyz}] = \frac{d}{d\theta} [A_{wxyz}] \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad (4.75)$$

y definiendo:

$$[H_{wxyz}] \equiv [A_{wxyz}]^{-1} [L_{\alpha\beta,\alpha\beta}] \frac{d}{d\theta} [A_{wxyz}] \quad (4.76)$$

Se puede escribir la ecuación 4.71 como:

$$[v_{wxyz}] = \left[[R_{wxyz}] + [L_{wxyz}] p + \dot{\theta} [[\tau_{wxyz}] + [H_{wxyz}]] \right] [i_{wxyz}] \quad (4.77)$$

En la ecuación 4.77, el segundo término de la sumatoria, corresponde a las fuerzas electromotrices de transformación y el término tercero a las fuerzas electromotrices de generación. Este último término se descompone en dos partes, por un lado la matriz de par $[\tau_{wxyz}]$ y por otro la matriz $[H_{wxyz}]$ que reproduce los términos de generación originados por el movimiento relativo de los ejes transformados con respecto a los ejes reales. La matriz $[H_{wxyz}]$ determina los términos *no-holonómicos* debidos a la transformación de coordenadas.

La ecuación dinámica de la máquina se expresa como:

$$T_m = -\frac{1}{2} [i_{\alpha\beta,\alpha\beta}]^{*t} [\tau_{\alpha\beta,\alpha\beta}] [i_{\alpha\beta,\alpha\beta}] + J\ddot{\theta} + \rho\dot{\theta} \quad (4.78)$$

Transformando la ecuación 4.78 a las nuevas coordenadas:

$$T_m = -\frac{1}{2} [i_{wxyz}]^{*t} [A_{wxyz}]^{*t} [\tau_{\alpha\beta,\alpha\beta}] [A_{wxyz}] [i_{wxyz}] + J\ddot{\theta} + \rho\dot{\theta} \quad (4.79)$$

y sustituyendo la ecuación 4.74 en 4.79:

$$T_m = -\frac{1}{2} [i_{wxyz}]^{*t} [\tau_{wxyz}] [i_{wxyz}] + J\ddot{\theta} + \rho\dot{\theta} \quad (4.80)$$

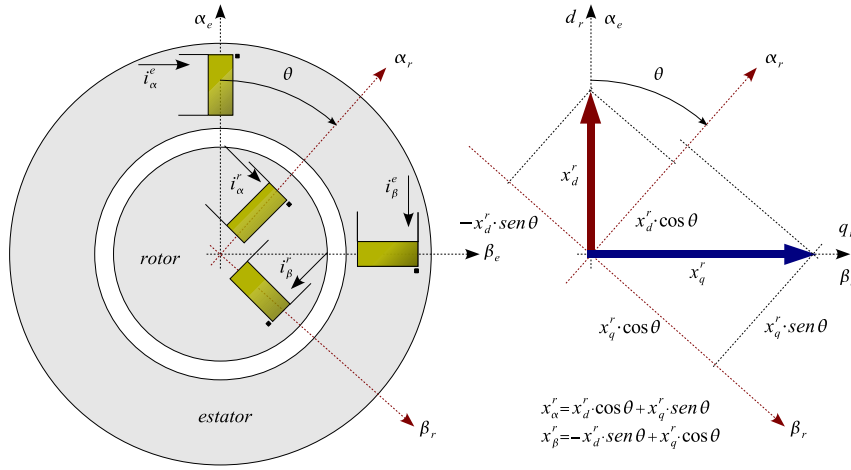


Figura 4.20 Transformación de coordenadas $\alpha\beta$ de del rotor a dq del rotor

Las ecuaciones 4.77 y 4.80 representan a la máquina eléctrica en un nuevo sistema de coordenadas. Mediante una selección apropiada de la matriz de transformación $[A_{wxyz}]$, es posible encontrar una solución más simple al sistema de ecuaciones diferenciales que definen el comportamiento de la máquina.

4.10. Transformación de coordenadas $\alpha\beta$ - dq

Una transformación útil en el análisis de las máquinas eléctricas rotativas consiste en proyectar las coordenadas del rotor en ejes colineales con los ejes del estator. Estos nuevos ejes se denominan *directo* d_r y *cuadratura* q_r , esta transformación permite anular el movimiento de las bobinas del rotor y las inductancias entre el estator y el rotor son constantes en el sistema de coordenadas transformadas. En la figura 4.20 se ha representado un diagrama con la transformación propuesta.

En esta transformación, las tensiones y corrientes correspondientes a las coordenadas primitivas del rotor son referidas a nuevas tensiones y corrientes inyectadas en bobinas fijas en el espacio. Los ejes del estator permanecen inalterados en las nuevas coordenadas. La matriz de transformación de coordenadas se puede particionar de la siguiente forma:

$$[A_{\alpha\beta dq}] = \begin{bmatrix} [A_{ee}] & [0] \\ [0] & [A_{rr}] \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

Las coordenadas del estator no cambian en la transformación, por esta razón la submatriz $[A_{ee}]$ debe ser unitaria:

$$[A_{ee}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

Para determinar $[A_{rr}]$ se debe recordar que:

$$[i_{\alpha_r \beta_r}] = [A_{rr}] [i_{d_r q_r}] \quad (4.83)$$

La matriz $[A_{rr}]$ corresponde a la proyección de los ejes α_r y β_r sobre los ejes d_r y q_r solidarios con el estator. Esta transformación es una rotación inversa que anula la rotación del rotor de la máquina. De la figura 4.20 se deduce que la transformación de coordenadas es:

$$[A_{rr}] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

La matriz obtenida en la ecuación 4.84 es hermitiana, su traspuesta conjugada es igual a su inversa:

$$[A_{rr}]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = [A_{rr}]^{*t} \quad (4.85)$$

Definida la transformación de coordenadas $[A_{rr}]$, es posible determinar las matrices transformadas $[R_{\alpha\beta dq}]$, $[L_{\alpha\beta dq}]$, $[\tau_{\alpha\beta dq}]$ y $[H_{\alpha\beta dq}]$.

Matriz de resistencias en coordenadas $\alpha\beta dq$

La matriz de resistencia $[R_{\alpha\beta dq}]$ en las nuevas coordenadas es:

$$\begin{aligned} [R_{\alpha\beta dq}] &= [A_{\alpha\beta dq}]^{-1} [R_{\alpha\beta, \alpha\beta}] [A_{\alpha\beta dq}] = \\ &= \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [0] & [A_{rr}]^t \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} R_e [I] & [0] \\ [0] & R_r [I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [0] & [A_{rr}] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.86)$$

Efectuando el triple producto matricial de la ecuación 4.86 se obtiene:

$$[R_{\alpha\beta dq}] = \begin{bmatrix} R_e [I] & [0] \\ [0] & R_r [I] \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

Como se observa en la ecuación 4.87, la transformación aplicada no modifica la matriz original de resistencias. Esto es de esperar, debido a que las resistencias no dependen de la posición del rotor y no existe acoplamiento galvánico entre las bobinas.

Matriz de inductancias en coordenadas $\alpha\beta dq$

Si se aplica la transformación a la matriz de inductancia $[L_{\alpha\beta, \alpha\beta}]$, se obtiene:

$$\begin{aligned} [L_{\alpha\beta, dq}] &= [A_{\alpha\beta, dq}]^{-1} [L_{\alpha\beta, \alpha\beta}] [A_{\alpha\beta, dq}] = \\ &= \begin{bmatrix} L_e [I] & L_{er} [I] \\ L_{er} [I] & L_r [I] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_e & 0 & L_{er} & 0 \\ 0 & L_e & 0 & L_{er} \\ L_{er} & 0 & L_r & 0 \\ 0 & L_{er} & 0 & L_r \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.88)$$

En la ecuación 4.88 se observa que la matriz de inductancias transformadas es independiente de la posición angular del rotor. Esto es debido, a la rotación en sentido inverso de la transformación, que convierte las inductancias solidarias con los ejes del rotor en inductancias que giran

en contra de la posición angular del rotor y por tanto mantienen una posición constante con respecto a los ejes α y β del estator.

Matrices de generación en coordenadas $\alpha\beta dq$

Aplicando el mismo procedimiento a la matriz de par $[\tau_{\alpha\beta,\alpha\beta}]$, se obtiene:

$$[\tau_{\alpha\beta,dq}] = [A_{\alpha\beta,dq}]^{-1} [\tau_{\alpha\beta,\alpha\beta}] [A_{\alpha\beta,dq}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -L_{er} \\ 0 & 0 & L_{er} & 0 \\ 0 & L_{er} & 0 & 0 \\ -L_{er} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

Igual que con la matriz de inductancia $[L_{\alpha\beta,dq}]$, la matriz de par $[\tau_{\alpha\beta,dq}]$ es independiente del ángulo θ . La matriz de términos de generación no-holonómicos $[H_{\alpha\beta,dq}]$ se puede calcular como:

$$[H_{\alpha\beta,dq}] = [A_{\alpha\beta,dq}]^{-1} [L_{\alpha\beta,\alpha\beta}] \frac{d}{d\theta} [A_{\alpha\beta,dq}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & L_{er} \\ 0 & 0 & -L_{er} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_r \\ 0 & 0 & L_r & 0 \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

La matriz de generación $[G_{\alpha\beta,dq}]$ se define de la siguiente forma:

$$[G_{\alpha\beta,dq}] = [\tau_{\alpha\beta,dq}] + [H_{\alpha\beta,dq}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{er} & 0 & L_r \\ -L_{er} & 0 & -L_r & 0 \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

4.11. Ecuaciones generales en coordenadas $\alpha\beta dq$

Las ecuaciones de tensión para la máquina en coordenadas transformadas $\alpha\beta dq$ son:

$$\begin{bmatrix} v_{\alpha_e} \\ v_{\beta_e} \\ v_{d_r} \\ v_{q_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_e + L_e p & 0 & L_{er} p & 0 \\ 0 & R_e + L_e p & 0 & L_{er} p \\ L_{er} p & \dot{\theta} L_{er} & R_r + L_r p & \dot{\theta} L_r \\ -\dot{\theta} L_{er} & L_{er} p & -\dot{\theta} L_r & R_r + L_r p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{\alpha_e} \\ i_{\beta_e} \\ i_{d_r} \\ i_{q_r} \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

La ecuación 4.92 representa a la máquina eléctrica en coordenadas $\alpha\beta dq$. La construcción de una máquina como esta es posible físicamente, mediante la incorporación de un par de conmutadores como los que se ilustran en la figura -63-. El colector permite que las inductancias propias y mutuas vistas desde el estator sean independientes de la posición del rotor. Las escobillas o carbones que recolectan la corriente, neutralizan el efecto del giro, de forma análoga a lo que realiza la transformación $[A_{\alpha\beta,dq}]$.

Los términos de la ecuación 4.92 se pueden identificar fácilmente en el modelo de la figura 4.21. Es necesario destacar que los signos negativos, tienen su origen en el sentido de giro de la máquina, las convenciones de polaridad y la posición relativa de los ejes α , β , d y q . Para completar

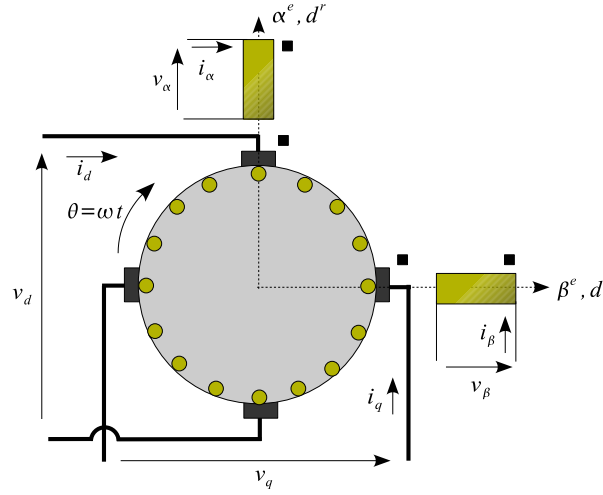


Figura 4.21 Modelo esquemático de la máquina generalizada

las ecuaciones que definen el comportamiento de la máquina eléctrica en las coordenadas $\alpha\beta dq$, es necesario calcular el par eléctrico:

$$T_e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i_{\alpha_e} \\ i_{\beta_e} \\ i_{d_r} \\ i_{q_r} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -L_{er} \\ 0 & 0 & L_{er} & 0 \\ 0 & L_{er} & 0 & 0 \\ -L_{er} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{\alpha_e} \\ i_{\beta_e} \\ i_{d_r} \\ i_{q_r} \end{bmatrix} = L_{er} (i_{\beta_e} i_{d_r} - i_{\alpha_e} i_{q_r}) \quad (4.93)$$

La ecuación de balance del par mecánico es:

$$T_m = L_{er} (i_{\beta_e} i_{d_r} - i_{\alpha_e} i_{q_r}) + J\ddot{\theta} + \rho\dot{\theta} \quad (4.94)$$

La condición necesaria para la existencia de par eléctrico requiere que, al menos existan dos corrientes, una en el estator y otra en el rotor, y que esas corrientes se encuentren en ejes en ortogonales del modelo de la máquina generalizada.

4.12. Sumario

1. Las máquinas eléctricas convencionales tienen varios elementos comunes que permiten realizar modelos analíticos generalizados. En general poseen dos estructuras bien definidas y cilíndricas denominadas rotor y estator. Los conductores están colocados en la periferia de los cilindros y la distribución de los campos producidos por las corrientes que por ellos circulan es periódica. Es indispensable que el número de pares de polos del rotor y del estator sean idénticos para permitir la existencia de par neto para una posición angular dada.
2. La distribución periódica del campo alrededor de la periferia del cilindro (estator o rotor), permite representar esta función mediante series de Fourier. Cada una de las armónicas de

la distribución del campo puede ser representada por una bobina cuyo eje magnético se encuentra orientado en dirección paralela a la amplitud de dicha componente del campo. De esta forma es posible utilizar el álgebra vectorial para realizar la superposición de diferentes componentes del campo desplazadas espacialmente. Este tipo de representación es válida para cualquier instante de tiempo.

3. Los elementos comunes de las máquinas eléctricas convencionales permiten modelar estos convertidores utilizando dos bobinas ortogonales, simétricas y fijas que representan todos los grados de libertad del estator y dos bobinas ortogonales, simétricas y ubicadas en la posición θ , que representan los grados de libertad del rotor. Estas cuatro bobinas pueden modelar máquinas sincrónicas de rotor y estator liso, máquinas de inducción y máquinas de corriente continua. Estas máquinas garantizan, por su principio de funcionamiento, la condición necesaria pero no suficiente de par promedio diferente de cero, representada por la ecuación 4.42.
4. Cuando se combinan campos magnéticos ortogonales, desplazados en el espacio, producidos por corrientes balanceadas y sinusoidales desfasadas $\frac{\pi}{2}$ en el tiempo se obtienen campos magnéticos rotatorios. Estos campos permiten el giro de una distribución espacial del campo alrededor de la máquina a través del tiempo. Es posible obtener campos magnéticos rotatorios con dos, tres o más bobinas siempre y cuando se mantengan las condiciones necesarias de simetría.
5. Las ecuaciones de la máquina generalizada en coordenadas primitivas son dependientes de la posición angular θ del rotor con respecto al estator. Transformar las coordenadas del rotor a ejes colineales con las coordenadas del estator permite independizar las matrices de parámetros del modelo del ángulo θ . De esta forma es posible obtener un sistema de ecuaciones diferenciales no lineal, pero con parámetros constantes en el tiempo cuya solución numérica es mucho más simple que el modelo original y la solución analítica es posible considerando como hipótesis que la velocidad mecánica es aproximadamente constante.
6. Para representar los términos no-holonómicos de la transformación de coordenadas es necesario incluir en el modelo un sistema de contactos deslizantes que obtengan las fuerzas electromotrices (en el eje d y q respectivamente) generadas en conductores en movimiento que han sido representados por bobinas fijas en el espacio. Este modelo matemático puede construirse físicamente mediante un colector electromecánico. En los conductores conectados a este colector se inyectan corrientes que producen campos fijos en el espacio y se inducen fuerzas electromotrices por el movimiento relativo entre dichos conductores y los campos resultantes en el espacio.

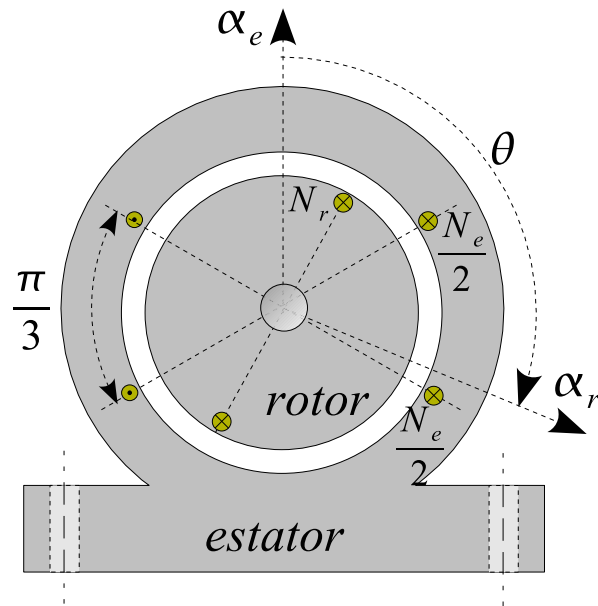


Figura 4.22 Diagrama esquemático y datos del ejemplo 1

4.13. Ejemplo resuelto

La máquina esquematizada en el diagrama ilustrado en la figura 4.22, posee un entrehierro $g = 2 \text{ mm}$, un radio del rotor $r = 10 \text{ cm}$, una longitud axial $l = 15 \text{ cm}$, el estator tiene un número de vueltas $N_e = 200$ vueltas y el rotor $N_r = 150$ vueltas, la resistencia del estator es de $R_e = 1 \Omega$ y la del rotor $R_r = 2 \Omega$, el coeficiente de acoplamiento estator-rotor es $k_{er} = 0,85$, la tensión aplicada a la bobina del estator es de 50 V efectivos a la frecuencia de 60 Hz , y el rotor se encuentra en cortocircuito. Utilizando estos datos y el esquema de la máquina determine:

1. Las inductancias propias y mutuas de las bobinas del rotor y estator del convertidor.
2. Las ecuaciones de tensión y par eléctrico en coordenadas primitivas.
3. Las ecuaciones de tensión y par eléctrico de la máquina si se transforma la bobina del rotor a ejes solidarios con el estator.
4. Las ecuaciones de tensión y par eléctrico de la máquina si se transforma la bobina del estator a ejes solidarios con el rotor.
5. El par eléctrico y la corriente por el rotor de la máquina en régimen permanente, cuando la velocidad del convertidor es de 3500 rpm .

Solución:

1. Las inductancias propias y mutuas de las bobinas del rotor y estator del convertidor:

El estator está constituido por dos bobinas concentradas cuyos ejes magnéticos se encuentran desfasados $\frac{\pi}{3}$. Cada bobina concentrada produce una fuerza magnetomotriz sinusoidal de primera armónica cuya magnitud es:

$$|\mathcal{F}| = \frac{4}{\pi} N i$$

Como las dos bobinas están separadas $\frac{\pi}{3}$, la fuerza magnetomotriz resultante será:

$$\mathcal{F}_e = \frac{4}{\pi} \frac{N_e}{2} i_e \angle -\frac{\pi}{6} + \frac{4}{\pi} \frac{N_e}{2} i_e \angle \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \frac{4}{\pi} \frac{N_e}{2} i_e \angle 0^\circ$$

La distribución de la fuerza magnetomotriz en el entrehierro de la máquina producida por la excitación de las dos bobinas del estator será entonces:

$$\mathcal{F}_e(\theta, i_e) = \sqrt{3} \frac{2}{\pi} N_e i_e \cos \theta$$

Conocida la fuerza magnetomotriz, se puede calcular el enlace de flujo sobre cada uno de los grupos de bobinas del estator:

$$B_e(\theta, i_e) = \sqrt{3} \frac{1}{\pi g} N_e i_e \mu_0 \cos \theta$$

$$\lambda_{e1} = \frac{N_e}{2} \int_{-\frac{2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} B_e(\theta, i_e) ds = \frac{3}{2\pi g} N_e^2 \mu_0 r l i_e$$

$$\lambda_{e2} = \frac{N_e}{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} B_e(\theta, i_e) ds = \frac{3}{2\pi g} N_e^2 \mu_0 r l i_e$$

Como los dos grupos de bobinas del estator están en serie, la inductancia del estator es:

$$L_e = \frac{3}{\pi g} N_e^2 \mu_0 r l = 0,36 \text{ H}$$

La bobina rotórica es concentrada, aplicando un procedimiento similar al realizado con la inductancia del estator, se obtiene:

$$L_r = \frac{4}{\pi g} N_r^2 \mu_0 r l = 0,27 \text{ H}$$

La inductancia mutua se determina directamente de las inductancias propias y del coeficiente de acoplamiento entre ambas bobinas:

$$L_{er} = k_{er} \sqrt{L_e \cdot L_r} = 0,265 \text{ H}$$

2. Las ecuaciones de tensión y par eléctrico en coordenadas primitivas:

$$\begin{bmatrix} v_e \\ v_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_e \\ i_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_e & L_{er} \cos \theta \\ L_{er} \cos \theta & L_r \end{bmatrix} p \begin{bmatrix} i_e \\ i_r \end{bmatrix} - \dot{\theta} L_{er} \begin{bmatrix} 0 & \sin \theta \\ \sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_e \\ i_r \end{bmatrix}$$

$$T_e = \frac{L_{er}}{2} \begin{bmatrix} i_e \\ i_r \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 0 & -\sin \theta \\ -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_e \\ i_r \end{bmatrix} = -L_{er} i_e i_r \sin \theta$$

3. Las ecuaciones de tensión y par eléctrico de la máquina si se transforma la bobina del rotor a ejes solidarios con el estator:

$$\begin{bmatrix} v_e \\ v_{dr} \\ v_{qr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_e + L_e p & L_{er} p & 0 \\ L_{er} p & R_r + L_r p & \omega L_r \\ -\omega L_{er} & -\omega L_r & R_r + L_r p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_e \\ i_{dr} \\ i_{qr} \end{bmatrix} \quad (4.95)$$

$$T_e = -L_{er} \cdot i_e \cdot i_{qr}$$

4. Las ecuaciones de tensión y par eléctrico de la máquina si se transforma la bobina del estator a ejes solidarios con el rotor:

$$\begin{bmatrix} v_{de} \\ v_{qe} \\ v_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_e + L_e p & -\omega L_e & L_{er} p \\ \omega L_e & R_e + L_e p & \omega L_{er} \\ L_{er} p & 0 & R_r + L_r p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{de} \\ i_{qe} \\ i_r \end{bmatrix}$$

$$T_e = L_{er} \cdot i_{qe} \cdot i_r$$

5. El par eléctrico y la corriente por el rotor de la máquina en régimen permanente, cuando la velocidad del convertidor es de 3500 rpm:

En régimen permanente, el sistema de ecuaciones 4.95 se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_e \\ \mathbf{I}_{dr} \\ \mathbf{I}_{qr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_e + j\omega_e L_e & j\omega_e L_{er} & 0 \\ j\omega_e L_{er} & R_r + j\omega_e L_r & \omega L_r \\ -\omega L_{er} & -\omega L_r & R_r + j\omega_e L_r \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.96)$$

La expresión 4.96 permite determinar las corriente \mathbf{I}_e , \mathbf{I}_{dr} e \mathbf{I}_{qr} conocida la tensión \mathbf{V}_e , las velocidades angulares ω , ω_e y los parámetros de la máquina R_e , R_r , L_e , L_r y L_{er} . De esta forma se obtienen los siguientes resultados:

$$\mathbf{V}_e = (50 + j 0) V$$

$$\omega = 2\pi \left(\frac{3500}{60} \right) = 366,52 \frac{rad}{s}$$

$$\omega_e = 2\pi \left(\frac{3600}{60} \right) = 376,99 \frac{rad}{s}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_e &= 0,3493 - j0,7668 \text{ A} \\ \mathbf{I}_{dr} &= -0,4668 + j0,5447 \text{ A} \\ \mathbf{I}_{qr} &= -0,2044 + j0,1165 \text{ A}\end{aligned}$$

$$T_e(t) = -L_{er} \cdot i_e \cdot i_{qr} = -0,05255 [\cos(2\omega_e t - 3,7662) - 0,869]$$

$$\langle T_e \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_e(\omega_e t) d\omega_e t = +0,0457 \text{ Nm}$$

4.14. Ejercicios propuestos

1. Una máquina de inducción bifásica en el estator y bifásica en el rotor, tiene sus devanados distribuidos uniformemente en la periferia del convertidor. Cada fase del estator y rotor, posee $N_e = 500$ y $N_r = 300$ vueltas respectivamente. El entrehierro es uniforme y de dimensión $g = 3 \text{ mm}$. La longitud axial es $l = 30 \text{ cm}$. El diámetro del rotor es $D = 20 \text{ cm}$. El coeficiente de acoplamiento entre las bobinas del estator y rotor es $k_{er} = 0,95$. La resistencias de las bobinas son $R_e = 1 \Omega$ y $R_r = 0,5 \Omega$ respectivamente. Se cortocircuitan las bobinas del estator y se alimenta el rotor con fuentes de corriente independientes, ideales, sinusoidales, desfasadas $\frac{\pi}{2}$ entre sí con valor efectivo $I_r = 20 \text{ A}$. Determine:
 - a) Inductancias de la máquina en coordenadas primitivas.
 - b) Ecuaciones que describen el comportamiento del convertidor en régimen permanente en las condiciones de operación enumeradas anteriormente.
 - c) Corriente en cada una de las bobinas del estator.
 - d) Par eléctrico medio durante el arranque ($velocidad = 0$).

2. La figura 4.23 representa el corte transversal de una máquina donde se indican las corrientes en las diferentes fases tanto del estator como del rotor. En el estator las bobinas se encuentran linealmente distribuidas en la periferia, los conductores del rotor en cambio están concentrados. Determine:
 - a) El par eléctrico en la posición ilustrada en la figura.
 - b) El par eléctrico si el rotor gira $\frac{\pi}{2}$ con respecto a la posición ilustrada en la figura 4.23.
 - c) El par eléctrico promedio si las corrientes del rotor y del estator son constantes.
 - d) El par eléctrico promedio si la corriente del estator es constante y la del rotor es sinusoidal y sincronizada con la velocidad mecánica del convertidor.

3. La figura 4.24 representa tres máquinas diferentes. Se desea hacer un análisis lo más detallado posible de la operación en régimen permanente y transitorio de estos convertidores. Las máquinas (a) y (b) son casi iguales pero tienen una excitación diferente en el estator.

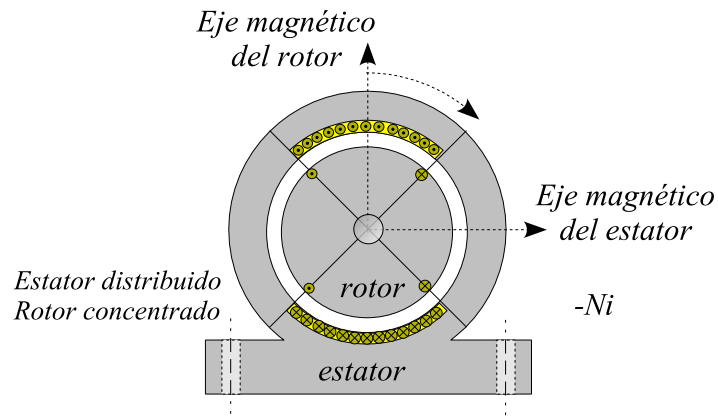


Figura 4.23 Diagrama esquemático del ejercicio N° 2

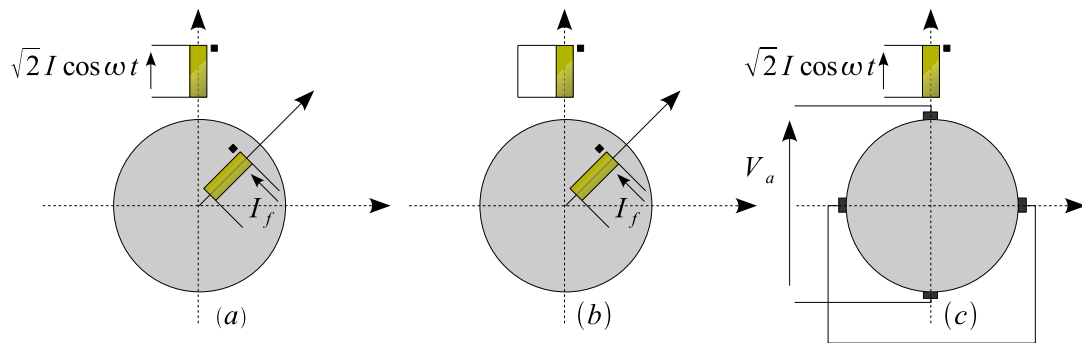


Figura 4.24 Esquemas de los convertidores del ejemplo N° 3

La máquina (c) es una máquina de campo cruzado, excitada con corriente alterna en el estator. Determine:

- Las ecuaciones en coordenadas primitivas.
 - Transforme el rotor a ejes dq y exprese las ecuaciones en estas coordenadas. Analice el régimen permanente de los tres convertidores en este sistema de coordenadas.
 - Transforme el estator a coordenadas dq y exprese las ecuaciones de la máquina en estas coordenadas. Analice el régimen permanente de los tres convertidores en este sistema de coordenadas.
 - El par eléctrico desarrollado por cada convertidor.
 - Transforme a coordenadas primitivas todas las corrientes transformadas obtenidas previamente.
4. Una máquina de rotor y estator cilíndrico, tiene dos bobinas ortogonales en el estator y una en el rotor. El diámetro del rotor es de 15 cm , la longitud axial de la máquina es de 20 cm y el entrehierro es de $1,5 \text{ mm}$. Las bobinas del estator tienen 200 vueltas y se alimentan con tensiones sinusoidales de 110 V efectivos, 60 Hz , desfasadas una de otra $\frac{\pi}{2}$. El material

ferromagnético del convertidor tiene una permeanza relativa de 1000. La bobina del rotor tiene 1000 vueltas y por ella circula una corriente de $0,5\text{ A}$. El máximo acoplamiento entre las bobinas del rotor y del estator es de 90 % y la dispersión en la bobina rotórica es el doble que en cada una de las bobinas del estator. Conocidos todos estos datos, determine:

- a) Todos los parámetros del modelo de la máquina y las ecuaciones completas que determinan su comportamiento dinámico.
 - b) Convierta las ecuaciones del estator a coordenadas dq y calcule el par eléctrico de la máquina, cuando el rotor gira a velocidad sincrónica y se encuentra adelantado $\frac{\pi}{6}$ con respecto al eje magnético de la fase a .
 - c) Calcule las corrientes del estator en régimen permanente si las bobinas del estator se encuentran en cortocircuito.
5. Determine la expresión general del campo magnético rotatorio para una máquina compuesta de m devanados desfasados espacialmente $\frac{2\pi}{m}$ a los cuales se les inyecta un sistema m -fásico de corrientes simétricas, balanceadas y de secuencia positiva.

Bibliografía

- [1] B. Adkins, "The General Theory of Electric Machines," Chapman and Hall, London 1957.
- [2] B. Adkins & R. G. Harley; "The General Theory of Alternating Current Machines," Chapman and Hall, London 1975.
- [3] L. Elsgoltz, "Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional," Editorial MIR, Moscú 1977.
- [4] H. Goldstein, "Classical Mechanics," Adison-Wesley, Cambridge, Mass., 1953.
- [5] D. Karnopp & R. Rosenberg, "System Dynamics: A Unified Approach," John Wiley & Sons, 1975.
- [6] D. L. Kreider, R. G. Kuler & D. R. Ostberg, "Ecuaciones Diferenciales," Fondo Educativo Interamericano, 1973.
- [7] G. Kron, "The Application of Tensors to the Analysis of Rotating Electrical Machinery," General Electric Review, Schenectady, New York 1942.
- [8] H. R. Nara, "Mecánica Vectorial para Ingenieros: Dinámica," Editorial Limusa, Vol. II, Mexico 1977.
- [9] L. A. Pipes & L. R. Harvill, "Applied Mathematics for Engineers and Physicists," McGraw-Hill, Third Edition, 1970.
- [10] M.G. Say, "Introduction to the Unified Theory of Electromagnetic Machines," Pitman Press, Great Britain, 1971.
- [11] D. C. White & H. H. Woodson, "Electromechanical Energy Conversion," John Wiley & Sons, New York 1959.
- [12] E. T. Whittaker, "Analytical Dynamics," Dover Publications, New York, 1944.

Parte II

Máquinas Eléctricas Rotativas

Máquinas de Conmutador

5.1. Introducción

En el capítulo precedente se analizó la transformación de coordenadas $\alpha_e\beta_e\alpha_r\beta_r$ a coordenadas $\alpha_e\beta_e d_r q_r$. En las máquinas con conmutador mecánico, esta transformación se realiza físicamente, el colector convierte los ejes α_r y β_r del rotor en ejes d_r y q_r . La máquina de corriente continua es un caso particular de las máquinas que utilizan *conmutador*. Las máquinas de conmutador son ampliamente utilizadas para el control de par y velocidad en los procesos industriales porque tienen una alta velocidad de respuesta, al mantener siempre en ortogonalidad los campos estáticos y rotóricos¹. Una máquina de conmutador está constituida básicamente por un *estator*, un *rotor* y un *colector* acoplado sólidamente al rotor. El colector permite conectar galvánicamente los conductores del circuito rotórico o armadura a la fuente de tensión continua, mediante un juego de carbones² o escobillas³ solidarios con el estator de la máquina. En la figura 5.1 se presenta el diagrama esquemático de la máquina de corriente continua y un modelo constructivo simple para fines demostrativos.

El principio de operación de las máquinas de corriente continua se fundamenta en la inyección de corriente continua tanto en el circuito rotórico como estático. Estas corrientes producen las fuerzas magnetomotrices F_r en el rotor y F_e en el estator que intentan alinearse. Cuando se alcanza el alineamiento, cesa el par eléctrico. Si en ese preciso instante se invierte el sentido de la

¹Observe la expresión 4.55 con el ángulo $\theta = 90^\circ$ entre las fuerzas magnetomotrices del estator y rotor. En este caso la expresión del par es máxima para unas corrientes y dimensiones de la máquina determinadas.

²Esta denominación se debe al hecho de estar fabricados con carbón. Este material además de ser conductor eléctrico, proporciona una superficie suave que lubrica el contacto con las delgas de cobre, evitando de esta forma que se desgaste rápidamente.

³Otro método de obtener un contacto eléctrico deslizante es mediante una escobilla fabricada con hilos de cobre, este dispositivo se utiliza frecuentemente cuando es necesario hacer circular corrientes constantes por una bobina rotórica. En el caso de las máquinas de colector es más beneficioso el empleo de carbones, que producen un desgaste menor de las delgas.

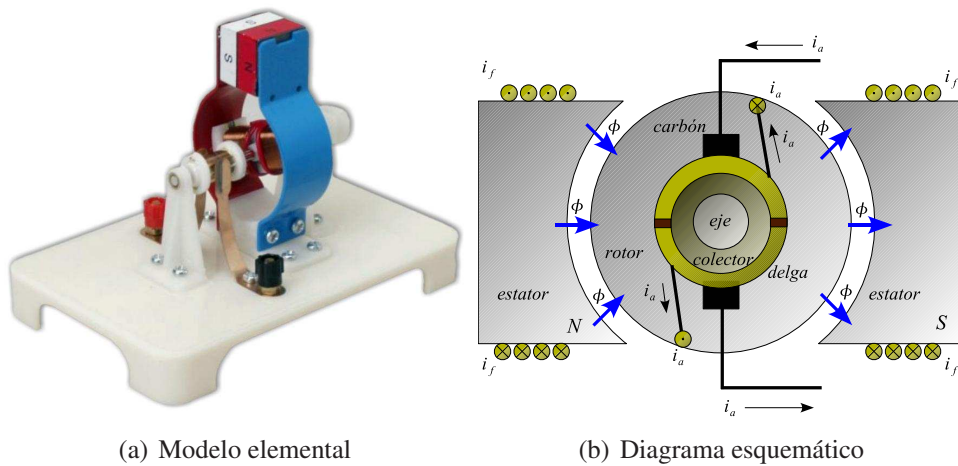


Figura 5.1 Máquina elemental de colector

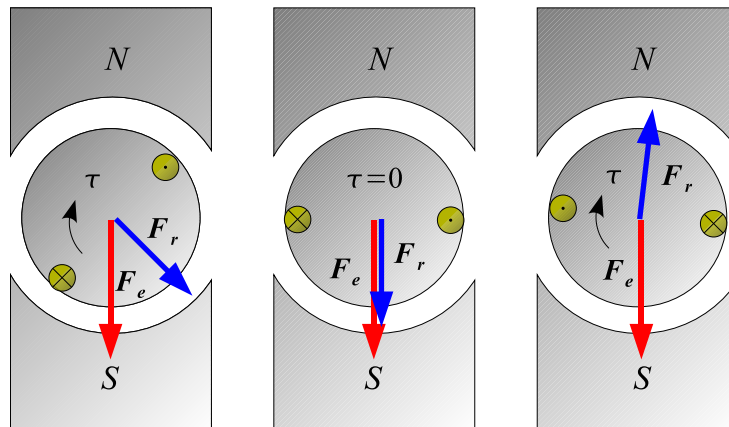


Figura 5.2 Alineamiento de fuerzas electromotrices en la máquina

corriente inyectada en el circuito rotórico, la fuerza magnetomotriz del rotor cambia de sentido 180° y aparece un nuevo par de alineamiento. En la figura 5.2 se representa esta situación.

Analizando los diagramas de la figura 5.2 se pueden indicar las siguientes observaciones:

1. Las fuerzas magnetomotrices en el semiplano positivo, producen par positivo en el sentido horario.
2. Las corrientes que circulan por el rotor deben producir la fuerza magnetomotriz en el plano positivo, para que el par siempre resulte positivo.

Para invertir el sentido de la fuerza magnetomotriz del rotor se utiliza el conmutador. En la figura 5.3 se observa que la corriente tiene como período de repetición, una revolución del rotor de la máquina de corriente continua. Al girar el rotor, la *escobilla* (1), se conecta con la *delga* (4) y la *escobilla* (2) se conecta con la *delga* (3). El procedimiento anterior permite la inversión del sentido de circulación de la corriente por el rotor mediante el dispositivo mecánico descrito. La

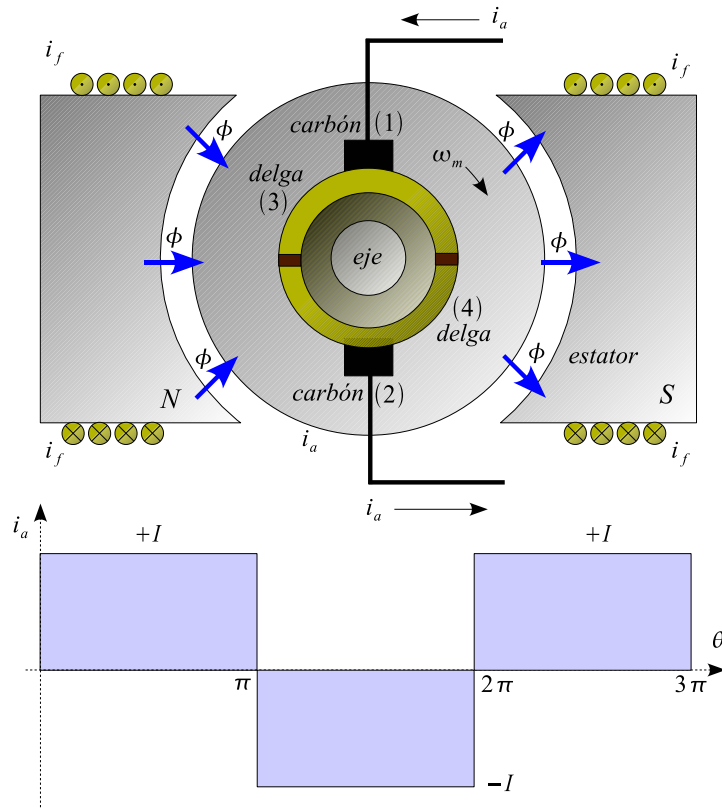


Figura 5.3 Conmutador y forma de la corriente del rotor en un período de revolución

corriente interna en el circuito rotórico es *alterna*. La corriente inyectada por la fuente es *continua*. En la práctica, es necesario un conmutador por cada bobina del rotor, pero por simplicidad en el análisis se ha supuesto que la máquina posee una sola bobina.

Con la distribución de la corriente de armadura que se representa en la figura 5.4, la fuerza magnetomotriz producida en el rotor se encuentra en el semiplano positivo y se produce un par positivo que intenta alinear esta fuerza magnetomotriz con la fuerza magnetomotriz producida por el enrollado de campo de la máquina. En esta situación, los conductores contribuyen al par en la dirección positiva del movimiento, debido a que los conductores ubicados a la derecha de la figura producen fuerza tangencial hacia abajo, mientras que los de la izquierda producen fuerzas tangenciales hacia arriba.

En un alineamiento conductivo semejante al ilustrado en la figura 5.5, existe equilibrio de fuerzas sobre el mismo brazo y el par resultante es nulo. Este análisis elemental explica la conveniencia de utilizar la distribución de las corrientes de armadura presentada en la figura 5.4 con la finalidad de obtener par eléctrico significativo en la máquina de corriente continua.

En las máquinas de conmutador, el plano que contiene el eje mecánico y corta diametralmente al rotor se denomina *línea neutra* de la máquina. La línea neutra divide los puntos del rotor en los que entra el flujo de aquellos en los cuales el flujo sale.

Para lograr la inversión en el sentido de la corriente, es necesario un dispositivo conmutador por cada bobina. Esta solución es muy primitiva, el problema puede ser resuelto mediante una distribución conveniente de los conductores que permita obtener el resultado deseado. En la

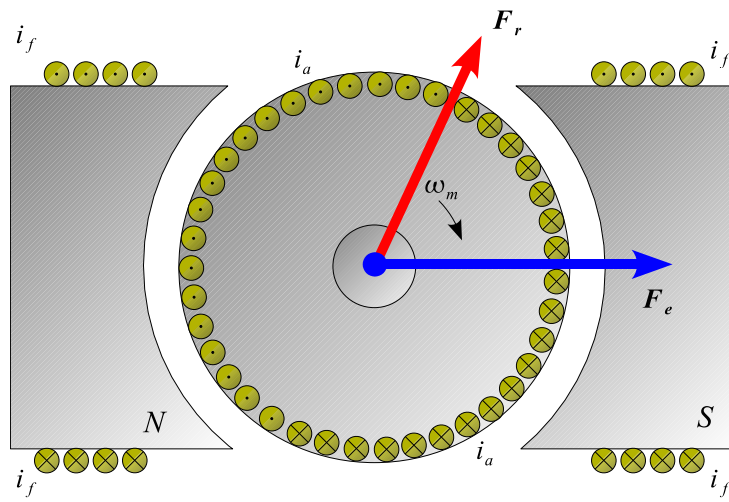


Figura 5.4 Alineamiento de las corrientes por los conductores del rotor para producir par positivo

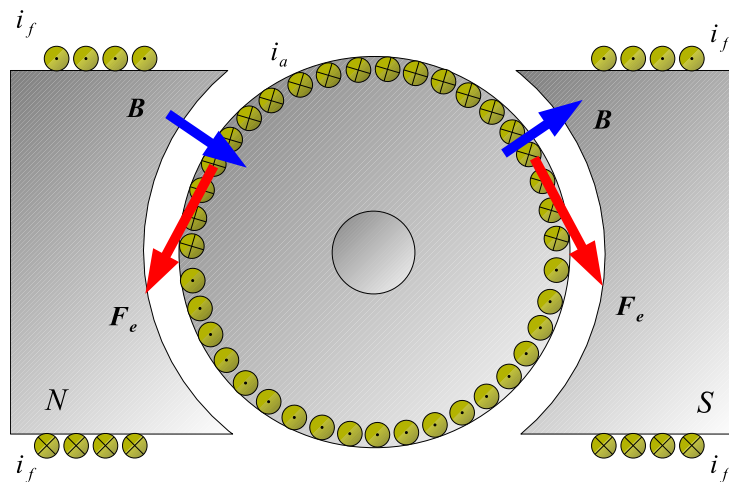


Figura 5.5 Alineamiento de las corrientes de armadura que no produce par efectivo en el eje

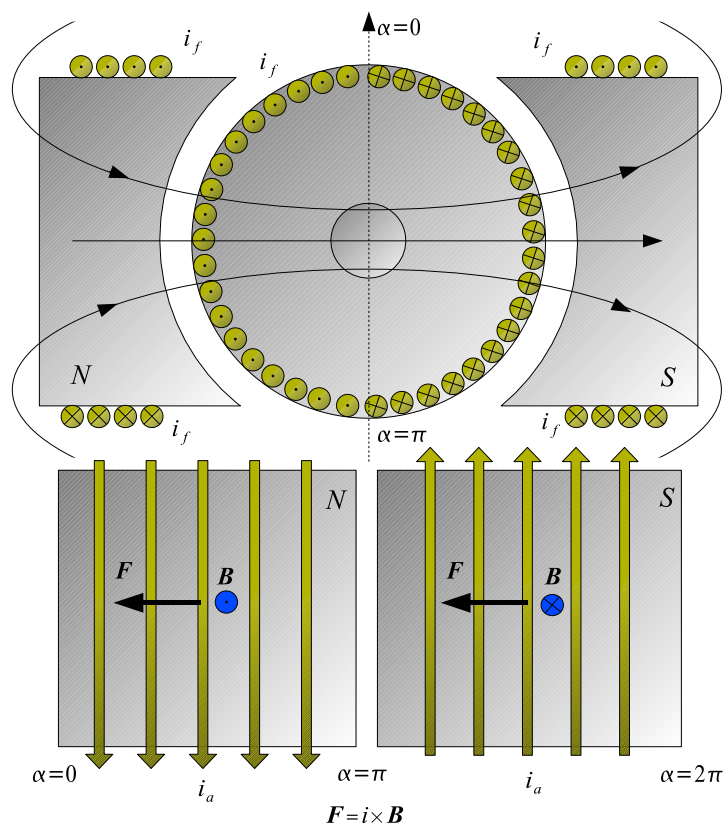


Figura 5.6 Abatimiento lineal de una máquina rotativa de corriente continua

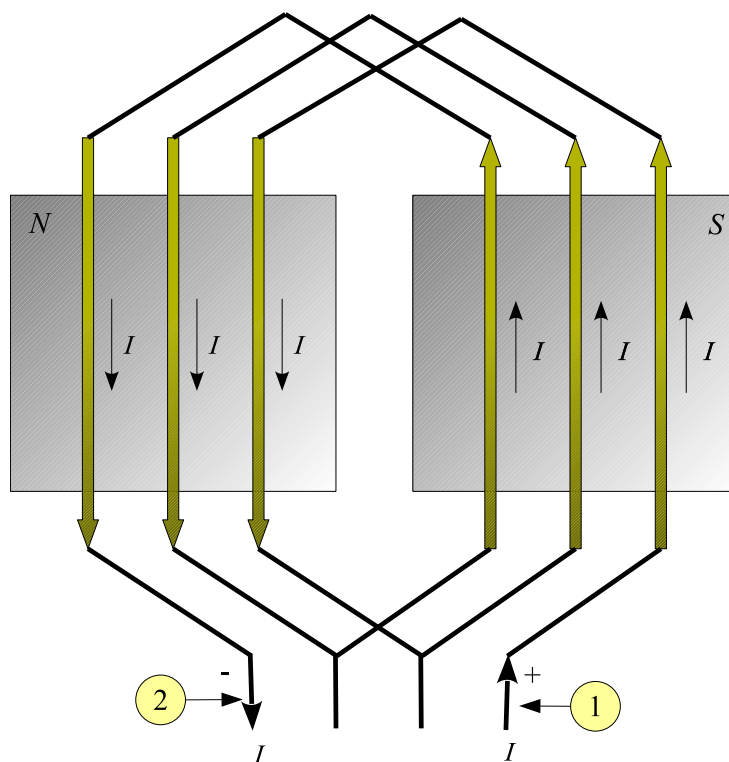


Figura 5.7 Conexión de los conductores del rotor

figura 5.6 se representa un abatimiento lineal de la superficie del estator y de los conductores del rotor. Es conveniente realizar una conexión de los conductores del rotor, de tal forma que sea necesario solamente un par de escobillas y no uno por cada espira. Esta situación se puede obtener conectando las bobinas en serie. La otra condición que se debe cumplir es que al cambiar de posición la espira, en ella debe cambiar el sentido de la corriente, pero no en las otras espiras. En la figura 5.7 se muestra una forma posible de realizar las conexiones de los conductores del circuito de armadura.

Los conductores conectados a los terminales (1) y (2) de la figura 5.7 se encuentran en una situación diferente al resto de los conductores del circuito rotórico porque son los extremos de la bobina, para resolver este inconveniente se conecta un segundo devanado similar al anterior, en las mismas ranuras del rotor, y conectados en paralelo.

En la figura 5.8 se observa el abatimiento lineal de estas dos bobinas. Con esta distribución de los conductores del devanado de armadura, es suficiente inyectar corriente entre dos delgas separadas 180° eléctricos para que la corriente circule en una dirección en una mitad de la periferia del rotor y en sentido contrario en la otra. Disponiendo de esta forma las bobinas, toda la superficie del rotor puede ser aprovechada para la producción de par. Si las escobillas se colocan alineadas convenientemente, se obtendrá siempre corriente en un sentido en el polo norte de la máquina y en sentido contrario en el polo sur. Cuando un conductor atraviesa la *línea neutra*, se invierte el sentido de su corriente, y por esta razón el par producido sobre él mantiene la misma dirección.

En la práctica se utilizan dos esquemas básicos para bobinar el circuito de armadura de las máquinas de corriente continua, el devanado imbricado y el devanado ondulado. En la figura 5.9

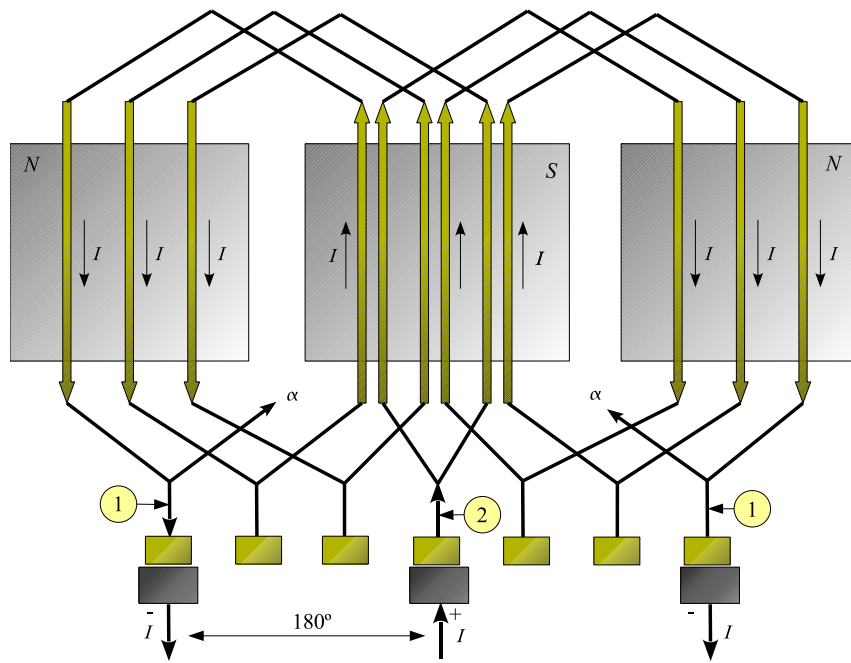


Figura 5.8 Armadura de la máquina

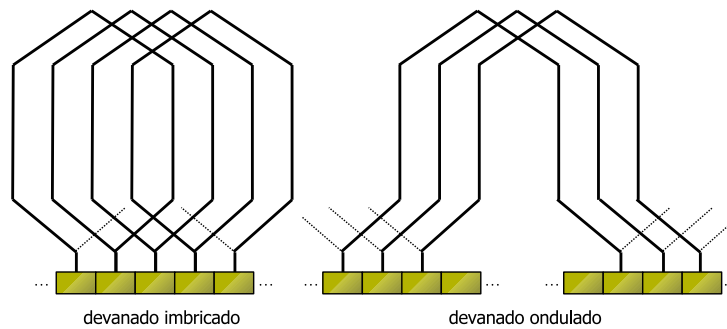


Figura 5.9 Bobinados de armadura imbricados y ondulosos

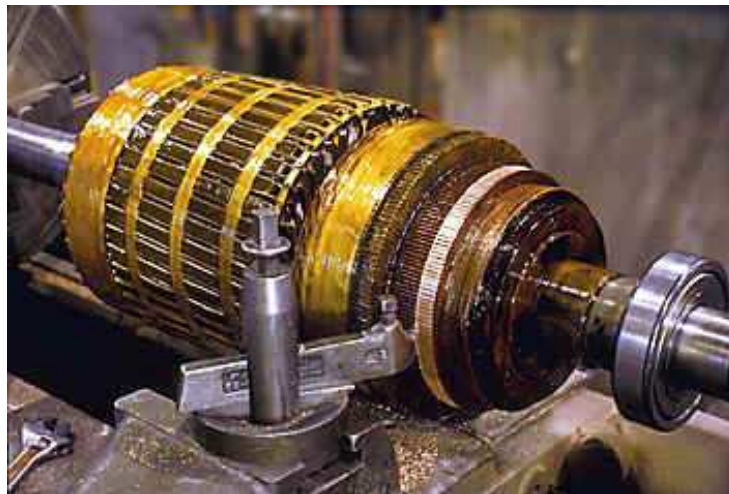
se muestran dos ejemplos de estos bobinados. En el enrollado imbricado, la bobina se devana, regresando por ranuras adyacentes o muy cercanas los retornos. En el devanado ondulado el conductor de retorno de bobina adelanta poco más o menos un paso polar. El análisis de los diferentes tipos de devanados es muy complejo y excede los alcances de este texto, pero se puede destacar que en los rotores ondulosos se puede utilizar un par de carbones para conectar todos los pares de polos de la armadura, mientras que los rotores imbricados requieren un par de carbones por cada par de polos. En máquinas pequeñas con múltiples pares de polos el empleo de bobinas ondulas puede representar un ahorro importante en el proceso de fabricación, porque además se utiliza menor cantidad de cobre en las cabezas de bobina.

En la figura 5.10 se muestran dos etapas del proceso de fabricación de la armadura de una máquina de corriente continua. En primer lugar la conexión de los mazos de conductores con las delgas y en la siguiente se muestra el maquinado final de las delgas realizado en el torno.

En la figura 5.11 se representa la armadura de la máquina de corriente continua mediante capas



(a) Unión de los conductores a las delgas



(b) Armadura en etapa final de fabricación

Figura 5.10 Proceso de fabricación de una armadura de corriente continua

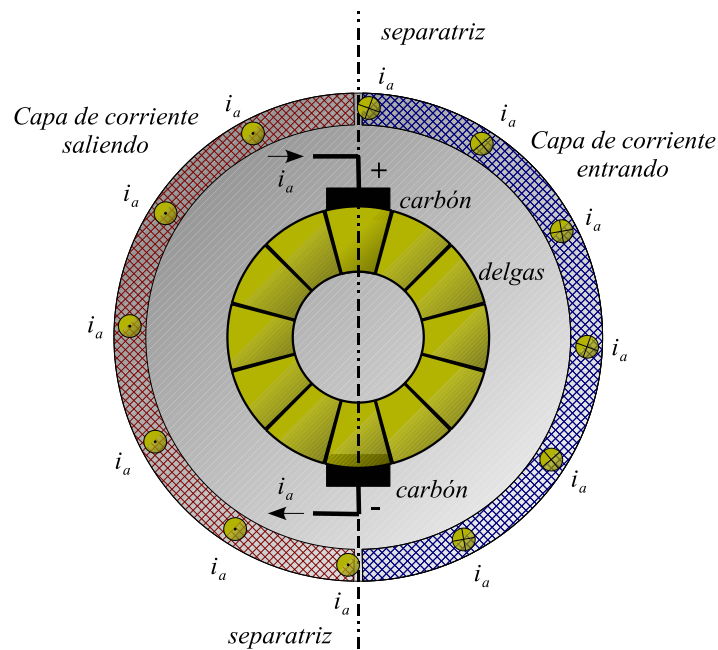


Figura 5.11 Separatriz de la armadura

de corriente. La capa de corriente puede girar mediante la rotación de las escobillas que alimentan a las bobinas. La frontera producida por la inversión de las corrientes en la armadura que contiene a las escobillas de la máquina se conoce como *separatriz* de la armadura. Este sistema permite construir físicamente unos conductores que se mueven en un campo magnético, pero que al mismo tiempo producen una fuerza electromotriz constante y a 90° del campo estático.

En la figura 5.12 se representa un abatimiento lineal de la máquina, los conductores se mueven hacia la izquierda y el campo magnético originado por el estator de la máquina está fijo. La fuerza electromotriz inducida en los conductores es:

$$\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (5.1)$$

En esta ecuación, \mathbf{E} es la intensidad del campo eléctrico sobre cada conductor, \mathbf{v} es la velocidad tangencial de los conductores y \mathbf{B} es la densidad de campo magnético producida por el devanado estático. Como todos los conductores se mueven con la misma velocidad tangencial, la fuerza electromotriz en cada espira es proporcional al campo. Entre las dos escobillas aparece una fuerza electromotriz que es igual a la suma de las fuerzas electromotrices de todas las espiras que se encuentran conectadas en serie entre las dos escobillas. En la figura 5.12 se observa que cada espira contribuye con:

$$v = e + e = 2e \quad (5.2)$$

Para invertir el sentido de las fuerzas electromotrices, manteniendo la dirección de la velocidad, es necesario invertir el campo. Por esta razón la fuerza electromotriz en las bobinas cambia de sentido cuando estas cruzan la línea neutra. En la figura 5.13 se representa esquemáticamente esta situación.

En la figura 5.13 se definen:

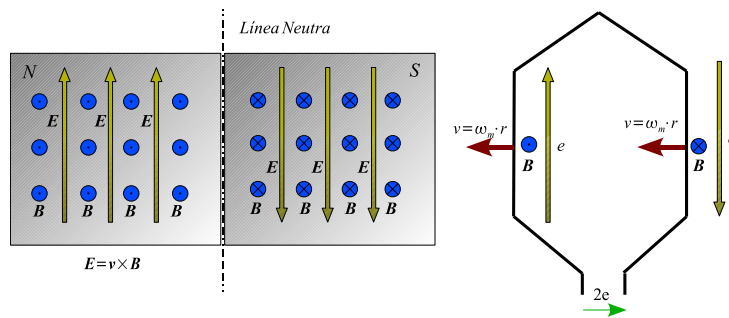


Figura 5.12 Campo eléctrico en la superficie de los conductores

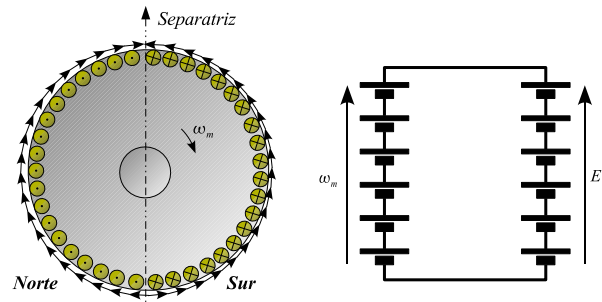


Figura 5.13 Fuerzas electromotrices inducidas sobre las bobinas

- E_1 a la fuerza electromotriz resultante en el polo norte.
 E_2 a la fuerza electromotriz resultante en el polo sur.

La densidad de campo en el polo norte es prácticamente igual a la del polo sur, por esta razón, las fuerzas electromotrices del rotor E_1 y E_2 son iguales en magnitud pero contrarias en sentido. Cuando las fuerzas electromotrices E_1 y E_2 son diferentes, se produce una corriente circulatoria en la armadura que puede ocasionar un calentamiento excesivo de la máquina.

Si las escobillas se alinean exactamente con la línea neutra, la fuerza electromotriz inducida sobre las bobinas del rotor es máxima. Cuando la línea neutra y la separatriz no están alineadas, ocurre una situación semejante a la que se muestra en la figura 5.14.

En este caso, la máquina se encuentra girando a la velocidad angular ω . El par producido en el sentido del movimiento se denomina *motriz*. Si el par tiene sentido contrario a la referencia de posición o velocidad, se denomina *generatriz*. En las regiones (2) y (4) de la figura, la máquina de corriente continua posee par motriz y por lo tanto estas regiones de la máquina trabajan como *motor* inventando accionar la carga mecánica en el sentido horario. En las regiones (1) y (3) la fuerza es contraria al sentido del movimiento, por lo tanto en estas zonas la máquina actúa como un *generador*. Las regiones (2) y (4) son más extensas que las zonas marcadas con (1) y (3), el par promedio está dirigido en el sentido del movimiento y el comportamiento neto de la máquina es como motor. Del análisis anterior se explica que cuando la separatriz y la línea neutra no coinciden, el par resultante se reduce.

Durante la operación de la máquina, las escobillas permanecen fijas en la separatriz, y es conveniente que esta línea coincida con la línea neutra. Con esta disposición, las corrientes que

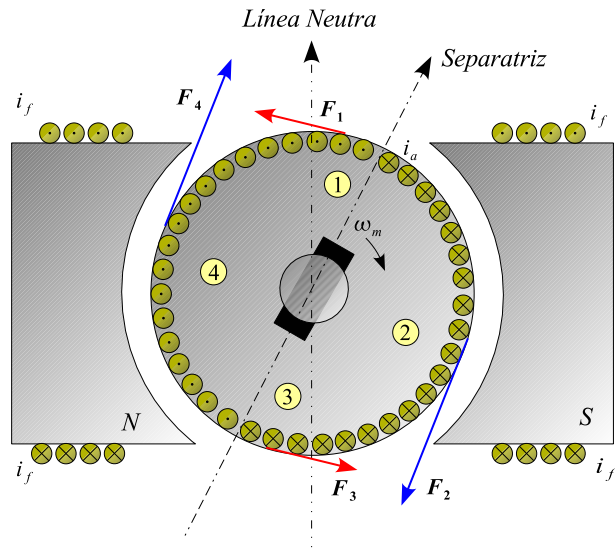


Figura 5.14 Línea neutra y separatriz desalineadas

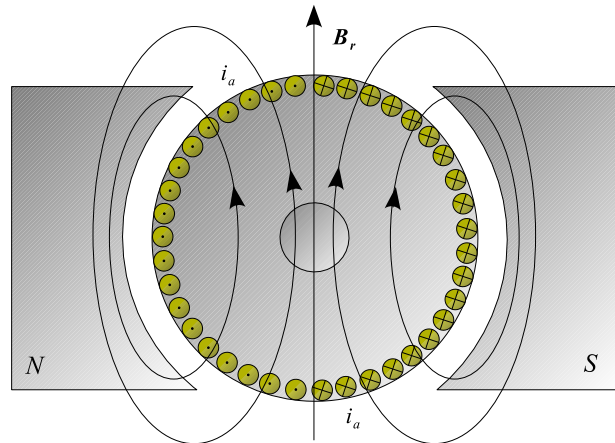


Figura 5.15 Flujo magnético producido por las corrientes de la armadura

circulan por los conductores del rotor que se encuentran a un lado de la línea neutra poseen todos la misma dirección e intensidad.

En la figura 5.15 se puede observar que las corrientes que circulan por el rotor producen una densidad de campo magnético B_r , fijo en el espacio y cuya amplitud se encuentra en cuadratura con el campo magnético producido por el devanado del estator.

Esta situación se asemeja a la transformación de los ejes α y β del rotor, en ejes d y q . El efecto físico del conmutador consiste en referir las corrientes del rotor a ejes ficticios que rotan en sentido contrario con la misma velocidad del rotor. Los ejes transformados parecen estar detenidos vistos desde el estator de la máquina. Fundamentándose en estas ideas, la máquina de conmutador puede ser analizada mediante una transformación a coordenadas $\alpha\beta dq$. El conmutador de estas máquinas es un inversor mecánico de la corriente que circula por los conductores del rotor, sincronizado con el eje de la máquina. Las conmutaciones suceden con una frecuencia igual a la

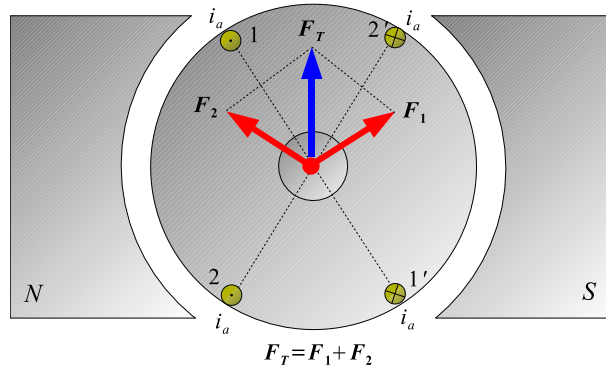


Figura 5.16 Resultante de la fuerza magnetomotriz del rotor

de rotación⁴. Si el rotor de la máquina está construido con una sola espira, la fuerza magnetomotriz resultante es perpendicular al plano de la espira. Para un conjunto de conductores como los ilustrados en la figura 5.16, la fuerza magnetomotriz se encuentra en la dirección de la separatriz de la máquina.

Para que el par eléctrico sea máximo, la fuerza magnetomotriz del rotor debe ser perpendicular a la fuerza magnetomotriz del estator. Por esta razón, las escobillas se colocan colineales con la línea neutra para permitir que la fuerza magnetomotriz del rotor se encuentre en cuadratura con la fuerza magnetomotriz del estator, tal como se demostró en la ecuación 4.55.

5.2. Ecuaciones de las máquinas de conmutador

En el capítulo 4 se dedujeron las ecuaciones diferenciales que permiten analizar el comportamiento dinámico de las máquinas con conmutador. Estas ecuaciones son:

$$\begin{bmatrix} v_{\alpha_e} \\ v_{\beta_e} \\ v_{d_r} \\ v_{q_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_e + L_e p & 0 & L_{er} p & 0 \\ 0 & R_e + L_e p & 0 & L_{er} p \\ L_{er} p & \dot{\theta} L_{er} & R_r + L_r p & \dot{\theta} L_r \\ -\dot{\theta} L_{er} & L_{er} p & -\dot{\theta} L_r & R_r + L_r p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{\alpha_e} \\ i_{\beta_e} \\ i_{d_r} \\ i_{q_r} \end{bmatrix}$$

$$T_m = -L_{er} (i_{\beta_e} i_{d_r} - i_{\alpha_e} i_{q_r}) + J\ddot{\theta} + \rho\dot{\theta}$$

Las diferentes conexiones de las máquinas de corriente continua convencionales se pueden analizar considerando la existencia de una bobina en el estator orientada en la dirección del eje β , y una bobina en el rotor orientada en la dirección del eje d , accesible mediante un par de escobillas tal como se ilustra en la figura 5.17.

Con el modelo analítico planteado para la máquina de corriente continua, denominando G al *coeficiente de generación*, que representa la inductancia mutua entre el rotor y el estator, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

⁴Esto es verdad estrictamente para las máquinas con un solo par de polos, en otro caso esta frecuencia será el producto de la frecuencia de rotación por el número de pares de polos.

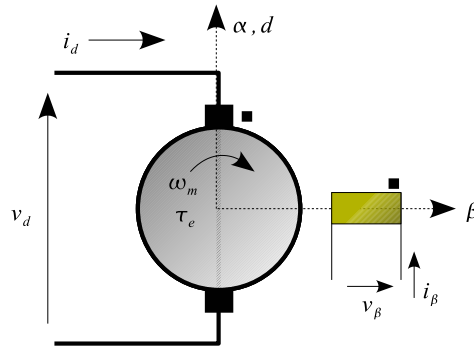


Figura 5.17 Representación básica de la máquina convencional de corriente continua

$$\begin{bmatrix} v_\beta \\ v_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_e + L_e p & 0 \\ \dot{\theta} G & R_r + L_r p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\beta \\ i_d \end{bmatrix}$$

$$T_m = -G i_d i_\beta + J \ddot{\theta} + \rho \dot{\theta} \quad (5.3)$$

Las máquinas de corriente continua se clasifican normalmente según la conexión del enrollado de excitación o campo. El devanado de excitación produce un campo magnético más o menos uniforme en el cual gira el rotor. Generalmente el devanado de excitación de las máquinas de conmutador se encuentra ubicado en el estator⁵. Si la corriente de excitación se obtiene a partir de la fuente de tensión que alimenta la armadura, la máquina se encuentra en conexión *paralelo* o *derivación*. Si el campo y la armadura se conectan mediante dos fuentes diferentes, la máquina se encuentra en conexión *independiente*. Cuando la corriente de la armadura circula por el devanado de campo, la conexión se denomina *serie*. Si la máquina tiene dividido el campo en dos partes, una conectada en serie con la armadura y otra en paralelo, la conexión se conoce como *compuesta*. En la figura 5.18 se muestra un diagrama con todas estas conexiones.

5.3. Características de operación de las diferentes conexiones

Si a la armadura de la máquina se le aplica tensión constante de valor V_a , y al devanado de campo una tensión constante de magnitud V_f ⁶, en régimen permanente las corrientes I_a e I_f también son constantes y en el sistema de ecuaciones 5.3 desaparecen los términos de transformación:

$$V_f = R_f \cdot I_f \quad (5.4)$$

$$V_a = G \omega_m I_f + R_a I_a \quad (5.5)$$

$$T_m = -G I_a I_f + \rho \omega_m \quad (5.6)$$

⁵El rotor tiene asociado el colector para permitir la sincronización de la inversión de sus corrientes con la posición de esta pieza.

⁶El subíndice f se utiliza habitualmente y proviene de los textos en idioma inglés por la inicial de la palabra *field*=campo.

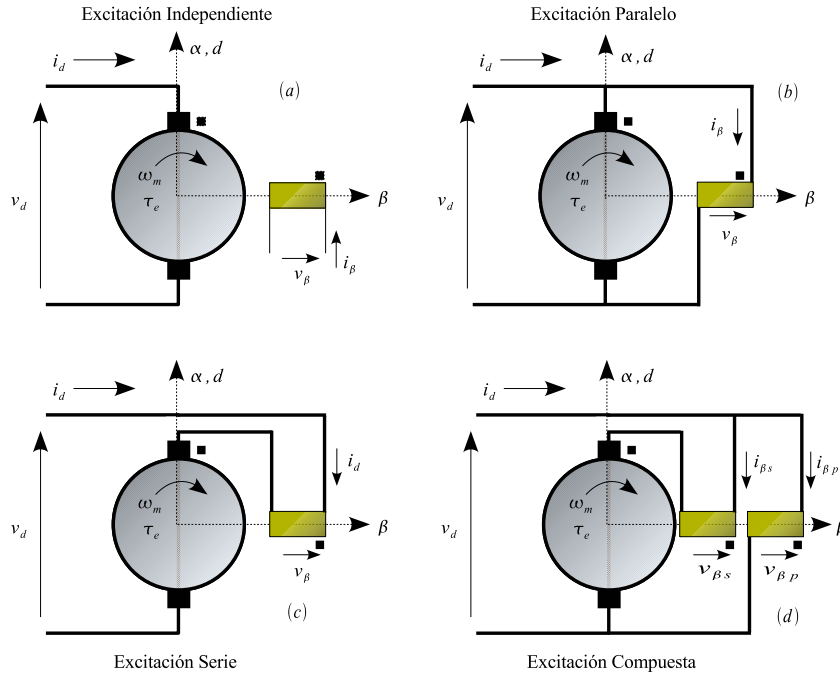


Figura 5.18 Conexiones de la máquina de conmutador

Despejando de la ecuación 5.5 la corriente I_f , de la ecuación 5.6 la corriente I_a , y reemplazándolas en la expresión 5.7, se obtiene la ecuación de equilibrio mecánico de la máquina de corriente continua en función de las fuentes forzantes⁷:

$$T_m = -G \left[\frac{V_a - \left(\frac{G\omega_m V_f}{R_f} \right)}{R_a} \right] \frac{V_f}{R_f} + \rho\omega_m \quad (5.7)$$

En la figura 5.19 se representa en un gráfico el par eléctrico de la máquina en función de la velocidad.

En el gráfico de la figura 5.19, la velocidad ω_s se define como la velocidad del rotor donde la tensión aplicada es igual a la fuerza electromotriz inducida en la armadura de la máquina y se denomina *velocidad de sincronismo* o *velocidad sincrónica*. La característica del par eléctrico de la máquina de corriente continua en función de la velocidad angular mecánica es igual a la característica de la fuerza eléctrica en función de la velocidad tangencial sobre un conductor elemental que se desplaza en la presencia de un campo magnético uniforme analizado en el capítulo 1. Esta semejanza en las características no es coincidental, los conductores de la armadura se encuentran en una disposición geométrica similar a la del conductor solitario.

La curva de par eléctrico-velocidad puede variar con la tensión aplicada a la armadura o a la excitación. Al variar la tensión de armadura se obtiene una familia de características paralelas tal como se muestra en la figura 149(a). Si se varía la tensión del campo, cambia la pendiente de la característica como se puede observar en el gráfico de la figura 5.20(b).

Si se conecta la máquina con el campo en derivación, el sistema de ecuaciones 5.4 representa el

⁷Tensión de armadura V_a y tensión del campo V_f .

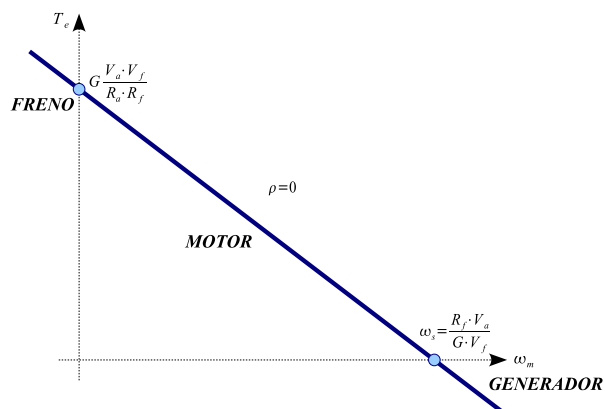


Figura 5.19 Par eléctrico .vs. velocidad con excitación independiente

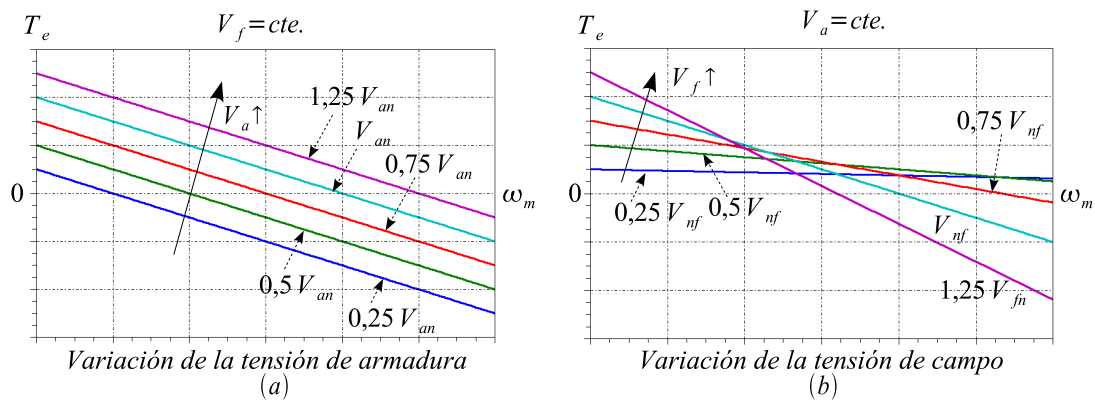


Figura 5.20 Efecto de la variación de las fuentes

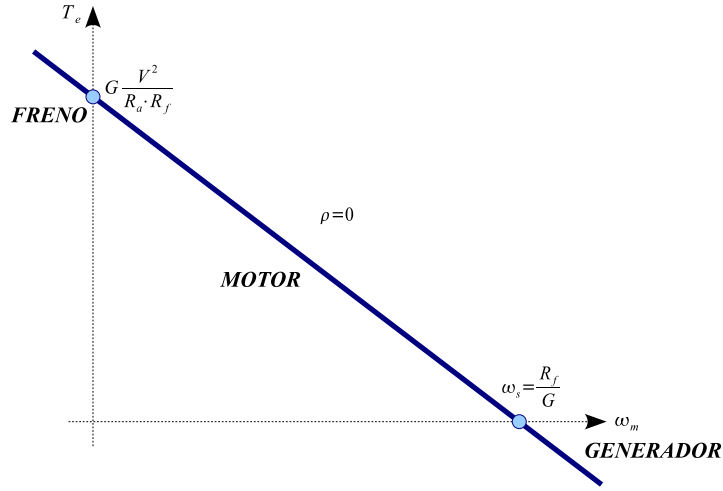


Figura 5.21 Par eléctrico .vs. velocidad de la máquina derivación

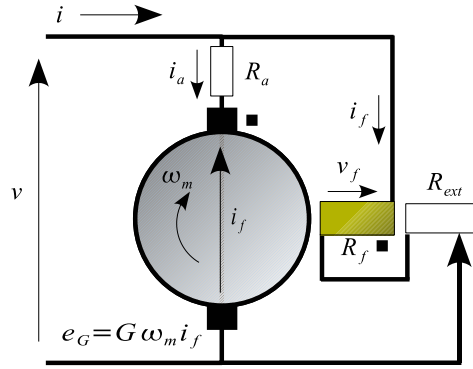


Figura 5.22 Modelo circuital de la máquina de corriente continua derivación

comportamiento de la máquina y la única diferencia con la máquina de excitación independiente es que la tensión de armadura y la tensión del campo son idénticas:

$$T_m = -\frac{GV^2}{R_a R_f} \left[1 - \frac{G\omega_m}{R_f} \right] + \rho\omega_m \quad (5.8)$$

En la figura 5.21 se ha representado el par eléctrico de la máquina de corriente continua con conexión derivación del circuito de campo, es interesante destacar que en este caso la velocidad sincrónica ω_s es independiente de la tensión, a diferencia de lo que se obtiene para la máquina de excitación independiente. La ecuación de tensión para la armadura de la máquina es:

$$V_a = R_a i_a + G\omega_m I_f \quad (5.9)$$

En la ecuación 5.9, el término $G\omega_m I_f$ es la fuerza electromotriz de generación producida por el campo. En la figura 5.22 se representa el modelo circuital equivalente de la máquina de corriente continua en derivación.

Si la fuerza electromotriz generada es mayor que la tensión aplicada, la máquina entrega poten-

cia a la fuente y el par eléctrico es negativo. En estas condiciones es necesario par mecánico de accionamiento.

La velocidad sincrónica depende del coeficiente de generación G y de la resistencia del campo R_f . Esta velocidad corresponde a la condición de vacío⁸ de la máquina. Para controlar la velocidad de vacío se pueden intercalar resistencias en el campo.

Para que la máquina pueda generar es necesario que la fuerza electromotriz sea mayor que la tensión aplicada. El generador en vacío debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial:

$$V = R_f i_f + L_f p i_f = G \omega_m i_f \quad (5.10)$$

La ecuación 5.10 representa los circuitos de campo y armadura. Despejando de esta última expresión la derivada de la corriente en el campo $p i_f$ se obtiene:

$$p i_f = \left(-\frac{R_f}{L_f} + \frac{G \omega_m}{L_f} \right) i_f \quad (5.11)$$

La solución de esta ecuación diferencial es una exponencial creciente, siempre y cuando se cumpla que:

$$\frac{-R_f + G \omega_m}{L_f} > 0 \Rightarrow G \omega_m > R_f \quad (5.12)$$

Si no se cumple la condición 5.12, la corriente del campo y la fuerza electromotriz de generación tienden a disminuir. Para que el proceso de auto-excitación pueda llevarse a cabo, es necesario que exista un pequeño *flujo remanente* ϕ_{rem} . Si la corriente de campo i_f en la ecuación 5.11 crece, tiende al infinito a menos que el circuito de campo se sature⁹. En caso de saturación se obtiene un punto de equilibrio. La no linealidad entre el flujo y la corriente permite que el generador derivación defina un punto estable de operación. En la figura 5.23 se representa esta situación.

Si disminuye la velocidad de accionamiento del generador derivación, aparece un punto crítico donde ya no es posible generar debido a que el factor $G \omega_m$ es menor que la resistencia R_f y el sistema se desestabiliza. Cuando el generador entrega potencia eléctrica, se cumple:

$$V = R_a i_a + G \omega_m i_f = R_a i_a + G \omega_m \frac{V}{R_f} \quad (5.13)$$

Despejando la tensión de alimentación V en la expresión anterior:

$$V = \frac{R_a i_a}{1 - \frac{G \omega_m}{R_f}} = -R_{carga} i_a \quad (5.14)$$

⁸Esta condición se alcanza cuando sobre el rotor no existe carga mecánica ni de pérdidas. En el laboratorio se requiere de un motor que accione exactamente a la velocidad sincrónica a la máquina para poder suplir las pérdidas y alcanzar la condición de vacío, donde no circula corriente por la armadura.

⁹Esto sucede generalmente en todas las máquinas con núcleo ferromagnético, cuando los dominios magnéticos están completamente alineados con el campo externo, la permeabilidad del medio μ tiende a la permeabilidad del vacío $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$. Las máquinas superconductoras, no requieren núcleo magnético para producir flujos importantes y pueden ser lineales mientras se mantiene este fenómeno físico.

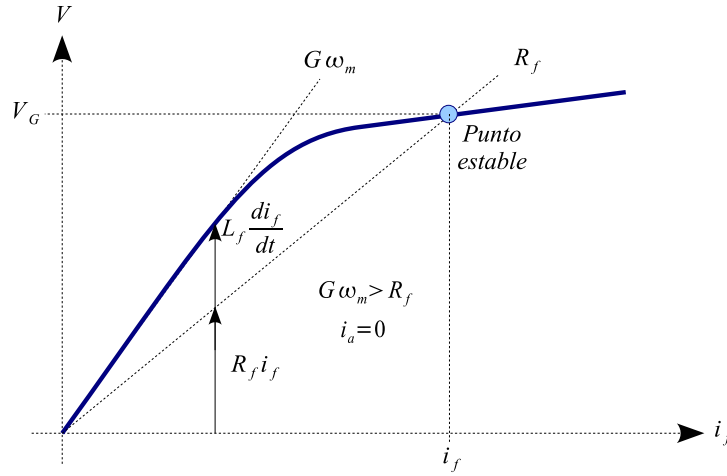


Figura 5.23 Punto estable de operación del generador derivación auto-excitado sin carga

La única solución estable de la ecuación 5.14 se obtiene cuando la corriente i_a es nula. Considerando que existe un pequeño flujo de remanencia ϕ_{rem} en el material ferromagnético, producida por una corriente equivalente y constante i_{rem} :

$$V = R_a i_a + G\omega_m i_f + G\omega_m i_{rem} \quad (5.15)$$

$$E_{rem} = G\omega_m i_{rem} \quad (5.16)$$

como:

$$i_f = \frac{V}{R_f} \quad (5.17)$$

Despejando de 5.15 y 5.17 la tensión V , e igualándola a la caída en la resistencia de carga se obtiene:

$$V = -\frac{R_a R_\beta}{G\omega_m - R_f} i_a - \frac{G\omega_m R_\beta}{G\omega_m - R_\beta} i_{rem} = -R_{carga} i_a \quad (5.18)$$

En la figura 5.24 se han representado los dos miembros de la ecuación 5.18. En esta condición existe un punto de operación estable, con corriente de armadura diferente de cero.

En la actualidad, los controladores electrónicos de potencia han reemplazado prácticamente al generador de corriente continua. Esto es debido a las mejores prestaciones, menor peso, volumen y costo de estos equipos. Las máquinas de corriente continua se utilizan todavía como generadores durante el *frenado regenerativo* de los sistemas de tracción eléctrica, con la finalidad de recuperar parte de la energía cinética acumulada en las masas en movimiento.

Los motores de corriente continua se utilizan ampliamente para el control de velocidad o para la tracción de vehículos eléctricos y trenes laminadores¹⁰. Las características de *par-velocidad*

¹⁰Sin embargo, existe una fuerte tendencia para su reemplazo por los motores de corriente continua sin escobillas, *DC Brushless*. Estos en realidad son máquinas sincrónicas de imán permanente en el rotor, que se alimentan por el estator con un inversor electrónico sincronizado con la posición θ del rotor mediante un decodificador óptico. Algunas limitaciones a su uso se deben a la posibilidad de desmagnetización de los imanes permanentes durante

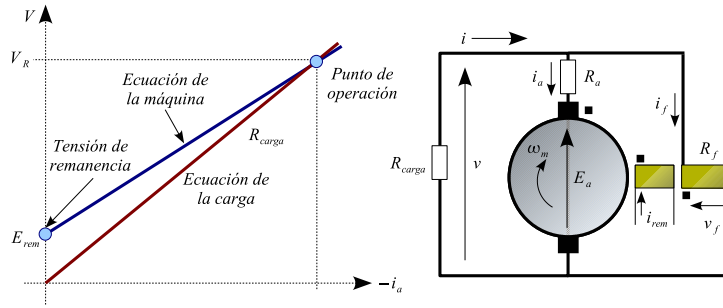


Figura 5.24 Punto de operación del generador auto-excitado con remanencia

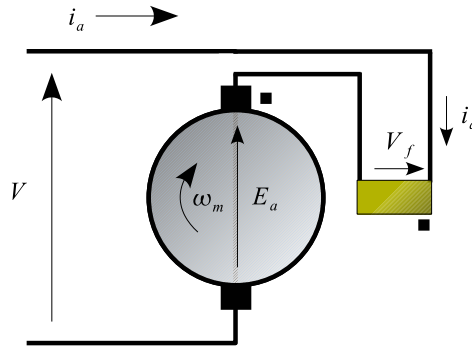


Figura 5.25 Conexión serie de la máquina de corriente continua

de estas máquinas permiten su utilización en un gran número de aplicaciones. Antiguamente se utilizaban resistencias para limitar la corriente en la armadura durante el proceso de arranque. Las máquinas se diseñan para permitir entre 1, 5 y 2 veces la corriente nominal por la armadura durante el arranque. En la actualidad el arranque y accionamiento de los motores de corriente continua se realiza mediante fuentes de corriente continua regulables en tensión, con lo cual las pérdidas en los reóstatos se eliminan. Esto es de gran importancia en sistemas con paradas y arranques frecuentes como ocurre en el caso de un sistema urbano de transporte público.

La conexión serie del devanado de campo es una de las más utilizadas en los sistemas de tracción eléctrica. En este caso, la tensión aplicada se reparte entre la armadura y el campo, y la corriente de armadura también circula por el campo. En la figura 5.25 se muestra el esquema de esta conexión.

Las ecuaciones dinámicas de la conexión serie son:

$$v = v_a + v_f = (R_a + R_f) i + (L_a + L_f) p i + G \omega_m i = (R_T + G \omega_m) i + L_T p i \quad (5.19)$$

$$T_m = -G i^2 + J \dot{\omega}_m + \rho \omega_m \quad (5.20)$$

cortocircuitos en el estator y a los costos de inversión y mantenimiento especializado del controlador de potencia asociado con este equipo. Por otra parte en plantas donde se utilizan materiales inflamables o corrosivos, estas máquinas son una necesidad debido a que no producen arcos eléctricos durante su operación.

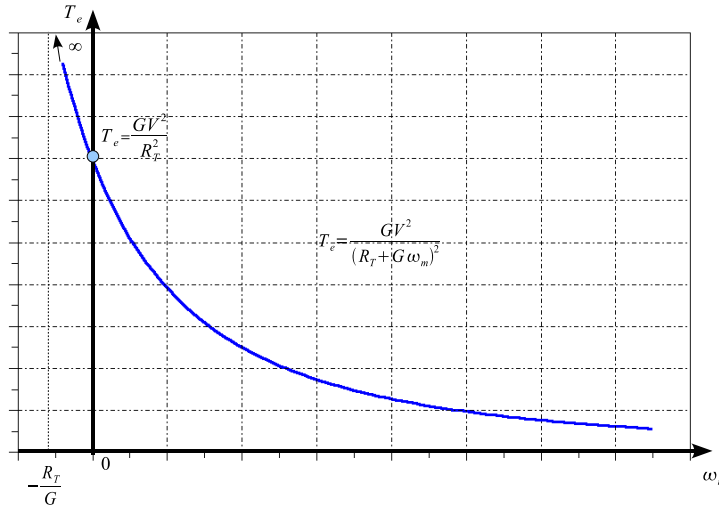


Figura 5.26 Característica par-velocidad de una máquina de conmutador serie

En régimen permanente se tiene:

$$V = (R_T + G\omega_m) I \quad (5.21)$$

$$T_e = GI^2 \quad (5.22)$$

Sustituyendo la corriente I de la ecuación 5.21, en la expresión 5.22, se obtiene:

$$T_e = \frac{GV^2}{(R_T + G\omega_m)^2} \quad (5.23)$$

En la figura 5.26 se representa la característica de par eléctrico para una máquina de corriente continua con excitación serie.

La característica par-velocidad tiene la forma de una hipérbola cuadrática como se deduce de la ecuación 5.23. Esta característica permite variar ampliamente el par resistente manteniendo la potencia mecánica prácticamente constante¹¹. El motor serie se utiliza frecuentemente en tracción eléctrica porque permite obtener un elevado par de arranque. Al igual que en el motor derivación, es necesario limitar la corriente de arranque.

La máquina de conmutador con excitación compuesta posee características combinadas de las máquinas derivación y serie. La característica de estas máquinas se parecen más a uno u otro tipo, dependiendo del grado de intensidad que proporcione el campo serie y el campo derivación.

¹¹Muchas pequeñas máquinas utilizadas en el hogar tales como taladros, licuadoras y aspiradoras entre otras utilizan esta conexión. Aun cuando la mayoría de estas máquinas se accionan mediante corriente alterna, como la armadura y el campo serie conducen la misma corriente el par es proporcional al cuadrado de la corriente. Las reactancias de las bobinas tienen el efecto de limitar la circulación de corrientes alternas sin producir pérdidas. Una licuadora tiene una alta carga cuando comienza a triturar los alimentos y su velocidad es baja en esta condición, en la medida que la carga se procesa, la velocidad aumenta y el par disminuye, tal como sucede en las máquinas de excitación serie. Argumentos similares se pueden utilizar en las otras aplicaciones.

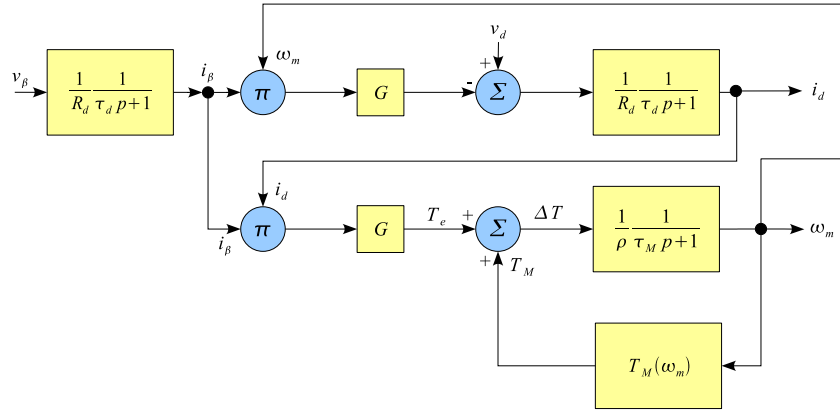


Figura 5.27 Diagrama de bloques de la máquina de corriente continua

5.4. Control de velocidad

Después de analizar el comportamiento en régimen permanente de las máquinas de corriente continua es posible estudiar el comportamiento transitorio mediante su función de transferencia. La máquina de corriente continua satisface el sistema de ecuaciones diferenciales 5.4 en régimen transitorio. De la ecuación de tensión para el eje β se puede obtener la función de transferencia operacional de la corriente i_β :

$$i_\beta = \frac{v_\beta}{R_\beta \left(1 + \frac{L_\beta}{R_\beta} p\right)} = \frac{\frac{1}{R_{\beta\beta}} v_\beta}{1 + \tau_\beta p} \quad (5.24)$$

La ecuación del eje d en 5.4 permite obtener la corriente i_d :

$$i_d = \frac{v_d - G \omega_m i_\beta}{R_d \left(1 + \frac{L_d}{R_d} p\right)} = \frac{\frac{1}{R_d} (v_d - G \omega_m i_\beta)}{1 + \tau_d p} \quad (5.25)$$

A partir de la ecuación diferencial correspondiente al eje mecánico se obtiene:

$$\omega_m = \frac{T_e + T_m(\omega_m)}{\rho + Jp} = \frac{\frac{1}{\rho} (G i_\beta i_d + T_m(\omega_m))}{1 + \tau_M p} \quad (5.26)$$

En la figura 5.27 se han representado las funciones de transferencia 5.24, 5.25 y 5.26 en *diagrama de bloques*, con sus respectivas realimentaciones e interconexiones. Este diagrama contiene multiplicadores, debido a las no linealidades implícitas entre las variables de estado del modelo. Por esta razón no es posible reducir este diagrama a una función de transferencia. Asumiendo que la tensión v_β es constante, la corriente i_β se estabiliza en un valor continuo después de varias constantes de tiempo. En estas condiciones se puede representar el modelo dinámico de la máquina de corriente continua mediante un solo bloque. Con la corriente i_β constante, se puede definir como constante k al producto de esta corriente por el coeficiente de generación G de la máquina. En la figura 5.28 se observa el diagrama de bloques de la máquina de corriente continua excitada con una corriente constante en el campo.

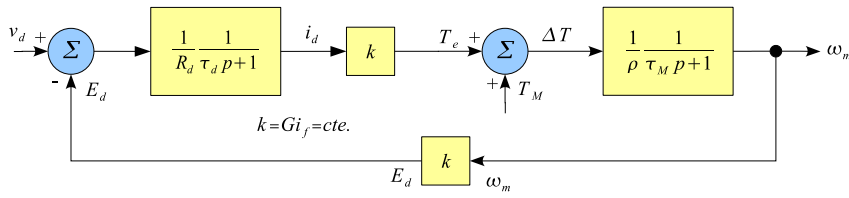


Figura 5.28 Diagrama de bloques de la máquina con corriente de campo constante

Este último diagrama de bloques se puede reducir a una función de transferencia cuando el par mecánico es nulo o constante. Un par mecánico constante no altera la respuesta transitoria del sistema sino los valores en régimen permanente. Definiendo la función de transferencia $T'(p)$ como el producto de las funciones de transferencia de la figura 5.28:

$$T'(p) = \frac{k}{R_d \rho} \cdot \frac{1}{1 + \tau_d p} \cdot \frac{1}{1 + \tau_M p} \quad (5.27)$$

La función de transferencia entre la velocidad mecánica de la máquina y la tensión aplicada en el circuito de armadura es:

$$\frac{\omega_m(p)}{v_d(p)} = \frac{T'(p)}{1 + kT'(p)} = \frac{k}{R_d \rho (1 + \tau_d p) (1 + \tau_M p) + k^2} \quad (5.28)$$

Transformando al dominio de Laplace la función de transferencia 5.28 se obtiene:

$$\frac{\Omega_m(s)}{V_d(s)} = \frac{k}{R_d \rho \tau_d \tau_M s^2 + R_d \rho (\tau_d + \tau_M) s + R_d \rho + k^2} \quad (5.29)$$

Como todos los términos del denominador de la función de transferencia 5.29 son positivos, los polos del polinomio tienen parte real negativa. Por esta razón, la respuesta del sistema siempre es estable. Para reducir los tiempos de respuesta se puede ajustar el valor de la constante k variando la corriente de campo i_β . La constante de tiempo de la armadura de la máquina τ_d es generalmente mucho menor que la constante de tiempo del sistema mecánico τ_M , y puede ser despreciada en la ecuación 5.29:

$$\frac{\Omega_m(s)}{V_d(s)} = \frac{k}{R_d \rho \tau_M s + R_d \rho + k^2} \quad (5.30)$$

El polo de la función de transferencia 5.30 es:

$$s = \frac{R_d \rho + k^2}{R_d \rho \tau_M} \quad (5.31)$$

Al aumentar el valor de la constante k^{12} , el valor del polo se hace más negativo y la respuesta de la máquina es más rápida. En una máquina de corriente continua al aumentar la corriente de campo se incrementa considerablemente la velocidad de respuesta.

¹²Es conveniente recordar en este punto que incrementar la constante k es igual a incrementar la corriente de campo i_β .

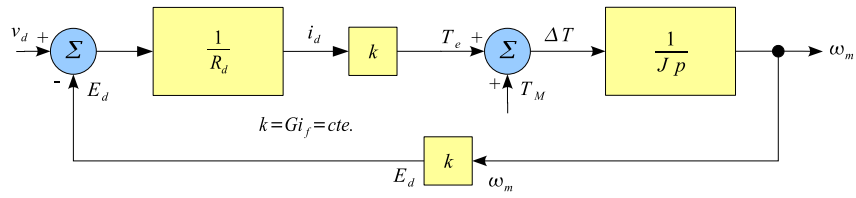


Figura 5.29 Máquina de corriente continua sin fricción

Otra aproximación habitual cuando se analiza la dinámica de la máquina de corriente continua, consiste en despreciar la fricción. En estas condiciones el coeficiente de fricción ρ es cero. En la figura 5.29 se ilustra el diagrama de bloques correspondiente al sistema sin pérdidas mecánicas.

Repitiendo el análisis realizado anteriormente se obtiene la función de transferencia:

$$\frac{\Omega_m(s)}{V_d(s)} = \frac{k}{R_d J \left(\frac{k^2}{R_d J} + s \right)} \quad (5.32)$$

Cuando se desprecia la fricción es evidente que para mover el polo del sistema a la izquierda es necesario incrementar el valor de la constante k y por lo tanto la corriente de campo. Mientras más corriente de campo circula por la máquina, los procesos dinámicos o respuestas transitorias son más rápidos.

La variable de control en este sistema es la tensión de armadura v_d , debido a que la constante de tiempo de este circuito τ_d es mucho menor que la constante de tiempo mecánica τ_M , fuertemente dependiente de la inercia J . Para que la respuesta de una máquina sea rápida es necesario que la inercia sea pequeña. Las máquinas de corriente continua son muy rápidas y se utilizan ampliamente para el *control par-velocidad* en los procesos industriales y en los sistemas de tracción eléctrica.

5.5. Valores nominales y bases

En las máquinas eléctricas es frecuente emplear como *potencia base*, la potencia de salida o potencia útil en el proceso de conversión. Para un motor de corriente continua la potencia de salida se encuentra disponible en el eje mecánico. En los generadores de corriente continua la potencia de salida está disponible en los bornes de la armadura. En los datos de placa de una máquina se especifican las tensiones, corrientes y potencias nominales. El rendimiento de la máquina en el punto nominal se puede calcular a partir de estos valores:

$$P_{neje} = I_n \cdot V_n \cdot \eta_{n_{motor}} \quad (5.33)$$

$$P_{nelectrica} = I_n \cdot V_n = P_{neje} \cdot \eta_{n_{generador}} \quad (5.34)$$

La impedancia base de la máquina de corriente continua es:

$$Z_B = \frac{V_B}{I_B} = \frac{V_n}{I_n} \quad (5.35)$$

Tabla 5.1 Valores típicos de los parámetros para las máquinas de corriente continua

<i>Parámetro</i>	<i>Valores típicos</i>
R_a	$0,02 \sim 0,04 Z_B$
$R_\beta I_\beta^2$	$\sim 0,02 P_B$
$I_{\beta p}$	$\sim 0,02 I_B$
τ_a	$0,005 \sim 0,2 s$
τ_f	$0,25 \sim 0,2 s$

En el cuadro 5.1 se han indicado valores típicos asociados con las máquinas de corriente continua, en función de los valores base de la impedancia Z_B , potencia $P_B = P_{neje}$ y corriente de armadura $I_B = I_{na}$.

5.6. Reacción de armadura¹³

Hasta el momento se ha supuesto que no existe interacción entre los campos producidos por los devanados de campo y las corrientes que circulan por la armadura. El flujo que produce el campo está orientado según el eje β de la máquina y el flujo que se produce en la armadura está orientado según el eje d . El campo total en el entrehierro de la máquina se intensifica en un extremo del polo y se debilita en el otro. En la figura 5.30 se observa un diagrama de esta situación. En las zonas polares donde se refuerza el flujo, el material magnético se satura, incrementándose la caída del potencial magnético en el entrehierro produciendo un debilitamiento del campo resultante en la máquina. Por otra parte, el eje neutro de la máquina se desplaza un cierto ángulo de la vertical, y si este desplazamiento no es compensado con un desplazamiento semejante de la separatriz de la máquina, parte de la armadura actuará como un motor y otra parte como generador¹⁴. El rendimiento y las características nominales de la máquina se reducen notablemente en estas condiciones.

La reacción de armadura también ocasiona la aparición de tensiones más elevadas entre las delgas debido a que el campo en el entrehierro no se encuentra uniformemente repartido. Como en las cabezas del polo se presentan densidades de campo mucho mayores, los conductores que atraviesan esa zona generan fuerzas electromotrices de mayor intensidad, por consecuencia se incrementan los arcos eléctricos durante las conmutaciones del colector. Estos arcos incrementan las pérdidas de la máquina y deterioran prematuramente esta pieza.

Para reducir el efecto negativo ocasionado por la reacción de armadura se puede colocar en el eje β del estator un devanado adicional de compensación. Por este devanado se hace circular la corriente de armadura. Es muy importante que la polaridad de este devanado produzca una fuerza magnetomotriz igual pero de sentido contrario al de la armadura para neutralizar su efecto. En la figura 5.31 se muestra la disposición física de la nueva bobina estatórica de compensación y su modelación como máquina generalizada.

Para analizar la máquina de corriente continua, incluyendo el devanado compensador de la re-

¹³En algunos textos se denomina también reacción del inducido.

¹⁴Ver la figura 5.14 para mayor detalle.

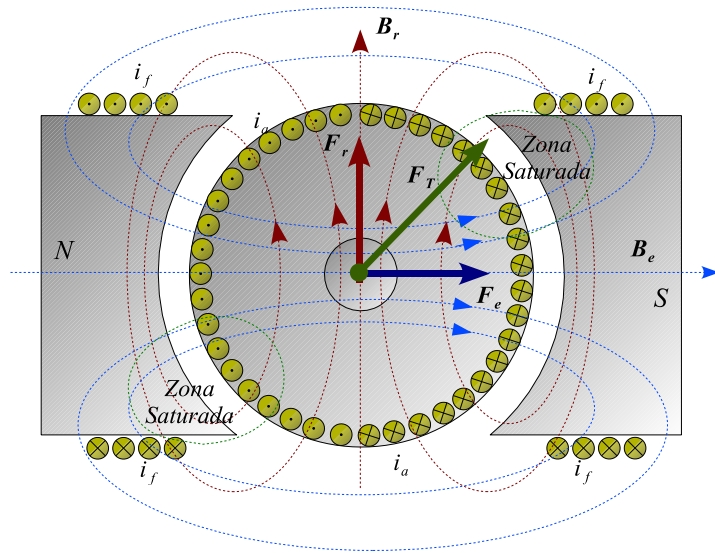


Figura 5.30 Reacción de armadura en las máquinas de corriente continua

acción de armadura, se tiene:

$$\begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \\ v_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_c + L_c p & 0 & L_{cd} p \\ 0 & R_\beta + L_\beta p & 0 \\ L_{cd} p & \dot{\theta} G & R_d + L_d p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_d \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales 5.36 se encuentra sujeto, de acuerdo con la figura 5.31, a las siguientes condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} i_\alpha &= -i_d \\ v &= -v_\alpha + v_d \end{aligned} \quad (5.37)$$

Aplicando las condiciones de contorno 5.37 al sistema de ecuaciones diferenciales 5.36, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} v \\ v_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R_c + R_d) + (L_c + L_d - 2L_{cd}) p & \dot{\theta} G \\ 0 & R_\beta + L_\beta p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_\beta \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

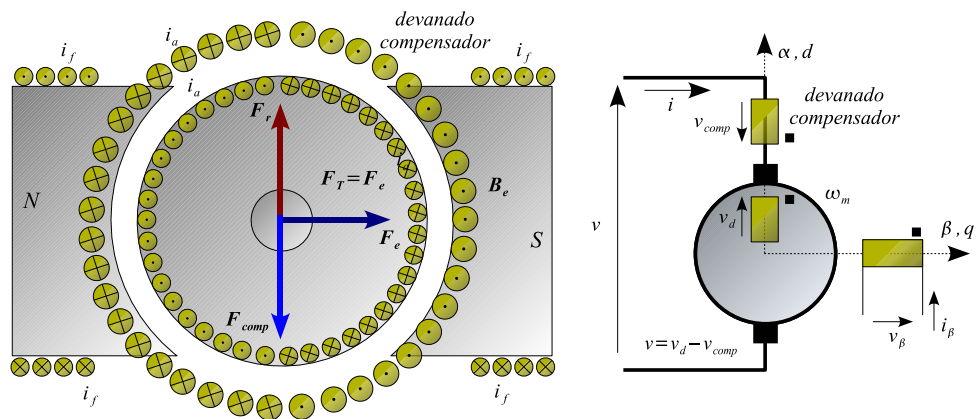
Si el número de vueltas de la bobina compensadora se iguala al número de vueltas de la armadura:

$$L_c + L_d - 2L_{cd} \cong 0 \quad (5.39)$$

De esta forma, además de compensar la reacción de armadura de la máquina se puede mejorar la respuesta dinámica del sistema.

5.7. Saturación de la máquina de corriente continua

En el análisis desarrollado para la máquina de corriente continua se ha supuesto que el material tiene un comportamiento lineal, exento de saturación. En otras palabras, se supone que las



(a) Esquema del bobinado de compensación de la reacción de armadura



(b) Devanado de compensación y polos auxiliares de conmutación

Figura 5.31 Devanado de compensación de la reacción de armadura

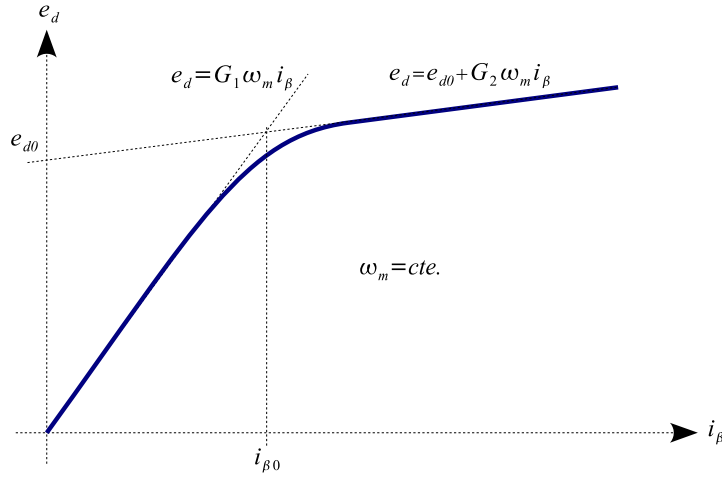


Figura 5.32 Linealización por tramos de la curva de magnetización

inductancias, resistencias y coeficientes de generación son constantes en el dominio de las variables de interés. En las máquinas reales, esta hipótesis no puede ser mantenida y es necesario estudiar el efecto de la saturación.

Cuando se aumenta la corriente de campo en una máquina de corriente continua, inmediatamente se incrementa el flujo en el entrehierro, pero esta variación no es lineal. Esto se debe a que cuanto mayor es la intensidad de campo magnético, y más alineados se encuentran los dominios magnéticos en el hierro, es necesaria mucha más energía para lograr otra pequeña alineación que incremente el campo total. La principal consecuencia que tiene la saturación en la máquina de corriente continua es que la fuerza electromotriz de armadura e_d , no depende linealmente de la corriente de campo i_β . La solución de este problema se puede obtener linealizando la característica de vacío de la máquina de corriente continua, tal como se observa en la figura 5.32.

La característica de magnetización se linealiza mediante *asíntotas* o *rectas tangentes* a esta curva. Cuando se aproxima la característica mediante dos rectas, se obtiene:

$$e_d = \begin{cases} G_1 \omega_m i_\beta & , \text{ si } i_\beta < i_{\beta 0} \\ e_{d0} + G_2 \omega_m i_\beta & , \text{ si } i_\beta \geq i_{\beta 0} \end{cases} \quad (5.40)$$

En la ecuación 5.40, G_1 es el coeficiente de generación no saturado, G_2 es el coeficiente de generación saturado, y e_{d0} representa la fuerza electromotriz de remanencia que existiría en la armadura de la máquina si al reducir a cero la corriente de campo, la máquina permaneciese saturada.

Es suficiente conocer la característica de fuerza electromotriz inducida contra la corriente de excitación a una sola velocidad, porque a cualquier otra velocidad existe una relación siempre lineal entre la velocidad mecánica y la fuerza electromotriz inducida en los conductores de la armadura.

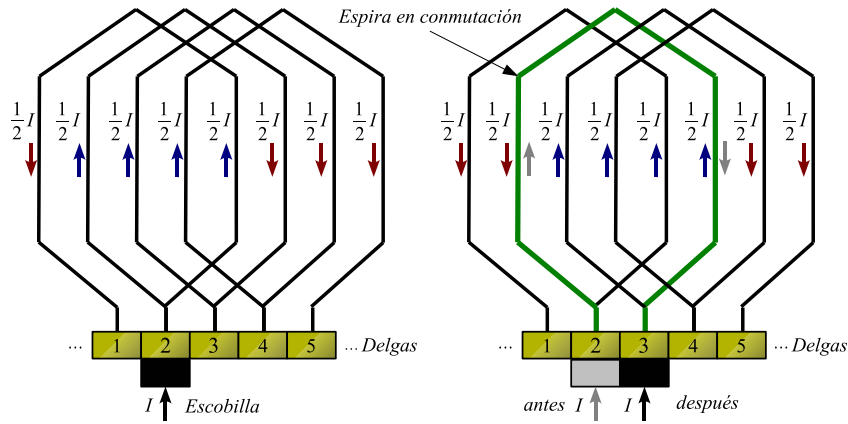


Figura 5.33 Corrientes en la armadura antes y después de una conmutación

5.8. La conmutación

Al analizar la acción del conmutador se determinó que la corriente que circula por los conductores de la armadura invierte su sentido de circulación justo al pasar frente a los carbones. Antes del proceso de conmutación se presenta la situación que se muestra en la figura 5.33.

En la figura 5.33 se observa que en la bobina que converge a la delga (1), la corriente se dirige hacia esa delga, mientras que en la (2), la corriente se aleja de la delga ya que está conectada a una escobilla o carbón en el cual se ha inyectado la corriente I . Las escobillas en la realidad se encuentran generalmente fijas con respecto al estator o campo de la máquina, pero para explicar el proceso se puede suponer que el carbón se mueve a una velocidad v y que la armadura se encuentra fija. En la figura 5.33, en el diagrama de la derecha se muestra la situación que se obtiene cuando la escobilla toca a la siguiente delga del colector. Cuando la escobilla pasa de la posición (2) a la (3) en la figura, todas las corrientes a la derecha e izquierda de esa delga no se alteran, sólo en la espira gruesa ocurre inversión de la corriente antes y después del paso de la escobilla. De este razonamiento se deduce que en la espira marcada en la figura ocurre todo el proceso de conmutación.

La dificultad para la realización del proceso de conmutación se debe a que previamente, la corriente en la espira tiene una magnitud de $+\frac{I}{2}$ y al finalizar el proceso la corriente es $-\frac{I}{2}$. En la figura 5.34 se muestra un gráfico de la corriente en la espira en función del tiempo.

El proceso de cambio de la corriente desde su valor $+\frac{I}{2}$ a $-\frac{I}{2}$ depende de la fuerza electromotriz inducida durante la conmutación. Este proceso se lleva a cabo durante el tiempo de conmutación Δt_c . El tiempo de conmutación Δt_c se calcula a partir de la velocidad de la máquina n , medida en revoluciones por minuto y del número de delgas N_D del colector:

$$\Delta t_c = \frac{60}{n \cdot N_D} \quad (5.41)$$

Al invertir la corriente en la espira desde $+\frac{I}{2}$ a $-\frac{I}{2}$ durante el tiempo Δt_c , se origina una fuerza electromotriz en la espira, que intenta oponerse al cambio de la corriente. La fuerza electromo-

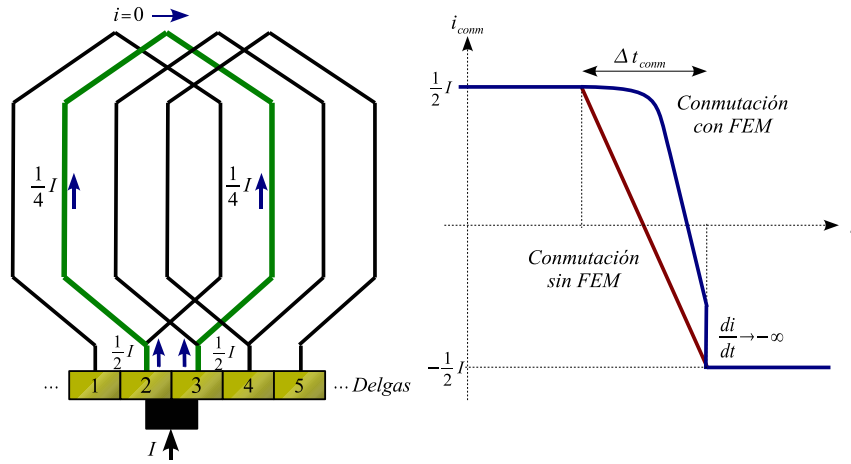


Figura 5.34 Conmutación de la corriente en una espira de la armadura

triz en la espira se calcula como:

$$e = L_e \frac{di}{dt} \approx L_e \frac{\Delta I}{\Delta t_c} = \frac{L_e \cdot I \cdot N_D \cdot n}{60} \quad (5.42)$$

En el momento de la conmutación, la espira se encuentra muy cercana a la línea neutra, la inductancia propia de la espira L_e es:

$$L_e = N_e^2 \cdot P_e = N_e^2 \frac{\mu_0 \cdot A_e}{2\delta} \quad (5.43)$$

En la ecuación 5.43:

- P_e es la permeanza de la espira.
- N_e es el número de vueltas de la espira.
- A_e es el área de la espira.
- δ es el espesor del entrehierro.

Si no aparece la fuerza electromotriz descrita en la ecuación 5.42, el reparto de corrientes entre las dos delgas que están siendo tocadas por el carbón depende de la resistencia de contacto. La resistencia de contacto depende del maquinado de los materiales y de la presión que se ejerce en el contacto. La corriente que circula por cada delga es inversamente proporcional a la resistencia de contacto y por lo tanto directamente proporcional al área de contacto entre el carbón y la delga. Por esta razón, a medida que la escobilla se desplaza sobre la delga, la resistencia de contacto varía aproximadamente de forma lineal y si no existe fuerza electromotriz en la bobina, la conmutación se produce de forma ideal, tal como se observa en la figura 5.34. Durante el proceso de conmutación, la fuerza electromotriz intenta mantener en circulación la corriente de la espira en la misma dirección, esto trae como consecuencia que el proceso de conmutación real es más lento y la parte de la escobilla que va entrando en la nueva delga tiene una corriente menor a la que le corresponde a su área de contacto.

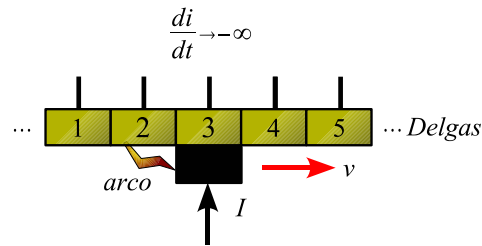


Figura 5.35 Producción del arco eléctrico al conmutar una delga por la siguiente

La punta de la escobilla que está abandonando la delga, tiene una densidad de corriente muy elevada, que ocasiona pérdidas *Joule* significativas y altas temperaturas que pueden deteriorar las delgas y las escobillas. Cuando la escobilla toca sólo la nueva delga, la fuerza electromotriz inducida en la bobina anterior intenta mantener circulando la corriente y por esta razón se produce el arco eléctrico. En la figura 5.35 se muestra un diagrama de esta situación.

En el momento del último contacto entre el carbón y la delga vieja el $\frac{di}{dt}$ aumenta considerablemente, incrementando sustancialmente la fuerza electromotriz de conmutación, produciendo el cebado del *arco eléctrico*. Como la temperatura de estabilización de la escobilla es elevada, se facilita la ionización del aire y la producción del arco eléctrico. La energía en forma de calor en el arco es capaz de fundir metales. Esta fusión no ocurre en la operación normal debido a que el colector está rotando y el arco sobre cada delga dura tan solo fracciones de milisegundo. Si se incrementa la corriente de conmutación, el área de ionización puede ser tan extensa que se originen arcos entre delga y delga. Si esta situación se propaga a un número importante de las delgas, se origina el fenómeno conocido como *arco de fuego* y todo el colector queda en cortocircuito.

Para contrarrestar el fenómeno de la conmutación con arco, durante el proceso de diseño de la máquina se intenta incrementar en lo posible el número de delgas para que varias delgas puedan ser contactadas por una escobilla simultáneamente, obteniendo así un cierto amortiguando del proceso.

Una solución efectiva para el problema de la conmutación consiste en equilibrar la fuerza electromotriz que intenta mantener circulando la corriente en la espira, con una fuerza electromotriz generada localmente sobre la espira que está conmutando. Esta espira se encuentra en una zona cercana a la línea neutra, el flujo que la atraviesa en ese momento es máximo y su derivada es prácticamente nula. En estas condiciones no es posible equilibrar la fuerza electromotriz de conmutación.

Si se colocan *polos auxiliares*, semejantes a los presentados en la parte (b) de la figura¹⁵ 5.32 para producir un campo magnético sólo sobre los conductores que están conmutando la corriente, se puede generar una fuerza electromotriz contraria a la de conmutación y neutralizar la formación del arco eléctrico. De la ecuación 5.42 se tiene que la fuerza electromotriz de conmutación depende de la corriente de armadura y de la velocidad, la fuerza electromotriz inducida en los conductores que están conmutando debida a los polos auxiliares dependen de la velocidad tangencial de los conductores y del campo magnético auxiliar, por tanto es necesario para que las dos fuerzas electromotrices actuantes se neutralicen, que la corriente de armadura excite los

¹⁵Los polos auxiliares se encuentran ubicados en el espacio existente entre los polos principales del estator.

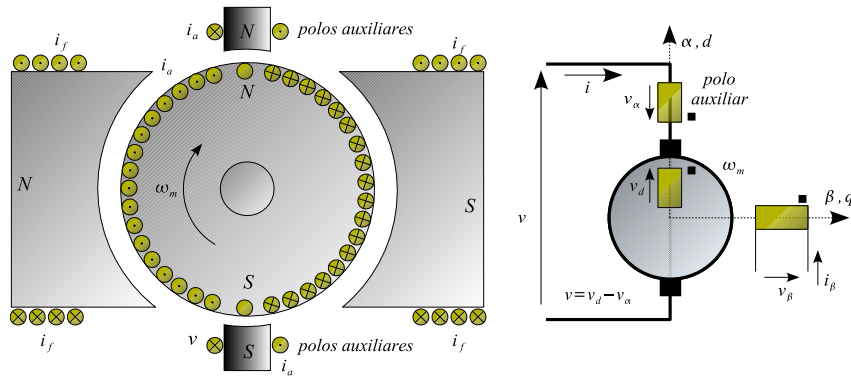


Figura 5.36 Máquina con polos auxiliares de conmutación y su representación

campos auxiliares de la máquina.

De esta forma es posible diseñar la máquina para que en cualquier condición de carga la conmutación se realice de forma ideal. En la figura 5.36 se muestra un diagrama de la situación física de los polos auxiliares y el modelo en coordenadas $\alpha\beta dq$ de la máquina.

Si se compara el modelo en coordenadas $\alpha\beta dq$ de la figura 5.36 con el modelo de la figura 5.31 para la compensación de la reacción de armadura, se observa que el análisis es idéntico. La única diferencia consiste en que el término $L_c + L_d - 2L_d$ no puede ser despreciado ya que los polos auxiliares de conmutación producen sólo un campo local y no pueden por tanto compensar el flujo total de la armadura como es el objeto de las bobinas de compensación de reacción de armadura.

5.9. Pérdidas en las máquinas de corriente continua

El rendimiento de una máquina eléctrica se define como:

$$\eta = \frac{P_{salida}}{P_{entrada}} = \frac{P_{entrada} - P_{perdidas}}{P_{entrada}} = \frac{P_{salida}}{P_{salida} + P_{perdidas}} = 1 - \frac{P_{perdidas}}{P_{entrada}} \quad (5.44)$$

En la ecuación 5.44 se observa que determinando las pérdidas en una máquina se puede obtener su rendimiento¹⁶. Las pérdidas de una máquina de corriente continua se pueden dividir en:

1. Pérdidas debidas al flujo principal

- a) Pérdidas en el hierro del rotor
- b) Pérdidas en la cara del polo

¹⁶Este método incluso es preferible a la medida directa del rendimiento (P_{sal}/P_{ent}), debido a que generalmente las máquinas eléctricas convencionales tienen un rendimiento elevado, las pérdidas son una fracción reducida de la potencia de entrada, y por esta razón los errores en la determinación de las pérdidas tienen un efecto menor sobre el cálculo del rendimiento que cuando los errores de medición afectan a las potencias que están siendo transformadas.

c) Pérdidas en el cobre del polo

2. Pérdidas en carga

a) Pérdidas por efecto Joule

b) Pérdidas por efecto pelicular

3. Pérdidas por rozamiento y resistencia del aire

a) Pérdidas por fricción en los rodamientos

b) Pérdidas por fricción en las escobillas

c) Pérdidas por ventilación

Las pérdidas ocasionadas por flujo principal dependen de la intensidad del campo magnético de la máquina. En primer lugar existen pérdidas en el hierro del rotor ya que gira con respecto al campo magnético producido por la bobina β . El material magnético se magnetiza y desmagnetiza durante cada vuelta del rotor. En estas condiciones se producen pérdidas de histéresis que dependen del número de revoluciones por minuto y del volumen de hierro involucrado. El hierro del rotor se encuentra laminado para reducir las *corrientes de Foucault* pero aun así se producen pérdidas que dependen de la densidad de campo, del número de ciclos magnéticos por segundo, del espesor de las chapas del rotor, de la calidad del hierro utilizado y de su volumen. Para evaluar las pérdidas del histéresis algunos autores proponen la ecuación:

$$P_{hierro} = a \cdot f \cdot B + b \cdot f \cdot B^2 \quad (5.45)$$

En la ecuación 5.45, los coeficientes a y b son constantes, f es la frecuencia en Hz y B es la densidad de campo en Wb/m^2 . En la mayoría de los casos prácticos, el primer término de la ecuación 5.45 es despreciable y se puede utilizar la expresión:

$$P_{hierro} = b \cdot f \cdot B^2 \quad (5.46)$$

Las pérdidas de Foucault se pueden estimar mediante la expresión:

$$P_{Foucault} = c \cdot f^2 \cdot B^2 \quad (5.47)$$

Para evaluar las pérdidas totales en el hierro a partir de las ecuaciones 5.46 y 5.47 se obtiene:

$$P_{Thierro} = P_{histeresis} + P_{Foucault} = b \cdot f \cdot B^2 + c \cdot f^2 \cdot B^2 \quad (5.48)$$

En la práctica la magnitud de la densidad de campo magnético B es difícil de medir, pero la fuerza electromotriz que se induce en el rotor en la condición de vacío es proporcional al campo

y la ecuación 5.48 se puede escribir como:

$$P_{Thierro} = k_1 \frac{V_0^2}{f} + k_2 V_0^2 \quad (5.49)$$

Las ranuras del rotor producen variación de la reluctancia y por lo tanto variación del flujo. Esta ondulación induce corrientes de Foucault en la superficie o cara del polo con una frecuencia de valor:

$$f_d = Q \frac{n}{60} \quad (5.50)$$

En la ecuación 5.52, Q es el número de ranuras del polo y n es la velocidad de la máquina en revoluciones por minuto. Para producir el flujo principal es necesario hacer circular corriente por una bobina física con resistencia y por esta razón se producen pérdidas Joule en el cobre de la bobina de campo. Estas pérdidas se calculan como:

$$P_{cobre\ excitacion} = R_\beta \cdot I_\beta^2 \quad (5.51)$$

Cuando la máquina se encuentra en carga absorbe o entrega corriente de la fuente. Las corrientes que circulan por las resistencias de las bobinas de la armadura, por los polos auxiliares, los devanados de compensación y por los devanados de excitación serie, producen pérdidas por efecto Joule. Todas estas resistencias se pueden agrupar en la resistencia de armadura R_a , y sus pérdidas se evalúan así:

$$P_{cobre\ armadura} = R_a \cdot I_d^2 \quad (5.52)$$

Como la resistencia de las escobillas depende de la corriente, se asume que cada escobilla ocasiona un voltio de caída de tensión y de esta forma las pérdidas producidas por la corriente de armadura se pueden calcular como:

$$P_{armadura} = R_a \cdot I_d^2 + 2\Delta V_{escobilla} \cdot I_d \quad (5.53)$$

Como la corriente que circula por la armadura es alterna de frecuencia:

$$f_{rotor} = \frac{p \cdot n}{120} \quad (5.54)$$

se producen en el rotor las pérdidas por *efecto pelicular*, donde p es el número de pares de polos de la máquina. Estas pérdidas debidas al incremento de la resistencia de los conductores en presencia de campos magnéticos variables en el tiempo se amortigua considerablemente si en lugar de construir la armadura con un conductor en una ranura profunda se utiliza un haz de conductores delgados y aislados entre sí. En todo caso para evaluar estas pérdidas es necesario determinar la resistencia de la armadura a cada velocidad de operación.

Las *pérdidas mecánicas* de la máquina son ocasionadas por fricción o por consumo de los rodetes utilizados para la refrigeración de la máquina. La fricción se localiza principalmente en los rodamientos y en el contacto entre las escobillas y el colector. Para determinar las pérdidas debidas a los rodamientos se puede utilizar la ecuación:

$$P_{rodamientos} = \alpha_{rod} \frac{F}{D} v_{rod} \quad (5.55)$$

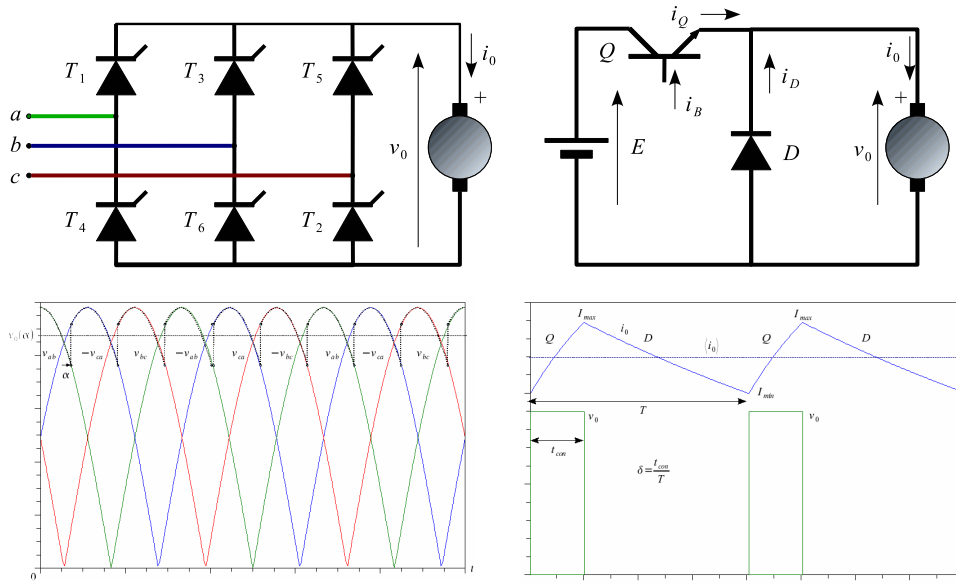


Figura 5.37 Convertidores de potencia con salida en corriente continua

En la ecuación 5.55, α_{rod} es el coeficiente de roce, F es la fuerza actuante sobre el rodamiento, D es el diámetro al centro de las bolas y v_{rod} es la velocidad tangencial del muñón. Para las escobillas, las pérdidas de fricción se determinan como:

$$P_{escobillas} = \alpha_{esc} f_e S_e v_c \quad (5.56)$$

En la ecuación 5.56, α_{esc} es el coeficiente de roce entre el colector y la escobilla, f_e es la fuerza de presión sobre la escobilla, S_e es el área de la superficie de contacto entre la escobilla y el colector, y v_c es la velocidad tangencial del colector. Finalmente las pérdidas de ventilación se pueden evaluar mediante la expresión:

$$P_{ventilacion} = k_v \cdot Q \cdot v^2 \quad (5.57)$$

En la ecuación 5.57, Q es el caudal de aire impulsado por el ventilador, v es la velocidad en la periferia del ventilador y k_v es un coeficiente constante que depende del tipo de rodete utilizado y de sus características constructivas. Como el caudal Q es proporcional a la velocidad de la bomba, las pérdidas de ventilación dependen del cubo de la velocidad.

5.10. Controladores electrónicos de velocidad

El control de velocidad en las máquinas de corriente continua se realiza mediante la variación de la tensión de armadura. Esto permite lograr una gran velocidad de respuesta en el proceso transitorio. Antes de la aparición de los controladores electrónicos de potencia, la velocidad de las máquinas de corriente continua se controlaba intercalando resistencia en el circuito de armadura. Este mecanismo de control producía pérdidas considerables de energía durante el proceso de regulación. Utilizando dispositivos electrónicos de potencia es posible obtener fuentes de tensión controlable y de alto rendimiento.

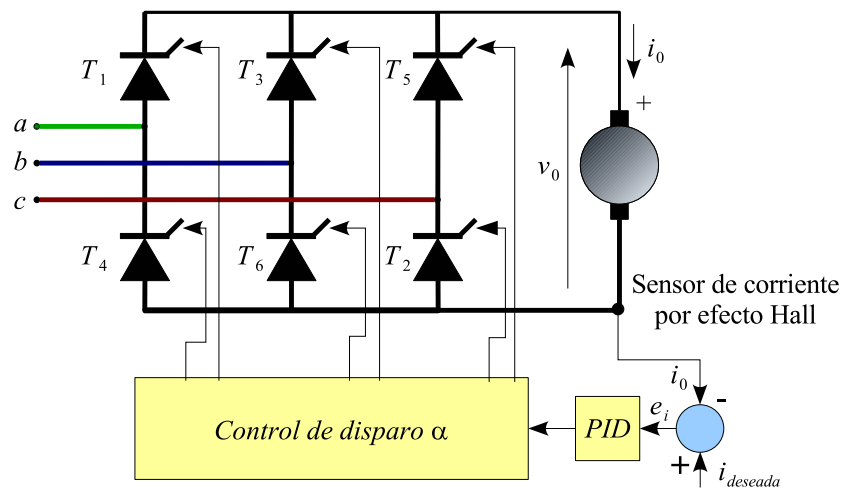


Figura 5.38 Puente rectificador controlado realimentado en corriente

Las fuentes normalmente disponibles son trifásicas de tensión alterna en los sistemas industriales, o continuas en los sistemas de tracción eléctrica tales como *ferrocarriles*, *metros*, *tranvías* y *trolebuses*. Las fuentes de corriente alterna utilizan rectificadores controlados para obtener corriente continua con tensión variable y las fuentes de corriente continua utilizan *troceadores de tensión* o "*choppers*", que no son otra cosa que transformadores de corriente continua a corriente continua. En la figura 5.37 se muestra un diagrama básico de estos convertidores.

Con un puente rectificador semejante al de la figura 5.37 se pueden obtener tensiones positivas y negativas retardando el ángulo de disparo α de los tiristores. En este tipo de puentes no es posible invertir el sentido de la corriente. Para obtener inversión en el sentido de las corrientes es necesario utilizar un puente rectificador de cuatro cuadrantes, que es equivalente a utilizar dos rectificadores conectados en oposición de polaridad sobre la carga.

Aun cuando los puentes rectificadores son fuentes de tensión continua variable, resulta sencillo convertirlos en *fuentes de corriente* mediante un lazo de realimentación. En la figura 5.38 se ha representado un puente rectificador controlado realimentado en corriente.

El compensador proporcional-integral-derivativo (PID) que se muestra en la figura 5.38, integra el error que existe entre la corriente que circula por la carga y la consigna de corriente deseada. A medida que el error crece, la red de compensación incrementa su tensión de salida y se ajusta el ángulo de disparo α del puente rectificador. Cuando el error existente entre la corriente real y la consigna es prácticamente cero, el ángulo de disparo se mantiene constante. Mediante este mecanismo, la fuente de tensión continua variable se transforma en una fuente de corriente continua controlada mediante el valor de consigna.

Los sistemas de transporte metropolitanos, interurbanos y los ferrocarriles utilizan fuentes de tensión continua para evitar las caídas de tensión en las reactancias de los alimentadores. Por esta razón es necesario un transformador de corriente continua a corriente continua variable. Este dispositivo se denomina *troceador de voltaje* o *chopper*. Un chopper posee la estructura básica que se muestra en el diagrama de la figura 5.39. Cuando el transistor de potencia Q de la figura entra en conducción, la tensión sobre la carga es igual a la tensión de la fuente:

$$v_0 = V \quad (5.58)$$

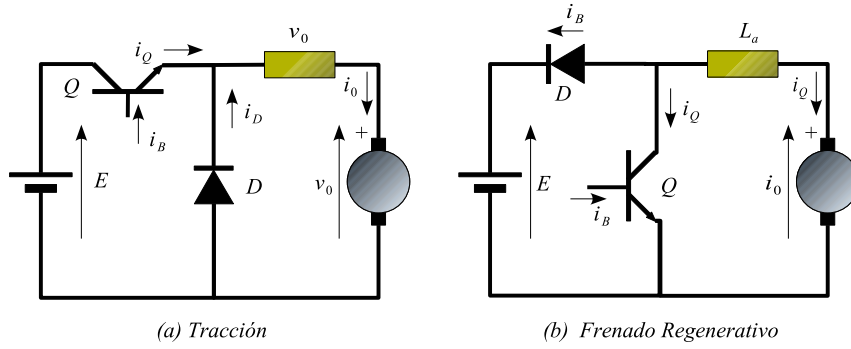


Figura 5.39 Diagramas básicos del troceador de tensión para tracción y frenado regenerativo

Si el transistor Q conduce, circula corriente por el motor. Si el transistor deja de conducir, la corriente que circulaba por el motor tiende a seguir circulando forzada por la *inductancia de alisamiento* L_a que se encuentra en serie con la armadura del motor.

En ese momento entra a conducir el diodo de descarga libre D , puesto que es el único camino que tiene la corriente para continuar circulando. Las ecuaciones que rigen el comportamiento del circuito son:

$$v_0 = L_T \frac{di}{dt} + R_T i + E \quad (5.59)$$

Cuando el tiristor conduce se obtiene a partir de las ecuaciones 5.58 y 5.59:

$$V = L_T \frac{di}{dt} + R_T i + E = L_T \frac{di}{dt} + (R_T + G\omega_m) i \quad (5.60)$$

La solución de la ecuación diferencial 5.60 es:

$$i(t) = \frac{V}{R_T + G\omega_m} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_c}} \right) + I_{min} e^{-\frac{t}{\tau_c}} \quad (5.61)$$

donde I_{min} es el valor de la corriente en el motor en el momento que comienza la conducción del transistor Q y la constante de tiempo τ_c , está definida por la expresión:

$$\tau_c = \frac{L_T}{R_T + G\omega_m} \quad (5.62)$$

En la figura 5.39 se muestra el estado cuasiestacionario descrito en la expresión 5.61. Por integración se puede calcular la tensión promedio en la carga $\langle v_0 \rangle$:

$$\langle v_0 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T v_0(t) dt = \frac{1}{T} \left[\int_0^{t_{con}} V dt + \int_{t_{con}}^T 0 dt \right] = \frac{t_{con}}{T} V \quad (5.63)$$

introduciendo la ecuación 5.59 en la expresión 5.63:

$$\begin{aligned}\langle v_0 \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T v_0(t) dt = \frac{1}{T} \left[\int_0^T \left(L_T \frac{di}{dt} + R_T i + G \omega_m i \right) dt \right] = \\ &= \frac{1}{T} \left[\int_{i(0)}^{i(T)} L_T di + \int_0^T (R_T + G \omega_m) i dt \right] = (R_T + G \omega_m) \langle i \rangle\end{aligned}\quad (5.64)$$

En la ecuación 5.64, la integración en el diferencial de corriente di , es cero ya que en el régimen cuasiestacionario la corriente en $i(0)$ es igual a la corriente en $i(T)$. De la ecuación 5.63 y 5.64 se determina que:

$$\langle i \rangle = \frac{\frac{t_{con}}{T} V}{R_T + G \omega_m} = \frac{\delta V}{R_T + G \omega_m} \quad (5.65)$$

En la ecuación 5.65, δ es la *razón de conducción* que se calcula como el tiempo t_{con} durante el cual el transistor Q conduce, dividido entre el período total T del chopper.

En la máquina de tracción existe una exigencia de par mecánico sobre el eje, esto determina la corriente necesaria y como la tensión de la fuente y la velocidad de la máquina también están determinados, se obtiene el ángulo δ de conducción para la condición de tracción especificada.

Un troceador de tensión permite también la posibilidad de *frenado regenerativo*, es decir, convertir la energía cinética almacenada en la masa del vagón, en energía eléctrica para devolverla a la red. Para obtener esta posibilidad es suficiente con invertir la conexión de armadura de la máquina. Para realizar el cambio, se invierte la fuerza electromotriz E de la máquina. En la figura 5.39 también se muestra un diagrama del circuito utilizado para el frenado regenerativo de los motores (*b*). En este circuito, cuando el transistor Q conduce, se produce un cortocircuito de la fuerza electromotriz sobre la inductancia de alisamiento L_a . Durante este tiempo la corriente aumenta de acuerdo con la ecuación:

$$E = L_a \frac{di}{dt} \quad (5.66)$$

La inductancia de alisamiento acumula energía en el campo magnético durante el tiempo en el cual el transistor Q mantiene la conducción. Cuando el transistor interrumpe la circulación de la corriente, la inductancia de alisamiento mantiene circulando la corriente de la armadura y el único camino posible es a través del diodo de frenado D hacia la fuente. En esta condición la red recibe energía y la corriente tiende a decrecer. Durante el proceso, la corriente de armadura y la corriente de campo no se han alterado, solamente se ha invertido el sentido de la fuerza electromotriz y por lo tanto el par sobre el eje de la máquina es ahora de frenado con lo cual se reduce la velocidad y el vehículo se detiene.

Si en lugar de una fuente de tensión se conecta una resistencia, la energía cinética almacenada en la inercia del sistema, se entrega como pérdidas en esta resistencia y el proceso se denomina *frenado reostático*. El frenado reostático se utiliza frecuentemente en los sistemas de tracción eléctrica ya que muchas fuentes de corriente continua no son reversibles, no pueden absorber potencia. Cuando un sistema no es capaz de absorber la potencia del frenado se dice que la red eléctrica no es receptiva. Aun cuando un sistema no sea receptivo, como en la red existen cargas frenando y acelerando simultáneamente, siempre existe una cierta receptividad que puede ser aprovechada.

Mediante el troceador de tensión es posible acelerar o frenar una máquina, pero cuando el dis-

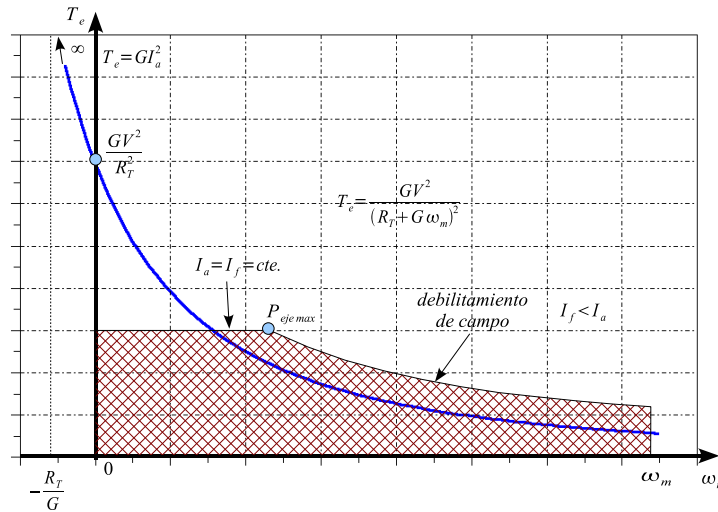


Figura 5.40 Característica par-velocidad motor serie con el campo debilitado

positivo se satura porque alcanza el ángulo máximo de conducción¹⁷, es posible continuar ajustando las características de tracción de una máquina de corriente continua con excitación serie mediante el debilitamiento de la corriente de campo. Esto se consigue conectando resistencias en paralelo con el campo serie. Al disminuir la corriente de campo, aumenta la corriente de armadura y se puede ajustar el par ya que la corriente de armadura se incrementa en una proporción mayor que la disminución de la corriente del campo, debido a que la resistencia del circuito de armadura es pequeña. En la figura 5.40 se muestra la curva característica par-velocidad de un motor serie con el campo debilitado.

5.11. Máquinas especiales de corriente continua

La posibilidad de colocar dos juegos de escobillas en una máquina de corriente continua, una en el eje d y otra en el eje q permite el estudio y fabricación de algunas máquinas especiales de conmutador. Estas máquinas se pueden utilizar como transductores o servomecanismo en los procesos de control. También se pueden construir fuentes de corriente o amplificadores de gran ganancia. El estudio de estos convertidores se puede realizar mediante la transformación a coordenadas $\alpha\beta dq$. La familia de máquinas con doble juego de escobillas se denominan las *metadinas* o *metadinamos*. El prefijo griego *meta-* indica algo que va más allá y por lo tanto las metadinas o metadinamos son algo más que dinamos o generadores convencionales de corriente continua. De la familia de las metadinas se analizan en esta sección dos representantes, el primero será la *metadina transformador* que permite convertir una tensión constante en una corriente constante y el segundo será la *amplidina* o amplificador rotativo, muy utilizada hasta hace unos años como *excitatriz* de las máquinas sincrónicas, debido a su elevada ganancia y gran velocidad de respuesta. La metadina transformador es una máquina de campo cruzado (d, q) que no posee devanados en el estator. En la figura 5.41 se muestra un diagrama de la máquina.

¹⁷ $\delta = 1$

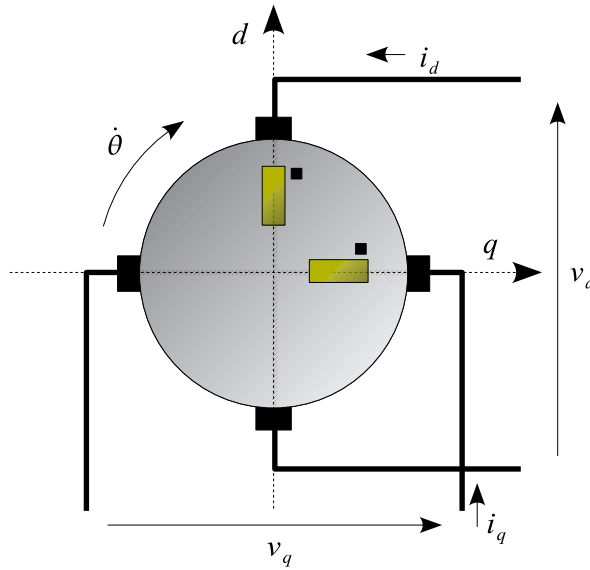


Figura 5.41 Metadina transformador

Las ecuaciones que rigen el comportamiento de esta metadina son:

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_d + L_d p & \dot{\theta} G_{dq} \\ -\dot{\theta} G_{dq} & R_q + L_q p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix}$$

$$T_e = (G_{dq} - G_{dq}) i_d i_q = 0 \quad (5.67)$$

Como la máquina es totalmente simétrica en el eje d y en el eje q y se asume un acoplamiento perfecto, es decir, se desprecia el flujo de dispersión:

$$\begin{aligned} R_d &= R_q = R \\ L_d &= L_q = G_{dq} = L \end{aligned} \quad (5.68)$$

En régimen permanente y de acuerdo con las ecuaciones 5.67 y 5.68 se obtiene:

$$\begin{bmatrix} V_d \\ V_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & \dot{\theta} L \\ -\dot{\theta} L & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_d \\ I_q \end{bmatrix} \quad (5.69)$$

Si se alimenta el eje d con una fuente de tensión V y se coloca una carga resistiva en los bornes del eje q , se obtienen las siguientes condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} V_d &= V \\ V_q &= -R_{carga} I_q \end{aligned} \quad (5.70)$$

Sustituyendo las condiciones 5.70 en el sistema de ecuaciones 5.69 se obtiene:

$$\begin{bmatrix} V_d \\ V_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & \dot{\theta} L \\ -\dot{\theta} L & R + R_{carga} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_d \\ I_q \end{bmatrix} \quad (5.71)$$

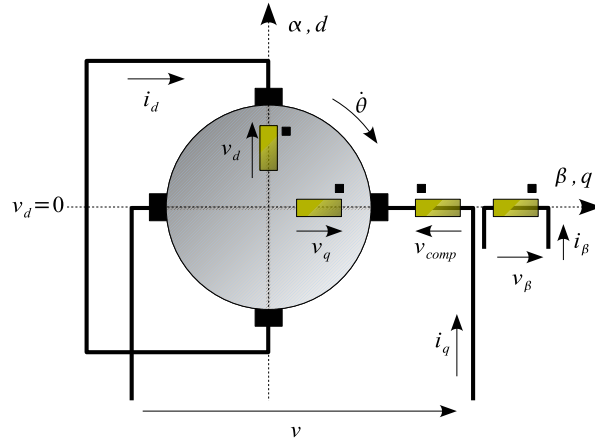


Figura 5.42 Circuito de una amplidina

Si la resistencia R de los devanados d y q es muy pequeña, se pueden despreciar las caídas resistivas en estos devanados, en esta condición se obtiene:

$$V \approx \dot{\theta} L I_q \quad (5.72)$$

De la ecuación 5.72 se puede despejar la corriente I_q :

$$I_q \approx \frac{V}{\dot{\theta} L} \quad (5.73)$$

La ecuación 5.73 indica que si se desprecian las caídas en las resistencias de los devanados de armadura, la metadina transformador convierte la tensión V aplicada en el eje d en una corriente constante en el eje q . La corriente del eje cuadratura depende sólo de la velocidad de la máquina.

La amplidina posee un devanado de compensación de la reacción de armadura que se diseña para reducir el valor de las inductancias propias y mutuas. De esta forma se incrementa la velocidad de respuesta en los procesos transitorios. La ganancia de corriente de armadura a tensión de campo es muy grande en las amplidinas. La configuración típica de una amplidina se ilustra en la figura 5.42. Las ecuaciones de tensión para una amplidina son:

$$\begin{bmatrix} v_\beta \\ v_c \\ v_d \\ v_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_\beta + L_\beta p & L_{\beta c} p & 0 & L_{q\beta} p \\ L_{\beta c} & R_c + L_c p & 0 & L_{qc} p \\ \dot{\theta} G_{\beta d} & \dot{\theta} G_{cd} & R_d + L_d p & \dot{\theta} G_{dq} \\ L_{q\beta} p & L_{qc} p & -\dot{\theta} G_{dq} & R_q + L_q p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\beta \\ i_c \\ i_d \\ i_q \end{bmatrix} \quad (5.74)$$

Para la amplidina se cumplen las siguientes condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} v_d &= 0 \\ v &= v_q - v_c \\ i_c &= -i_q = i \end{aligned} \quad (5.75)$$

Sustituyendo las condiciones de contorno 5.75 en el sistema de ecuaciones 5.74 se obtiene:

$$\begin{bmatrix} v_\beta \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_\beta + L_\beta p & (L_{\beta c} - L_{\beta q}) p & \dots \\ (L_{\beta q} - L_{\beta c}) p + \dots & R_c + R_q + \dot{\theta}^2 \frac{G_{dq}(G_{dq} - G_{dc})}{R_d + L_d p} + \dots & \dots \\ \dots + \dot{\theta}^2 \frac{G_{dq}G_{\beta d}}{R_d + L_d p} & \dots + (L_c + L_q - 2L_{cq}) p & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\beta \\ i \end{bmatrix} \quad (5.76)$$

La amplidina se diseña con las siguientes consideraciones:

$$\begin{aligned} L_{\beta c} - L_{\beta q} &\approx 0 \\ L_c + L_q - 2L_{cq} &\approx 0 \\ G_{dq} - G_{dc} &\approx 0 \end{aligned} \quad (5.77)$$

Con estas condiciones de diseño, el sistema 5.76 queda expresado de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} v_\beta \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_\beta + L_\beta p & 0 \\ \dot{\theta}^2 \frac{G_{dq}G_{\beta d}}{R_d + L_d p} & R_c + R_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\beta \\ i \end{bmatrix} \quad (5.78)$$

En régimen permanente el operador p tiende a cero y se obtiene:

$$V = \dot{\theta}^2 \frac{G_{dq}G_{\beta d}}{R_d + L_d p} i_\beta + (R_c + R_q) i \quad (5.79)$$

$$i_\beta = \frac{V_\beta}{R_\beta} \quad (5.80)$$

De las ecuaciones 5.79 y 5.80 se puede observar que a velocidades altas la ganancia $\frac{V}{V_\beta}$ aumenta considerablemente. Es importante destacar que la velocidad de respuesta a una perturbación es muy alta en una amplidina debido a que las únicas inductancias involucradas son las de campo y la de armadura del eje d . Las otras inductancias han sido prácticamente eliminadas mediante el diseño apropiado de la bobina de compensación de la reacción de armadura. Por estas razones, esta máquina de campo cruzado se utilizó frecuentemente como excitatriz de las máquinas sincrónicas. En la actualidad ha perdido vigencia debido a las excitatrices estáticas basadas en puentes rectificadores controlados que han reducido los costos e incrementado la velocidad de respuesta y el rendimiento.

5.12. Sumario

1. Las máquinas con colector son capaces de invertir mecánicamente el sentido de la corriente en los devanados rotóricos en sincronismo con la posición angular. De esta forma es posible mantener un par promedio diferente de cero a medida que el rotor gira. Estas máquinas pueden ser analizadas utilizando *coordenadas* $\alpha\beta dq$, y esto corresponde al modelo de la *máquina generalizada* desarrollado en el capítulo anterior.
2. El alineamiento de la *separatriz* con la *línea neutra* incrementa la capacidad del convertidor debido a que todos los conductores producen par en la misma dirección cuando se

obtiene esta situación.

3. Las máquinas de conmutador pueden ser diseñadas y conectadas en diferentes configuraciones. Las conexiones más utilizadas son la independiente, paralelo, serie y compuesta. La máquina con *excitación independiente* requiere dos fuentes que controlan independientemente el campo y la armadura. La *máquina paralelo* o derivación utiliza la misma fuente para alimentar el campo y la armadura. En la *máquina serie*, la corriente de campo y armadura son iguales. Las *máquinas compuestas* combinan las propiedades serie-paralelo o serie-independiente, para obtener características específicas de estas conexiones.
4. La *característica par-velocidad* de las máquinas con excitación independiente o paralelo, son rectas cuyo corte con el eje de la velocidad define el punto de sincronismo. A esta velocidad la tensión aplicada por la fuente y la fuerza electromotriz inducida en el rotor se equilibra, anulando la corriente de armadura y el par eléctrico.
5. La *autoexcitación* de una máquina de conmutador es posible y el punto de equilibrio depende de su característica de *saturación*. Aun cuando la electrónica de potencia ha relegado la aplicación industrial de los generadores autoexcitados, en algunas aplicaciones de tracción se utilizan estos principios para recuperar energía durante el proceso de frenado.
6. La ventaja más importante de las máquinas de conmutador reside en la *rapidez de respuesta*, en especial cuando la corriente de campo se mantiene constante y en un valor elevado.
7. La *reacción de armadura* produce saturación localizada en los polos de la máquina, lo cual repercute en una reducción neta del flujo medio. Esta reducción es equivalente a la operación con una corriente de campo menor. La reacción de armadura puede ser reducida aumentando la reluctancia en el eje q del convertidor o incluyendo un devanado en el estator que anule el flujo producido por las bobinas del rotor. Esto además permite incrementar la velocidad de respuesta de la máquina.
8. La *conmutación* de las corrientes en las bobinas del rotor presenta un problema importante en las máquinas de conmutador. Durante el proceso de conmutación se producen fuerzas electromotrices en las bobinas que tienden a incrementar los arcos entre las delgas y los carbones. Para reducir este problema es posible utilizar carbones que toquen simultáneamente varias delgas y emplear bobinas auxiliares para compensar localmente el fenómeno.
9. El análisis de las pérdidas de las máquinas es un mecanismo que incrementa la precisión en la determinación de su eficiencia. Fundamentalmente deben considerarse en esta evaluación las *pérdidas* debidas al flujo principal, las pérdidas en carga y las pérdidas mecánicas.
10. Los *rectificadores controlados* y los *choppers* son dispositivos electrónicos de potencia que permiten un control eficiente de la tensión y corriente de las máquinas de corriente

continua. Las características de operación cuando se incluyen estos sistemas incrementan en general las prestaciones operativas de la máquina.

11. Las *metadinas* han ido cediendo su espectro de aplicación a los dispositivos electrónicos de potencia. En el pasado sus aplicaciones como *transformador de corriente continua* y como *amplificador rotativo* fueron ampliamente utilizados.

5.13. Ejemplos resueltos

Ejemplo 1: Punto de equilibrio de un motor derivación de corriente continua

Una máquina de corriente continua excitación derivación tiene acoplada al eje una bomba cuya característica par-velocidad se puede expresar como una función cuadrática $T_B = k\omega_m^2$. A velocidad nominal tiene par nominal en el eje. Se conoce la velocidad sincrónica del motor ω_s . Determine de acuerdo con estos datos:

1. Las velocidades de operación del conjunto si se aplica como fuente de tensión αV_n .
2. La corriente de armadura en las mismas condiciones.
3. La resistencia que es necesario incluir en el circuito del campo para obtener la máxima velocidad con la tensión nominal aplicada.

Solución:

1. Las velocidades de operación del conjunto si se aplica como fuente de tensión αV_n .
En las máquinas cuyo campo se encuentra conectado en derivación, la velocidad sincrónica ω_s es independiente de la tensión tal como se observa en la expresión . De esta forma se puede establecer la ecuación de esta máquina una vez que esta velocidad y el punto nominal son conocidos:

$$\frac{T_n - 0}{\omega_n - \omega_s} = \frac{T_e - 0}{\omega_m - \omega_s} \Rightarrow T_e = \frac{\omega_m - \omega_s}{\omega_n - \omega_s} T_n$$

El par de arranque a tensión nominal V_n es:

$$T_e(\omega_m = 0) = \frac{\omega_s}{\omega_s - \omega_n} T_n = c V_n^2 \Rightarrow c = \frac{\omega_s}{\omega_s - \omega_n} \frac{T_n}{V_n^2}$$

Si se aplica la tensión αV_n a la máquina, la expresión del par eléctrico en función de la velocidad ω_m , es:

$$\frac{c\alpha^2 V_n^2 - 0}{0 - \omega_s} = \frac{T - 0}{\omega_m - \omega_s} \Rightarrow T_e = \frac{\omega_s - \omega_m}{\omega_s} c\alpha^2 V_n^2$$

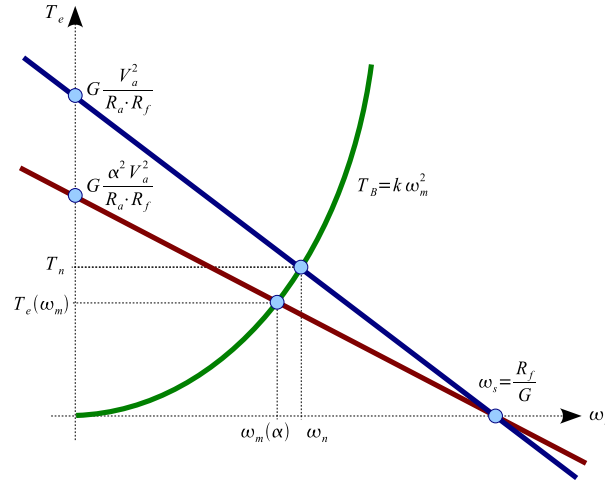


Figura 5.43 Puntos de equilibrio entre la máquina de corriente continua con excitación derivación y la bomba

$$T_e(\alpha, \omega_m) = \frac{\omega_s - \omega_m}{\omega_s - \omega_n} T_n \alpha^2$$

Equilibrando las ecuaciones del par eléctrico y el par de la bomba, se pueden obtener las velocidades de operación para cada valor del parámetro α :

$$\begin{aligned} \frac{\omega_s - \omega_m}{\omega_s - \omega_n} T_n \alpha^2 &= k \omega_m^2 = \frac{T_n}{\omega_n^2} \omega_m^2 \Rightarrow \\ \frac{\omega_m^2}{\omega_n^2} + \frac{\alpha^2 \omega_m}{\omega_s - \omega_n} - \frac{\alpha^2 \omega_s}{\omega_s - \omega_n} &= 0 \Rightarrow \\ \omega_m(\alpha) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha^2 \omega_n^2}{\omega_s - \omega_n} \right) \left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\omega_s}{\alpha^2 \omega_n} + \frac{4\omega_s^2}{\alpha^2 \omega_n^2}} \right) \end{aligned} \quad (5.81)$$

En la figura 5.43 se han ilustrado mediante un gráfico los puntos de equilibrio calculados mediante la expresión 5.81:

2. La corriente de armadura en las mismas condiciones.

El balance de tensiones en el circuito de armadura de la máquina es:

$$\alpha V_n - E_f = R_a I_a \Rightarrow I_a = \frac{1 - \frac{G}{R_f} \omega_m}{R_a} \alpha V_n = \frac{1 - \frac{\omega_m(\alpha)}{\omega_s}}{R_a} \alpha V_n \quad (5.82)$$

La corriente de armadura nominal se obtiene a tensión nominal V_n ¹⁸ y velocidad angular

¹⁸Esto es equivalente a indicar que $\alpha = 1$.

nominal ω_n :

$$I_{an} = \frac{1 - \frac{\omega_n}{\omega_s}}{R_a} V_n \quad (5.83)$$

Dividiendo las expresiones 5.82 entre 5.83, se obtiene el siguiente resultado:

$$I_a(\alpha) = \frac{1 - \frac{\omega_m(\alpha)}{\omega_s}}{1 - \frac{\omega_n}{\omega_s}} \alpha I_{an}$$

3. La resistencia que es necesario incluir en el circuito del campo para obtener la máxima velocidad con la tensión nominal aplicada.

Recordando que el par eléctrico se determina como:

$$T_e = G I_a I_f = G \left(\frac{V_n - E_f}{R_a} \right) I_f = \frac{G V_n}{R_a} I_f - \frac{G^2 \omega_m}{R_a} I_f^2 = k \omega_m^2 = T_B \quad (5.84)$$

Para encontrar la corriente de campo I_f que determina la máxima velocidad de equilibrio, es posible derivar implícitamente la expresión 5.84 con respecto a la corriente de campo I_f , recordando que velocidad ω_m depende de esta corriente:

$$\frac{G V_n}{R_a} - \frac{2 G^2 \omega_m}{R_a} I_f - \frac{G^2}{R_a} I_f^2 \frac{d\omega_m}{dI_f} = 2 k \omega_m \frac{d\omega_m}{dI_f} \Rightarrow \frac{d\omega_m}{dI_f} = \frac{\frac{G V_n - 2 G^2 \omega_m I_f}{R_a}}{2 k \omega_m + \frac{G^2}{R_a} I_f^2} \quad (5.85)$$

Cuando la velocidad ω_m alcanza el máximo, la expresión 5.85 tiene que ser cero, de esta condición se obtiene la relación siguiente:

$$G V_n - 2 G^2 \omega_m I_f = 0 \Rightarrow \omega_{m_{max}} = \frac{V_n}{2 G I_f} \quad (5.86)$$

Reemplazando la expresión 5.86 en el balance de par 5.84, se obtiene la relación que permite determinar la corriente de campo que produce la máxima velocidad de equilibrio:

$$\begin{aligned} \frac{G V_n}{R_a} I_f - \frac{G^2 \omega_{m_{max}}}{R_a} I_f^2 &= k \omega_{m_{max}}^2 \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{2} \right) \frac{G V_n I_f}{R_a} = k \frac{V_n^2}{4 I_f^2} \\ I_f(\omega_{m_{max}}) &= \frac{1}{G} \sqrt[3]{\frac{k V_n R_a}{2}} \Rightarrow \omega_{m_{max}} = \frac{V_n}{\sqrt[3]{4 k V_n R_a}} \end{aligned}$$

Conocida la corriente de campo que produce la máxima velocidad, se obtiene la respuesta mediante la siguiente expresión:

$$R_f + R_{adicional} = \frac{V_n}{I_f(\omega_{m_{max}})} \Rightarrow R_{adicional} = \frac{V_n}{I_f(\omega_{m_{max}})} - R_f$$

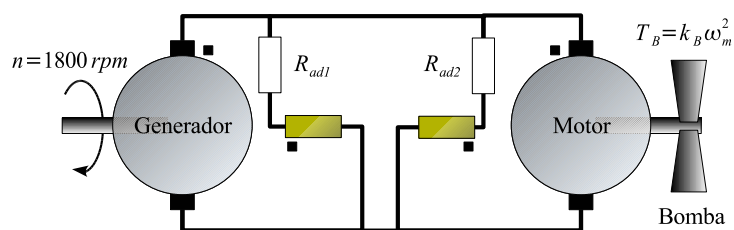


Figura 5.44 Diagrama de conexiones de las máquinas del Ejemplo 1

Ejemplo 2: Punto de equilibrio de un grupo generador-motor de corriente continua

Dos motores de corriente continua, excitación independiente están conectados como se muestra en la figura 5.44 y poseen los siguientes datos de placa:

P_n	V_{na}	I_{na}	V_{nf}	I_{nf}	n_n
5 kW	230 V	25 A	100 V	$1,0 \text{ A}$	2000 rpm

Las pérdidas en el hierro y mecánicas alcanzan los 430 W . La tensión de remanencia a velocidad nominal es de 6 V . El par de la bomba depende del cuadrado de la velocidad y a 1800 rpm consume 4 kW . Las resistencias adicionales a las excitaciones de ambas máquinas están *convenientemente*¹⁹ ajustadas para que circule la corriente nominal en la condición de operación. En estas condiciones determine:

1. Todos los parámetros de la máquina de corriente continua considerando pérdidas y flujo de remanencia.
2. Velocidad de la bomba en la condición ilustrada en la figura.
3. Rendimiento del conjunto completo.
4. Valores de las resistencias adicionales para que la bomba gire a 2000 rpm .

Solución:

1. Todos los parámetros de la máquina de corriente continua considerando pérdidas y flujo de remanencia:

a) Cálculo del flujo de remanencia:

$$\phi_r = \frac{E_r}{\omega_n} = \frac{6 \text{ V}}{\frac{2000}{60} 2\pi} = 2,865 \times 10^{-2} \text{ Wb}$$

¹⁹Deben ser calculadas durante la solución del ejemplo.

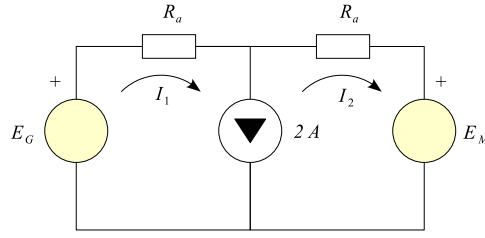


Figura 5.45 Circuito equivalente del sistema del Ejemplo 1

b) Cálculo del coeficiente de generación G :

$$T_n = (GI_{fn} + \phi_r) I_a = \frac{P_n + P_{mec} + P_{fe}}{\omega_n} = \frac{5000 + 438}{209,4} = 25,97 \text{ Nm}$$

$$G = \frac{T_n - \phi_r I_{an}}{I_{fn} I_{an}} = 1,01 \text{ H}$$

c) Resistencia de armadura:

$$R_a = \frac{V_a - (G\omega_n I_f + E_{rem})}{I_a} = \frac{230 - (1,01 \cdot 209,4 \cdot 1,0 + 6)}{25} = 0,512 \Omega$$

d) Resistencia del campo:

$$R_f = \frac{V_{nf}}{I_{nf}} = 100 \Omega$$

e) Coeficiente de la bomba:

$$P_{Bn} = k \cdot \omega^3 \Rightarrow k = \frac{P_{Bn}}{\omega^3} = \frac{4000}{\left(\frac{1800}{60} 2\pi\right)^3} = 5,97 \times 10^{-4}$$

2. Velocidad de la bomba en la condición ilustrada en la figura:

$$I_1 = I_2 + 2A$$

$$E_M \cdot I_2 = k\omega_m^3 + P_{mec} + P_{fe}$$

$$E_M = (GI_{fn} + \phi_r) \omega_m$$

$$E_M = E_G - R_a I_1 - R_a I_2$$

Las cuatro ecuaciones anteriores permiten obtener la siguiente expresión de la velocidad:

$$\omega_m = \frac{E_G - 2R_a}{GI_{fn} + \phi_r} - 2R_a \frac{k\omega_m^3 + P_{mec} + P_{fe}}{\omega_m (GI_{fn} + \phi_r)^2} = 192,35 - 5,95 \times 10^{-4} \omega_m^2 - \frac{437,2}{\omega_m}$$

Utilizando el método de Gauss-Seidel para resolver la ecuación anterior se obtiene el

siguiente resultado:

$$\omega_m = 172 \frac{rad}{s} \Rightarrow n = 1,644 rpm$$

3. Rendimiento del conjunto completo:

$$E_M = (GI_{fn} + \phi_r) \cdot \omega_m = 174 V$$

$$I_2 = \frac{k\omega_m^3 + P_{mec} + P_{fe}}{E_M} = 20 A$$

$$I_1 = I_2 + 2 = 22 A$$

$$P_G = E_G I_1 + P_{mec} + P_{fe} = 4,736 W$$

$$P_B = k\omega_m^3 = 3070 W$$

$$\eta_T = \frac{P_B}{P_G} = 0,648$$

4. Valores de las resistencias adicionales para que la bomba gire a 2000 rpm:

En este caso utilizaremos una aproximación para realizar un cálculo más rápido pero posteriormente se podría afinar el resultado. La aproximación consiste en suponer que la corriente del campo del motor se mantiene, con este supuesto se facilita el cálculo de E_M y posteriormente se recalcula I_{f2} . Posteriormente se podría iterar hasta alcanzar la convergencia, pero en este caso los resultados cambian muy poco y es posible pasar por alto este tanteo:

$$P_B = k\omega_m^3 = 5,97 \times 10^{-4} \left(2\pi \frac{2000}{60} \right)^3 = 5,485 W$$

$$P_M = P_B + P_{mec} + P_{fe} = 5,923 W$$

$$T_M = \frac{P_M}{\omega_m} = 28,28 Nm$$

$$E_m = (GI_{fn} + \phi_r) \omega_m = 211,6 V$$

$$I_2 \approx \frac{T_M \omega_m}{E_M} = 28 A$$

Esta corriente indica que se exceden las condiciones nominales de operación al trabajar el sistema en este punto. Durante un período de tiempo es posible mantener este punto de operación, pero si se mantiene permanentemente la máquina excederá su temperatura de diseño y comenzará un deterioro acelerado de sus propiedades dieléctricas.

$$I_{f2} = \frac{1}{G} \left(\frac{E_M}{\omega_m} - \phi_r \right) = 0,97 A$$

$$E_G = R_a I_1 + R_a I_2 + E_M = 241 V$$

$$I_{f1} = \frac{1}{G} \left(\frac{E_G}{\omega_G} - \phi_r \right) = 1,24 A$$

Con estos resultados aproximados se podría seguir iterando para mejorar la precisión, pero para fines prácticos éstos son muy cercanos a los valores finales. Con las dos corrientes de campo y con la tensión del punto medio entre las dos máquinas se determinan las resistencias totales y de estas, el valor de las resistencias adicionales que requiere cada campo:

$$V = E_G - R_a I_1 = E_M + R_a I_2 = 226 \text{ V}$$

$$R_{r1} = \frac{V}{I_{f1}} = 182 \Omega \Rightarrow R_{ad1} = R_{r1} - R_f = 82 \Omega$$

$$R_{r2} = \frac{V}{I_{f2}} = 232 \Omega \Rightarrow R_{ad2} = R_{r2} - R_f = 132 \Omega$$

Ejemplo 3: Cálculo de la fuerza electromotriz entre delgas

Determine la fuerza electromotriz inducida entre delgas de una armadura si se conocen los siguientes datos para la espira de una armadura:

$$N_e = 25 \quad I_e = 5 \text{ A} \quad A_e = 10^{-2} \text{ m}^2 \quad \delta = 3 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

y la máquina posee 80 delgas y gira a 1800 rpm.

Solución:

De los datos geométricos de la máquina se puede determinar mediante la expresión 5.43, la inductancia de la espira que se encuentra en conmutación:

$$L_e = (25)^2 \times \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 10^{-2}}{2 \times 3 \times 10^{-3}} = 1,3 \text{ mH}$$

Si la máquina posee 80 delgas y gira a 1800 rpm, la fuerza electromotriz inducida entre delgas se calcula mediante la ecuación 5.42 como:

$$e = \frac{1,3 \times 10^{-3} \times 10 \times 80 \times 1800}{60} = 31,4 \text{ V}$$

Este es un valor cercano al límite, debido a que con tensiones mayores el arco eléctrico se puede automantener.

5.14. Ejercicios propuestos

1. Una máquina de corriente continua con excitación serie se acopla mecánicamente a un generador de corriente continua con excitación en derivación de igual potencia, tensión, velocidad y corriente nominal:

$$\begin{array}{cccc} P_n & V_n & n_n & I_n \\ 5 \text{ kW} & 220 \text{ V} & 1800 \text{ rpm} & 30 \text{ A} \end{array}$$

La máquina serie se alimenta con tensión nominal y al generador se le conecta una resistencia en paralelo con su armadura de $1,0 \text{ en p.u.}$. La tensión de remanencia del generador es de 5% a su velocidad nominal y la corriente de campo nominal es un 3% de la corriente nominal. Las pérdidas mecánicas de las dos máquinas dependen del cuadrado de la velocidad y en el punto nominal representan la tercera parte de las pérdidas totales. Determine:

- Los parámetros de ambas máquinas.
- La velocidad de operación del conjunto.
- La potencia entregada en la resistencia.
- El rendimiento del global.

- Una máquina de corriente continua con excitación independiente posee los siguientes datos nominales:

$$\begin{array}{cccccc} V_n & P_n & V_{fn} & I_{fn} & n_n & \eta_n \\ 220 \text{ V} & 10 \text{ kW} & 110 \text{ V} & 3 \text{ A} & 1800 \text{ rpm} & 0,90 \end{array}$$

Esta máquina se acopla mecánicamente a otra máquina idéntica, pero en conexión derivación con una resistencia apropiada en el campo para permitir la generación de la potencia eléctrica nominal. La tensión de remanencia de estas máquinas es de 5 V . Las pérdidas mecánicas en el punto nominal representan el 30% de las pérdidas totales y dependen del cuadrado de la velocidad. Determine:

- Los parámetros del circuito equivalente de las dos máquinas.
- El valor de la resistencia de campo y de carga del generador para no exceder los valores nominales de la máquina motriz ni del generador.
- Los nuevos puntos de operación del conjunto cuando se reduce un 10% la tensión del campo de la máquina motriz y cuando se disminuye un 10% la resistencia de campo del generador.
- El rendimiento del conjunto motor-generador en función de la potencia de salida del generador.

- Dos máquinas similares de corriente continua con excitación independiente poseen los siguientes datos nominales:

Máquina	V_n	P_n	V_{fn}	I_{fn}	n_n	η_n
I	220 V	5 kW	110 V	1 A	1800 rpm	0,85
II	220 V	5 kW	110 V	1 A	1750 rpm	0,85

Si las dos máquinas se conectan como motores en derivación y se acoplan ambas mecánicamente a una bomba centrífuga que a 1800 rpm consume 10 kW, Determine:

- a) La velocidad de operación del sistema formado por las dos máquinas y la bomba.
 - b) La corriente manejada por la armadura de cada una de las máquinas.
 - c) La potencia entregada por cada una de las máquinas en sus respectivos ejes mecánicos.
4. Una máquina de corriente continua excitación compuesta de 220 V, 5 kW, 1750 rpm y rendimiento en el punto nominal de 86 %, tiene un devanado serie que produce el 25 % del flujo nominal cuando por él circula la corriente nominal y un campo derivación que produce el resto del flujo cuando se le aplica la tensión nominal entre sus bornes. Las resistencias del campo serie y de la armadura son iguales. Las pérdidas en el campo derivación son del 2 % de la potencia útil. La remanencia a velocidad nominal es del 3 %. Las pérdidas mecánicas en el punto nominal son del 5 % de la potencia útil. Determine:
- a) Los parámetros de la máquina.
 - b) El punto de operación cuando se encuentra accionando a una carga mecánica que aumenta su par linealmente con la velocidad y que a 1750 rpm desarrolla 4 kW.
 - c) Rendimiento del sistema si se acciona la máquina a 1800 rpm, con el devanado serie desconectado y conectando en la armadura una carga de valor 1,0 pu.
5. Dos máquinas de corriente continua, una con excitación serie y la otra con excitación en paralelo se encuentran conectadas a la tensión nominal y sus ejes mecánicos están acoplados. Los datos de placa de ambas máquinas son los siguientes:

Máquina	V_n	I_n	P_n	n_n	I_{nf}
Serie	220 V	23 A	4 kW	1750 rpm	23 A
Paralelo	220 V	21 A	5 kW	1750 rpm	1,73 A

Las resistencias de campo y de armadura de la máquina serie son de 0,8 Ω . La resistencia de armadura de la máquina derivación es de 0,95 Ω . Las pérdidas de ventilación de ambas máquinas dependen del cubo de la velocidad. Determine en estas condiciones:

- a) Los parámetros de ambas máquinas.
- b) Las características par-velocidad de ambas máquinas.
- c) La velocidad nominal y el par nominal del conjunto de las dos máquinas.
- d) La velocidad si con la carga nominal del conjunto acoplada al eje se debilita el campo serie un 15 %.

6. Se tiene un motor de corriente continua de 10 HP^{20} , 220 V , 1000 rpm , excitación en derivación, con una resistencia de 100Ω , una resistencia del inducido de $0,4 \Omega$ y un rendimiento del 85% . Determine:
- Los valores nominales de la corriente del inducido y el par eléctrico en el eje.
 - La tensión que habría que aplicar al inducido para reducir la velocidad a 500 rpm manteniendo la excitación en condiciones nominales, si se supone que el par de carga es proporcional al cuadrado de la velocidad.
 - Calcular la resistencia a colocar en serie con el inducido para reducir la velocidad a 500 rpm , manteniendo la tensión de alimentación en 220 V . y la excitación como en las condiciones nominales, suponiendo que el par de carga es proporcional a la velocidad.
7. Se tiene un motor serie de corriente continua que suministra una potencia de 10 CV^{21} . La tensión de alimentación es de 200 V . Calcular:
- Intensidad, si el rendimiento total es del 86% .
 - Valor de la resistencia interna, si las pérdidas por efecto Joule son del 7% .
 - Fuerza electromotriz del inducido.
 - El par motor útil en el eje a 1000 rpm .
 - Conjunto de pérdidas por rozamiento y en el hierro por histéresis rotativa.
8. Un generador de corriente continua con excitación derivación suministra una intensidad de 80 A a 200 V . El rendimiento eléctrico es de 95% , siendo el reparto de pérdidas por efecto Joule a razón del 3% en el inducido y del 2% en el inductor. Calcular:
- Potencia total generada.
 - Potencia perdida en el inducido.
 - Potencia perdida en el inductor.
 - Intensidad de excitación.
 - Resistencia del inductor.
 - Resistencia del inducido.
 - Fuerza electromotriz del inducido.

²⁰ $1 \text{ HP} = 746 \text{ W}$

²¹ $1 \text{ CV} = 745 \text{ W}$

9. Se tiene un motor de corriente continua con excitación en derivación cuya potencia nominal es de 3 kW con una tensión en bornes de 110 V , siendo el rendimiento total del 76% . Calcular:
- Intensidad total.
 - Intensidad de excitación, sabiendo que la potencia para excitación es el 5% de la consumida.
 - Resistencia del devanado de campo.
 - Intensidad de la armadura.
 - Resistencia de la armadura, si sus pérdidas por efecto Joule son 5% de la potencia consumida.
 - Fuerza electromotriz del inducido.
 - Par motor en la polea de transmisión a 1200 rpm .
 - Valor del reóstato de armadura para que la intensidad de arranque no exceda el valor nominal.
10. Un generador de corriente continua con excitación compuesta suministra 120 A al circuito exterior con una tensión en bornes de 120 V . Las pérdidas por efecto Joule en la armadura, campo derivación y campo serie son respectivamente $2,5\%$, $2,5\%$ y 1% , de la potencia cedida, respectivamente. Si las únicas pérdidas que se consideran son las óhmicas en los distintos devanados. Calcular:
- Pérdidas por efecto Joule.
 - Resistencia del devanado de campo serie.
 - Intensidad en el devanado de campo paralelo.
 - Resistencia del devanado de campo en derivación.
 - Intensidad de la armadura.
 - Resistencia de la armadura.
 - Fuerza electromotriz de la armadura.
11. Un motor de corriente continua con excitación independiente mediante un imán permanente, tiene una resistencia eléctrica en la armadura de $0,1\ \Omega$. La tensión máxima que se puede aplicar a la armadura es 220 V y la corriente máxima que puede pasar por sus devanados es de 100 A ²². La constante de proporcionalidad de la fuerza electromotriz inducida en el rotor es $0,15\ \frac{\text{V}}{\text{rpm}}$. Determinar:

²²Esta condición es válida en régimen permanente.

- a) La expresión del par eléctrico del motor en función de la velocidad para diferentes tensiones de alimentación.
 - b) La representación gráfica del par eléctrico para tensiones de 50, 100, 150 y 200 V.

12. Un generador compuesto de 250 kW, 250 V, 1200 rpm suministra 1000 A a 250 V. La resistencia de la armadura, incluyendo las escobillas es de 0,0045 Ω . La resistencia del devanado serie es 0,018 Ω y la del arrollamiento paralelo es 48 Ω . Las pérdidas de por rozamiento son 6,800 W y las pérdidas por cargas parásitas son el 1 % de la potencia útil. Calcular:
 - a) Pérdidas totales.
 - b) Rendimiento.

13. Un generador derivación tiene una armadura de 0,5 Ω y el campo posee una resistencia de 400 Ω , conectado en serie con un reóstato R_h cuya resistencia es variable de 0 a 200 Ω . Cuando R_h se fija a 100 Ω , el rotor gira a 1,500 rpm y la diferencia de potencial entre bornes es de 100 V en circuito abierto. La inducción en el hierro de los campos es de 0,9 T. Calcular:
 - a) Fuerza electromotriz de la armadura en estas condiciones.
 - b) Diferencia de potencial en bornes si el generador suministra 10 A.
 - c) Velocidad de arrastre necesaria en la armadura para que la tensión vuelva a tener su valor inicial de 100 V.

14. Un motor serie que tiene una resistencia de 1 Ω entre terminales. Mueve un ventilador para el cual el par varía con el cuadrado de la velocidad. A 220 V el conjunto gira a 300 rpm y consume 25 A. Debe aumentarse la velocidad a 400 rpm aumentando la tensión. Hallar la tensión y la corriente para los casos límites siguientes:
 - a) Cuando el circuito magnético esté saturado, es decir, para flujo constante.
 - b) Cuando el circuito magnético no esté saturado, es decir, cuando el flujo sea directamente proporcional a la corriente.

15. Un motor tipo derivación de 7,5 kW, 460 V, tiene una entrada de 8,5 kW cuando desarrolla un par en el eje de 78,3 Nm a 900 rpm. Calcular el porcentaje de reducción del campo para aumentar la velocidad a 1,050 rpm con un par en el eje de 60,7 Nm. La resistencia del inducido es de 1 Ω , la resistencia del circuito de campo a 900 rpm es de 770 Ω y las pérdidas mecánicas y en el hierro son constantes. Desprecie la reacción de la armadura.

16. Un motor derivación de corriente continua de 10 *HP*, 230 *V*, tiene una velocidad a plena carga de 1200 *rpm*. La resistencia de la armadura es de 0,3 Ω y la del campo, 180 Ω . El rendimiento a plena carga es del 86 %. El motor obtiene la tensión nominal de un generador de corriente continua derivación, de resistencia de armadura de 0,3 Ω y resistencia de campo 230 Ω . Las pérdidas en el hierro y mecánicas del generador son 500 *W*. Ambas máquinas tienen el mismo número de polos y conductores y los devanados son ondulados. Calcular:
- a) Velocidad del generador, si ambas máquinas están funcionando en la zona lineal de la curva de magnetización.
 - b) Rendimiento del generador.
 - c) Rendimiento del conjunto generador-motor.
 - d) Velocidad del motor en vacío, si en estas condiciones su entrada total es de 600 *W*.
 - e) Valor de la resistencia que hay que añadir a la armadura del motor para reducir su velocidad a 1000 *rpm* cuando entrega el par de plena carga con toda la corriente de campo²³.

²³Las pérdidas en el hierro y mecánicas son las de plena carga.

Bibliografía

- [1] A. M. Alonso; "Teoría de las Máquinas Eléctricas de Corriente Continua y Motores de Colector," Departamento de Publicaciones de la E.T.S.I.I. de Madrid, 1979.
- [2] A. E. Fitzgerald, C. Kingsley, Jr. & A. Kusko; "Electric Machinery: The Processes, Devices, and Systems of Electromechanical Energy Conversion," McGraw-Hill, Third Edition, 1971.
- [3] M.P. Kostenko & L.M. Piotrovski, "Máquinas Eléctricas," Vol. I, Editorial Mir, Segunda Edición, Moscú 1979.
- [4] A. S. Langsdorf, "Theory of Alternating Current Machinery," Tata McGraw-Hill, Second Edition, 1974.
- [5] A. S. Langsdorf, "Principio de las Máquinas de Corriente Continua. Tomo I," Ediciones del Castillo, S.A., 1967.
- [6] G. McPherson & R. D. Laramore, "An Introduction to Electrical Machines and Transformers," John Wiley & Sons, 1990.
- [7] G. Thaler & M. Wilcox, "Máquinas Eléctricas," Editorial Limusa, Mexico, 1979.

CAPÍTULO 6

La Máquina de Inducción

6.1. Introducción

La máquina de inducción¹ es el convertidor electromecánico más utilizado en la industria. Su invención se le debe a *Tesla* a finales del siglo XIX y nace como solución al problema de utilizar la corriente alterna. Tesla había sugerido la idea de las ventajas que poseía la corriente alterna, cuyos niveles de tensión² pueden ser variados mediante transformadores, sobre la corriente continua cuya dificultades de transmisión para la época ya comenzaban a ser evidentes. La defensa de la corriente continua era realizada por *Edison*, famoso inventor norteamericano que contaba con un inmenso prestigio³. Sin embargo, la visión comercial de *Whestinghouse* impulsa las ideas de Tesla para la construcción de la primera gran central hidroeléctrica que se construye en las Cataratas del Niagara utilizando generadores de corriente alterna, que utilizan transformadores para elevar la tensión, transmiten mediante líneas en alta tensión y la reducen para alimentar a los motores de inducción que accionan la creciente carga industrial. Desde ese crucial momento y hasta la actualidad, la máquina de inducción ha ido copando la inmensa mayoría de aplicaciones en la industria, en el comercio y en el hogar. En la figura 6.1 se muestra un modelo de la máquina diseñada por Tesla, cuyo original está expuesto en el museo Smithsonian de Washington DC.

Las razones fundamentales que justifican la aplicación masiva de la máquina de inducción hoy en día, residen en su sencillez constructiva y en la robustez que ofrece estos convertidores durante la operación en regímenes de alta sollicitación⁴. Estos motores requieren un mantenimiento

¹ Algunos autores se refieren a este convertidor electromecánico como máquina asincrónica por su capacidad de accionamiento a velocidades no sincrónicas.

² Y por consiguiente es posible reducir sustancialmente las pérdidas durante la transmisión que se realiza a baja corriente y alta tensión.

³ En efecto el prestigio que disfrutaba Edison, opuesto al desarrollo de la corriente alterna fue un obstáculo a las ideas de Tesla, quien no gozaba del mismo prestigio debido posiblemente a su origen Europeo. Esto constituye un ejemplo interesante de como el desarrollo científico y tecnológico finalmente se impone sobre los prejuicios.

⁴ Arranques y paradas frecuentes, operación continua, sobrecargas, ambientes corrosivos o explosivos, etc.



Figura 6.1 Modelo de la máquina de inducción bifásica diseñada por Tesla

mínimo, pueden operar convenientemente en ambientes peligrosos y tienen una tasa de falla muy reducida. Algunas limitaciones tales como el ajuste de la característica par-velocidad, la intensidad de las corrientes durante el arranque, la regulación de velocidad y el rendimiento han sido resueltas o mejoradas con diseños ingeniosos⁵ o incorporando controladores electrónicos de potencia. En la figura se muestra un despiece de la máquina de inducción con rotor de jaula de ardilla donde se indican las principales partes constitutivas.

En el capítulo 4 se analizaron las ecuaciones en coordenadas generalizadas de las máquinas rotativas convencionales, uno de los casos analizados fue la máquina de inducción. En una máquina de inducción convencional toda la energía eléctrica fluye hacia o desde el estator. Los flujos producidos por las corrientes del estator generan un campo magnético rotatorio que corta a los conductores del rotor, y de esta forma se obtiene sobre ellos fuerza electromotriz inducida que es utilizada para forzar la circulación de corrientes en el rotor. Al interactuar el campo magnético rotatorio del estator con el campo magnético rotatorio originado por las corrientes que circulan en el rotor se produce el par eléctrico.

La máquina de inducción se alimenta con corriente alterna en el estator, de esta forma se produce el campo magnético rotatorio. Este campo posee una amplitud constante en el tiempo, pero varía en el espacio. La velocidad de giro del campo magnético rotatorio está definida por la frecuencia de las corrientes inyectadas en el estator de la máquina. Para que una máquina de inducción produzca par eléctrico medio diferente de cero, debe satisfacerse la condición 4.42. Si la máquina no cumple con esta condición, el par eléctrico medio en un giro completo del rotor será cero y no podrá transformar energía en régimen permanente.

La máquina de inducción se utiliza como generador sólo en pocas ocasiones, porque la operación en este régimen no es eficiente en comparación con otras alternativas⁶. Sin embargo,

⁵Primero se desarrolló el rotor con anillos deslizantes que permitía conectar resistencia externa y regular el arranque. Posteriormente se incorporó el rotor de doble jaula y el de barras profundas que permitieron cambiar los parámetros del rotor de la máquina debido al efecto pelicular sin utilizar contactos deslizantes.

⁶La máquina de inducción necesita resistencia en el circuito rotórico para que la fuerza electromotriz inducida se desfase de la fuerza electromotriz del estator y se pueda producir par. Esto obliga a producir un porcenta-

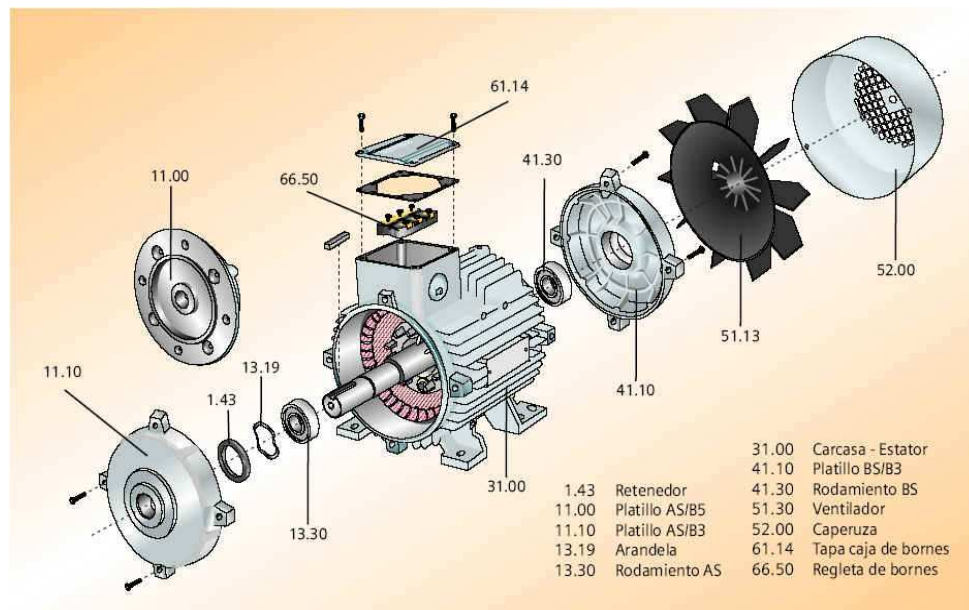


Figura 6.2 Despiece de un motor de inducción industrial de rotor de jaula de ardilla

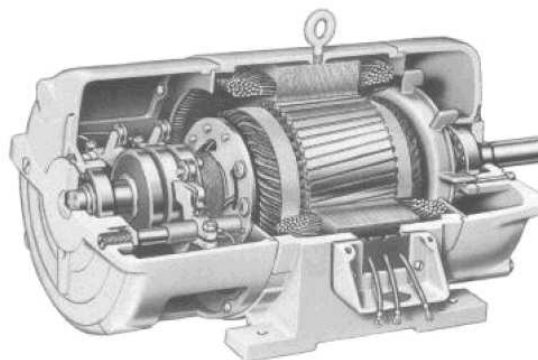


Figura 6.3 Máquina de inducción de rotor bobinado con anillos deslizantes

la máquina de inducción puede regresar energía a la red durante cortos períodos de tiempo en algunos accionamientos convencionales. En particular puede generar cuando se utilizan en sistemas de tracción tales como ascensores u otras cargas similares, con la finalidad de producir un *frenado regenerativo*. En el pasado era frecuente utilizar esta máquina como *convertidor de frecuencia*, para lo cual es necesario tener acceso a los devanados del rotor mediante *anillos deslizantes* tal como se muestra en la figura 6.3. Algunas *centrales eólicas* utilizan esta máquina como generador.

je significativo de pérdidas en el rotor de la máquina de inducción. Las máquinas sincrónicas no tienen este inconveniente y por tanto pueden alcanzar rendimientos mayores al escalar el tamaño.

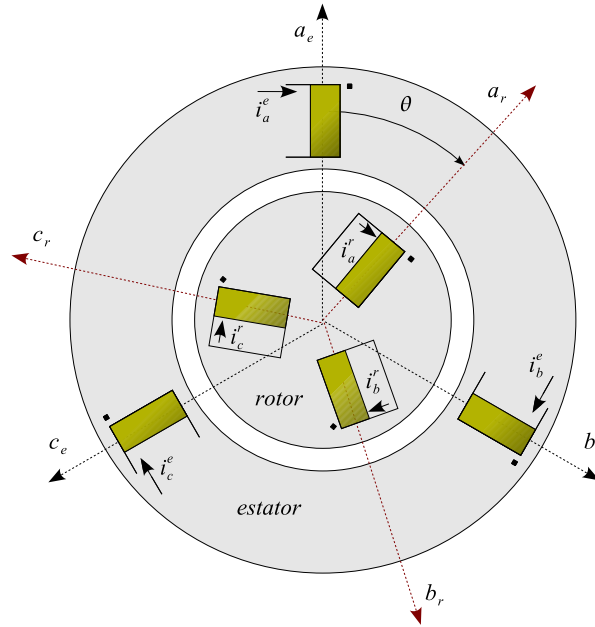


Figura 6.4 Diagrama esquemático de las bobinas de una máquina de inducción trifásica en el rotor y estator

6.2. Modelo de la máquina de inducción

En la figura 6.4 se presenta el esquema básico de las bobinas de una máquina de inducción cuyo rotor y estator son trifásicos. En general el modelo se puede establecer para un número general de fases en el estator y otro en el rotor. Como la mayoría de los motores de inducción de uso industrial son trifásicos en el estator, se realizará el modelo para un caso particular donde el rotor y el estator son trifásicos⁷. Normalmente las bobinas rotóricas se encuentran en cortocircuito y en el estator se aplica un sistema trifásico y balanceado de tensiones sinusoidales. En los modelos convencionales de la máquina de inducción se desprecian los efectos que produce el ranurado, la distribución de los devanados, las excentricidades estáticas y dinámicas y en ciertos casos las pérdidas en el hierro y las pérdidas mecánicas.

Las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento de la máquina de inducción en el sistema de coordenadas indicado en la figura 6.4 son:

$$[\mathbf{v}] = [\mathbf{R}] [\mathbf{i}] + p [\lambda] = [\mathbf{R}] [\mathbf{i}] + [\mathbf{L}(\theta)] p [\mathbf{i}] + \dot{\theta} [\tau(\theta)] [\mathbf{i}] \quad (6.1)$$

$$T_e - T_m = \frac{1}{2} [\mathbf{i}]^t [\tau] [\mathbf{i}] - T_m = J\ddot{\theta} + \rho\dot{\theta} \quad (6.2)$$

donde:

$$[\mathbf{v}] \equiv \begin{bmatrix} [\mathbf{v}_e] \\ [\mathbf{v}_r] \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a^e & v_b^e & v_c^e \end{bmatrix}^t \\ \begin{bmatrix} v_a^r & v_b^r & v_c^r \end{bmatrix}^t \end{bmatrix}; [\mathbf{i}] \equiv \begin{bmatrix} [\mathbf{i}_e] \\ [\mathbf{i}_r] \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a^e & i_b^e & i_c^e \end{bmatrix}^t \\ \begin{bmatrix} i_a^r & i_b^r & i_c^r \end{bmatrix}^t \end{bmatrix};$$

⁷El caso general puede ser analizado mediante la misma técnica.

$$\begin{aligned}
[\lambda] &\equiv \begin{bmatrix} [\lambda_e] \\ [\lambda_r] \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_a^e & \lambda_b^e & \lambda_c^e \end{bmatrix}^t \\ \begin{bmatrix} \lambda_a^r & \lambda_b^r & \lambda_c^r \end{bmatrix}^t \end{bmatrix} \\
[\mathbf{R}] &= \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_{ee}] & [\mathbf{R}_{er}] \\ [\mathbf{R}_{re}] & [\mathbf{R}_{rr}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_e [\mathbf{I}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & R_r [\mathbf{I}] \end{bmatrix} \\
[\mathbf{L}(\theta)] &= \begin{bmatrix} [\mathbf{L}_{ee}] & [\mathbf{L}_{er}(\theta)] \\ [\mathbf{L}_{re}(\theta)] & [\mathbf{L}_{rr}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{\sigma e} [\mathbf{I}] + L_{me} [\mathbf{S}] & L_{er} [\mathbf{C}(\theta)] \\ L_{er} [\mathbf{C}(\theta)]^t & L_{\sigma r} [\mathbf{I}] + L_{mr} [\mathbf{S}] \end{bmatrix} \\
[\tau(\theta)] &= \begin{bmatrix} \frac{d}{d\theta} [\mathbf{L}_{ee}] & \frac{d}{d\theta} [\mathbf{L}_{er}(\theta)] \\ \frac{d}{d\theta} [\mathbf{L}_{re}(\theta)] & \frac{d}{d\theta} [\mathbf{L}_{rr}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{0}] & L_{er} \frac{d}{d\theta} [\mathbf{C}(\theta)] \\ L_{er} \frac{d}{d\theta} [\mathbf{C}(\theta)]^t & [\mathbf{0}] \end{bmatrix} \\
[\mathbf{I}] &\equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; [\mathbf{S}] \equiv \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} ; [\mathbf{0}] \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
[\mathbf{C}(\theta)] &\equiv \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) \\ \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) & \cos \theta & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) & \cos \theta \end{bmatrix} \\
\frac{d}{d\theta} [\mathbf{C}(\theta)] &= \begin{bmatrix} -\sin \theta & -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta + \frac{4\pi}{3}) \\ -\sin(\theta + \frac{4\pi}{3}) & -\sin \theta & -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta + \frac{4\pi}{3}) & -\sin \theta \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Los parámetros que definen el comportamiento del modelo de la máquina de inducción en el sistema de coordenadas primitivas son:

R_e	es la resistencia de cada una de las bobinas del estator
R_r	es la resistencia de cada una de las bobinas del rotor
$L_{\sigma e}$	es la inductancia de dispersión del estator
$L_{\sigma r}$	es la inductancia de dispersión del rotor
L_{me}	es la inductancia de magnetización del estator
L_{mr}	es la inductancia de magnetización del rotor
L_{er}	es la inductancia mutua de acoplamiento estator-rotor

La matriz $[\mathbf{S}]$, representa los acoplamientos *simétricos* entre bobinas del estator o rotor, los términos 1 en la diagonal corresponden a las magnetizaciones de la bobina propia⁸ y el término $-\frac{1}{2}$ representa las mutuas entre fases que se encuentran separadas espacialmente $\frac{2\pi}{3}$ o $\frac{4\pi}{3}$ ⁹, cuyo acoplamiento depende entonces del $\cos \frac{2\pi}{3} = \cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

La matriz $[\mathbf{C}(\theta)]$ determina el comportamiento *cíclico* de los acoplamientos mutuos entre bobinas del rotor y del estator, por esta razón aparece el ángulo θ como argumento de la función coseno. El acoplamiento entre la fase a_e del estator y la fase a_r del rotor depende directamente del $\cos \theta$, el acoplamiento entre la fase a_e del estator y la b_r del rotor, además de estar separada en el ángulo θ entre las referencias de ambos sistemas, tiene una fase adicional de $\frac{2\pi}{3}$ que corresponde a la separación espacial entre fases, y explica de esta forma la aparición del término $\cos(\theta + \frac{2\pi}{3})$. De igual forma se puede explicar el término $\cos(\theta + \frac{4\pi}{3})$, correspondiente al acoplamiento entre la fase a_e del estator y la c_r del rotor.

⁸Las fases a con a , b con b y c con c del sistema rotórico o estatórico respectivamente.

⁹Lo cual incluye los acoplamientos mutuos entre a y b , a y c , así como b con c .

El sistema conformado por las seis ecuaciones de tensión planteadas en 6.1 y el balance de par expresado en la ecuación 6.2, representan el comportamiento dinámico de la máquina de inducción¹⁰, pero la dependencia de la posición angular θ complica notablemente la solución práctica de este modelo y la técnica de transformación de coordenadas es conveniente.

6.3. Vectores espaciales

Un análisis de los acoplamientos observados en el modelo de la máquina de inducción en coordenadas primitiva permite destacar que estos están definidos por matrices simétricas $[S]$ o cíclicas $[C(\theta)]$. Estas matrices pueden ser diagonalizadas utilizando el método de *autovalores* y *autovectores*. Se puede demostrar con esta técnica que la transformación de *componentes simétricas*¹¹ es capaz de realizar el desacoplamiento de ambas matrices. La transformación de componentes simétricas hermitiana¹² se define como:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_+ \\ x_- \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \\ 1 & e^{j\frac{4\pi}{3}} & e^{j\frac{2\pi}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

$$\begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{j\frac{4\pi}{3}} & e^{j\frac{2\pi}{3}} \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

Al aplicar la transformación 6.4 a un sistema cíclico se obtiene el siguiente resultado:

$$\begin{bmatrix} y_a \\ y_b \\ y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_+ \\ y_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_+ \\ x_- \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_+ \\ y_- \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_+ \\ x_- \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Re=0.02; Rm=100; Rr1=0.08; Rr2=0.02; Xe=0.10; Xm=4; X12=0.06; X2=0.06;

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_+ \\ y_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a+b\alpha+c\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & a+b\alpha^2+c\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_+ \\ x_- \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

El desacoplamiento de las matrices simétricas se obtiene como caso particular de las matrices

¹⁰Dentro del rango de las hipótesis simplificadoras supuestas inicialmente.

¹¹Propuesta por Fortescue y ampliamente utilizada para el análisis de fallas en sistemas desequilibrados.

¹²Conservativa en potencia.

cíclicas donde $b = c$:

$$\begin{bmatrix} y_a \\ y_b \\ y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_+ \\ y_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 2b & 0 & 0 \\ 0 & a - b & 0 \\ 0 & 0 & a - b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_+ \\ x_- \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Esta propiedad característica de transformación de componentes simétricas permite convertir un sistema acoplado en tres sistemas independientes. El sistema de *secuencia cero* solamente se puede excitar cuando la sumatoria instantánea de las tensiones o de las corrientes es diferente de cero¹³. El sistema de *secuencia negativa* y de *secuencia positiva* son similares y uno es el conjugado del otro. Por estos motivos es posible representar el modelo de la máquina utilizando solamente la transformación de secuencia positiva¹⁴ y se denominó transformación a *vectores espaciales*. Para conservar la potencia activa en la transformación se debe definir la siguiente transformación:

$$\mathbf{x}(t) \equiv \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_a(t) \\ x_b(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_a(t) \\ x_b(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

La transformación a vectores espaciales permite representar un sistema de tensiones, corrientes o flujos trifásicos mediante un vector en el espacio, cuya posición y magnitud dependen del tiempo. En la figura 6.5 se muestra una representación gráfica con la interpretación geométrica de la transformación a vectores espaciales para un instante de tiempo dado.

Transformando las ecuaciones 6.1 al dominio de los vectores espaciales se obtiene el siguiente resultado:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_e \\ \mathbf{v}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_e \\ \mathbf{i}_r \end{bmatrix} + p \left[\begin{bmatrix} L_e & M_{er}e^{j\theta} \\ M_{er}e^{-j\theta} & L_r \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{i}_e \\ \mathbf{i}_r \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

donde:

¹³En los sistemas trifásicos, esto requiere la presencia de un cuarto hilo por donde pueda circular esta componente. En las máquinas eléctricas industriales es poco habitual la conexión del neutro.

¹⁴Es equivalente utilizar la componente de secuencia negativa. La componente de secuencia cero tiene escasa utilidad en el análisis de las máquinas debido a que no puede producir par. Sin embargo, algunos desequilibrios dependen instantáneamente de esta componente.

2. La transformación aplicada a la *matriz simétrica* [S]:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_a \\ y_b \\ y_c \end{bmatrix} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} \\ \mathbf{y} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2}x_a \\ \frac{3}{2}x_b \\ \frac{3}{2}x_c \end{bmatrix} = \frac{3}{2}\mathbf{x} \end{aligned} \quad (6.10)$$

3. La misma transformación aplicada a la *matriz cíclica* [C(θ)], recordando que $\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) \\ \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) & \cos \theta & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \left\{ \frac{e^{j\theta}}{2} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha^2 & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha^2 & 1 \end{bmatrix} + \frac{e^{-j\theta}}{2} \begin{bmatrix} 1 & \alpha^2 & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} \\ \mathbf{y} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{2} \{ e^{j\theta} \begin{bmatrix} 3 & 3\alpha & 3\alpha^2 \end{bmatrix} + e^{-j\theta} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} = \frac{3}{2} e^{j\theta} \mathbf{x} \end{aligned} \quad (6.11)$$

La transformación a vectores espaciales de la expresión del par eléctrico expresado en el balance de la ecuación 6.2 queda:

$$\begin{aligned} T_e &= \frac{1}{2} [\mathbf{i}]^t [\tau] [\mathbf{i}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} [\mathbf{i}_e] \\ [\mathbf{i}_r] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & L_{er} \frac{d}{d\theta} [\mathbf{C}(\theta)] \\ L_{er} \frac{d}{d\theta} [\mathbf{C}(\theta)]^t & \mathbf{0} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} [\mathbf{i}_e] \\ [\mathbf{i}_r] \end{bmatrix} = \\ &= L_{er} [\mathbf{i}_e]^t \frac{d}{d\theta} [\mathbf{C}(\theta)] [\mathbf{i}_r] = \\ &= L_{er} [\mathbf{i}_e]^t \left\{ \frac{e^{-j\theta}}{2j} \begin{bmatrix} 1 & \alpha^2 & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{bmatrix} - \frac{e^{j\theta}}{2j} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha^2 & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha^2 & 1 \end{bmatrix} \right\} [\mathbf{i}_r] = \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} L_{er} \left\{ \frac{e^{-j\theta}}{2j} \mathbf{i}_e \begin{bmatrix} 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix} - \frac{e^{j\theta}}{2j} \mathbf{i}_e^* \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \right\} [\mathbf{i}_r] = \\ &= \frac{3}{2} L_{er} \left\{ \frac{e^{-j\theta}}{2j} \mathbf{i}_e \mathbf{i}_r^* - \frac{e^{j\theta}}{2j} \mathbf{i}_e^* \mathbf{i}_r \right\} = M_{er} \Im m \{ \mathbf{i}_e \mathbf{i}_r^* e^{-j\theta} \} = M_{er} \Im m \{ \mathbf{i}_e (\mathbf{i}_r e^{j\theta})^* \} \end{aligned} \quad (6.12)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales que definen el comportamiento de la máquina de inducción en el sistema de coordenadas correspondiente a los vector espaciales es:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_e \\ \mathbf{v}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_e \\ \mathbf{i}_r \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} L_e & M_{er} e^{j\theta} \\ M_{er} e^{-j\theta} & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_e \\ \mathbf{i}_r \end{bmatrix}$$

$$M_{er} \Im m \left\{ \mathbf{i}_e (\mathbf{i}_r e^{j\theta})^* \right\} - T_m(\dot{\theta}) = J\ddot{\theta} + \rho\dot{\theta} \quad (6.13)$$

El modelo 6.13, simplifica notablemente las expresiones 6.1 y 6.2, al representar las magnitudes trifásicas mediante vectores espaciales. Por una parte el sistema se ha reducido de las siete ecuaciones diferenciales iniciales a tres¹⁵ y la dependencia en la posición angular θ se ha simplificado a su aparición en matrices cuya dimensión es 2×2 ¹⁶. Sin embargo, la dependencia en la posición angular θ puede ser eliminada, si las variables del rotor se refieren al estator utilizando la siguiente transformación¹⁷:

$$\mathbf{x}_r^e \equiv \mathbf{x}_r \cdot e^{j\theta} \quad (6.14)$$

Para aplicar la transformación 6.14 al modelo de la máquina en vectores espaciales 6.13, se requiere desarrollar la derivada correspondiente de esta transformación:

$$\begin{aligned} p\mathbf{x}_r^e &= p\mathbf{x}_r \cdot e^{j\theta} + j\dot{\theta}\mathbf{x}_r \cdot e^{j\theta} = p\mathbf{x}_r \cdot e^{j\theta} + j\dot{\theta}\mathbf{x}_r^e \Rightarrow \\ p\mathbf{x}_r \cdot e^{j\theta} &= p\mathbf{x}_r^e - j\dot{\theta}\mathbf{x}_r^e \end{aligned} \quad (6.15)$$

Utilizando las expresiones 6.14 y 6.15 en el modelo 6.13, se obtiene el siguiente modelo de la máquina de inducción en vectores espaciales referidos al estator:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_e \\ \mathbf{v}_r^e \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_e \\ \mathbf{i}_r^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_e & M_{er} \\ M_{er} & L_r \end{bmatrix} p \begin{bmatrix} \mathbf{i}_e \\ \mathbf{i}_r^e \end{bmatrix} - j\dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_{er} & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_e \\ \mathbf{i}_r^e \end{bmatrix} \\ M_{er} \Im m \left\{ \mathbf{i}_e (\mathbf{i}_r^e)^* \right\} - T_m(\dot{\theta}) &= J\ddot{\theta} + \rho\dot{\theta} \end{aligned} \quad (6.16)$$

El modelo 6.16 es independiente de la posición angular θ que es variable en el tiempo aun en el caso particular de la operación en régimen permanente y esta dependencia es reemplazada por la velocidad angular $\dot{\theta}$ cuyo comportamiento temporal varía más lentamente¹⁸. Este modelo puede ser representado mediante el circuito equivalente que se muestra en la figura 6.6. Este circuito reproduce el comportamiento eléctrico de la máquina en régimen transitorio y es capaz de calcular el par eléctrico evaluando la potencia activa transferida a la fuente dependiente de corriente del circuito rotórico, tema que será analizado con mayor profundidad en el capítulo 7.

6.4. Modelo en régimen permanente

Se puede obtener un modelo de la máquina de inducción operando en condiciones de régimen permanente, a partir del modelo transitorio, particularizando las variables correspondientes en

¹⁵Esta apariencia más simple no debe hacer olvidar el hecho de que las nuevas variables son vectores espaciales variables en el tiempo y no simples variables instantáneas como era en el caso del modelo de la máquina de inducción en coordenadas primitivas.

¹⁶Y que pueden ser invertidas analíticamente con relativa sencillez.

¹⁷Recordemos que el sistema de referencia del estator es independiente del sistema de referencia del rotor, pero ambas referencias se encuentran separadas en el ángulo θ , por esta razón cuando se multiplica un vector espacial en el sistema de referencia rotórico por $e^{j\theta}$, el nuevo vector resultante posee la misma magnitud y su fase ahora se mide desde el sistema de referencia estatórico.

¹⁸En efecto, en régimen permanente la velocidad angular es una constante, mientras que el ángulo cambia constantemente.

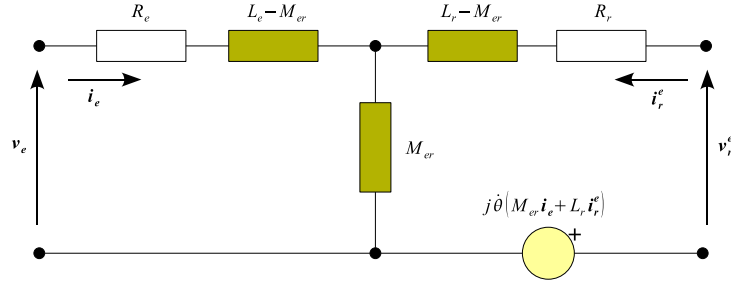


Figura 6.6 Circuito equivalente de la máquina de inducción en vectores espaciales referidos al sistema de referencia estatórico

este estado. En régimen permanente equilibrado, las bobinas del estator de la máquina de inducción se alimentan con un sistema balanceado de tensiones trifásicas de secuencia positiva y las bobinas del rotor se encuentran en cortocircuito:

$$\begin{aligned} v_{ae}(t) &= \sqrt{2}V_e \cos \omega_e t \\ v_{be}(t) &= \sqrt{2}V_e \cos \left(\omega_e t - \frac{2\pi}{3} \right) \\ v_{ce}(t) &= \sqrt{2}V_e \cos \left(\omega_e t - \frac{4\pi}{3} \right) \end{aligned} \quad (6.17)$$

$$v_{ar}(t) = v_{br}(t) = v_{cr}(t) = 0 \quad (6.18)$$

Las tensiones 6.17 y 6.18 expresadas como vectores espaciales son:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_e &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2}V_e \cos \omega_e t \\ \sqrt{2}V_e \cos \left(\omega_e t - \frac{2\pi}{3} \right) \\ \sqrt{2}V_e \cos \left(\omega_e t - \frac{4\pi}{3} \right) \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \mathbf{v}_e &= \sqrt{2} \sqrt{\frac{2}{3}} V_e \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{j\omega_e t} + e^{-j\omega_e t} \\ \alpha^2 e^{j\omega_e t} + \alpha e^{-j\omega_e t} \\ \alpha e^{j\omega_e t} + \alpha^2 e^{-j\omega_e t} \end{bmatrix} = \sqrt{3} V_e e^{j\omega_e t} \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$\mathbf{v}_r = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 = \mathbf{v}_r^e \quad (6.20)$$

Al excitar las bobinas con tensiones trifásicas balanceadas, las corrientes del estator y las del rotor referidas al estator también resultarán balanceadas y los correspondientes vectores espaciales serán:

$$\mathbf{i}_e = \sqrt{3} I_e e^{j(\omega_e t + \phi_e)} \quad (6.21)$$

$$\mathbf{i}_r^e = \sqrt{3} I_r e^{j(\omega_e t + \phi_r)} \quad (6.22)$$

Por otra parte, la velocidad del rotor en régimen permanente será constante $\dot{\theta} = \omega_m = cte$. Reemplazando las condiciones 6.19, 6.20, 6.21 y 6.22 en el modelo de la máquina de inducción

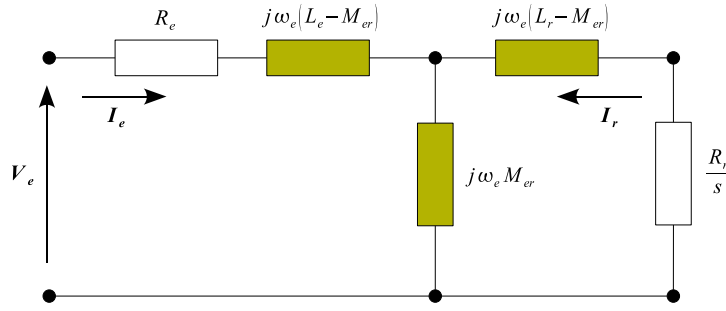


Figura 6.7 Circuito equivalente de la máquina de inducción en régimen permanente

descrito en vectores espaciales se tiene:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \sqrt{3}V_e e^{j\omega_e t} \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}I_e e^{j(\omega_e t + \phi_e)} \\ \sqrt{3}I_r e^{j(\omega_e t + \phi_r)} \end{bmatrix} + \dots \\
 &\dots + \begin{bmatrix} L_e & M_{er} \\ M_{er} & L_r \end{bmatrix} j\omega_e \begin{bmatrix} \sqrt{3}I_e e^{j(\omega_e t + \phi_e)} \\ \sqrt{3}I_r e^{j(\omega_e t + \phi_r)} \end{bmatrix} + \dots \\
 &\dots - j\omega_m \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_{er} & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}I_e e^{j(\omega_e t + \phi_e)} \\ \sqrt{3}I_r e^{j(\omega_e t + \phi_r)} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} V_e \\ 0 \end{bmatrix} &= \left[\begin{bmatrix} R_e & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} + j\omega_e \begin{bmatrix} L_e & M_{er} \\ M_{er} & L_r \end{bmatrix} - j\omega_m \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_{er} & L_r \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} I_e e^{j\phi_e} \\ I_r e^{j\phi_r} \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 \begin{bmatrix} \mathbf{V}_e \\ 0 \end{bmatrix} &= \left[\begin{bmatrix} R_e + j\omega_e L_e & j\omega_e M_{er} \\ j(\omega_e - \omega_m)M_{er} & R_r + j(\omega_e - \omega_m)L_r \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{I}_e \\ \mathbf{I}_r \end{bmatrix} \quad (6.23)
 \end{aligned}$$

Para determinar un circuito equivalente de la máquina de inducción en régimen permanente a partir del sistema de ecuaciones 6.23, es necesario dividir la segunda ecuación por el *deslizamiento*¹⁹:

$$s \equiv \frac{\omega_e - \omega_m}{\omega_e} \quad (6.24)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_e \\ 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} R_e + j\omega_e L_e & j\omega_e M_{er} \\ j\omega_e M_{er} & \frac{R_r}{s} + j\omega_e L_r \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{I}_e \\ \mathbf{I}_r \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

En la figura 6.7 se presenta el circuito equivalente de la máquina de inducción en régimen permanente.

El par eléctrico en régimen permanente se calcula sustituyendo en la expresión 13.23 los fasores espaciales obtenidos en 13.29 y 13.30:

$$T_e = M_{er} \Im m \left\{ \sqrt{3}I_e e^{j(\omega_e t + \phi_e)} \left(\sqrt{3}I_r e^{j(\omega_e t + \phi_r)} \right)^* \right\} = 3M_{er} I_e I_r \sin(\phi_e - \phi_r) \quad (6.26)$$

¹⁹El deslizamiento s es una variable de gran importancia en la modelación de la máquina de inducción y representa la velocidad relativa entre el campo producido en el estator y la posición del rotor, en por unidad de la velocidad de este campo.

La ecuación correspondiente al circuito rotórico en el sistema 6.25 relaciona directamente las corrientes del estator y del rotor:

$$\begin{aligned}
 0 &= j\omega_e M_{er} \mathbf{I}_e + \left(\frac{R_r}{s} + j\omega_e L_r \right) \mathbf{I}_r \Rightarrow \\
 \mathbf{I}_e &= j \frac{\left(\frac{R_r}{s} + j\omega_e L_r \right)}{\omega_e M_{er}} \mathbf{I}_r \Rightarrow I_e e^{j\phi_e} = j \frac{\left(\frac{R_r}{s} + j\omega_e L_r \right)}{\omega_e M_{er}} I_r e^{j\phi_r} \\
 I_e e^{j(\phi_e - \phi_r)} &= j \frac{\left(\frac{R_r}{s} + j\omega_e L_r \right)}{\omega_e M_{er}} I_r \Rightarrow I_e \sin(\phi_e - \phi_r) = \frac{R_r}{s\omega_e M_{er}} I_r
 \end{aligned} \tag{6.27}$$

Al sustituir la expresión 6.27 en la ecuación del par eléctrico 6.26, se obtiene el par eléctrico en función de la corriente del rotor I_r , el deslizamiento s , la resistencia del rotor R_r y la velocidad sincrónica ω_s :

$$T_e = 3 \frac{R_r}{\omega_e s} I_r^2 \tag{6.28}$$

La expresión 6.28 se puede obtener directamente del circuito equivalente de la figura 6.7, cuando se calcula tres veces²⁰ la potencia entregada a la resistencia $\frac{R_r}{s}$ y se divide por la velocidad sincrónica ω_e .

Dentro de las hipótesis del modelo se han despreciado la pérdidas en el hierro de la máquina. Es posible considerar estas pérdidas colocando un elemento resistivo en paralelo con la fuerza electromotriz producida por el flujo de magnetización. También se puede recordar que las inductancia L_e y L_r están compuestas de dos partes, dispersión y magnetización. Por esta razón, haciendo uso de sus respectivas definiciones planteadas en el modelo 6.8, se puede establecer lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 L_e - M_{er} &= L_{\sigma e} + \frac{3}{2} L_{er} - \frac{3}{2} L_{er} = L_{\sigma e} \\
 L_r - M_{er} &= L_{\sigma r} + \frac{3}{2} L_{er} - \frac{3}{2} L_{er} = L_{\sigma r}
 \end{aligned} \tag{6.29}$$

Al definir $X_{\sigma e} \equiv \omega_e L_{\sigma e}$, $X_{\sigma r} \equiv \omega_e L_{\sigma r}$ y $X_m = \omega_e M_{er}$, incluir la resistencia de magnetización en paralelo con la reactancia de magnetización y separar la resistencia $\frac{R_r}{s}$ en dos componentes, una R_r que representa las pérdidas óhmicas del circuito rotórico y $\frac{1-s}{s} R_r$ que representa la potencia transferida al rotor que no se consume en pérdidas, se puede obtener el modelo clásico de la máquina de inducción en régimen permanente, tal como se muestra en la figura 6.8.

Desde el punto de vista eléctrico, el comportamiento de la máquina de inducción en régimen permanente depende del *deslizamiento* s , de la tensión aplicada en el estator V_e y de los parámetros del circuito equivalente (R_e , R_r , R_m , $X_{\sigma e}$, $X_{\sigma r}$, X_m). Una vez que se conocen los parámetros del modelo, el deslizamiento del rotor y la fuente de alimentación, se pueden determinar las

²⁰Por estar representando un modelo unifilar de la máquina aparece el coeficiente 3, en los cálculos de potencia y par.

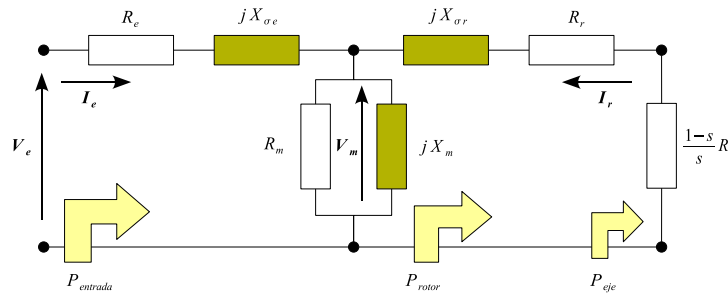


Figura 6.8 Modelo clásico de la máquina de inducción

corrientes que circulan por la máquina. El análisis circuital de la máquina de inducción es semejante al de un transformador con una carga resistiva variable. Esta carga depende exclusivamente del deslizamiento del rotor.

Aun cuando el modelo clásico de la máquina de inducción es similar al modelo de un transformador, existen algunas diferencias importantes:

1. La reluctancia del circuito magnético de la máquina de inducción es mucho mayor que la reluctancia de magnetización de un transformador. Esto se debe principalmente a la presencia de entrehierro en la máquina. La corriente de excitación de una máquina es considerablemente mayor que la de un transformador de igual potencia. Esta corriente puede alcanzar entre un 30 % y un 50 % de la corriente nominal de la máquina, contrastando con el 0,5 % a 1,0 % en un transformador convencional.
2. Al ser tan grande la reluctancia de magnetización, se incrementa considerablemente los enlaces de dispersión. Por esta razón las reactancias de dispersión de la máquina son mayores que estas reactancias para un transformador de similar potencia. Cada una de las reactancias de dispersión de la máquina pueden superar el 10 %, en comparación con un transformador donde se encuentran entre el 1 % y el 6 % aproximadamente.

6.5. Ecuaciones de la máquina de inducción

Del modelo clásico de la máquina de inducción mostrado en la figura 6.8, se pueden extraer varias relaciones de gran utilidad para determinar el comportamiento de la máquina en diferentes condiciones de operación. Algunas de estas relaciones son:

1. **Potencia de pérdidas en el rotor:** Todas las pérdidas eléctricas del rotor se encuentran principalmente en las resistencias de las bobinas del rotor. Estas pérdidas se pueden calcular mediante la expresión:

$$P_{R_r} = 3I_r^2 R_r \quad (6.30)$$

2. **Potencia de pérdidas en el estator:** Los conductores del estator poseen resistencia, y por esta razón en estos devanados se producen pérdidas. También en el hierro de la máquina

se producen pérdidas por histéresis del material magnético y por inducción de corrientes parásitas. Todas estas pérdidas se pueden calcular mediante la siguiente relación:

$$P_{per.ext} = P_{Re} + P_{fe} = 3I_e^2 + 3\frac{V_m^2}{R_m} \quad (6.31)$$

La tensión V_m se puede calcular a partir de la corriente del estator I_e , mediante la siguiente expresión:

$$V_m = V_e - (R_e + jX_{\sigma e})I_e \quad (6.32)$$

3. **Potencia mecánica en el eje del rotor:** De la potencia que entra a la máquina por los ejes eléctricos del estator, una parte se consume en los devanados de estator y otra porción en las pérdidas del hierro. El resto de la potencia de entrada atraviesa el entrehierro de la máquina y llega al circuito del rotor. En este circuito se pierde otra porción en las resistencias de los conductores. La diferencia entre la potencia de entrada y todas las pérdidas, se encuentra disponible en el eje del rotor como potencia mecánica:

$$P_{eje} = P_{rotor} - P_{R_r} = 3I_r^2 R_r \left[\frac{1}{s} - 1 \right] = 3I_r^2 R_r \left[\frac{1-s}{s} \right] \quad (6.33)$$

El balance 6.33 demuestra que la potencia mecánica disponible en el eje es igual a la potencia que se consume en la resistencia de carga representada en la figura 6.8. La potencia mecánica útil disponible en el eje mecánico puede ser menor a la calculada por la expresión 6.33 debido a que existen pérdidas de tipo mecánico tales como la fricción y la refrigeración de la máquina mediante ventiladores acoplados al eje mecánico, que reducen la potencia disponible en el eje.

4. **Par eléctrico:** El par eléctrico de la máquina se puede calcular a partir del cociente entre la potencia mecánica disponible en el eje, y la velocidad mecánica del rotor:

$$T_e = \frac{P_{eje}}{\omega_m} = 3I_r^2 R_r \frac{1-s}{s\omega_m} = 3I_r^2 R_r \frac{1-s}{s\omega_e(1-s)} = 3I_r^2 R_r \frac{1}{\omega_e s} = \frac{P_{rotor}}{\omega_e} \quad (6.34)$$

La ecuación 6.34 determina el par eléctrico mediante la potencia mecánica disponible en el eje P_{eje} y la velocidad mecánica del rotor ω_m . Un método alternativo consiste en calcular el par utilizando la potencia eléctrica que atraviesa el entrehierro P_{rotor} y la velocidad sincrónica ω_e a la que se realiza esta conversión.

5. **Corriente del rotor:** Para determinar la potencia en el eje P_{eje} y el par eléctrico T_e , es necesario obtener la corriente del rotor I_e . Para calcular esta corriente es útil realizar un *equivalente de Thèvenin* visto desde el rotor hacia la fuente del estator tal como se muestra en la figura 6.9. La tensión de Thèvenin en el circuito de la figura 6.9 se determina mediante un divisor de tensión entre la impedancia serie del estator Z_e , y la impedancia de magnetización Z_m :

$$V_{th} = \frac{Z_m}{Z_m + Z_e} V_e \quad (6.35)$$

La impedancia de Thèvenin del circuito es el resultado del paralelo entre Z_e y Z_m , en serie

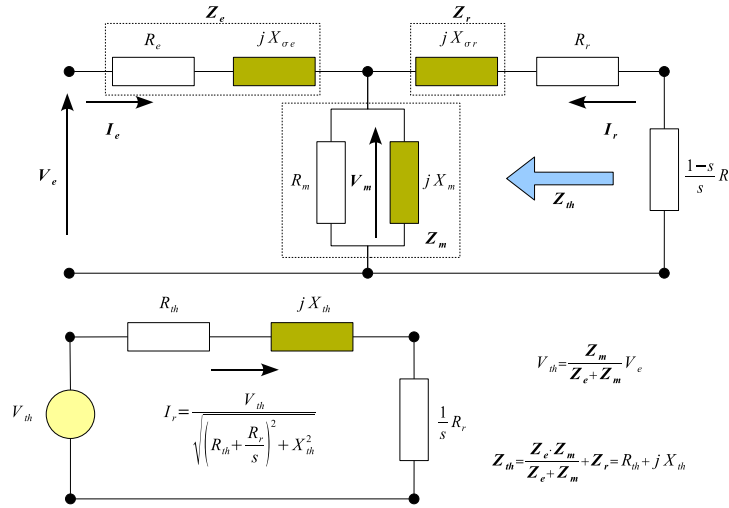


Figura 6.9 Equivalente de Thèvenin de la máquina de inducción visto desde el rotor

con la impedancia Z_r :

$$Z_{th} = \frac{Z_e \cdot Z_m}{Z_e + Z_m} + Z_r = R_{th} + jX_{th} \quad (6.36)$$

La corriente I_r se obtiene a partir del circuito de Thèvenin de la figura 6.9:

$$I_r = \frac{V_{th}}{\sqrt{\left(R_{th} + \frac{R_r}{s}\right)^2 + X_{th}^2}} \quad (6.37)$$

Sustituyendo la expresión 6.37 en las ecuaciones 6.33 y 6.34, se determina la potencia en el eje y el par eléctrico en función de los parámetros de la máquina, la tensión de Thèvenin y el deslizamiento del rotor:

$$P_{eje} = \frac{3V_{th}^2 R_r \left(\frac{1-s}{s}\right)}{\left(R_{th} + \frac{R_r}{s}\right)^2 + X_{th}^2} \quad (6.38)$$

$$T_e = \frac{3 \frac{R_r}{\omega_{es}} V_{th}^2}{\left(R_{th} + \frac{R_r}{s}\right)^2 + X_{th}^2} \quad (6.39)$$

6.6. Característica par-deslizamiento

La ecuación 6.39 determina el par eléctrico de la máquina de inducción. Si la tensión de alimentación V_e tiene una amplitud constante, la tensión de Thèvenin también tendrá su magnitud constante, debido a que las impedancias del estator y de magnetización son independientes del deslizamiento del rotor. Si se excluye el deslizamiento, todos los términos de la ecuación 6.39 son constantes para una máquina dada, mientras que la frecuencia de la red sea constante.

Para comprender el comportamiento funcional de esta característica, resulta conveniente realizar aproximaciones asintóticas de la ecuación 6.39 con respecto a valores extremos del deslizamien-

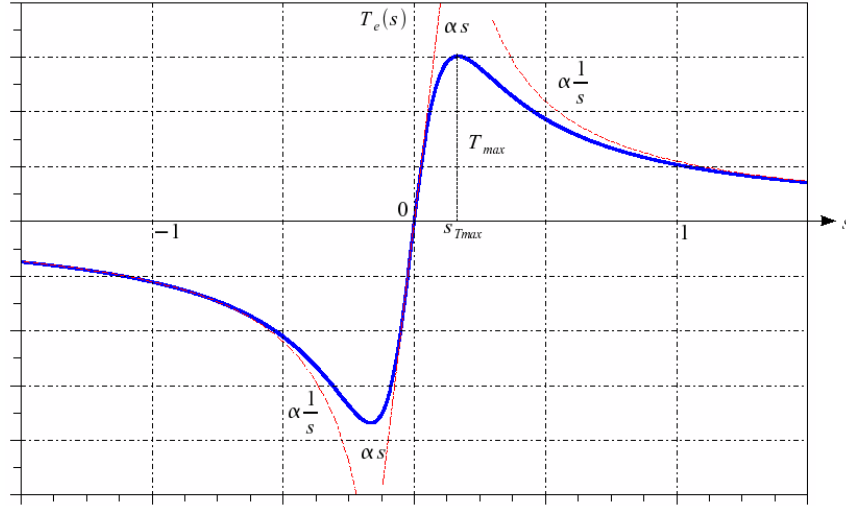


Figura 6.10 Característica par-deslizamiento de la máquina de inducción

to. Cuando el deslizamiento es cero, la velocidad angular del eje rotor es igual a la velocidad del campo magnético rotatorio. En esta condición el campo rotante producido en el estator no corta los conductores del rotor, no se produce fuerza electromotriz en estas bobinas, no circula corriente, y por esta razón no se produce par eléctrico medio.

Para deslizamientos muy pequeños $s \rightarrow 0$, pero diferentes de cero, el término $\frac{R_r}{s}$ es mucho mayor que la resistencia y reactancia Thèvenin. En este caso es posible despreciar en el denominador de la expresión 6.39, la resistencia y la reactancia de Thèvenin:

$$\frac{R_r}{s} \gg \sqrt{R_{th}^2 + X_{th}^2}$$

$$T_e \rightarrow \frac{3V_{th}^2}{\omega_e R_r} s \quad ; \quad si, \quad s \rightarrow 0 \quad (6.40)$$

En aquellos deslizamientos para los cuales es válida la expresión 6.40, el comportamiento de la característica par-deslizamiento es lineal. En la práctica, la ecuación 6.40 es de gran utilidad debido a que en los puntos de operación en régimen permanente, los deslizamientos de la máquina son lo suficientemente pequeños para satisfacer esta aproximación con precisión.

Por otra parte, cuando el deslizamiento es grande, el término $\frac{R_r}{s}$ es despreciable y la característica par-deslizamiento se puede aproximar a:

$$T_e \rightarrow \frac{3V_{th}^2 R_r}{\omega_e s (R_{th}^2 + X_{th}^2)} \quad ; \quad si, \quad s \rightarrow \pm\infty \quad (6.41)$$

La expresión 6.41 representa una variación hiperbólica del par eléctrico a medida que el deslizamiento aumenta. En valores negativos del deslizamiento, la aproximación anterior es igualmente válida, sin embargo en este caso el par eléctrico es negativo.

En la figura 6.10 se ha destacado un punto importante de la característica paro-deslizamiento, este punto corresponde al par máximo de la máquina. El par es máximo cuando la potencia que atraviesa el entrehierro es máxima, esto se debe a que la velocidad sincrónica depende

de la frecuencia de las corrientes inyectadas en el estator, y por lo tanto es constante. Para calcular la potencia máxima que puede atravesar el entrehierro se aplica el principio de máxima transferencia de potencia al equivalente de Thèvenin de la figura 6.9. La máxima transferencia de potencia ocurre cuando la impedancia de la carga se $\frac{R_r}{s}$ iguala a la impedancia del equivalente de Thèvenin Z_{th} . En este circuito la carga es puramente resistiva, mientras que la impedancia de Thèvenin es fuertemente inductiva, en este caso para transferir la máxima potencia es necesario que los módulos de las impedancias se igualen:

$$\frac{R_r}{s} = Z_{th} = \sqrt{R_{th}^2 + X_{th}^2} \quad (6.42)$$

Despreciando en la ecuación 6.42 la resistencia de Thèvenin R_{th} , la cual generalmente es muy pequeña en comparación con la reactancia X_{th} , y reemplazando esta expresión en la ecuación 6.39 se puede calcular el par máximo que produce la máquina de inducción:

$$T_{e\max} \rightarrow \frac{3}{2\omega_e} \frac{V_{th}^2}{X_{th}} \quad (6.43)$$

El deslizamiento que produce el par máximo se obtiene de la expresión 6.42:

$$s_{T_{\max}} = \frac{R_r}{\sqrt{R_{th}^2 + X_{th}^2}} \quad (6.44)$$

Al examinar la ecuación 6.39 se observa que la característica par-deslizamiento no es completamente simétrica con respecto al origen. El denominador de esta ecuación no es indiferente al signo del deslizamiento. Si la resistencia de Thèvenin es nula o despreciable, la característica entonces es simétrica.

El deslizamiento es la variable que define el punto de operación de la máquina de inducción. Conocido este dato se puede determinar las corrientes, el par eléctrico, las potencias de entrada o salida, las pérdidas, el factor de potencia y el rendimiento de la máquina.

En las máquinas con rotor devanado es posible incluir resistencia en serie con el circuito del rotor. Esta posibilidad se puede utilizar para reducir las corrientes durante el arranque o para incrementar sustancialmente la magnitud del par eléctrico durante este proceso. Incluso es posible añadir suficiente resistencia como para permitir que la máquina arranque con el par máximo:

$$s_{T_{\max}} = \frac{R_r + R_{\text{adicional}}}{\sqrt{R_{th}^2 + X_{th}^2}} = 1 \Rightarrow R_{\text{adicional}} = \sqrt{R_{th}^2 + X_{th}^2} - R_r \quad (6.45)$$

La magnitud del par máximo no es afectada por la variación de la resistencia del rotor, pero la característica par-deslizamiento se modifica considerablemente como se observa en la figura .

6.7. Puntos de operación

La característica par-deslizamiento indica el valor del par eléctrico T_e para cualquier deslizamiento s . Para definir el deslizamiento de operación de la máquina es necesario el conocimiento

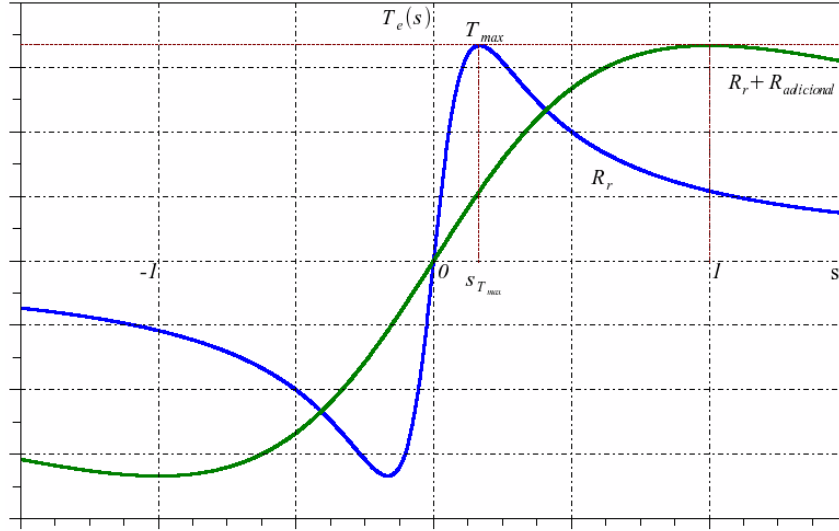


Figura 6.11 Efecto de la variación de la resistencia del rotor sobre la característica par-deslizamiento

de la característica de la carga mecánica. El punto de operación del sistema formado por la máquina eléctrica y la carga mecánica está definido por la intersección de las dos características.

La característica par-velocidad de una bomba puede ajustarse mediante un polinomio de segundo grado en la velocidad angular mecánica ω_m . Esta característica se representa en función del deslizamiento de la máquina de inducción de la siguiente forma:

$$T_m(\omega_m) = k_1\omega_m^2 + k_2\omega_m + k_3 = k_1(1-s)^2\omega_e^2 + k_2(1-s)\omega_e + k_3 \quad (6.46)$$

El punto de operación de la máquina se obtiene en el deslizamiento s_{op} que iguala el par eléctrico producido por la máquina de inducción con el par mecánico que opone la bomba se establece mediante el equilibrio:

$$T_e(s_{op}) - T_m(s_{op}) = 0 \quad (6.47)$$

$$\frac{3 \frac{R_r}{\omega_e s} V_{th}^2}{\left(R_{th} + \frac{R_r}{s}\right)^2 + X_{th}^2} = k_1(1-s)^2\omega_e^2 + k_2(1-s)\omega_e + k_3 \quad (6.48)$$

En la figura 6.12 se muestra el punto de operación, o punto de equilibrio representado en la expresión 6.48.

Según la ecuación 6.39, el par eléctrico de la máquina de inducción depende del cuadrado de la tensión de Thèvenin. Este hecho puede utilizarse para controlar el punto de operación de la máquina variando la tensión de alimentación. En la figura se observa que la reducción de la tensión de alimentación afecta fuertemente el par eléctrico de la máquina en todo el rango de deslizamientos. Si la tensión se reduce durante el proceso de arranque de la máquina, el par de accionamiento puede ser insuficiente para acelerar la máquina hasta el punto final de operación. Para que la máquina pueda acelerar, el par eléctrico debe ser mayor que el par de la carga. Si esta diferencia es muy pequeña, la máquina demora mucho tiempo para alcanzar el punto de

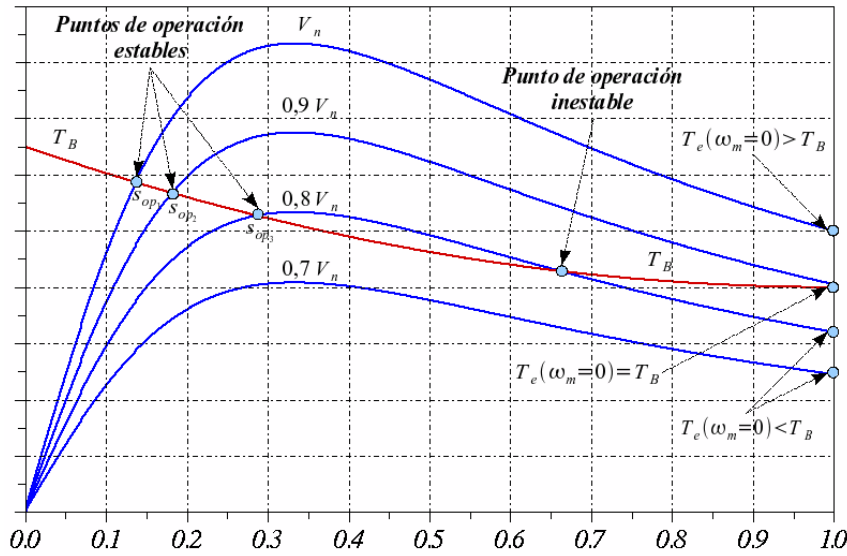


Figura 6.12 Puntos de operación de la máquina de inducción acoplada a una bomba con diferentes valores de la tensión aplicada

operación permanente:

$$T_e - T_m = T_{acel.} = J \frac{d\omega_m}{dt} \quad (6.49)$$

La ecuación 6.49 determina el proceso dinámico de arranque de la máquina de inducción. En la medida que el par eléctrico T_e supera el par mecánico T_m , se incrementa la velocidad del rotor ω_m . Cuando los pares se igualan en el punto de operación, la aceleración se anula y la máquina eléctrica se mantiene accionando a la carga mecánica a esa velocidad. Si varía la carga o la tensión de la red, la máquina acelera o frena hasta alcanzar el nuevo punto de equilibrio. Algunos puntos de intersección de las características de par eléctrico y mecánico no son estables. Si al aumentar la carga mecánica disminuye el par eléctrico, o al disminuir la carga mecánica, aumenta el par producido por la máquina, el punto de *operación* es *inestable* y a la menor perturbación, la máquina se detendrá o buscará un punto de *operación estable*.

6.8. El punto nominal

La *corriente nominal* de una máquina está determinada por la clase de aislamiento de sus bobinas, las pérdidas generadas por esta corriente, y el sistema de refrigeración encargado de disipar al medio ambiente estas pérdidas. Los materiales aislantes que recubren los conductores de las bobinas se degradan más rápidamente en relación directa con la temperatura²¹, a este fenómeno se lo conoce como *envejecimiento*. El calor generado por pérdidas resistivas en los conductores crece con el cuadrado de la corriente que circula por las bobinas. La temperatura en el interior de la máquina, y más concretamente en el aislamiento de las bobinas, está determinado por la capacidad de la máquina para transmitir el calor al medio ambiente. Esta capacidad se conoce

²¹A mayor temperatura la movilidad electrónica facilita la reacción química de los materiales y estos al incluir impurezas en las redes cristalinas degradan las propiedades dieléctricas originales.

como impedancia térmica y depende de la geometría de la máquina, de los materiales y del sistema de enfriamiento.

La corriente nominal por lo tanto, es aquella corriente que al circular por las bobinas, produce pérdidas que incrementan la temperatura interior de la máquina hasta el valor máximo. Con el valor máximo de la temperatura interior, el envejecimiento del material del aislamiento es tan lento que permite alcanzar a la máquina su período de vida útil²², sin que se produzcan fallas en el mismo.

La corriente del estator I_e se puede obtener a partir del circuito equivalente 6.9 utilizando el siguiente procedimiento:

$$I_r = \frac{V_{th}}{Z_{th} + \frac{R_r}{s}} = \frac{\frac{Z_m}{Z_m + Z_e} V_e}{R_{th} + \frac{R_r}{s} + jX_{th}} \quad (6.50)$$

$$V_m = \left(\frac{R_r}{s} + jX_{\sigma r} \right) I_r \quad (6.51)$$

$$I_m = \frac{V_m}{Z_m} = \frac{\frac{R_r}{s} + jX_{\sigma r}}{Z_m} I_r \quad (6.52)$$

$$I_e = I_m + I_r = \frac{\frac{R_r}{s} + jX_{\sigma r} + Z_m}{Z_m} I_r = \frac{\frac{R_r}{s} + jX_{\sigma r} + Z_m}{(Z_m + Z_e)(Z_{th} + \frac{R_r}{s})} V_e \quad (6.53)$$

La corriente nominal I_n define el deslizamiento nominal s_n de la máquina como se muestra en la figura 6.13. Una vez definido el deslizamiento nominal, también queda determinado el par eléctrico nominal T_{e_n} y la potencia nominal en el eje $P_{e_{je_n}}$. Conocida la temperatura máxima de operación t_{max} , el sistema de enfriamiento determina la corriente nominal, y esta corriente define el deslizamiento nominal correspondiente a una tensión dada. Obtenido el deslizamiento nominal, también quedan definidos el par eléctrico nominal y la potencia nominal en el eje.

La *tensión nominal* de la máquina tiene relación con las pérdidas en el hierro y con la magnitud de la corriente de magnetización. Cuando se aplica la tensión nominal a las bobinas del estator, el flujo producido en el entrehierro no debe exceder los valores máximos de la densidad de campo magnético B_{max} que tolera el material sin incrementar drásticamente las pérdidas en el hierro. Si la densidad de campo magnético supera este valor, las pérdidas en el hierro crecen rápidamente, aumenta la corriente de magnetización I_m debido a la saturación del material y se incrementa la temperatura interior de la máquina por encima del valor máximo de diseño.

Los valores nominales de la máquina no implican en forma alguna que la máquina debe funcionar siempre en esta condición. Estos valores son simplemente una referencia que indica un punto de operación en el cual la máquina puede mantenerse en régimen permanente durante todo el período diseñado de vida útil²³. Exceder estos valores, incrementa las pérdidas y la temperatura interior de la máquina, pero si la temperatura previa es inferior a la temperatura máxima de diseño, la inercia térmica de los materiales retarda el proceso. Durante este tiempo es posible operar

²²Entre unos 15 y 30 años de vida media. La mitad de las máquinas habrá fallado durante la vida media.

²³Es necesario recordar que la vida útil es en realidad vida media útil, una variable de tipo estadístico. Solamente la mitad de las máquinas en estas condiciones alcanzaría a operar sin fallas durante este tiempo. Probablemente el fabricante especificará algunas condiciones de mantenimiento mínimo para alcanzar este período de vida útil.

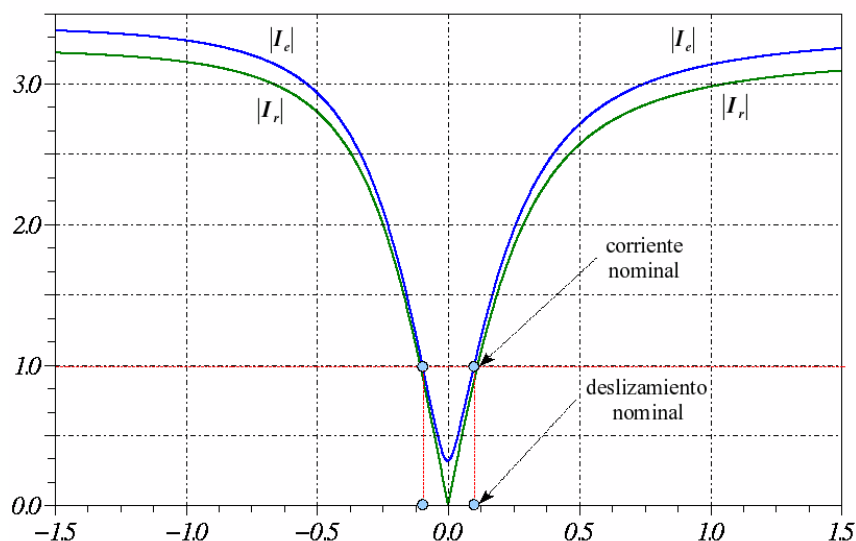


Figura 6.13 Magnitudes de las corrientes del estator I_e y del rotor I_r en función del deslizamiento

la máquina por encima de sus puntos nominales sin reducir la vida útil del convertidor²⁴. Incluso es posible tolerar un pequeño incremento de la temperatura sobre la temperatura máxima sin reducir significativamente la vida útil de la máquina.

Durante el proceso de arranque, las corrientes pueden alcanzar de tres a seis veces el valor nominal, y esto produce un incremento de las pérdidas con el cuadrado de este valor. Las pérdidas pueden crecer de nueve a treinta y seis veces su valor con respecto al punto nominal. Si esta situación se mantiene indefinidamente, la temperatura se incrementará muy rápidamente y se envejecerá el aislamiento rápidamente. El tiempo de arranque depende de la inercia conectada al eje de la máquina, y de la diferencia entre el par eléctrico y el par mecánico de la carga. Cuando el arranque es lento, o se realiza múltiples veces, la temperatura máxima se puede exceder. Si esto ocurre frecuentemente, indica que la especificación nominal de la máquina está por debajo de los requerimientos de la carga. En estas condiciones es posible que durante los períodos de operación en régimen permanente, la máquina opere por debajo de su especificación nominal, y sin embargo la temperatura interior exceda la máxima permitida. Por esta razón es muy importante el *ciclo de carga, aceleración y frenado* a que está sometida una máquina, en su especificación definitiva.

6.9. Sistema en por unidad

Resulta conveniente utilizar el *sistema de valores en por unidad* en la representación de la máquina de inducción. Al representar las magnitudes, parámetros y ecuaciones en un sistema adimensional de unidades, se simplifican y comprenden mucho mejor los cálculos y condiciones de operación de la máquina. Además, en por unidad los parámetros del circuito equivalente varían levemente con el nivel de potencia y tamaño de la máquina, diferenciándose una de otra

²⁴Esto es una condición general válida para todas las máquinas eléctricas, incluidos los transformadores.

principalmente por sus características constructivas. Resulta ventajoso indicar cuantas veces es mayor la corriente de arranque con respecto a la corriente nominal, que utilizar directamente la información en unidades físicas.

Para definir las bases del sistema en por unidad de un sistema eléctrico es necesario especificar la *potencia base* y la *tensión base*. En los transformadores, es necesario definir una tensión base en un lado del transformador, y utilizar la relación del número de vueltas del equipo para definir la base de tensión del otro lado. Los transformadores, las líneas de transmisión y las grandes máquinas poseen rendimientos muy altos. Estos elementos del sistema no tienen diferencias importantes entre las potencias de entrada y salida. Las máquinas de inducción utilizadas industrialmente, tienen un rendimiento menor y por tanto existen diferencias entre la potencia de entrada y salida. Por esta razón es necesario definir cual de estas potencias es más conveniente. Esto por supuesto depende de la aplicación y del enfoque preferido por el analista. En general, entre las infinitas posibilidades existentes son tres las potencias base más utilizadas: La potencia aparente nominal del estator $S_B = S_n$, la potencia activa nominal del estator $S_B = P_{en} = S_n \cdot \cos \phi_n$ y la potencia mecánica nominal en el eje mecánico de la máquina $S_B = P_{ejen}$.

La selección de la *tensión base* presenta menos problemas en su especificación, se utiliza habitualmente como base la tensión nominal línea a línea, especificada en los datos de placa de la máquina $V_B = V_n$. Las demás bases deben calcularse partiendo de estas dos definiciones S_B y V_B . Una vez seleccionada la potencia base y la tensión base en cada una de las tres alternativas se tienen las siguientes bases derivadas:

1. $S_B = S_n$ y $V_B = V_n$: En este caso la corriente base I_B debe calcularse a partir de la definición de potencia aparente en un sistema trifásico balanceado:

$$S_B = \sqrt{3} \cdot V_B \cdot I_B \Rightarrow I_B = \frac{S_B}{\sqrt{3}V_B} \quad (6.54)$$

La impedancia base del sistema Z_B se calcula monofásicamente debido a que el circuito equivalente representa una fase de la máquina, de esta forma a partir de la tensión base V_B y la corriente base I_B , se obtiene:

$$Z_B = \frac{V_B}{I_B} = \frac{\frac{V_B}{\sqrt{3}}}{\frac{S_B}{\sqrt{3}V_B}} = \frac{V_B^2}{S_B} \quad (6.55)$$

Según este sistema de bases, la tensión, corriente del estator y potencia aparente serán 1, 0 pu cuando la máquina esté operando en el punto nominal. La potencia activa en el estator tendrá el mismo valor del factor de potencia nominal. La potencia en el eje resulta el producto del factor de potencia nominal por el rendimiento del punto nominal de operación. Cuando se desea controlar que la corriente del estator no exceda el valor nominal, este sistema es práctico.

2. $S_B = P_{en}$ y $V_B = V_n$: Las expresiones 6.54 y 6.55 determinan la base de las corrientes e impedancias del sistema. Cuando la máquina se encuentra en su punto de operación nominal, la tensión y la potencia activa del estator son 1, 0 pu respectivamente. La potencia aparente y la corriente del estator en por unidad son iguales al inverso del factor de

potencia nominal. La potencia mecánica en el eje, en por unidad es igual, en este sistema, al rendimiento del punto nominal. Como la potencia activa nominal en el estator no es una limitación operativa de la máquina, este sistema no tiene mucha utilidad práctica.

3. $S_B = P_{eje_n}$ y $V_B = V_n$: Igual que en los dos sistemas anteriores de bases, las expresiones 6.54 y 6.55, determinan la base de las corrientes e impedancias del sistema. Cuando la máquina se encuentra operando en su punto de operación nominal, la tensión y potencia en el eje del rotor son 1, 0 pu respectivamente. La potencia aparente y la corriente del estator en las condiciones nominales son iguales al producto del inverso del factor de potencia nominal por el rendimiento en el punto nominal. Este sistema tiene utilidad cuando se desea analizar la potencia de accionamiento de la carga mecánica.

Los sistemas electromecánicos necesitan además del cálculo de potencias, tensiones, corrientes e impedancias, el cálculo de pares y velocidades. Como el par y la velocidad están relacionados por la potencia, es necesario definir una base adicional. En general se escoge la velocidad angular sincrónica del campo magnético rotatorio como base y de esta forma queda determinado el *par base*:

$$P_B = T_B \cdot \omega_B \Rightarrow T_B = \frac{S_B}{\omega_B} = \frac{S_B}{\omega_e} = \frac{S_B}{2\pi f_e} \quad (6.56)$$

Si la máquina posee más de un par de polos, el par base se calcula como el par definido en la ecuación 6.56, dividido por el número de pares de polos p . Si la potencia base es la potencia del eje mecánico, el par para la condición de operación nominal es 1, 0 pu. Cuando se define como base la potencia aparente de entrada, el par es igual al producto del rendimiento nominal por el factor de potencia nominal. Si la base de potencia es la potencia activa nominal del estator, en el punto de operación nominal el par es igual al rendimiento de la máquina en ese punto.

6.10. Determinación de los parámetros

El circuito equivalente de la máquina de inducción está definido por seis parámetros o elementos circuitales²⁵, tres resistencias que modelan las pérdidas y tres reactancias que representan los flujos de dispersión y magnetización de la máquina. El circuito equivalente de la máquina de inducción es semejante al de un transformador trifásico y por lo tanto la metodología utilizada en la determinación de los parámetros de este circuito puede ser utilizada en este caso, con ciertas adaptaciones. Estas variaciones se deben fundamentalmente a la presencia del entrehierro. En los transformadores, la corriente de magnetización es muy pequeña en comparación con la corriente nominal, por esta razón se puede despreciar esta rama cuando se desea identificar las reactancias de dispersión. En la máquina de inducción esta aproximación es más difícil de sostener. Por otra parte, en los transformadores generalmente se tiene acceso a los circuitos primario y secundario²⁶. En la mayoría de las máquinas de inducción este acceso no es posible, debido a que el rotor está en cortocircuito.

²⁵Esto es válido tanto para el modelo transitorio como para el de régimen permanente.

²⁶En algunas ocasiones esto no es posible, también el terciario de algunos transformadores puede no ser accesible a la medición.

Para identificar los parámetros de un transformador, se realizan los ensayos de vacío y cortocircuito. El primero con la finalidad de obtener la reactancia y resistencia de magnetización y el segundo para determinar las reactancias de dispersión y resistencias de los conductores. La separación de la resistencia del primario y secundario se puede realizar midiendo la caída de tensión al inyectar corriente continua por una de sus bobinas. La separación entre las reactancias de dispersión se obtiene repartiendo proporcionalmente a la reactancia de dispersión total, la reluctancia del camino magnético en cada bobina. Esto conduce a que en por unidad, las dos reactancias de dispersión del modelo "T" del transformador son aproximadamente iguales y en valores físicos difieren en la relación de vueltas al cuadrado. En la máquina de inducción no sucede lo mismo porque las ranuras y los caminos magnéticos de las bobinas del estator y rotor pueden ser diferentes.

En la máquina de inducción también se pueden realizar estos ensayos, a continuación se describen los más importantes:

1. **Ensayo de vacío:** En esta prueba se hace girar la máquina a velocidad sincrónica, preferiblemente por un accionamiento externo. De esta forma el deslizamiento es cero y por el circuito del rotor no circulan corrientes. La máquina se alimenta a frecuencia y tensión nominal en el estator. Se miden con la mayor precisión posible las corrientes por las fases, tensiones de línea y potencia activa de entrada. Como el circuito es fuertemente inductivo es conveniente durante el ensayo utilizar vatímetros especiales para medir bajos factores de potencia²⁷. En la figura se presenta el diagrama del montaje experimental requerido para realizar en ensayo de vacío.

La tensión en la rama de magnetización es aproximadamente igual a la tensión de alimentación, debido a que las corrientes de magnetización, aun cuando se encuentran entre una tercera parte y la mitad de la corriente nominal, no producen una caída significativa en la rama serie del modelo. Con esta simplificación, la resistencia y reactancia de magnetización se obtienen mediante los siguientes cálculos:

$$S_0 = \sqrt{3}V_0 \cdot I_0 \quad (6.57)$$

$$P_0 = P_1 + P_2 \quad (6.58)$$

$$Q_0 = \sqrt{S_0^2 - P_0^2} \quad (6.59)$$

$$R_m \approx \frac{V_0^2}{P_0} ; \quad X_m \approx \frac{V_0^2}{Q_0} \quad (6.60)$$

Los órdenes de magnitud habituales se han resumido en el cuadro 6.1.

2. **Prueba de rotor bloqueado:** Para realizar este ensayo es necesario bloquear el rotor de la máquina de inducción. Cuando el rotor está detenido, el deslizamiento es 1, 0. El circuito equivalente en estas condiciones es semejante al de un transformador en cortocircuito²⁸.

²⁷Estos instrumentos son vatímetros normales que permiten una deflexión de la aguja unas cinco veces mayor que la de un vatímetro convencional para la misma potencia. También es posible utilizar instrumentos digitales que no tienen las limitaciones de los electrodinámicos para realizar este tipo de medición.

²⁸Por esta razón en algunas veces se denomina incorrectamente a este ensayo como prueba de cortocircuito.

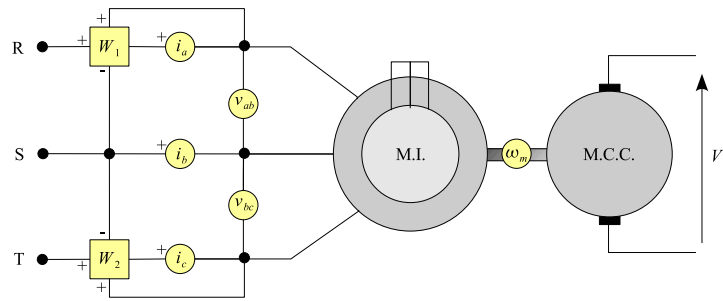


Figura 6.14 Diagrama esquemático del montaje para realizar el ensayo de vacío

I_0	0,2 ~ 0,33	pu
Z_m	2,0 ~ 3,0	pu
X_m	2,0 ~ 3,0	pu
R_m	50 ~ 100	pu

Tabla 6.1 Órdenes de magnitud habituales de los parámetros de magnetización de la máquina de inducción

En la identificación de parámetros del transformador se puede despreciar la rama de magnetización, porque la corriente de cortocircuito es mucho mayor que la corriente de magnetización. La tensión de la rama de magnetización se deprime prácticamente a la mitad de la tensión de vacío y esto reduce aún más la corriente que circula por ella. En el transformador, la influencia de la rama de magnetización durante el ensayo es prácticamente despreciable. En la máquina de inducción la corriente de rotor bloqueado puede alcanzar entre tres y seis veces la corriente nominal. La corriente de vacío está comprendida entre la tercera parte y la mitad de la corriente nominal. Durante la prueba de rotor bloqueado la tensión de la rama de magnetización se deprime más o menos a la mitad, y por esta razón la corriente de la máquina durante este ensayo puede alcanzar a ser entre seis y dieciocho veces mayor que la corriente de magnetización. Desde un punto de vista práctico es posible despreciar esta rama en la estimación de los parámetros, sin embargo la aproximación no es tan precisa como cuando se aplica en el ensayo de cortocircuito de un transformador.

El esquema de medida es similar al ilustrado en la figura 6.14, pero en lugar de hacer girar la máquina de inducción a velocidad sincrónica, es necesario bloquear mecánicamente el rotor. Como el circuito equivalente en este ensayo es muy inductivo, deben utilizarse vatímetros de bajo factor de potencia o digitales para mejorar la precisión de la medida. En la práctica este ensayo no se realiza a valores nominales de tensión, para evitar un calentamiento excesivo de los devanados debido al incremento de las pérdidas con el cuadrado de la corriente y a la falta de ventilación por estar detenido el rotor. Por otra parte, es necesario utilizar una tensión suficientemente grande que garantice la linealidad del circuito magnético.

Aun cuando el ensayo a rotor bloqueado se realice con cierta rapidez, la resistencia de las bobinas cambia apreciablemente con la temperatura y es necesario corregir las medidas. Para este fin se miden las resistencias del estator cuando la máquina está a temperatura

I_{rb}	3,0 ~ 6,0	pu
R_e	0,01 ~ 0,03	pu
R_r	0,01 ~ 0,08	pu
$X_{\sigma e}$	0,07 ~ 0,2	pu
$X_{\sigma r}$	0,07 ~ 0,2	pu

Tabla 6.2 Órdenes de magnitud habituales de los parámetros de rotor bloqueado de la máquina de inducción

ambiente, antes de comenzar el ensayo. Esta medida se realiza inyectando corriente continua en la bobina y midiendo la caída de tensión. La corriente inyectada debe ser menor a un décimo de la corriente nominal para que el calentamiento sea despreciable. Posteriormente se efectúa el ensayo a rotor bloqueado e inmediatamente después de terminar estas medidas, se realiza una nueva medida de las resistencias del estator, por el mismo método descrito. Las dos medidas de resistencia y el conocimiento del material utilizado en el bobinado de la máquina permiten deducir la temperatura alcanzada por la máquina durante el ensayo. Si la máquina está bobinada con cobre recocido en frío, la ecuación que determina la variación de la resistencia en función de las temperaturas es la siguiente:

$$\frac{R_{T2}}{R_{T1}} = \frac{234,5 + T_2(^{\circ}C)}{234,5 + T_1(^{\circ}C)} \quad (6.61)$$

Para determinar los parámetros de la rama serie del circuito equivalente de la máquina, midiendo potencia, tensión y corriente se utiliza el siguiente procedimiento:

$$S_{rb} = \sqrt{3} I_{rb} \cdot V_{rb} \quad (6.62)$$

$$Q_{rb} = \sqrt{S_{rb}^2 - P_{rb}^2} \quad (6.63)$$

$$R_T \approx R_e + R_r = \frac{P_{rb}}{3I_{rb}^2}, \quad X_{\sigma T} \approx X_{\sigma e} + X_{\sigma r} = \frac{Q_{rb}}{3I_{rb}^2} \quad (6.64)$$

Las resistencias se pueden corregir desde la temperatura de la prueba, a la temperatura nominal de operación. Como además se conoce la resistencia del estator por una medida directa, la resistencia del rotor referida al estator se calcula por diferencia:

$$R_r = R_T - R_e \quad (6.65)$$

Con las medidas realizadas, no es posible realizar una separación de las reactancias de fuga del estator y rotor, la práctica más habitual consiste en dividir las por igual en las dos ramas. Sin embargo es necesario recordar que los caminos de fuga del estator y del rotor son diferentes. Estos caminos dependen principalmente de la forma de la ranura, y esta forma puede diferir mucho. Los órdenes de magnitud habituales en este ensayo se han resumido en el cuadro 6.2.

Los ensayos de vacío y rotor bloqueado son una técnica relativamente simple para determinar

los parámetros del circuito equivalente de la máquina de inducción. Este procedimiento es una adaptación del método de cálculo de parámetros en transformadores. En estos ensayos, se realiza la medida de la impedancia equivalente de la máquina en dos condiciones de operación diferentes, deslizamiento cero y uno. También se realiza una medida directa de la resistencia del estator. Conocida la resistencia del estator, sólo restan por determinar los otros cinco parámetros. Cada uno de los ensayos permite establecer dos ecuaciones, una para la parte real y otra para la parte imaginaria de la impedancia de entrada. En total se dispone de cuatro ecuaciones para la determinación de cinco parámetros.

El problema matemático está indeterminado. La solución obtenida con tan escasa información, además de utilizar simplificaciones más o menos razonables, debe considerar una separación artificial de las reactancias de dispersión. Este problema se resuelve realizando ensayos adicionales a diferentes deslizamientos. Si se realizan varios ensayos, se obtiene un sistema con un mayor número de ecuaciones²⁹. Como los parámetros que se están determinando son siempre cinco, se tienen más ecuaciones que incógnitas. El sistema de ecuaciones obtenido está sobredeterminado. Las medidas realizadas en los ensayos incluyen errores de apreciación del observador y de precisión en los instrumentos. Además, los parámetros de la máquina varían en la práctica dependiendo de variables tales como el grado de saturación, la temperatura y el efecto pelicular entre otras. En esta situación resulta de gran utilidad la técnica de *estimación paramétrica* por el método de los *mínimos cuadrados*.

Del circuito equivalente de la máquina de inducción se puede determinar la impedancia de entrada en función de los parámetros de la máquina, la frecuencia de alimentación y el deslizamiento. La impedancia de entrada vista desde el estator tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{Z}_{ent}(R_e, L_{\sigma e}, R_m, L_m, R_r, L_{\sigma r}, s, \omega_e) = \mathbf{Z}_e + \frac{\mathbf{Z}_m \cdot \mathbf{Z}_r}{\mathbf{Z}_m + \mathbf{Z}_r} \quad (6.66)$$

donde:

$$\mathbf{Z}_e = R_e + j\omega_e L_{\sigma e} \quad (6.67)$$

$$\mathbf{Z}_r = \frac{R_r}{s} + j\omega_e L_{\sigma r} \quad (6.68)$$

$$\mathbf{Z}_m = \frac{j\omega_m L_m R_m}{R_m + j\omega_m L_m} \quad (6.69)$$

Utilizando el modelo de impedancia de entrada de la máquina, efectuando n ensayos con una precisión σ_i determinada y variando la velocidad del rotor ω_m o la frecuencia de alimentación ω_e , el problema que se debe resolver consiste en minimizar la función de costo Ψ :

$$\Psi = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\mathbf{Z}_{med}(s_i, \omega_{ei}) - \mathbf{Z}_{cal}(s_i, \omega_{ei})}{\sigma_i \mathbf{Z}_{med}(s_i, \omega_{ei})} \right] \cdot \left[\frac{\mathbf{Z}_{med}(s_i, \omega_{ei}) - \mathbf{Z}_{cal}(s_i, \omega_{ei})}{\sigma_i \mathbf{Z}_{med}(s_i, \omega_{ei})} \right]^t \quad (6.70)$$

donde:

²⁹Dos ecuaciones por cada medida.

$\mathbf{Z}_{med}(s_i, \omega_{ei})$	es la i -ésima impedancia medida en los ensayos.
$\mathbf{Z}_{cal}(s_i, \omega_{ei})$	es la i -ésima impedancia calculada mediante el modelo.
s_i	es el deslizamiento de la i -ésima medida
ω_{ei}	es la frecuencia de la i -ésima frecuencia de alimentación.
σ_i	es el factor de ponderación debido a la precisión de la medida i .
n	es el número total de medidas.

La ecuación 6.70 se puede escribir matricialmente como:

$$\Psi = \mathbf{f}^t \cdot \mathbf{f} \quad (6.71)$$

donde:

$$\mathbf{f}^t = [\mathbf{f}_1(\mathbf{X}, s_i, \omega_{ei}) \quad \mathbf{f}_2(\mathbf{X}, s_i, \omega_{ei}) \quad \cdots \quad \mathbf{f}_n(\mathbf{X}, s_i, \omega_{ei})] \quad (6.72)$$

$$\mathbf{f}_i(\mathbf{x}, s_i, \omega_{ei}) = \frac{\mathbf{Z}_{med}(s_i, \omega_{ei}) - \mathbf{Z}_{cal}(\mathbf{X}, s_i, \omega_{ei})}{\sigma_i \mathbf{Z}_{med}(s_i, \omega_{ei})} \quad (6.73)$$

$$\mathbf{X} = [R_e \quad X_{\sigma e} \quad R_m \quad X_m \quad R_r \quad X_{\sigma r}] \quad (6.74)$$

Considerando que la ecuación 6.71 no es lineal en el caso general, las derivadas primeras de la función de costos Ψ con respecto a cada una de las variables de estado \mathbf{x} del modelo se calculan de la siguiente forma:

$$\left[\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{X}} \right] = G(\mathbf{X}) = 2 [\mathbf{A}(\mathbf{X})]^t \cdot \mathbf{f}(\mathbf{X}) \quad (6.75)$$

donde la matriz $\mathbf{A}(\mathbf{X})$ es la *matriz Jacobiana* del vector de errores ponderados $\mathbf{f}(\mathbf{X})$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}) = \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{X}} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{X}_1} & \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{X}_2} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{X}_m} \\ \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{X}_1} & \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{X}_2} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{X}_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial \mathbf{X}_1} & \frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial \mathbf{X}_2} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{f}_n}{\partial \mathbf{X}_m} \end{bmatrix} \quad (6.76)$$

La matriz Jacobiana es de dimensión $n \times m$, donde n es el número de medidas y m el número total de parámetros del modelo.

El incremento de los parámetros que minimiza la función de costos 6.71, utilizando el método de *Gauss-Newton* se calcula mediante la siguiente expresión:

$$\Delta \mathbf{X}_k = -\mathbf{H}(\mathbf{X}_k)^{-1} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{X}_k) \approx -2 [\mathbf{A}(\mathbf{X}_k)]^t \cdot \mathbf{A}(\mathbf{X}_k)]^{-1} \cdot [\mathbf{A}(\mathbf{X}_k)]^t \cdot \mathbf{f}(\mathbf{X}_k) \quad (6.77)$$

El vector de parámetros del modelo en la iteración $k + 1$ se calcula como:

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k + \Delta \mathbf{X}_k \quad (6.78)$$

Si en la iteración k , el módulo del vector $\Delta \mathbf{X}_k$ es menor que un cierto error ϵ especificado, el problema converge al mínimo local más cercano de la función de costos Ψ . Este método presenta ciertos problemas de convergencia, en particular cuando el peso de las segundas derivadas en la

matriz Hessiana es importante³⁰. Para garantizar la convergencia del método es recomendable modificar la ecuación 6.77 de la siguiente forma:

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k + \alpha \cdot \Delta \mathbf{X}_k \quad (6.79)$$

Sustituyendo la ecuación 6.79 en el vector de errores ponderados $\mathbf{f}(\mathbf{X}_{k+1})$ se puede obtener mediante la ecuación 6.75 una función de costos para la iteración $k+1$ en función de las variables de estado obtenidas en la iteración k y el parámetro unidimensional α :

$$\Psi(\mathbf{X}_{k+1}) = \Psi(\mathbf{X}_k + \alpha \cdot \Delta \mathbf{X}_k) = \mathbf{f}(\mathbf{X}_k + \alpha \cdot \Delta \mathbf{X}_k)^t \cdot \mathbf{f}(\mathbf{X}_k + \alpha \cdot \Delta \mathbf{X}_k) = \Psi(\alpha) \quad (6.80)$$

Para obtener el nuevo vector de corrección $\alpha \cdot \Delta \mathbf{X}_k$, es necesario determinar el valor del parámetro α que minimiza la función de costos.

Una vez obtenido el valor de las variables de estado que minimizan la función de costos Ψ en la iteración $k+1$ se prosigue el cálculo determinando una nueva dirección mediante la ecuación 6.80 y un nuevo proceso de búsqueda del mínimo. Cuando el módulo del vector de dirección es inferior a la precisión requerida en los cálculos, termina el proceso de minimización con la mejor estimación de los parámetros del modelo.

Uno de los inconvenientes que presenta el método de Gauss-Newton modificado es la necesidad de calcular un valor inicial de los parámetros. La función de costos Ψ , puede tener múltiples mínimos locales. La mejor solución para el modelo es aquella que produce el menor de los mínimos locales. Los valores iniciales de los parámetros pueden ser generados mediante una estimación inicial de tipo determinístico que puede ser realizada mediante los ensayos de vacío y rotor bloqueado. De cualquier forma, el método de Gauss-Newton requiere arrancar con un valor inicial cercano a la solución para garantizar la convergencia a la solución óptima. En la figura 6.15 se presenta el diagrama de flujo del método de minimización de Gauss-Newton.

Si se desea asegurar la convergencia del método, es conveniente limitar la corrección máxima $\alpha \cdot \Delta \mathbf{X}_k$ para que ninguno de los parámetros de la máquina definidos en el vector \mathbf{X}_k pueda aumentar o disminuir en más de un 50 %. Esto puede reducir la velocidad del algoritmo, pero asegura que los parámetros han de ser siempre positivos y evita divergencias debido a las no linealidades del modelo.

El método de Gauss-Newton es muy eficiente para la determinación de los parámetros cuando la función de costos se define por mínimos cuadrados. Otros métodos de optimización no lineal también pueden obtener soluciones con más o menos dificultad. Como ejemplo se presenta listado 4 de un programa de estimación de los parámetros de una máquina de inducción realizado en el entorno de distribución libre Scilab-3. Los parámetros del modelo de la máquina son previamente conocidos para permitir la comprobación de esta técnica. Con estos parámetros se evalúan las impedancias de entrada de la máquina para las condiciones de la prueba de vacío, carga y rotor bloqueado mediante la función de costo Ψ que se presenta en el listado 4. Por el método convencional de los ensayos de vacío y rotor bloqueado se realiza la estimación inicial de los parámetros x_0 . Se utiliza la rutina de optimización de funciones no lineales sin restricciones³¹ *optim* para encontrar el conjunto de parámetros de la máquina \mathbf{X} que minimizan la

³⁰Una aproximación a la matriz Hessiana es: $\mathbf{H} \approx \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A}$.

³¹La rutina *optim* del entorno Scilab puede manejar restricciones de frontera.

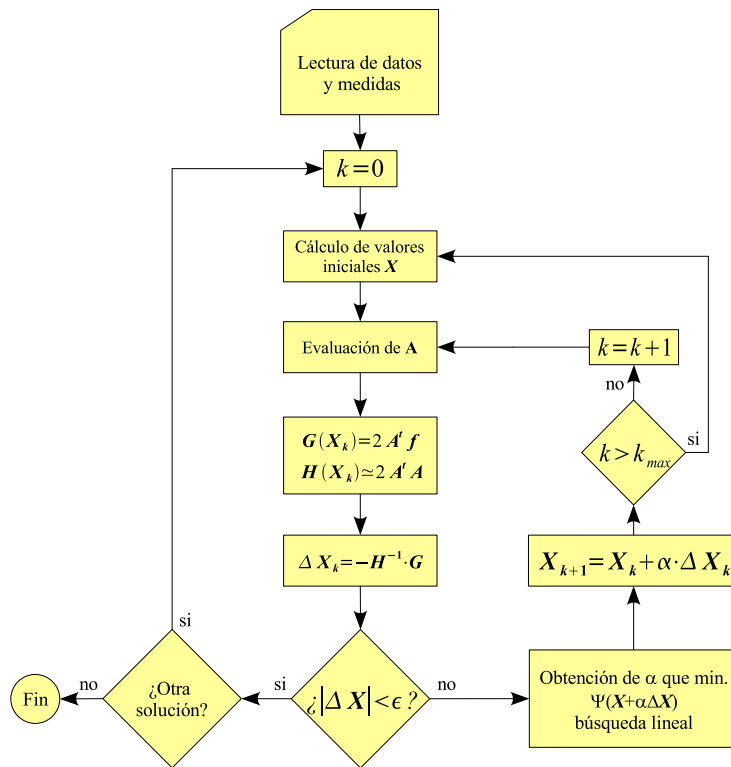


Figura 6.15 Diagrama de flujo del método de minimización de Gauss-Newton

función de costos Ψ . Para evitar la determinación del gradiente G requerido por la rutina de optimización³², esta se invoca incluyendo el programa externo *NDcost* que realiza su evaluación numérica.

En el cuadro 6.3 se presenta una comparación entre los resultados del cálculo de los parámetros de la máquina de inducción realizados mediante el método de los ensayos de vacío y rotor bloqueado con las estimación paramétrica realizada mediante la minimización de la función de costos. Aun cuando los resultados de la estimación son más cercanos a los valores exactos, el cálculo a partir de los ensayos además de ofrecer un punto de partida para el algoritmo puede ser utilizado directamente en muchas aplicaciones de la ingeniería eléctrica.

6.11. Condiciones de operación

La máquina de inducción es un convertidor electromecánico de energía que puede operar como motor, generador o freno. Estas tres condiciones o zonas de operación se corresponden con rangos diferentes del deslizamiento. En la operación como motor la máquina entrega par y potencia en el eje mecánico, consumiendo potencia en el eje eléctrico. En la condición de generador ocurre la situación inversa, se absorbe potencia y par del eje mecánico y se entrega potencia por el eje eléctrico. En la condición de frenado ambos ejes introducen potencia al convertidor la cual es quemada en pérdidas. Una descripción más detallada de estas zonas de operación de la máquina de inducción se presentan a continuación:

³²En este caso las no linealidades del modelo de impedancia de entrada de la máquina complican la evaluación analítica de la función gradiente.

Algoritmo 4 Estimación de los parámetros de la máquina de inducción

```
//*****
// Estimación de los parámetros de una máquina de inducción
// mediante la técnica de los mínimos cuadrados.
//*****
//
// programa parámetros.
//
// Para este ejemplo se utilizó el circuito equivalente para
// determinar la impedancia de entrada para tres deslizamientos
// diferentes: vacío(s=0), carga(s=0.03) y rotor bloqueado(s=1)
//
// Los parámetros del circuito equivalente de esta máquina son:
//      Re = .02 p.u.   Xe = .10 p.u.
//      Rm = 50. p.u.   Xm = 3.0 p.u.
//      Xr = .15 p.u.   Rr = .03 p.u.
//
// Los ensayos realizados dieron los siguientes resultados:
//      Zmedida(s=0)    = .199350+j3.0892 p.u.
//      Zmedida(s=0.03) = .833740+j.49141 p.u.
//      Zmedida(s=1)    = .047603+j.24296 p.u.
//      Re              = .02 p.u. (Medida directa)
//
// Utilizando el método aproximado se consiguen los siguientes
// valores de arranque.
//      Xeo = .12 p.u.   Rmo = 48.0 p.u.
//      Xmo = 3.3 p.u.   Xro = .12 p.u.
//      Rro = .0276 p.u.
//
// Estos valores se cargan en el vector de arranque x0:
//
//      x0=[.12 48 3.3 .12 .0276]';
//
// Finalmente se llama a la rutina optim que calcula los valores
// de los parámetros x que minimizan la función de costo.
//
//      [Psi,x,g] = optim(list(NDcost,costo),x0);
//
// En el vector x se han cargado los parámetros óptimos de la
// estimación. La solución es:
//
//      Refin = 0.02
//      Xefin = x(1)
//      Rmfin = x(2)
//      Xmfin = x(3)
//      Rrfin = x(4)
//      Xrfin = x(5)
//      Psi
```

Algoritmo 5 Función de costos Ψ a ser evaluada por la rutina *optim*

```
//*****  
//  
function Psi = costo(x)  
//  
//*****  
// Evaluación de la función de costos por mínimos cuadrados.  
// Psi = Sumatoria(errores relativos)^2  
//  
// Deslizamientos correspondientes a los ensayos de vacío,  
// carga y rotor bloqueado.  
//  
s = [1e-10 .03 1.]';  
//  
Re = 0.02; // Medición directa de la resistencia estator  
Xe = x(1); // Reactancia de dispersión del estator  
Rm = x(2); // Resistencia de magnetización  
Xm = x(3); // Reactancia de magnetización  
Rr = x(4); // Resistencia del rotor referida al estator  
Xr = x(5); // Reactancia dispersión rotor referida al estator  
//  
// Vector de las impedancias de entrada medidas en los  
// ensayos.  
//  
i=%i;j=%i;  
Zmedida = [.1999350-3.0892*i  
           .833740-.49141*i  
           .047603-.24296*i]';  
//  
// Evaluación de las impedancias calculadas mediante la estimación  
// de los parámetros del modelo.  
//  
Ze = Re+j*Xe; // Impedancia estator  
Zm = (Rm*j*Xm)/(Rm+j*Xm); // Impedancia magnetización  
Zth = Ze*Zm/(Ze+Zm)+j*Xr; // Impedancia de Thevenin  
Ve = 1.00; // Tensión del estator  
Vth = Zm*Ve/(Zm+Ze); // Tensión de Thevenin  
Ir = Vth./(Zth+Rr./s); // Corriente del rotor referida  
Vm = Ir.*(Rr./s+j*Xr); // Tensión rama magnetizante  
Im = Vm./Zm; // Corriente de magnetización  
Ie = Im+Ir; // Corriente del estator  
Zcalculada=Ve./Ie; // Impedancia de entrada calculada  
//  
// Cálculo del error relativo entre las medidas y el modelo  
//  
err = (Zmedida-Zcalculada)./Zmedida;  
//  
// Cálculo de la función de costo por mínimos cuadrados  
//  
Psi = abs(err'*err);  
//  
endfunction;
```

Parámetro	Ensayos	Estimación	Exacto
R_e	0,0200	0,0200	0,0200
$X_{\sigma e}$	0,1200	0,1006	0,1000
R_m	48,000	49,8184	50,000
X_m	3,3000	2,9994	3,0000
R_r	0,0276	0,0299	0,0300
$X_{\sigma r}$	0,1200	0,1493	0,1500
$\Psi(\mathbf{X})$	2,66977	$6,2 \times 10^{-6}$	$3,5 \times 10^{-8}$

Tabla 6.3 Comparación entre el método aproximado y la estimación de parámetros

1. **Motor:** Para que la potencia y el par en el eje sean positivos es necesario que la potencia transferida a las resistencias $\frac{R_r}{s}$ y $\frac{1-s}{s}R_r$ deben ser positivas³³:

$$\frac{1}{s} \geq 0 ; \quad \frac{1-s}{s} \geq 0 \Rightarrow 0 \leq s \leq 1 \quad (6.81)$$

En la zona de motorización, la carga es accionada por la máquina y se consume potencia de la red.

2. **Generador:** La operación como generador requiere que la máquina entregue potencia por el estator. La energía entra por el eje mecánico, atraviesa el entrehierro y llega al estator. En el circuito equivalente este fenómeno se obtiene cuando la resistencia de carga $\frac{1-s}{s}R_r$ es negativa. La potencia generada por esta resistencia proviene del accionamiento mecánico externo. En este caso:

$$s \leq 0 \quad (6.82)$$

Cuando el deslizamiento del rotor es negativo, la resistencia es negativa también. Un deslizamiento negativo implica que la velocidad del rotor es mayor que la velocidad sincrónica, en estas condiciones el campo magnético rotatorio que se produce en el rotor adelanta al campo magnético rotatorio del estator, el par eléctrico se invierte de sentido y la potencia fluye desde el rotor hacia el estator.

3. **Freno:** Si la máquina gira en sentido contrario al del campo magnético rotatorio, el deslizamiento es mayor que uno:

$$s > 1 \quad (6.83)$$

Para esta condición la resistencia de carga es negativa $\frac{1-s}{s}R_r$. Por otra parte, la potencia transferida desde el estator al rotor que depende de $\frac{R_r}{s}$ es positiva. En estas condiciones la máquina consume potencia tanto de la fuente como del eje mecánico. Toda esta potencia se disipa como pérdidas en las resistencias pasivas del circuito equivalente. En este caso la máquina utiliza potencia eléctrica de la fuente para oponerse al sentido del movimiento. Estos puntos de operación pueden utilizarse para frenar un motor, consumiendo para este

³³La potencia transferida a $\frac{R_r}{s}$ determina el par eléctrico y la transferida a $\frac{1-s}{s}R_r$ define la potencia disponible en el eje mecánico.

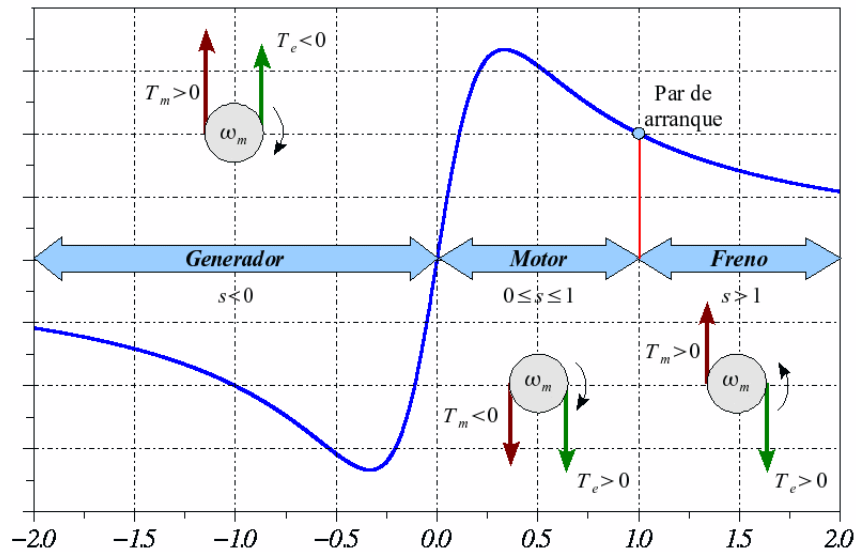


Figura 6.16 Zonas de operación como generador, motor y freno de la máquina de inducción

fin la energía cinética acumulada en la carga mecánica. Durante el funcionamiento como freno la máquina disipa internamente mucha energía y esto ocasiona un calentamiento importante, por esta razón este tipo de operación tan solo debe utilizarse durante cortos períodos de tiempo. Para que la máquina de inducción opere en la condición de freno, es necesario que se invierta el sentido de giro del campo magnético rotatorio con respecto a la velocidad del rotor. Esto se puede lograr invirtiendo la conexión de dos fases del estator, el sentido de giro del campo se invierte y la máquina entra en la condición de freno. El par eléctrico que produce la máquina tiene sentido contrario al movimiento del rotor, y la carga mecánica disminuye su velocidad. Cuando el rotor se detiene, se desconecta la máquina de la red y culmina el proceso de frenado.

En la figura 6.16 se han representado las zonas de operación correspondientes a la operación como generador, motor y freno respectivamente.

6.12. Características normalizadas

El gráfico par-deslizamiento de la máquina de inducción es una función que puede ser normalizada con respecto al par máximo y al deslizamiento correspondiente al par máximo. Esta característica normalizada tiene gran utilidad cuando es necesario determinar el comportamiento de una máquina a la cual no se le conocen sus parámetros. Durante la etapa de diseño o especificación de un accionamiento este tipo de herramienta es de utilidad. La ecuación 6.39 determina el par eléctrico en función del deslizamiento, y el par máximo se obtiene sustituyendo en esta

expresión la condición 6.42 para par máximo:

$$\begin{aligned}
 T_{e_{max}} &= \frac{\frac{3}{\omega_e} \frac{R_r}{s_{T_{max}}} V_{th}^2}{\left(R_{th} + \frac{R_r}{s_{T_{max}}}\right)^2 + X_{th}^2} = \\
 &= \frac{\frac{3}{\omega_e} \sqrt{R_{th}^2 + X_{th}^2} V_{th}^2}{\left(R_{th} + \sqrt{R_{th}^2 + X_{th}^2}\right)^2 + X_{th}^2} = \\
 &= \frac{\frac{3}{\omega_e} V_{th}^2}{2 \left(R_{th} + \sqrt{R_{th}^2 + X_{th}^2}\right)} \quad (6.84)
 \end{aligned}$$

Dividiendo la característica del par-deslizamiento 6.39 por el par máximo determinado en la expresión 6.84, se obtiene:

$$\frac{T_e}{T_{max}} = \frac{2 \left(R_{th} + \sqrt{R_{th}^2 + X_{th}^2}\right)}{\left(R_{th} + \frac{R_r}{s}\right)^2 + X_{th}^2} \cdot \frac{R_r}{s} \quad (6.85)$$

Definiendo el factor de calidad Q^{34} de la máquina de inducción como el cociente entre la impedancia y la resistencia de Thèvenin:

$$Q \equiv \frac{X_{th}}{R_{th}} \quad (6.86)$$

Introduciendo la definición 6.86 y la condición del par máximo 6.42 en la expresión del par normalizado 6.85, se obtiene la siguiente relación:

$$\frac{T_e}{T_{max}} = \frac{1 + \sqrt{1 + Q^2}}{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{s}{s_{T_{max}}} + \frac{s_{T_{max}}}{s}\right) \sqrt{1 + Q^2}} \quad (6.87)$$

La expresión 6.87 determina el par eléctrico de una máquina de inducción dado el par eléctrico máximo T_{max} , el deslizamiento correspondiente al par máximo $s_{T_{max}}$, el factor de calidad de las bobinas Q y el deslizamiento correspondiente s . El factor de calidad de las bobinas Q es un valor característico de la máquina y varía en un rango estrecho, normalmente entre 3,0 y 10 aproximadamente. El deslizamiento correspondiente al par máximo $s_{T_{max}}$ tiene incidencia directa sobre el rendimiento del punto nominal, cuanto menor es este deslizamiento; mayor es el rendimiento. Sin embargo, una máquina con deslizamiento correspondiente al punto de par máximo muy reducido, también produce un par de arranque pequeño. En la figura 6.17 se ha representado la expresión 6.87 para varios valores típicos del factor de calidad Q .

En algunas ocasiones la expresión 6.87 se particulariza considerando como aproximación que el factor de calidad Q de la máquina tiende a infinito. Esto es una buena aproximación en máquinas grandes, donde la resistencia de Thèvenin R_{th} es muy pequeña comparada con la reactancia de dispersión X_{th} , que varía muy poco con el tamaño o potencia de la máquina, cuando se expresa

³⁴El factor de calidad es un parámetro utilizado frecuentemente en el diseño de filtros y está asociado con las pérdidas que tienen las inductancias y los condensadores.

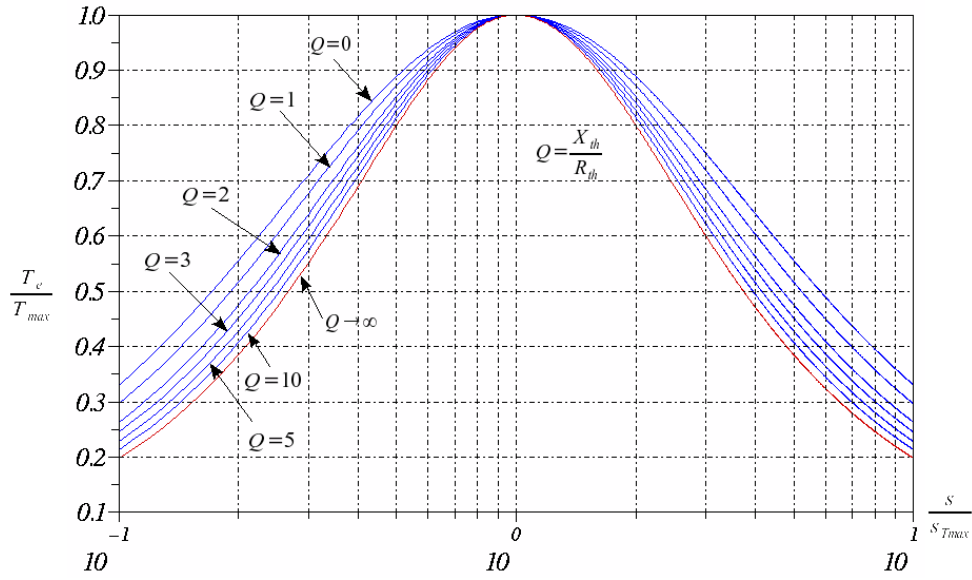


Figura 6.17 Par eléctrico normalizado de la máquina de inducción

en el sistema adimensional de unidades³⁵. La expresión que se obtiene cuando $Q \rightarrow \infty$ es:

$$\frac{T_e}{T_{max}} = \frac{2}{\frac{s}{s_{Tmax}} + \frac{s_{Tmax}}{s}} \quad (6.88)$$

Una expresión similar a la 6.87 se obtiene para la corriente del rotor cuando se normaliza por el valor de la corriente y del deslizamiento correspondiente al par máximo:

$$\frac{I_r}{I_{rTmax}} = \sqrt{\frac{2(1 + \sqrt{1 + Q^2})}{2\frac{s_{Tmax}}{s} + \left(1 + \left(\frac{s_{Tmax}}{s}\right)^2\right)\sqrt{1 + Q^2}}} \quad (6.89)$$

Cuando el factor de calidad tiende a infinito $Q \rightarrow \infty$, la expresión 6.89 tiende a:

$$\frac{I_r}{I_{rTmax}} = \sqrt{\frac{2}{1 + \left(\frac{s_{Tmax}}{s}\right)^2}} \quad (6.90)$$

En la figura se muestra la corriente normalizada del rotor para varios valores típicos del factor de calidad Q .

6.13. Diagrama de círculo

El circuito equivalente de la máquina de inducción es una herramienta eficaz y eficiente para la evaluación de su comportamiento en cualquier punto de operación. Hoy en día se disponen de calculadoras y computadores de gran capacidad, potentes y rápidos que facilitan la aplicación de

³⁵Por unidad.

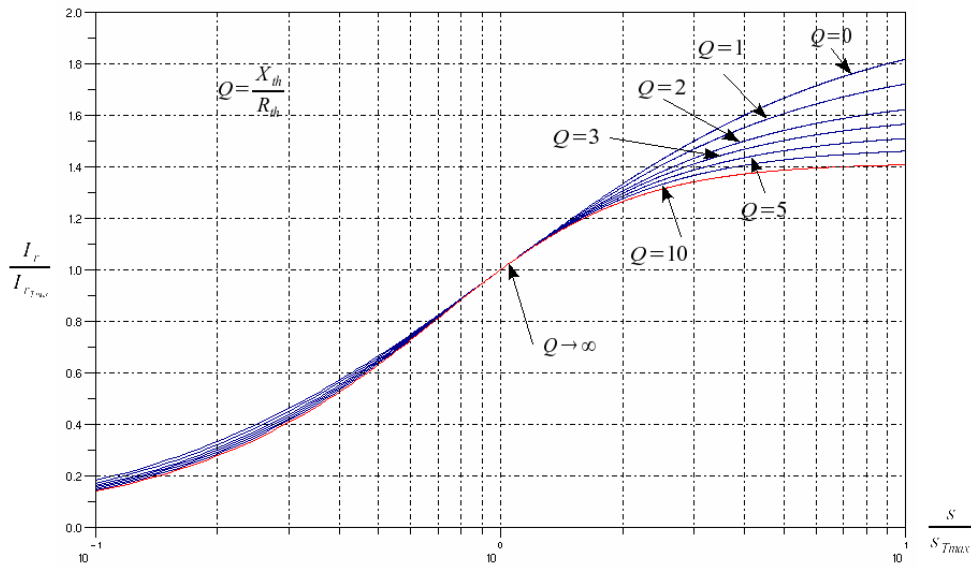


Figura 6.18 Corriente normalizada del rotor de la máquina de inducción

este modelo en el análisis práctico y profesional de la máquina de inducción. Sin embargo, hace algunos años estas herramientas no estaban disponibles, o su costo no justificaba su aplicación en cálculos rutinarios. Por este motivo se desarrolló el método del *diagrama de círculo*, como herramienta de cálculo geométrico. Los *lugares geométricos* reducen el número de operaciones aritméticas con variables complejas y permiten visualizar en un sólo gráfico gran cantidad de información sobre el comportamiento de la máquina de inducción en todo su rango operativo. Actualmente se han eliminado completamente las dificultades de cálculo que existían en el pasado y podría parecer innecesario el uso del diagrama de círculo. Sin embargo, la posibilidad de visualizar en el mismo gráfico, todas las corrientes posibles, su correspondientes deslizamientos, pares y potencias, ofrece a esta herramienta un respetable interés para incrementar la comprensión del modelo de la máquina y relaciones causa-efecto existentes entre las diferentes variables.

El diagrama de círculo permite el análisis cuantitativo del comportamiento de la máquina de inducción interpretando racionalmente sus principales características y como estas son afectadas por variaciones en los parámetros o en la fuente de alimentación.

El diagrama de círculo de la máquina de inducción es el lugar geométrico del fasor corriente del estator I_e , utilizando como parámetro el deslizamiento s . En estricta teoría, el lugar geométrico de las corrientes del estator no es un círculo exacto, aun cuando las diferencia con esta figura es muy reducida en la práctica. Por otra parte, el lugar geométrico de la corriente del rotor I_r , representa un círculo matemáticamente preciso³⁶ cuando se representa en el plano este fasor para todos los posibles deslizamientos de la máquina de inducción.

A partir del equivalente de Thèvenin desarrollado en la figura 6.9, se obtiene la corriente del

³⁶Considerando como válidas las hipótesis simplificadoras incluidas en el modelo del circuito equivalente de la máquina de inducción.

rotor \mathbf{I}_r como:

$$\mathbf{I}_r = \frac{\mathbf{V}_{th}}{\mathbf{Z}_{th} + \frac{R_r}{s}} = \frac{V_{th}}{R_{th} + \frac{R_r}{s} + jX_{th}} = \frac{V_{th}}{|\mathbf{Z}(s)| \angle \phi_r(s)} = \frac{V_{th}}{X_{th}} \text{sen}(\phi_r(s)) \angle -\phi_r(s) \quad (6.91)$$

La expresión 6.91 se expresa en coordenadas cartesianas de la siguiente forma:

$$\mathbf{I}_r = I_{rRe} + j I_{rIm} = \frac{V_{th}}{X_{th}} [\text{sen}(\phi_r(s)) \cos(\phi_r(s)) - j \text{sen}^2(\phi_r(s))] \quad (6.92)$$

Multiplicando la corriente \mathbf{I}_r por su conjugada se obtiene:

$$|\mathbf{I}_r|^2 = I_{rRe}^2 + I_{rIm}^2 = \frac{V_{th}^2}{X_{th}^2} \text{sen}^2(\phi_r(s)) \quad (6.93)$$

De la parte imaginaria de la expresión 6.92 se deduce:

$$\text{sen}^2(\phi_r(s)) = -\frac{I_{rIm} \cdot X_{th}}{V_{th}} \quad (6.94)$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación 6.93 y completando los cuadrados correspondientes, se obtiene:

$$I_{rRe}^2 + \left(I_{rIm} + \frac{V_{th}}{2X_{th}} \right)^2 = \left(\frac{V_{th}}{2X_{th}} \right)^2 \quad (6.95)$$

La expresión 6.95 es la ecuación de un círculo centrado en el punto $\left(0, -\frac{V_{th}}{2X_{th}}\right)$ y cuyo radio vale $\frac{V_{th}}{2X_{th}}$, tal como se puede observar en la figura 6.19. En el origen de coordenadas de este diagrama, el deslizamiento de la máquina de inducción corresponde a la condición de vacío $s = 0$. Para este deslizamiento el modelo de carga resistiva que representa la potencia transferida al eje, tiende a infinito y la corriente que circula por el rotor es cero.

El punto diametralmente opuesto al de vacío en la figura 6.19 corresponde a la máxima corriente del rotor. La máxima corriente se obtiene cuando la máquina opera en un deslizamiento para el cual la parte resistiva de la impedancia es cero. En esta condición la impedancia es igual a la reactancia de Thèvenin X_{th} :

$$\mathbf{Z}(\mathbf{I}_{rmax}) = R_{th} + \frac{R_r}{s} + jX_{th} = jX_{th} \Rightarrow s_{\mathbf{I}_{rmax}} = -\frac{R_r}{R_{th}} \quad (6.96)$$

En el deslizamiento correspondiente al rotor bloqueado $s = 1$, la reactancia de Thèvenin es mayor que la suma de la resistencia de Thèvenin y la resistencia de la carga. En este deslizamiento, la corriente del rotor referida al estator es en magnitud muy parecida a la corriente máxima y su ángulo también es cercana, pero inferior a 90° .

Para los deslizamientos positivos, el fasor corriente en la figura 6.19 debe estar en el cuarto cuadrante del diagrama. En este cuadrante las potencias activas y reactivas consumidas por la máquina son positivas. En el tercer cuadrante, la potencia reactiva es negativa, pero la potencia activa es positiva. Todos los puntos de operación del lugar geométrico de la corriente del rotor

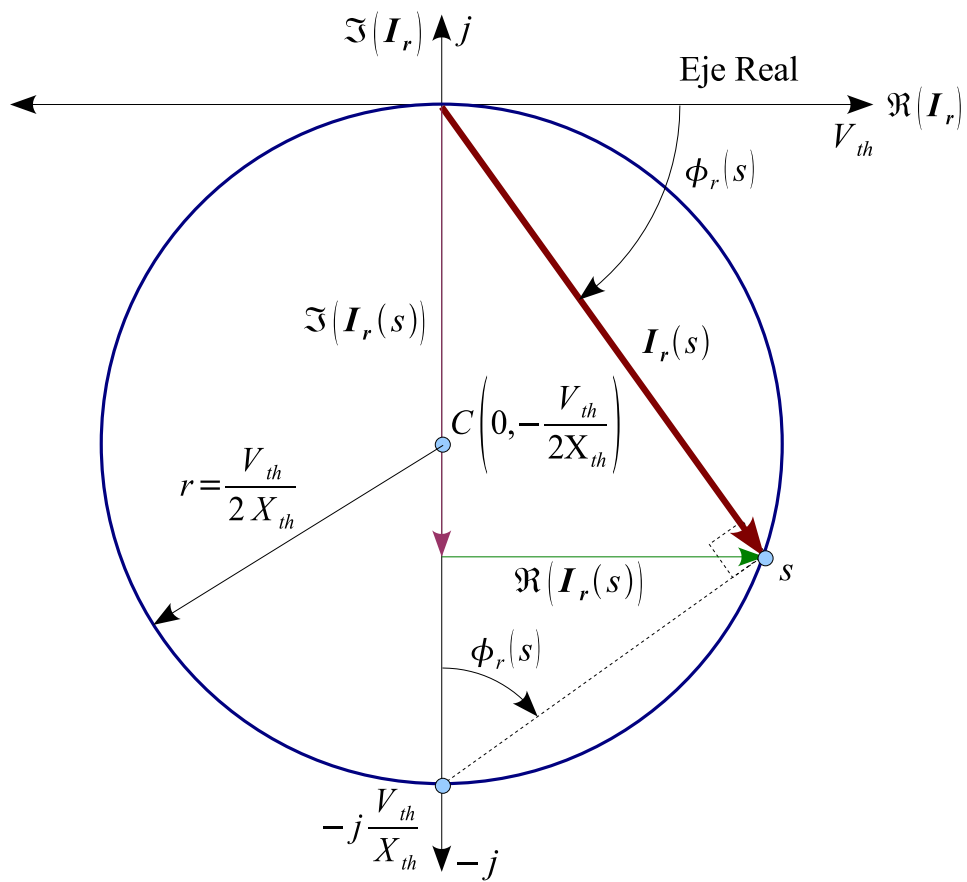


Figura 6.19 Lugar geométrico de la corriente del rotor

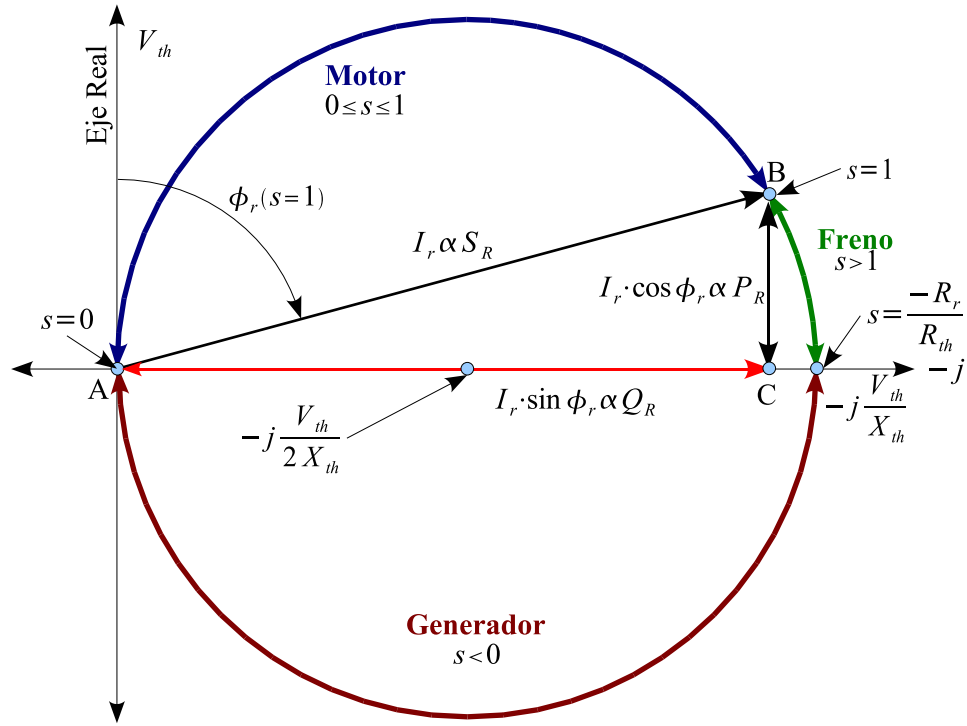


Figura 6.20 Representación de las potencias activas, reactivas y aparentes en el diagrama de círculo

consumen potencia reactiva inductiva. Esto se debe a la necesidad de alimentar desde el estator las fuerzas magnetomotrices de la máquina.

La potencia activa o reactiva en el diagrama de círculo se puede determinar trazando un segmento paralelo al eje real o imaginario respectivamente. Estos segmentos nacen en el corte con los ejes coordenados ortogonales y finalizan en el punto de operación deseado. Estos segmentos son proporcionales a cada una de las potencias activa o reactiva, y la constante de proporcionalidad que permite el cálculo cuantitativo es el valor de la tensión de Thèvenin. La potencia aparente, por otra parte, es proporcional al módulo de la corriente del rotor referido al estator. De acuerdo con los puntos *A*, *B* y *C* definidos en la figura 6.20, las potencias aparente, activa y reactiva, para un punto cualquiera del círculo se obtienen de la siguiente forma:

$$S_R = \sqrt{3}V_{th}I_r = \sqrt{3}V_{th} \cdot \overline{AB} \propto \overline{AB} \quad (6.97)$$

$$P_R = \sqrt{3}V_{th}I_r \cos \phi_r = \sqrt{3}V_{th} \cdot \overline{BC} \propto \overline{BC} \quad (6.98)$$

$$Q_R = \sqrt{3}V_{th}I_r \sin \phi_r = \sqrt{3}V_{th} \cdot \overline{AC} \propto \overline{AC} \quad (6.99)$$

Las expresiones 6.97, 6.98 y 6.99 permiten calcular la potencia activa P_R , reactiva Q_R o aparente S_R de cualquier punto de operación de la máquina de inducción, midiendo la longitud de los segmentos correspondiente \overline{AB} , \overline{BC} ó \overline{AC} .

El segmento \overline{BC} de la figura 6.20 es proporcional a la potencia que entra a la máquina para el deslizamiento de rotor bloqueado $s = 1$. En esta condición de operación, toda la potencia que

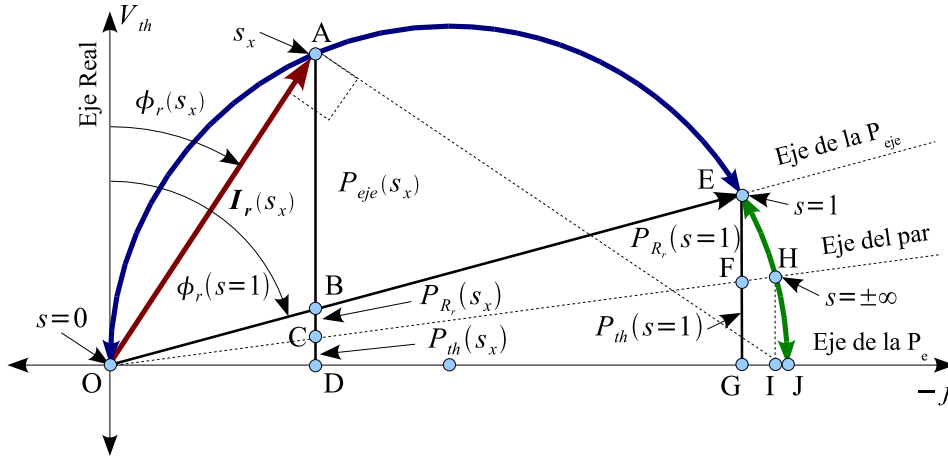


Figura 6.21 Balance de potencias en el diagrama de círculo

atraviesa el entrehierro se disipa en la resistencia del rotor R_r y en la resistencia de Thèvenin R_{th} . En cualquier otro punto de operación, el segmento es proporcional a la suma de las potencias disipadas en la resistencia de Thèvenin R_{th} , en la resistencia del rotor R_r y en la resistencia equivalente de la carga $\frac{1-s}{s}R_r$. De este análisis se pueden obtener las siguientes expresiones:

$$P_{R_r} = 3I_r^2 R_r \quad (6.100)$$

$$P_{th} = 3I_r^2 R_{th} \quad (6.101)$$

$$P_{eje} = 3I_r^2 R_r \frac{1-s}{s} \quad (6.102)$$

De las expresiones 6.100, 6.101 y 6.102 se pueden deducir las siguientes relaciones:

$$\frac{P_{R_r}}{P_{th}} = \frac{R_r}{R_{th}} \quad (6.103)$$

$$\frac{P_{eje}}{P_{th}} = \frac{R_r}{R_{th}} \frac{1-s}{s} \quad (6.104)$$

$$\frac{P_{eje}}{P_{R_r}} = \frac{1-s}{s} \quad (6.105)$$

Las relaciones anteriores indican que las potencias se encuentran entre sí en la misma proporción que las resistencias donde disipan. Estas pérdidas pueden ser representadas en el diagrama de círculo. Para este fin es necesario determinar el punto correspondiente al deslizamiento infinito $s = \pm\infty$. En este punto, todas la potencia se disipa en la resistencia de Thèvenin. Con el rotor bloqueado $s = 1$, la potencia se reparte entre la resistencia del rotor y la resistencia de Thèvenin en la proporción de estas resistencias, según se demuestra en la ecuación 6.103.

De la semejanza de los triángulos $\triangle OBC$ y $\triangle OEG$ en la figura 6.21 se establecen las siguientes proporciones:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OG}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OE}} \cdot \frac{\text{sen}(\phi_r(s_x))}{\text{sen}(\phi_r(s=1))} \quad (6.106)$$

$$\overline{OA} = \overline{OJ} \cdot \text{sen}(\phi_r(s_x)) \quad (6.107)$$

$$\overline{OE} = \overline{OJ} \cdot \text{sen}(\phi_r(s = 1)) \quad (6.108)$$

Sustituyendo las relaciones 6.107 y 6.108 en la proporción 6.106, reemplazando cada segmento que representa una corriente en el diagrama por su correspondiente valor, y multiplicando el numerador y el denominador por la resistencia de Thèvenin más la resistencia del rotor $R_{th} + R_r$, se obtiene el siguiente resultado:

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{EG}} = \left(\frac{\overline{OA}}{\overline{OE}} \right)^2 = \frac{I_r^2(s_x) \cdot (R_{th} + R_r)}{I_r^2(s = 1) \cdot (R_{th} + R_r)} = \frac{P_{th+R_r}(s_x)}{P_{th+R_r}(s = 1)} \quad (6.109)$$

Mediante la expresión 6.109 se demuestra que la proporción entre los segmentos \overline{BD} y \overline{EG} del diagrama de círculo es igual a la relación entre las potencias de pérdidas en los conductores de la máquina en las dos condiciones de operación indicadas. En la condición de rotor bloqueado, toda la potencia se consume en pérdidas en la resistencia de Thèvenin y en la resistencia del rotor. En cualquier otro deslizamiento, el segmento \overline{BD} es proporcional a estas mismas pérdidas. De igual forma se demuestra que el segmento \overline{CD} es proporcional a las pérdidas en la resistencia de Thèvenin. La proporcionalidad de los diferentes segmentos del diagrama de círculo para un deslizamiento determinado es:

\overline{AD}	a la potencia de entrada P_e
\overline{CD}	a las pérdidas en R_{th}
\overline{BC}	a las pérdidas en R_r
\overline{BD}	a las pérdidas totales $P_{p\text{tot.}}$
\overline{AB}	a la potencia en el eje P_{eje}
\overline{AC}	a la potencia $P_{\frac{R_r}{s}}$ y al par eléctrico T_e

La recta que pasa por el origen de coordenadas y por el punto $s = 1$ se denomina *eje de la potencia mecánica*, debido a que cualquier segmento paralelo al eje real, con un extremo en un punto de operación localizado sobre el círculo y su otro extremo sobre este eje, es proporcional a la potencia en el eje de la máquina. De igual forma, la recta que pasa por el origen de coordenadas y por el punto correspondiente a deslizamiento $s = \pm\infty$ se denomina eje del par eléctrico.

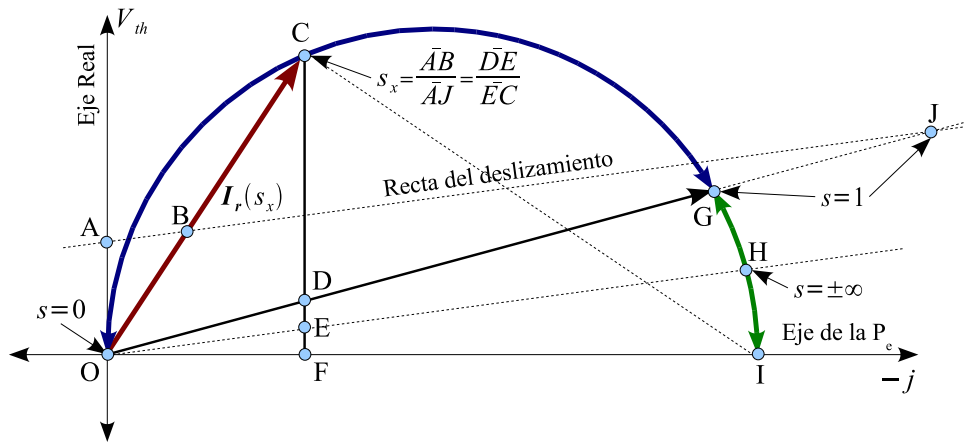
Para determinar el deslizamiento de un punto del diagrama de círculo es posible utilizar diferentes metodologías. La forma más simple puede ser despejar el deslizamiento de la expresión 6.105:

$$s_x = \frac{P_{R_r}(s_x)}{P_{eje}(s_x) + P_{R_r}(s_x)} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB} + \overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \quad (6.110)$$

Este método tiene dos inconvenientes, por una parte la dificultad práctica para medir deslizamientos cercanos a cero³⁷, y por otra el procedimiento es poco gráfico debido a que requiere operaciones aritméticas para determinar el deslizamiento s_x en cada punto de operación³⁸. Un método práctico para resolver estos problemas consiste en trazar la *recta del deslizamiento*. Este

³⁷En este caso el segmento es muy pequeño, y la precisión de la medida es reducida.

³⁸Esto reduce las ventajas del diagrama de círculo como calculador geométrico.



método se fundamenta en trazar en el diagrama de círculo, una recta paralela al eje del par o eje del deslizamiento infinito $s = \pm\infty$. Esta recta se traza a una distancia arbitraria de este eje, pero con la condición de que el eje de la potencia mecánica $s = 1$ la corte en un punto dentro del área de trabajo. Esta construcción se muestra en la figura 6.22. La proporción entre el segmento \overline{AB} y \overline{AJ} determina el deslizamiento del punto de operación considerado. Si al segmento se le asigna un valor unitario, automáticamente el segmento indica el valor del deslizamiento. Para demostrar esta aseveración se utiliza la semejanza existente entre los triángulos $\triangle OCE$ y $\triangle OAB$ de la figura 6.22. Estos triángulos son semejantes, y por este motivo:

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{EO}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} \quad (6.111)$$

Los triángulos $\triangle ODE$ y $\triangle OAJ$ también son semejantes, y se puede establecer la siguiente proporción:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{EO}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{JA}} \quad (6.112)$$

Dividiendo la relación de segmentos 6.112 por la 6.111 se obtiene el siguiente resultado:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{JA}} = \frac{P_{R_r}(s_x)}{P_{eje}(s_x) + P_{R_r}(s_x)} = s_x \quad (6.113)$$

La recta del deslizamiento se normaliza con respecto al segmento y posteriormente se calibra. Si se desea conocer el deslizamiento de un punto cualquiera del diagrama, es suficiente con trazar una recta que una el origen de coordenadas con el punto de interés sobre el círculo. La intersección de esta recta auxiliar sobre la recta del deslizamiento, previamente calibrada, indica directamente el valor del deslizamiento s_x del punto de operación.

Los pares y las potencias mecánicas, se obtienen a partir del diagrama, trazando rectas paralelas al eje real que comienzan en el punto de operación y culminan en los ejes del par eléctrico $s = \pm\infty$ o de la potencia mecánica $s = 1$. Para determinar el punto del diagrama de círculo donde se obtiene el par o la potencia mecánica máxima, es necesario encontrar las rectas tangentes al círculo y paralelas a los ejes de par o potencia respectivamente. En la figura 6.23 se presenta el

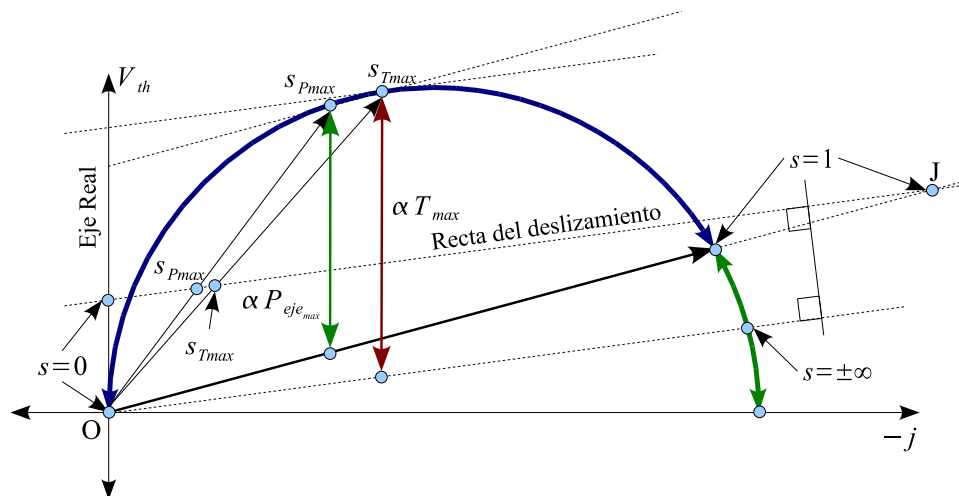


Figura 6.23 Determinación de los puntos de par máximo y potencia máxima con el diagrama de círculo

procedimiento de cálculo gráfico para la determinación de estos puntos.

El diagrama de círculo contiene toda la información referente a los modos de operación como motor, generador y freno. La idea fundamental que permite utilizar la información del diagrama de círculo en todo el rango de deslizamiento, consiste en que además de medir la longitud de los segmentos, se debe interpretar su signo. Si un segmento representa potencia eléctrica de entrada y está por debajo del eje imaginario, esta potencia es negativa y la máquina entrega potencia eléctrica a la red. Si al determinar un deslizamiento, el punto aparece a la izquierda del origen, es una indicación de que la máquina opera con deslizamiento negativo. En la figura 6.20 se han indicado las zonas de operación en el diagrama de círculo.

El diagrama de círculo obtenido representa solamente el lugar geométrico de las corrientes del rotor. Esta corriente suministra una gran cantidad de información sobre la operación de la máquina pero no es accesible para ser medida directamente. La máquina se alimenta por el estator, y esta corriente es la que el usuario puede medir. Para obtener el lugar geométrico de la corriente del estator $I_e(s)$ es necesario sumar a la corriente del rotor $I_r(s)$, la corriente de magnetización $I_m(s)$. Este lugar geométrico es un círculo aproximado, debido a que aun cuando la corriente de magnetización depende del deslizamiento, es prácticamente constante para un rango muy amplio de deslizamientos. De esta forma se puede utilizar para la construcción del diagrama de círculo completo un circuito equivalente en el cual la corriente del rotor se modela mediante el equivalente de Thèvenin que se ha venido utilizando, pero que en paralelo con la tensión de Thèvenin se añade la rama de magnetización. En la figura 6.24 se muestra este circuito y el diagrama de círculo que se obtiene cuando se suman la corriente de magnetización y la corriente del rotor. En esta figura el segmento \overline{FG} representa las pérdidas en el hierro de la máquina. Es necesario recordar que los equivalentes de Thèvenin no son conservativos en potencia porque la potencia no es una característica lineal del circuito. Por esta razón la resistencia de Thèvenin no incluye la información sobre las pérdidas en el hierro. Este circuito tiene un comportamiento similar al del modelo clásico en lo que respecta a las potencias.

Cuando se coloca la rama de magnetización delante de la resistencia y reactancia de dispersión

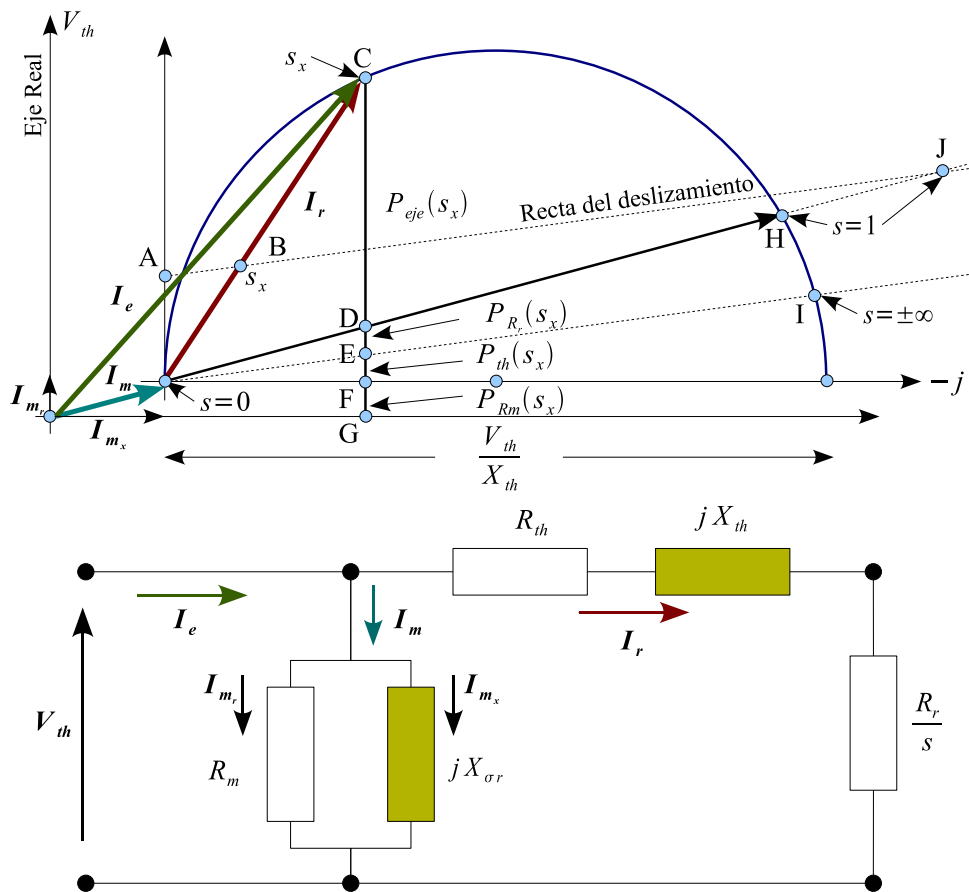


Figura 6.24 Diagrama de círculo de la corriente del estator y su modelo equivalente

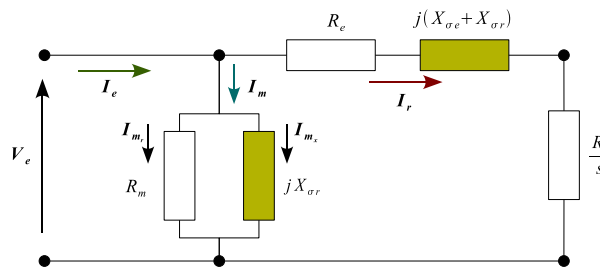


Figura 6.25 Circuito de Thèvenin aproximado de la máquina de inducción

del estator se obtiene un circuito equivalente aproximado, semejante al circuito de Thèvenin presentado en la figura 6.24. Este circuito se puede determinar de una forma más simple y los resultados obtenidos con él no difieren significativamente del modelo clásico de la máquina. El circuito aproximado, simplifica el cálculo de la tensión e impedancia de Thèvenin. En su lugar se utiliza directamente la tensión de alimentación, y la resistencia y reactancia de dispersión de la máquina. En la figura 6.25 se ha representado el circuito de Thèvenin aproximado de la máquina.

En la figura 6.26 se presenta una comparación entre los lugares geométricos de la corriente del estator utilizando el circuito de Thèvenin, el circuito de Thèvenin aproximado y el modelo clásico de la máquina de inducción. Es necesario recordar que en el modelo clásico la corriente del estator no es un círculo exacto, pero se aproxima muy estrechamente para casi todos los deslizamientos. En esta figura se observa que para deslizamientos cercanos al punto nominal, la correspondencia entre los dos circuitos es prácticamente perfecta. Sin embargo, cuando los deslizamientos son grandes, los errores se acrecientan. Esto se debe a que a valores del deslizamiento grandes, la corriente resulta ser varias veces su valor nominal y produce caídas importantes en las reactancias de dispersión. Por esta razón, la tensión en la rama magnetizante es menor y la corriente de magnetización también es más pequeña. El circuito equivalente reducido por Thèvenin considera que la tensión V_{th} alimenta a la rama de magnetización para todos los deslizamientos, y por esta razón este modelo determina corrientes ligeramente mayores que el circuito clásico. La diferencia entre estos diagramas no excede en la práctica la mitad de la corriente de vacío de la máquina, debido a que la reactancias de dispersión del estator y rotor son aproximadamente iguales. Con estas corrientes circulando por las bobinas del estator y rotor de la máquina, la tensión en la rama de magnetización se deprime aproximadamente a la mitad, y la corriente de magnetización por esta razón se reduce en la misma proporción.

La construcción del diagrama de círculo completo de la máquina de inducción se puede realizar a partir del conocimiento de los parámetros del circuito equivalente, o mediante ensayos sobre la máquina en diferentes condiciones de operación. Geométrica y analíticamente, un círculo está definido por la posición de su centro y la longitud de su radio. También se puede trazar un círculo a partir de tres puntos localizados sobre el círculo, en este caso es suficiente con trazar las bisectrices entre dos cualquiera de estos puntos, y la intersección de estas bisectrices es el centro del círculo. El radio se obtiene midiendo la distancia desde el centro del círculo a uno cualquiera de los tres puntos iniciales. Otra posibilidad para trazar un círculo, consiste en conocer dos puntos del círculo y una recta que pase a través de un diámetro del círculo.

Para trazar el diagrama de círculo de la máquina de inducción a partir del circuito equivalente, se puede utilizar el siguiente procedimiento:

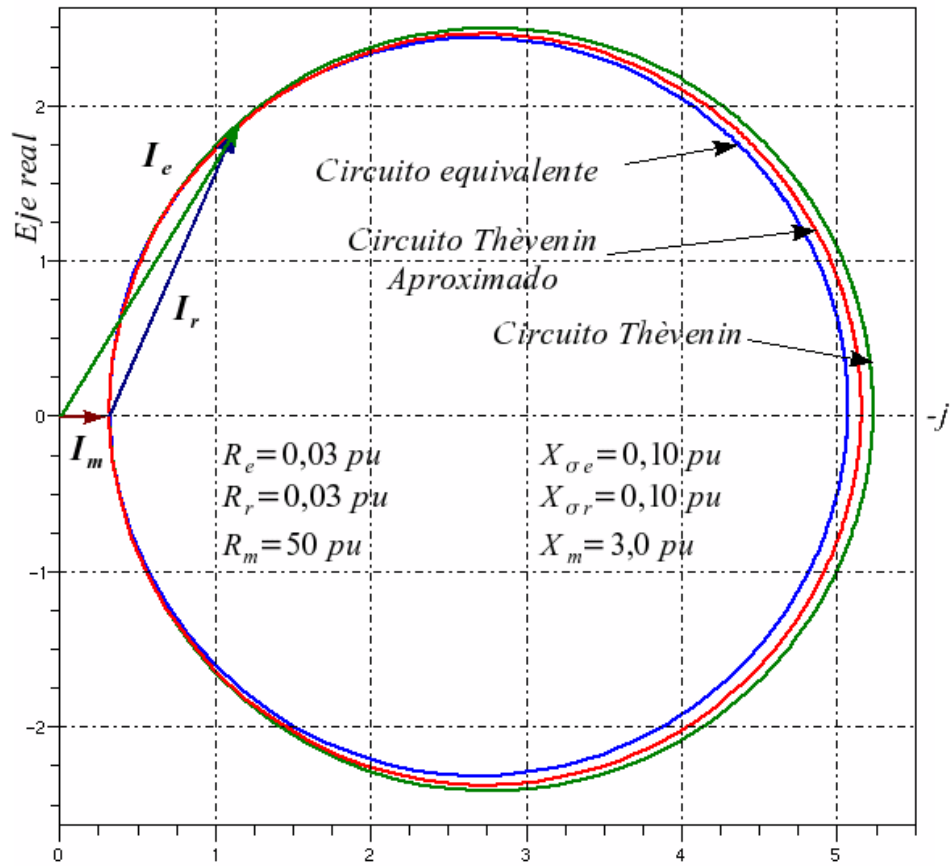


Figura 6.26 Comparación entre los diagramas de círculo utilizando el circuito Thèvenin, el circuito de Thèvenin aproximado y el circuito equivalente completo

1. Se traza un círculo de diámetro $\frac{V_{th}}{X_{th}}$. Se escoge una escala de corriente que permita que el círculo pueda ser representado en las dimensiones del papel disponible.
2. Se calcula el factor de potencia de la corriente del rotor para la condición de rotor bloqueado $\cos(\phi_r(s=1))$. Se traza con este ángulo el eje de la potencia mecánica. Es conveniente medir este ángulo mediante relaciones triangulares y no con transportadores que producen errores de medida importantes.
3. Dividiendo el segmento comprendido entre el punto del diagrama $s=1$, paralelo al eje real y que finaliza en el eje imaginario, en la proporción existente entre la resistencia de Thèvenin R_{th} y la resistencia del rotor R_r , se traza el eje del par eléctrico uniéndolo este punto con el origen de coordenadas.
4. Se traza la recta del deslizamiento paralela al eje del par eléctrico, de tal forma que intercepte al eje de la potencia mecánica dentro de la hoja de papel. Posteriormente se calibra esta recta dividiéndola en tantas partes iguales como sea necesario.
5. Se suma al diagrama anterior la corriente de magnetización I_m , determinando de esta forma el lugar geométrico de las corrientes del estator I_e .
6. Una vez realizados todos los pasos anteriores, se pueden calcular el par eléctrico, la potencia de entrada, el rendimiento y la corriente para cada uno de los posibles puntos de operación de la máquina. La escala de potencia se obtiene multiplicando la escala de corriente por $\sqrt{3}V_{th}$. La escala de par se determina dividiendo la escala de potencia, entre la velocidad sincrónica de la máquina.

El otro método para trazar el diagrama de círculo, consiste en representar en el papel tres puntos conocidos del diagrama. Estos tres puntos pueden ser cualquiera de los infinitos puntos posibles. Es muy frecuente disponer del punto correspondiente a la condición vacío³⁹ $s=0$, el punto de operación nominal⁴⁰ $s=s_n$ y el punto de arranque o de rotor bloqueado⁴¹ $s=1$. En la práctica, si uno de los puntos corresponde a la condición de operación en vacío, con sólo otro punto se puede trazar el círculo. Esto se debe al hecho de que el diámetro del círculo correspondiente al deslizamiento de la condición de vacío es paralelo al eje imaginario. Como se conoce este punto, con otro punto cualquiera se puede determinar el centro del círculo. En la figura 6.27 se presenta una construcción geométrica con estas características.

6.14. Sumario

1. La máquina de inducción es *robusta* y constructivamente *simple*, requiere un *mantenimiento mínimo*, puede operar en ambientes peligrosos y su *confiabilidad* es elevada. Estas razones la han impuesto como el motor industrial más utilizado en la actualidad.

³⁹Obtenido convencionalmente del ensayo de vacío.

⁴⁰Es un dato de placa y puede ser determinado también mediante ensayos de laboratorio.

⁴¹Determinado mediante la prueba de rotor bloqueado o registrando las corrientes instantáneas durante el arranque de la máquina.

5. La particularización a *régimen permanente* de las ecuaciones diferenciales expresadas en vectores espaciales, determina el modelo circuital denominado circuito equivalente de la máquina de inducción. El circuito equivalente T , puede analizar el comportamiento estático del convertidor si se conocen los seis parámetros que lo constituyen ($R_e, R_r, R_m, X_{\sigma e}, X_{\sigma r}, X_m$), la tensión aplicada V_e y el deslizamiento de operación s_{op} .
6. Para determinar el deslizamiento de operación s_{op} es necesario resolver el equilibrio dinámico con el sistema mecánico. Este punto de equilibrio define el punto de operación. El *punto de operación* que alcanza los límites térmicos de la máquina se conoce como el punto nominal. El *límite térmico* es aquella temperatura de operación en régimen permanente que mantendría las propiedades físico-químicas⁴² de los materiales de la máquina dentro de parámetros de degradación adecuados para su buen funcionamiento, durante el tiempo de vida media definido por el fabricante.
7. El *sistema adimensional de unidades* es una herramienta útil en el análisis de las máquinas eléctricas debido a que los parámetros del modelo en este sistema tienen pequeñas variaciones entre máquinas aun cuando estas sean de muy diferentes valores nominales. Debido al rendimiento de la máquina de inducción es usual utilizar la potencia nominal en el eje del motor como potencia base del sistema adimensional de unidades.
8. Los *ensayos de vacío y rotor bloqueado* permiten realizar un cálculo aproximado de los *parámetros del modelo* de la máquina de inducción, haciendo simplificaciones semejantes a las que se utilizan en el tratamiento de los transformadores. Aun cuando estas consideraciones son menos aproximadas en la máquina de inducción que en los transformadores por el entrehierro que produce mayor corriente de magnetización y mayores dispersiones, desde el punto de vista práctico ofrecen un método válido desde el punto de vista de la ingeniería para un gran espectro de aplicaciones. Sin embargo, cuando se requiere mayor precisión en los resultados y análisis es posible utilizar el método de la estimación paramétrica para ajustar los parámetros. Los métodos de estimación paramétrica se fundamentan en la minimización de una función de costo Ψ establecida con los errores entre valores medidos y valores calculados mediante el modelo.
9. La máquina de inducción tiene su principal ámbito de aplicación como *motor*, sin embargo es posible utilizarla como *generador* o *freno*. La operación como generador se establece cuando la velocidad supera la velocidad sincrónica y el freno requiere que la velocidad mecánica se oponga a la velocidad del campo magnético.
10. Cuando no se conocen los parámetros de la máquina es de utilidad emplear las *características normalizadas* de la máquina de inducción. El par y la corriente del rotor se normalizan dividiendo estas funciones por el par y la corriente respectiva a la condición de deslizamiento que produce el par máximo. Se obtienen diferentes características en

⁴²Rigidez dieléctrica de los materiales aislantes, corrosión, conductividad, desgaste mecánico de piezas, etc.

función del factor de calidad Q de las bobinas. Resulta de utilidad considerar los casos cuando el factor de calidad tiende a infinito, debido a que esta suposición determina una buena aproximación para las máquinas convencionales.

11. El circuito equivalente de la máquina de inducción es un método práctico para el análisis cuantitativo de su comportamiento. El *diagrama de círculo* constituye una herramienta de indiscutible valor cualitativo que permite realizar interpretaciones causa-efecto con relativa sencillez. La posibilidad de presentar en un solo diagrama todo el comportamiento de la máquina permite una mayor comprensión de sus capacidades y limitaciones.

6.15. Ejemplos resueltos

Ejemplo 1: Cálculo de parámetros utilizando impedancias medidas

En el listado 4 se presentaron tres impedancia de entrada de una máquina para tres diferentes deslizamientos:

$s_{oper.}$	$Z_{entrada}(s_{oper})$
0	$0,199350 + j3,08920 \text{ pu}$
0,03	$0,833740 + j0,49141 \text{ pu}$
1	$0,047603 + j0,24296 \text{ pu}$

La resistencia del estator se midió directamente y el valor obtenido es $0,02 \text{ pu}$. Utilizando el *método aproximado* determine el valor de los parámetros $X_{\sigma e}$, $X_{\sigma r}$, X_m , R_m y R_r .

Solución:

El punto de vacío $s = 0$, determina de acuerdo con las aproximaciones del método aproximado la resistencia y reactancia de magnetización:

$$Y_{ent}(s = 0) = \frac{1}{Z_{ent}} \approx \frac{1}{R_m} + \frac{1}{jX_m} = 0,0208 - j0,3224$$

$$R_m \approx \frac{1}{0,0208} = 48 \text{ pu} ; X_m \approx \frac{1}{0,3224} = 3,1 \text{ pu}$$

Para el deslizamiento de rotor bloqueado $s = 1$, es posible determinar las reactancias y resistencias serie:

$$Z_{ent}(s = 1) \approx R_e + R_r + j(X_{\sigma e} + X_{\sigma r}) = 0,047603 + j0,24296 \text{ pu}$$

$$R_r \approx 0,047603 - R_e = 0,0276 \text{ pu}$$

$$X_{\sigma e} + X_{\sigma r} \approx 0,24296 \text{ pu} ; X_{\sigma e} \approx X_{\sigma r} = 0,1214 \text{ pu}$$

Una alternativa para determinar la resistencia del rotor y las reactancias de dispersión consiste en utilizar el deslizamiento $s = 0,03$. En este caso es conveniente determinar la corriente del rotor \mathbf{I}_r , restando a la corriente del estator \mathbf{I}_e , la corriente de magnetización \mathbf{I}_m :

$$\mathbf{I}_r = \mathbf{I}_e - \mathbf{I}_m \approx \frac{1}{\mathbf{Z}_{ent}(s = 0,03)} - \frac{1}{\mathbf{Z}_{ent}(s = 0)} = 0,8694 - j0,2023 \text{ pu}$$

Suponiendo que $V_{th} \approx V_e$, $R_{th} \approx R_e$ y $X_{th} \approx X_{\sigma e} + X_{\sigma r}$:

$$\frac{R_r}{s} + R_e + j(X_{\sigma e} + X_{\sigma r}) \approx \frac{1}{\mathbf{I}_r} = 1,0912 + j0,2539 \text{ pu}$$

$$R_r \approx 0,0321 \text{ pu} ; X_{\sigma e} \approx X_{\sigma r} \approx 0,1270 \text{ pu}$$

Las dos soluciones obtenidas son similares y las diferencias se deben a las aproximaciones utilizadas en cada uno de los cálculos. Se podrían utilizar los valores calculados en una primera iteración para mejorar la evaluación. Un ejemplo sería utilizar en los nuevos cálculos la tensión de Thèvenin con los valores obtenidos en el paso previo. También es posible considerar el efecto de la reactancia de dispersión del estator en la medida de vacío. La estimación paramétrica es una alternativa más práctica.

Ejemplo 2: Análisis de la máquina de inducción conocidos solamente los datos de placa

Una máquina de inducción de dos pares de polos, conexión Y , posee los siguientes datos de placa:

$P_{n\text{ eje}}$	V_n	$\cos\phi_n$	η_n	n_n	f
5,0 kW	416 V	0,8	0,85	1746 rpm	60 Hz

Todos los parámetros del circuito equivalente se encuentran dentro de los límites teóricos. Con esta información determine:

1. Parámetros del modelo de la máquina.
2. Par máximo y el deslizamiento correspondiente al par máximo.
3. Factor de potencia máximo y deslizamiento correspondiente al factor de potencia máximo.
4. Los nuevos valores de placa si la máquina se alimenta con una tensión de 380 V a 50 Hz.

Solución:

1. Parámetros del modelo de la máquina.

Los datos de placa suministran información sobre el punto de operación nominal, para poder obtener los seis parámetros que determinan el comportamiento de la máquina de inducción es necesario utilizar hipótesis adicionales. En este caso se puede asumir que la

corriente de vacío es un tercio de la corriente nominal y que las pérdidas en el hierro son despreciables:

$$I_n = \frac{S_n}{\sqrt{3}V_n} = \frac{P_{neje}}{\sqrt{3}V_n \cdot \eta_n \cdot \cos\phi_n} = 10,2 A \Rightarrow I_m = 3,4 A$$

Las bases del sistema adimensional de unidades son:

$$S_B = P_{neje} = 5 kW ; V_B = V_n = 416 V ;$$

$$I_B = \frac{S_B}{\sqrt{3}V_B} = 6,9393 A ; Z_B = \frac{V_B^2}{S_B} = 34,6112 \Omega$$

La reactancia de magnetización en por unidad es:

$$X_m = \frac{V_{th}}{I_m} \approx \frac{1}{0,48995} = 2,04 pu$$

Como se desprecian las pérdidas en el hierro, la resistencia de magnetización es infinita, $R_m \rightarrow \infty$. La corriente del rotor en el punto de operación nominal puede calcularse como:

$$\mathbf{I}_r = \mathbf{I}_e - \mathbf{I}_m = 1,4699 \angle -36,87^\circ - 0,4899 \angle -90^\circ = 1,2396 \angle -18,44^\circ$$

$$\frac{R_r}{s} + R_e + j(X_{\sigma e} + X_{\sigma r}) \approx \frac{1}{\mathbf{I}_r} = 0,7653 + j0,2552$$

$$X_{\sigma e} \approx X_{\sigma r} \approx 0,1276 pu$$

$$\frac{R_r}{s_n} + R_e \approx \frac{R_r}{0,03} + R_r \approx 0,7653 pu \Rightarrow R_r \approx 0,0223 pu$$

Una estimación más precisa se puede obtener recordando que en el punto nominal la característica par-deslizamiento es lineal y depende inversamente de la resistencia del rotor:

$$T_n = \frac{P_{neje}}{\omega_n} = \frac{V_{th}^2}{\omega_e R_r} s_n \Rightarrow$$

$$R_r = \frac{V_{th}^2 s_n \omega_n}{\omega_e P_{neje}} = \frac{\left(\frac{2,04}{2,04+0,1276}\right)^2 \times 0,03 \times 0,97}{1 \times 1} = 0,0257 pu$$

Es posible asumir que la resistencia del estator es similar a la del rotor $R_e \approx R_r \approx 0,0257 pu$.

2. Par máximo y el deslizamiento correspondiente al par máximo⁴³.

$$T_{max} = \frac{1}{2\omega_e} \frac{V_{th}^2}{X_{th}} = \frac{(0,9411)^2}{2 \times 1 \times 0,2552} = 1,7354 pu$$

⁴³Observe que en la ecuación del par máximo expresada en por unidad, desaparece el coeficiente 3 al dividir por la base correspondiente.

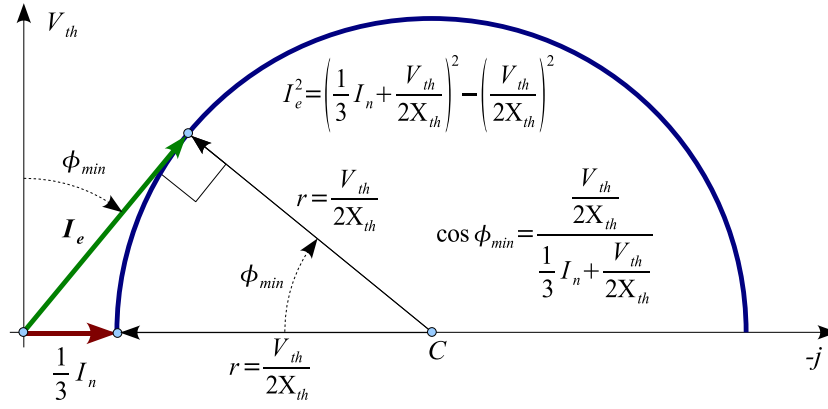


Figura 6.28 Diagrama de círculo en el punto de operación con factor de potencia máximo

$$s_{T_{max}} = \frac{R_r}{\sqrt{R_{th}^2 + X_{th}^2}} = \frac{0,0257}{\sqrt{0,0257^2 + 0,2552^2}} = 0,10$$

3. Factor de potencia máximo y deslizamiento correspondiente al factor de potencia máximo. Un planteamiento que permite resolver esta pregunta consiste en analizar la geometría del diagrama de círculo en el punto correspondiente al factor de potencia máximo. En este punto, la corriente del estator I_e debe ser tangente al círculo tal como se muestra en la figura. De acuerdo con los datos del problema planteado, la corriente del estator es:

$$I_e^2 + \left(\frac{V_{th}}{2X_{th}}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}I_n + \frac{V_{th}}{2X_{th}}\right)^2 \Rightarrow I_e = \sqrt{\left(\frac{1}{3}I_n + \frac{V_{th}}{2X_{th}}\right)^2 - \left(\frac{V_{th}}{2X_{th}}\right)^2}$$

$$I_e(\phi_{min}) = \sqrt{\left(\frac{1,4699}{3} + \frac{0,9411}{2 \times 0,2552}\right)^2 - \left(\frac{0,9411}{2 \times 0,2552}\right)^2} = 0,7 \text{ pu}$$

$$\tan \phi_{min} = \frac{2I_e \cdot X_{th}}{V_{th}} = \frac{2 \times 0,7 \times 0,2552}{0,9411} = 0,3798 \Rightarrow \cos \phi_{min} = 0,9349$$

Conocida la corriente correspondiente al factor de potencia máximo, el deslizamiento se calcula resolviendo la ecuación siguiente:

$$\mathbf{I}_r = \mathbf{I}_e - \mathbf{I}_m = I_e \angle -\phi_{min} - \frac{1}{3}I_n \angle -90^\circ = I_e \cos \phi_{min} + j\left(\frac{1}{3}I_n - I_e \sin \phi_{min}\right)$$

$$I_r = \sqrt{(I_e \cos \phi_{min})^2 + \left(\frac{1}{3}I_n - I_e \sin \phi_{min}\right)^2} = 0,6976 = \frac{V_{th}}{\sqrt{(R_{th} + \frac{R_r}{s})^2 + X_{th}^2}} \Rightarrow$$

$$s(\phi_{min}) = \frac{R_r}{\sqrt{\frac{V_{th}^2}{I_r^2} - X_{th}^2} - R_{th}} = \frac{0,0257}{\sqrt{\frac{0,9411^2}{0,6976^2} - 0,2552^2} - 0,0257^2} = 0,0194$$

4. Los nuevos valores de placa si la máquina se alimenta con una tensión de 380 V a 50 Hz: En las nuevas condiciones de operación, la corriente nominal se debe mantener aproximadamente constante, para producir pérdidas semejantes al punto nominal especificado

s_n	$ \mathbf{Z}_{ent}(s_n) $
0,040	0,6564
0,041	0,6440
0,042	0,6322
0,043	0,6209

Tabla 6.4 Determinación del deslizamiento nominal para la nueva tensión y frecuencia

en la placa. Las reactancias de la máquina cambian con la frecuencia, de tal forma que se obtiene:

$$I_e = \frac{V_e}{|\mathbf{Z}_{ent}(s_n)|} = I_n = 1,4699 \Rightarrow |\mathbf{Z}_{ent}(s_n)| = \frac{\frac{380}{416}}{1,4699} = 0,6215 \text{ pu}$$

$$\mathbf{Z}_{ent}(s_n) = \mathbf{Z}_e + \frac{\mathbf{Z}_m \cdot \mathbf{Z}_r(s)}{\mathbf{Z}_m + \mathbf{Z}_r(s)}$$

$$\mathbf{Z}_e = R_e + j\omega_e L_{\sigma e} = 0,0257 + j \frac{2\pi \times 50}{2\pi \times 60} 0,1276 = 0,0257 + j0,1063 \text{ pu}$$

$$\mathbf{Z}_m = j\omega_e L_m = j \frac{2\pi \times 50}{2\pi \times 60} 2,04 = j1,7 \text{ pu}$$

$$\mathbf{Z}_r(s_n) = \frac{R_r}{s_n} + j\omega_e L_{\sigma r} = \frac{0,0257}{s_n} + j0,1063 \text{ pu}$$

En la tabla 6.4 se presentan los valores del módulo de la impedancia de entrada en función del deslizamiento. El valor más cercano a 0,6215 pu es el correspondiente al deslizamiento 0,043, el cual sería el deslizamiento nominal en las nuevas condiciones de operación.

Una vez conocido el deslizamiento nominal, el resto de los valores nominales quedan determinados de la forma siguiente:

$$n_n = (1 - s_n)n_s = (1 - 0,043) \times 1800 = 1722,6 \text{ rpm}$$

$$\mathbf{Z}_{ent}(s_n) = 0,5029 + j0,3642 = 0,6209 \angle 35,92^\circ \Rightarrow \cos \phi_n = 0,8099$$

$$P_e(s_n) = \frac{380}{416} \times 1,4699 \times 0,8099 = 1,0874 \text{ pu}$$

$$I_r(s_n) = \frac{V_{th}}{\sqrt{\left(R_{th} + \frac{R_r}{s_n}\right)^2 + X_{th}^2}} = \frac{\frac{380}{416} \times 0,9411}{\sqrt{\left(0,0257 + \frac{0,0257}{0,043}\right)^2 + (2 \times 0,1063)^2}} = 1,305 \text{ pu}$$

$$P_{eje}(s_n) = I_r^2(s_n) \cdot R_r \cdot \frac{1 - s_n}{s_n} = 1,305^2 \times 0,0257 \times \frac{1 - 0,043}{0,043} = 0,9744 \text{ pu}$$

$$\eta(s_n) = \frac{P_{eje}(s_n)}{P_e(s_n)} = \frac{0,9744}{1,0874} = 0,896$$

En este cálculo no se han considerado la pérdidas mecánicas, ni las pérdidas en el hierro y por esta razón el rendimiento aumenta con respecto a los valores nominales iniciales.

Ejemplo 3: Análisis de la máquina de inducción a partir de dos puntos de operación

Un motor de inducción conexión estrella de 5 kW , 240 V , 60 Hz , opera en el punto nominal a una velocidad de 1656 rpm , con un factor de potencia de $0,803$ y un rendimiento del $85,9\%$. En el ensayo de vacío, consume $4,542\text{ A}$ y 110 W . La resistencia del estator se ha medido directamente y su valor es $0,3456\ \Omega$. Las pérdidas mecánicas pueden ser despreciadas. Determine:

1. Los parámetros del circuito equivalente de esta máquina en por unidad de la base de potencia de salida
2. Los valores medidos por los instrumentos durante un ensayo a rotor bloqueado.
3. El deslizamiento a par máximo, el par máximo, el par y la corriente de arranque.
4. El deslizamiento nominal como generador y el rendimiento en esta condición de operación.

Solución:

1. Determinación de los parámetros de la máquina:

Del ensayo de vacío es posible determinar aproximadamente la resistencia y reactancia de magnetización R_m y X_m :

$$R_m = \frac{V^2}{P_o} = 523,64\ \Omega ; \quad X_m = \frac{V^2}{S_o} = 30,56\ \Omega$$

La impedancia base es $Z_B = \frac{V_B^2}{S_B} = 11,52\ \Omega$ y la corriente base es $I_B = \frac{P_B}{\sqrt{3}V_B} = 12,028\text{ A}$. La resistencia y reactancia de magnetización en por unidad de la potencia en el eje y de la tensión en bornes es:

$$R_m = 0,06783\text{ pu} ; \quad X_m = 2,6527\text{ pu}$$

La resistencia del rotor se determina del par nominal:

$$T_n = \frac{P_B}{2\pi \frac{1656}{60}} = 28,832\text{ Nm} ; \quad T_B = \frac{P_B}{2\pi \frac{1800}{60}} = 26,526\text{ Nm} ; \quad T_n = 1,0869\text{ pu}$$

En el punto nominal ($s_n = \frac{1800-1656}{1800} = 0,08$) la relación entre el par y el deslizamiento es aproximadamente lineal y de ella se se puede determinar la resistencia del rotor:

$$T_n \approx \frac{V_{th}^2}{\omega_s R_r} s_n \Rightarrow R_r \approx \frac{V_{th}^2}{\omega_s T_n} s_n = \frac{(0,96)^2}{1,0869} 0,08 = 0,06783\text{ pu}$$

La resistencia del estator en por unidad de las bases seleccionadas es: $R_e = 0,03\text{ pu}$. La determinación de la reactancia de dispersión puede determinarse con el equivalente de Thèvenin de la máquina, para esto se calcula la corriente por el rotor $I_r = I_e - I_m$. La corriente del estator en el punto nominal es:

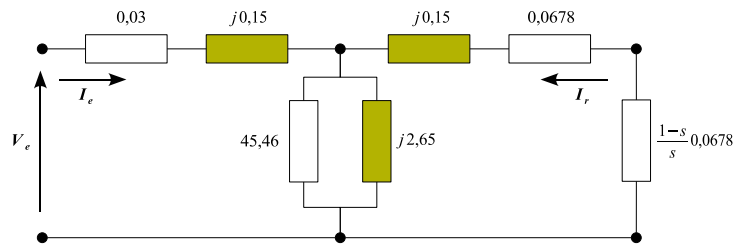


Figura 6.29 Parámetros del circuito equivalente en por unidad

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{e_n} &= \frac{5000}{\sqrt{3240 \cdot 0,859 \cdot 0,803}} \angle \cos^{-1}(0,803) = \\ &= 17,5 \angle -36,582^\circ A = 1,4549 \angle -36,582^\circ pu \end{aligned}$$

La corriente de magnetización se puede determinar del ensayo de vacío y es aproximadamente $\mathbf{I}_m = 4,542 \angle -86,66^\circ A$. La corriente rotórica en el punto nominal es:

$$\mathbf{I}_{r_n} = \mathbf{I}_{e_n} - \mathbf{I}_m = 14,995 \angle -23,15^\circ A = 1,2467 \angle -23,15^\circ pu$$

Conocida la corriente por el rotor en el punto nominal es posible determinar una aproximación a la reactancia de Thèvenin mediante la expresión siguiente:

$$R_{th} + \frac{R_r}{S_n} + j X_{th} = \frac{V_{th}}{\mathbf{I}_{r_n}} = 0,708 + j 0,3028 \Rightarrow X_{th} = 0,3028$$

La reactancia de Thèvenin es aproximadamente la suma de las dos reactancias de dispersión. Asumiendo que la dispersión del rotor es aproximadamente igual a la del rotor se obtendría el siguiente resultado:

$$X_e \approx X_r \approx \frac{X_{th}}{2} = 0,1514 pu$$

Los resultados obtenidos se muestran en la figura 6.29.

2. Valores medidos en la prueba de rotor bloqueado:

La prueba de rotor bloqueado se realiza a corriente nominal $I_n = 17,5 A = 1,4549 pu$. Calculando la impedancia equivalente en bornes de la máquina para un deslizamiento $s = 1$, se obtiene:

$$Z_{eq}(s = 1) = Z_e + \frac{Z_r \cdot Z_m}{Z_r + Z_m} = 0,091065 + j 0,293050 pu$$

$$V_{rb} = |Z_{eq}(s = 1)| \cdot I_n \cdot V_b = 107 V$$

$$P_{rb} = \sqrt{3} V_{rb} I_n \cos \phi_{rb} = 962 W$$

3. Deslizamiento y par máximo, corriente y par de arranque:

El factor de calidad Q es cercano a 10, en este caso se puede aproximar la característica del par con respecto al par máximo $\frac{T}{T_{max}}$ correspondiente a $Q \rightarrow \infty$ de la figura 6.17:

$$s_{T_{max}} = \frac{R_r}{\sqrt{R_{th}^2 + X_{th}^2}} = 0,2321$$

$$T_{max} = T_n \frac{\frac{s_n}{s_{T_{max}}} + \frac{s_{T_{max}}}{s_n}}{2} = 1,0869 \frac{\frac{0,08}{0,2321} + \frac{0,2321}{0,08}}{2} = 1,7587 \text{ pu}$$

$$T_{s=1} = T_{max} \frac{2}{\frac{1}{s_{T_{max}}} + \frac{s_{T_{max}}}{1}} = 1,7587 \frac{2}{\frac{1}{0,2321} + \frac{0,2321}{1}} = 0,7747 \text{ pu}$$

$$I_{s=1} = \frac{V}{Z_e + \frac{Z_m Z_r}{Z_m + Z_r}} = \frac{1}{0,091065 + j0,29305} = 3,2587 \angle -72,7^\circ \text{ pu}$$

4. Punto nominal como generador:

La condición nominal de generación se obtiene cuando con deslizamiento negativo $s < 0$, se alcanza el módulo de la corriente nominal del estator $I_n = 1,4549 \text{ pu}$. La corriente del estator se determina mediante la expresión:

$$|I_e| = \frac{V}{\left| Z_e + \frac{Z_m Z_r(s)}{Z_m + Z_r(s)} \right|}$$

Mediante una tabla es posible identificar rápidamente el deslizamiento que corresponde con la corriente nominal de la máquina:

s	$ I_e $
-0,105	1,4815
-0,104	1,4699
-0,103	1,4584
-0,102	1,4467

El deslizamiento nominal, de acuerdo con la tabla sería $s_{Gn} = -0,103$, que corresponde a una velocidad de 1985 rpm . La corriente del estator para el deslizamiento nominal como generador es:

$$\mathbf{I}_e = -1,13573 - j0,91489 \text{ pu}$$

La potencia de salida se determina mediante:

$$P_s = 1,0 \cdot |I_e| \cdot \cos \phi_e = 1,0 \cdot 1,4584 \cdot \frac{-1,13573}{1,45839} = -1,13573 \text{ pu}$$

La potencia de entrada se determina a partir de la corriente del rotor:

$$|I_r| = \frac{V_{th}}{\sqrt{(R_{th} + \frac{R_r}{s})^2 + X_{th}^2}} = \frac{0,945}{\sqrt{(-0,6313)^2 + (0,292)^2}} = 1,3587 \text{ pu}$$

$$P_e = |I_r|^2 R_r \frac{1-s}{s} = (1,3587)^2 \cdot 0,0678 \cdot \frac{1+0,103}{-0,103} = -1,3403 \text{ pu}$$

$$\eta_{Gn} = \frac{P_s}{P_e} = \frac{-1,13573}{-1,3403} = 0,8474$$

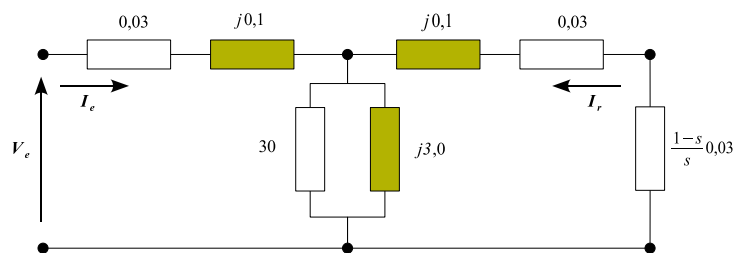


Figura 6.30 Parámetros del modelo de la máquina del problema 2

6.16. Ejercicios propuestos

1. A una máquina de inducción se le realizaron los ensayos de vacío y rotor bloqueado cuyos resultados se muestran en la tabla:

Ensayo	P	V	I	n
Vacío	3602 W	416 V	30 A	3598 rpm
Rotor bloqueado	3200 W	85 V	100 A	0 rpm

La máquina se encuentra conectada en estrella y la resistencia por fase de las bobinas del estator es de $53 \text{ m}\Omega$. Si la prueba de rotor bloqueado se realizó utilizando la máxima corriente posible en régimen permanente. Determine:

- a) El rendimiento en el punto nominal.
 - b) El par máximo.
 - c) El par de arranque.
 - d) El factor de potencia nominal.
 - e) La velocidad nominal.
 - f) El diagrama de círculo completo de la máquina.
2. Una máquina de inducción posee los parámetros del circuito equivalente en por unidad de las bases de tensión y potencia nominal de la máquina que se presentan en la figura 6.30. La máquina posee dos polos y su tensión nominal línea-neutro es de 240 V. La potencia mecánica nominal es de 10 kW con una velocidad de 3500 rpm. La máquina se encuentra operando en un sistema de 208 V al neutro, entregando una potencia mecánica en el eje de 9 kW. Determine:
 - a) Si la condición de operación de la máquina en cuestión permite el funcionamiento en régimen permanente.
 - b) La característica par-velocidad.
 - c) La curva de eficiencia con respecto a la potencia de salida.
 - d) El diagrama de círculo completo.

3. Una máquina de inducción de rotor de jaula de ardilla, de 416 V conexión en delta, 60 Hz y 5 kW de potencia nominal, desarrolla en el punto nominal de operación una velocidad de 1130 rpm con una eficiencia del $84,25\%$ y un factor de potencia de $73,14\%$. A esta máquina se le ha realizado una prueba en vacío con tensión nominal, accionando el eje a la velocidad sincrónica y en esta condición consume 156 W y $3,52\text{ A}$. Determine:

- El par de arranque que desarrolla esta máquina.
- La eficiencia y el deslizamiento en el punto de par máximo.
- El punto nominal de operación si la frecuencia se reduce a 50 Hz , manteniendo el flujo constante en el entrehierro de la máquina.
- El valor de los parámetros del modelo de la máquina de inducción en la base de la potencia de salida de la máquina.

4. De un motor de inducción se conocen los siguientes parámetros definidos en las bases de potencia en el eje y voltaje nominal de la máquina:

$$\begin{array}{lll} R_e = 0,015\text{ pu} & R_r = 0,035\text{ pu} & R_m = 25\text{ pu} \\ X_{\sigma e} = 0,2\text{ pu} & X_{\sigma r} = 0,2\text{ pu} & X_m = 2,5\text{ pu} \end{array}$$

Determine:

- La corriente y el factor de potencia nominal de la máquina como motor y como generador.
 - Los deslizamientos que corresponden al par y potencia máxima como motor y generador.
 - La tensión de alimentación para que con el deslizamiento $s = 2$, la máquina se frene con par máximo.
5. Un motor de 12 kW , 456 V en delta, posee una eficiencia en el punto nominal de 85% . Las pérdidas en el hierro son 5% de la potencia mecánica nominal. El factor de potencia nominal de la máquina es $0,85$. La corriente de arranque es 5 veces la corriente nominal. La velocidad nominal es 1710 rpm . Determine:

- La corriente y el factor de potencia en vacío.
- El par de arranque y el par máximo como motor.
- El rendimiento para una velocidad de 1600 rpm y 2000 rpm .
- El rendimiento del punto nominal de operación, si la tensión y la frecuencia disminuyen a 380 V y 50 Hz .
- El diagrama fasorial completo para una velocidad de -1900 rpm .

6. Una máquina de inducción de 416 V , 60 Hz , en la conexión delta, consume 100 A en el punto de operación nominal, con un factor de potencia de $0,85$ inductivo. En estas condiciones la máquina entrega $50,8\text{ kW}$ en el eje mecánico a una velocidad de 1710 rpm . La máquina consume un 2% de pérdidas en la base de la potencia aparente de entrada, cuando el rotor gira a la velocidad de 1800 rpm . La corriente de arranque es igual a 6 veces la corriente nominal. La resistencia del estator consume una potencia del 1% en la base de la potencia aparente de entrada. Determine:
- Los parámetros del circuito equivalente.
 - El deslizamiento correspondiente de la máquina de inducción cuando se carga con $\frac{3}{4}$ del par nominal.
 - El par máximo y el deslizamiento de la máquina que corresponde al punto nominal si la misma se conecta en estrella.
 - Si esta máquina ha de ser utilizada en un sistema de 50 Hz , defina los nuevos datos de placa.

7. Una máquina de inducción de 60 Hz conectada en delta, posee los siguientes datos de placa:

$$P_n = 100\text{ kW} \quad V_n = 416\text{ V} \quad I_n = 170\text{ A} \quad \cos \phi_n = 0,85 \quad n_n = 1750\text{ rpm}$$

Girando a la velocidad de 1799 rpm , la máquina consume 44 A y 850 W . La resistencia de cada una de las bobinas del estator a temperatura ambiente es de $42\text{ m}\Omega$. Determine:

- Los parámetros del modelo del convertidor en la base de la potencia nominal.
 - La corriente de arranque, el par de arranque, el par máximo y su deslizamiento correspondiente.
 - El rendimiento, factor de potencia y deslizamiento cuando la máquina se encuentra en el punto nominal como generador.
 - El diagrama de círculo completo si la máquina se conecta en estrella en el mismo sistema de tensiones.
8. A una máquina de inducción trifásica de 60 Hz , conexión delta, dos pares de polos, de rotor bobinado, se le han realizado en el laboratorio de máquinas eléctricas los siguientes ensayos:

Ensayo	V_{med}	I_{med}	P_{med}
Vacío	208 V	10 A	540 W
Rotor bloqueado	35 V	35 A	320 W

Las pérdidas óhmicas del estator y rotor son similares. Las ranuras del estator y del rotor son idénticas. Determine:

- a)* Parámetros del circuito equivalente en la base de la potencia nominal en el eje.
- b)* Deslizamiento, factor de potencia y rendimiento nominal de la máquina.
- c)* Rendimiento y factor de potencia en el punto nominal como generador.
- d)* Diagrama de círculo completo incluyendo la calibración de la recta del deslizamiento.

Bibliografía

- [1] J. M. Aller, "Simple Matrix Method to Introduce Spatial Vector Transformations and Oriented Field Equations in Electric Machine Courses," ICEM96 Proceedings, Vol. III, pp. 519-524, September, 1996. Vigo, Spain.
- [2] F. Blaske, "The Principle of Field Orientation as Applied to New TRASKVEKTOR Closed-Loop Control System for Rotating-Field Machines," Siemens Review, Vol. 34, pp. 217-220, May 1972. F. Blaske, "The Principle of Field Orientation as Applied to New TRASKVEKTOR Closed-Loop Control System for Rotating-Field Machines," Siemens Review, Vol. 34, pp. 217-220, May 1972.
- [3] M. Cortés, "Curso Moderno de Máquinas Eléctricas Rotativas," Barcelona Editores Técnicos Asociados 1994-1995.
- [4] S. J. Chapman, "Máquinas Eléctricas," McGraw-Hill, 1987.
- [5] A. E. Fitzgerald, C. Kingsley, Jr. & A. Kusko, "Electric Machinery: The Processes, Devices, and Systems of Electromechanical Energy Conversion," McGraw-Hill, Third Edition, 1971.
- [6] M.P. Kostenko & L.M. Piotrovski "Máquinas Eléctricas," Vol. II, Editorial Mir, Second edition, Moscu 1979.
- [7] A. S. Langsdorf, "Theory of Alternating Current Machinery," Tata McGraw-Hill, Second Edition, 1974.
- [8] W. Leonhard, "Control of Electrical Drives," Springer - Verlag - Berlin, Heideberg 1985.
- [9] F. S. Maginnins & N. R. Schultz, "Transient Performance of Induction Motors," AIEE Transactions, Vol. 64, pp 651-656, 1944.
- [10] G. McPherson & R. D. Laramore, "An Introduction to Electrical Machines and Transformers," John Wiley & Sons, 1990.

- [11] R. Richter, "Elektrische Maschinen, Vol. IV," Verlag Birkhäuser AG, Basel, 1954.
- [12] J. Sanz, "Máquinas Eléctricas," Prentice Hall, España 2002.
- [13] L. Serrano, "Fundamentos de Máquinas Eléctricas Rotativas," Universidad Politécnica de Valencia, 1989.
- [14] L. Serrano, "The Modern Space-Phasor Theory, Part I: Its Coherent Formulation and its Advantages for Transient Analysis of Converted-Fed AC Machines," European Transactions on Electrical Power Engineering, ETEP Vol. 3, N° 2, Mar./Apr. 1993, pp. 171-180. VDE-VERLAG
- [15] L. Serrano, "The Modern Space-Phasor Theory, Part II: Comparison with the Generalized Machine Theory and the Space-Vector Theory," European Transactions on Electrical Power Engineering, ETEP Vol. 3, N° 3, May/June. 1993, pp. 213-219. VDE-VERLAG
- [16] F. Tiberio, "Pruebas sobre Máquinas Eléctricas," Editorial Vicens-Vives, Primera Edición, 1965.
- [17] P. Vas; "Vector Control of AC Machines," Oxford University Press, 1990
- [18] P. Vas, "Electrical Machines and Drives. A Space Vector Approach," Oxford University Press, 1992
- [19] D. C. White & H. H. Woodson, "Electromechanical Energy Conversion," John Wiley & Sons, New York 1959.
- [20] S. Yamamura, "Spiral Vector Method and Symmetrical Component Method," Procc. Japan Academy, Vol. 67B, pp. 1-6, 1994.

CAPÍTULO 7

Operación de la Máquina de Inducción

7.1. Introducción

En el capítulo 6 se obtuvieron varias herramientas que permiten la modelación de la máquina de inducción: *el circuito equivalente, las características paramétricas y el diagrama de círculo*. La operación de la máquina de inducción en diversos regímenes de operación equilibrados, desequilibrados, armónicos y transitorios requiere un análisis detallado.

El rotor de las máquinas de inducción ha venido cambiando notablemente desde su diseño original, para adaptarse a necesidades operativas más exigentes: alto rendimiento e intenso par de arranque. Las corrientes de arranque deben ser limitadas mediante el uso de arrancadores para reducir el impacto de este proceso en la red e incrementar la vida útil del convertidor.

El accionamiento de la máquina de inducción con controladores de potencia y en redes eléctrica contaminadas armónicamente hace necesario considerar en los modelos el impacto de estas armónicas. Las distribuciones de los devanados producen armónicas espaciales en el campo magnético rotatorio que tienen efectos sobre su comportamiento. Es necesario conocer la operación desequilibrada porque reduce el par útil e incrementa las corrientes, condiciones que ponen en riesgo la máquina.

La operación transitoria del convertidor es especialmente importante en la medida que los controladores electrónicos de potencia proporcionan la capacidad de operar estos equipos a velocidad variable y existen diversas estrategias tales como el control vectorial, el control por campo orientado y el control directo de par que hacen uso intenso de la dinámica de esta máquina.

7.2. Arranque de motores de inducción

Cuando se utiliza una máquina de inducción para arrancar y accionar una carga mecánica a una velocidad determinada, es posible que sucedan tres situaciones diferentes:

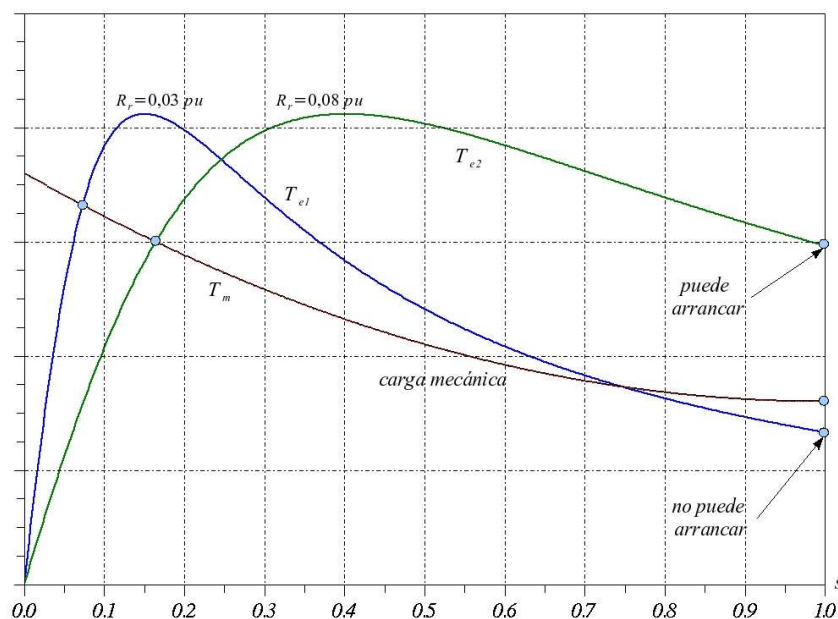


Figura 7.1 Condiciones de arranque para dos máquinas de inducción con diferente resistencia en el rotor

1. El par eléctrico de arranque que suministra la máquina puede ser inferior al par mecánico que requiere la carga en reposo para comenzar a moverse. En esta situación la máquina no puede acelerar, el rotor está detenido o bloqueado. La corriente es varias veces la corriente nominal y si no se pone remedio a esta situación, la máquina corre un serio riesgo de dañarse por calentamiento excesivo.
2. El par eléctrico es exactamente igual al par de la carga. Esta situación tiene los mismos problemas que el primer caso. Si los pares eléctrico y mecánico están equilibrados, no es posible acelerar la máquina.
3. El par eléctrico de arranque es mayor que el par mecánico de la carga. En estas condiciones, existe un par acelerante que permite incrementar la velocidad del rotor, hasta un punto de la característica par eléctrico - deslizamiento donde se equilibran los pares de la máquina y de la carga. Si la velocidad alcanzada en este punto es cercana a la velocidad sincrónica, la corriente disminuye a un nivel que permite la operación en régimen permanente. Cuando la máquina opera en este punto, un pequeño incremento de la carga mecánica, reduce la velocidad e incrementa el par eléctrico de accionamiento, obteniéndose un nuevo punto de operación.

En la figura 7.1 se observa que una máquina de inducción produce más par de arranque en la medida que la resistencia del rotor aumenta. Una máquina con alta resistencia en el rotor tiene deslizamientos de operación más grandes. Las pérdidas en el rotor se incrementan durante la operación en régimen permanente cuando se utilizan resistencias grandes en estas bobinas, y esto repercute desfavorablemente en el rendimiento de la máquina.



Figura 7.2 Rotor devanado con anillos deslizantes y escobillas

Es deseable que una máquina eléctrica produzca un par de arranque elevado y un rendimiento lo más cercano posible a la unidad. Estas dos características de la máquina se contraponen con respecto a la variación de la resistencia del rotor. Por esta razón en algunas máquinas de inducción se añade en el eje del rotor anillos deslizantes, cada uno de ellos se conecta a un extremo de las fases del rotor. Estos anillos, permiten conectar elementos en el exterior de la máquina con las bobinas del rotor, mediante contactos deslizantes¹. Al tener acceso a las bobinas del rotor, es posible incluir resistencia adicional con la finalidad de incrementar el par eléctrico de la máquina durante el arranque. Cuando la máquina está operando en régimen permanente es posible eliminar o cortocircuitar la resistencia adicional para incrementar el rendimiento.

El rotor bobinado con acceso mediante anillos deslizantes, es capaz de regular el par de arranque, disminuir las corrientes durante el proceso de aceleración y aumentar el rendimiento en el punto de operación, cuando se elimina la resistencia externa. Los principales inconvenientes de esta solución residen en el incremento de costos de la máquina y en el aumento de las pérdidas mecánicas por fricción con las escobillas.

7.3. El rotor de jaula de ardilla

La aplicación industrial de máquinas de inducción con rotor devanado no es muy frecuente, debido a que es posible una solución mucho más económica y práctica. El campo producido por las bobinas del estator produce fuerza electromotriz sobre cualquier conductor localizado en el rotor. En lugar de construir un bobinado similar al del estator, se pueden colocar barras conductoras en la periferia del rotor. Sobre estas barras, paralelas al eje de la máquina, se inducen fuerzas electromotrices por el campo magnético rotatorio producido en el estator. Si estas barras

¹Carbones o escobillas.

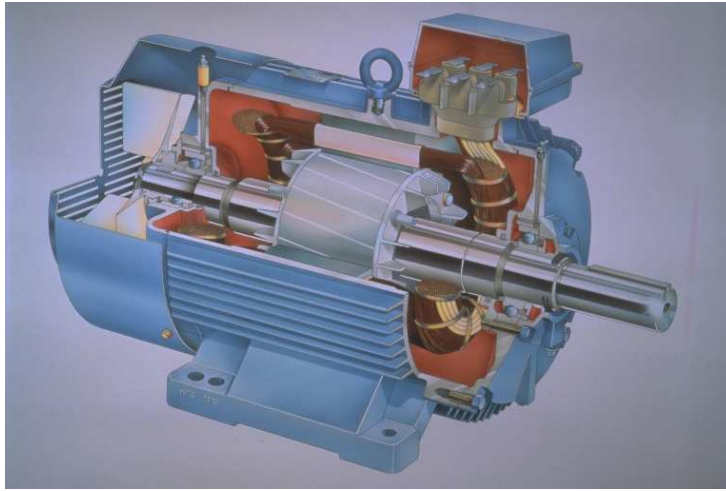


Figura 7.3 Corte de una máquina de inducción con rotor de jaula de ardilla

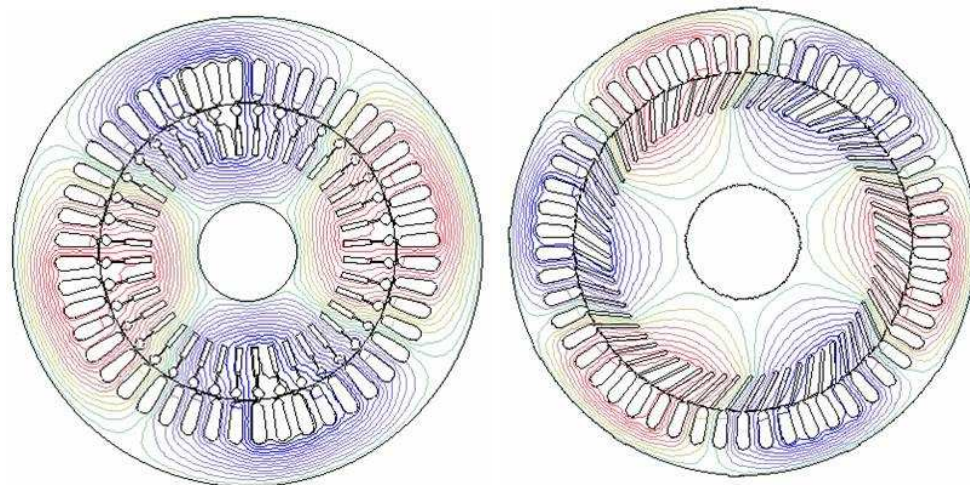
están cortocircuitados en sus extremos mediante dos anillos conductores, circula corriente por las barras y se genera un campo magnético rotatorio en el rotor. La interacción entre los dos campos magnéticos rotatorios produce el par eléctrico.

El rotor de jaula de ardilla es muy simple desde el punto de vista constructivo, además es capaz de soportar esfuerzos eléctricos y mecánicos mucho mayores que el rotor devanado. En este rotor no es posible incluir resistencia adicional en serie con los conductores. Sin embargo, durante la construcción del rotor se puede variar el valor de la resistencia controlando el espesor de los anillos que cortocircuitan las barras.

El rotor de jaula de ardilla se puede diseñar utilizando barras profundas o doble jaula, una externa muy resistiva y otra profunda con menor resistencia. Estas modificaciones permiten utilizar el efecto pelicular para producir una variación de la resistencia equivalente del rotor durante el arranque. Con el rotor en reposo, el deslizamiento es grande y la frecuencia de las corrientes que circulan por el rotor es proporcional al deslizamiento. Si las barras son profundas o el rotor es de doble jaula, la corriente de alta frecuencia fluye por la periferia de la barra o por la jaula más externa y resistiva, incrementando sustancialmente la resistencia equivalente del rotor en esta condición. Cuando la máquina está operando cerca del punto nominal, los deslizamientos son cercanos a cero y la frecuencia de las corrientes que circulan por el rotor también es reducida. En este caso las corrientes se distribuyen uniformemente por las barras y consecuentemente la resistencia equivalente disminuye. De esta forma es posible construir máquinas económicas y robustas, de alta eficiencia y pares de arranque importantes. Estas razones justifican por si solas, la difusión industrial alcanzada por este tipo de accionamiento.

La máquina de inducción de doble jaula se puede modelar mediante un circuito equivalente que considere los enlaces de flujo mutuos entre el estator y las barras del rotor, así como los enlaces de dispersión de cada una de las jaulas. Cada uno de estos enlaces se representan en el circuito equivalente por una reactancia. Las resistencias de cada una de las jaulas se modela independientemente. En la figura 7.5 se muestra el circuito equivalente y los flujos en las barras.

En los motores de doble jaula, el par eléctrico se calcula superponiendo los pares producido por cada una de las jaulas:



(a) Rotor de doble jaula ($p=2$)

(b) Rotor de barra profunda ($p=3$)

Figura 7.4 Cortes transversales de rotores de jaula de ardilla

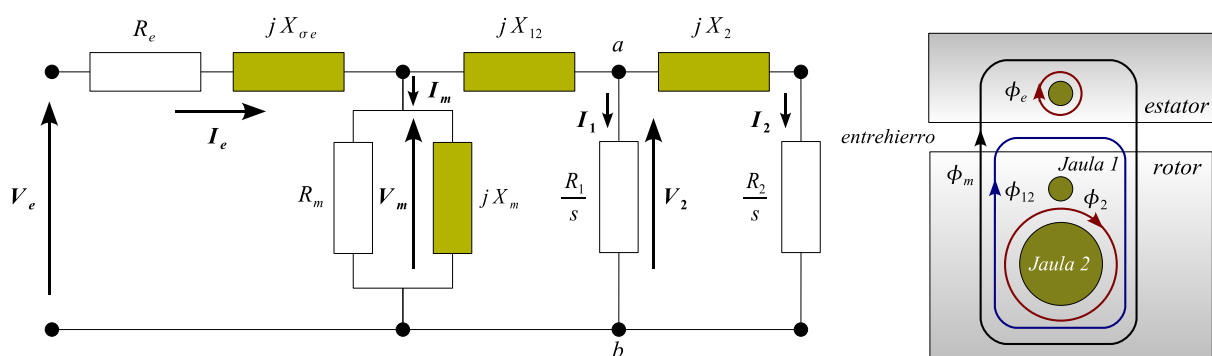


Figura 7.5 Circuito equivalente de la máquina de inducción con rotor de doble jaula

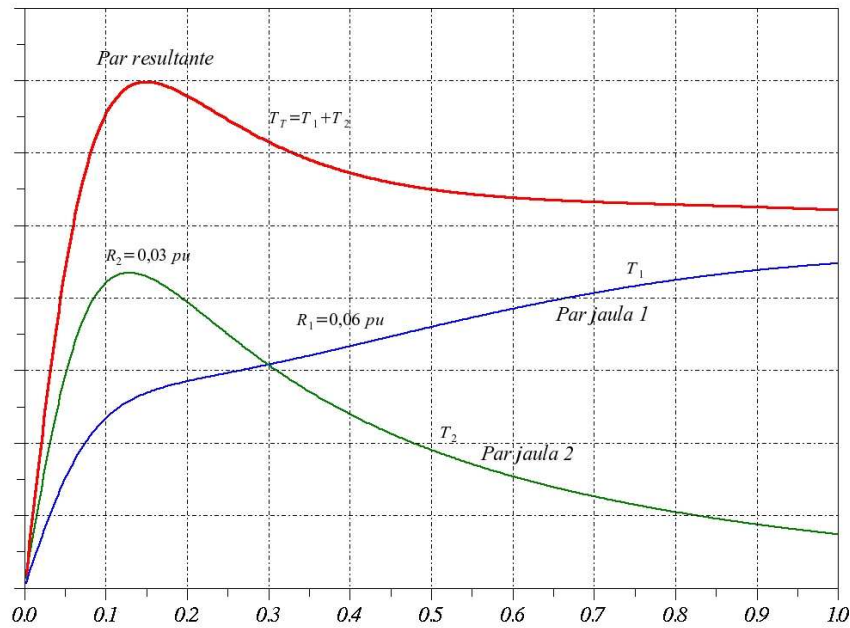


Figura 7.6 Característica de par eléctrico-deslizamiento para un rotor de doble jaula

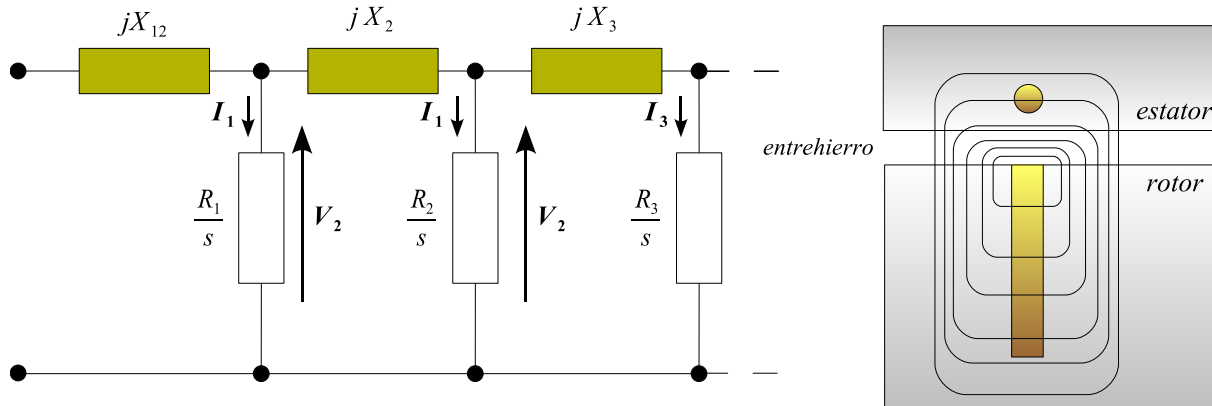


Figura 7.7 Circuito equivalente para un rotor de jaula de ardilla con barras profundas

$$T_e = \frac{3}{\omega_e} \left[I_1^2 \frac{R_{r1}}{s} + I_2^2 \frac{R_{r2}}{s} \right] \quad (7.1)$$

En los rotores de jaula de ardilla con barras profundas el fenómeno es similar. Durante el arranque, el efecto pelicular reparte las corrientes no uniformemente en el interior de las barras del rotor. Las corrientes circulan principalmente por la periferia de la barra con la finalidad de reducir la trayectoria de los enlaces de flujo². Cuando la máquina alcanza el punto de operación permanente, el deslizamiento es muy pequeño, y las corrientes se distribuyen uniformemente en las barras, con lo cual disminuye su resistencia. El modelo del rotor de doble jaula puede ser empleado en el análisis de este tipo de máquinas con suficiente precisión. El modelo de la má-

²Esta sería la condición de menor energía.

quina de inducción con rotor de barra profunda se puede mejorar sustancialmente, incluyendo varias ramas adicionales en el circuito rotórico tal como se muestra en la figura 7.7.

La identificación de los parámetros de las máquinas de inducción con rotor de doble jaula o rotor de barras profundas es semejante al método utilizado para la determinación de parámetros en la máquina de inducción convencional. Existen mayores complicaciones debido al mayor número de ramas y elementos que es necesario identificar. Los ensayos sobre la máquina se realizan con los lineamientos discutidos en la sección 6,10. Los parámetros del rotor se pueden identificar realizando ensayos de cortocircuito a diferentes frecuencias. Los ensayos de operación en carga también resultan convenientes para la estimación de los parámetros. El algoritmo propuesto en la figura 6.15, es capaz de realizar la estimación paramétrica de estas dos modificaciones de la máquina de inducción.

7.4. Corriente de arranque

Un problema importante en la operación de la máquina de inducción es la elevada corriente que esta absorbe durante el proceso de arranque. La corriente de arranque de una máquina de inducción se encuentra entre tres y seis veces la corriente nominal de la máquina, y en algunas ocasiones aún más. La caída de tensión en los conductores de alimentación y en el sistema puede sobrepasar el máximo permitido. La tensión de alimentación de la máquina no debe estar nunca por debajo del 5 % de su valor nominal³.

Existen cargas mecánicas que a baja velocidad no ofrecen par resistente importante y este crece paulatinamente con la velocidad. En este caso es posible utilizar sistemas de arranque de la máquina de inducción a tensión reducida que contribuyen a disminuir la magnitud de la corriente en la máquina durante el proceso de aceleración. Un arranque a tensión reducida, incrementa el tiempo de aceleración de la máquina y su carga mecánica, pero las corrientes disminuyen en la misma proporción que la tensión aplicada.

Algunas máquinas de inducción que se utilizan en sistemas relativamente débiles, como puede ser el caso de los ascensores y elevadores residenciales, se diseñan con reactancias de dispersión muy grandes⁴, para reducir la corriente durante el proceso de arranque a dos o tres veces la corriente nominal, disminuyendo de esta forma el impacto de los frecuentes arranques en el perfil de tensión de la red eléctrica.

Para reducir la corriente durante el proceso de aceleración de la carga mecánica se han utilizado varios sistemas. Estos arrancadores difieren unos de otros en el método de reducción de tensión. Algunos utilizan el cambio de conexiones de las bobinas de la máquina, otros utilizan transformadores o autotransformadores y los más modernos se diseñan mediante convertidores electrónicos de potencia. Los arrancadores son costosos para ser aplicados a máquinas pequeñas, y el impacto de la corriente de arranque en estas máquinas no es importante ni para la máquina, ni para la red. Es necesario recordar que una máquina pequeña tiene una relación superficie-volumen muy grande y esto le permite disipar bien sus pérdidas. A continuación se detallan algunos ejemplos de los arrancadores más utilizados en la industria:

³Hay que recordar que el par eléctrico se reduce con el cuadrado de la tensión de alimentación y la máquina puede ser incapaz de acelerar la carga mecánica en condiciones de tensión reducida.

⁴Esto es posible cerrando lo más posible la cabeza del diente donde se colocan los conductores o las barras del rotor de jaula de ardilla.

1. El arrancador estrella-delta:

El método más simple para reducir la tensión de una máquina consiste en conectarla inicialmente en estrella y cuando el deslizamiento es pequeño se cambia la conexión del motor a delta. La tensión final sobre cada bobina de la máquina debe ser su propia tensión nominal. Este método de arranque reduce la tensión en $\sqrt{3}$ veces la tensión nominal de la máquina y la corriente se reduce en esta misma proporción. Los pares eléctricos se reducen a un tercio del par a tensión nominal. Este procedimiento es uno de los más económicos, pero es necesario disponer de un sistema adecuado de tensiones que permita la conexión delta de la máquina durante el régimen permanente. El cambio de conexión se realiza cuando la máquina alcanza un deslizamiento cercano al de operación en la conexión estrella. La orden de cambio puede ser dada por un temporizador si se conoce la inercia de la carga o el tiempo de aceleración a tensión reducida. Si el cambio de conexión se realiza antes de que las corrientes disminuyan, el arrancador pierde efectividad. El tiempo total de arranque con este dispositivo es aproximadamente tres veces mayor que el arranque en directo de la máquina, esto es importante al momento de especificar las protecciones del motor.

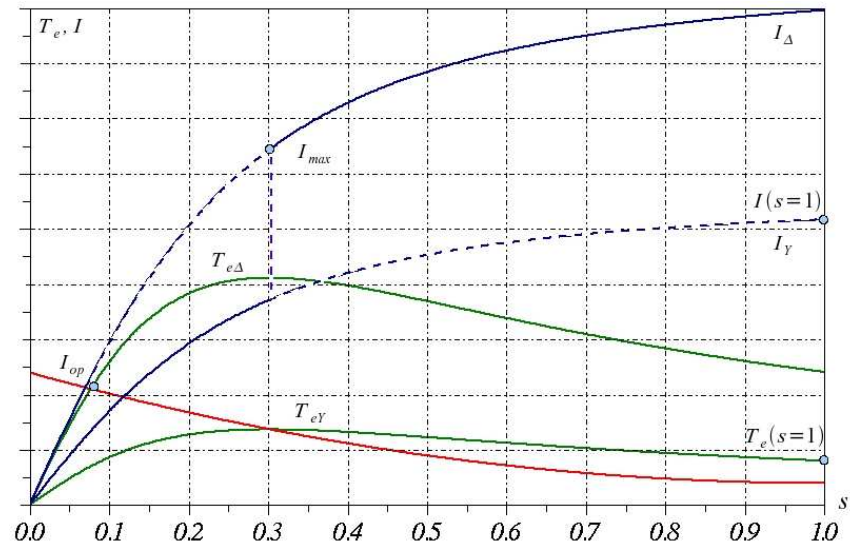
En la figura 7.8 (a) se presenta el gráfico del par y la corriente en la máquina durante el proceso de arranque estrella-delta. Con estos arrancadores es posible lograr que la corriente máxima no exceda el valor $3,0 pu$, mientras que en un arranque directo, esta corriente podría alcanzar $5,0 pu$. En la figura 7.8 (b) se muestra el diagrama de un arrancador industrial estrella-delta. Se utilizan tres contactores y un temporizador que los activa. Además deben incluirse protecciones térmicas para desconectar la máquina en caso de sobrecarga.

2. El arrancador por autotransformador:

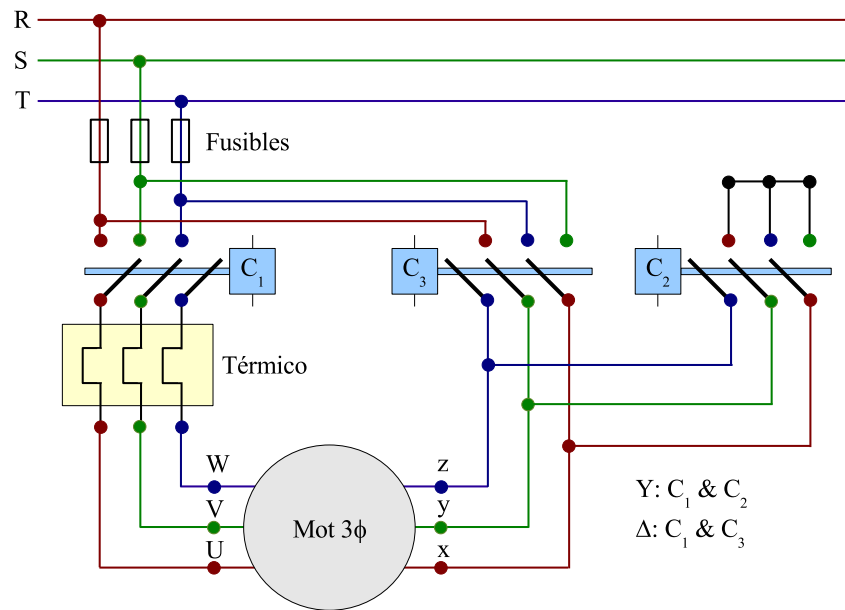
El arrancador estrella-delta es muy económico, pero permite una sola posibilidad en la reducción de la tensión. Utilizando transformadores o autotransformadores, es posible utilizar una reducción arbitraria de la tensión. También es posible arrancar la máquina en varios pasos utilizando diferentes derivaciones del transformador. Este esquema de arranque es más costoso.

3. Arranque por conexión de bobinas serie-paralelo:

En algunas máquinas, cada una de las bobinas del estator se dividen en dos partes, con la intención de utilizar diferentes tensiones de alimentación, por ejemplo $208 V$ ó $416 V$. Si las bobinas de cada fase se conectan en serie, la máquina se puede conectar a un sistema de $416 V$. Si por el contrario las dos bobinas de cada fase se conectan en paralelo, el sistema de alimentación debe ser de $208 V$. Existen esquemas similares al de la figura 7.8 para arrancar el motor de inducción en un sistema de $208 V$ con las bobinas de cada fase conectadas en serie, y posteriormente reconectar estas bobinas en paralelo para alcanzar el punto de operación de régimen permanente. Este esquema tiene un comportamiento similar al del arrancador estrella-delta, con la salvedad de que las corrientes se reducen a la mitad y el par eléctrico a la cuarta parte durante la aceleración.



(a) Características del par eléctrico y la corriente del arrancador



(b) Diagrama esquemático del arrancador

Figura 7.8 Arrancador estrella-delta

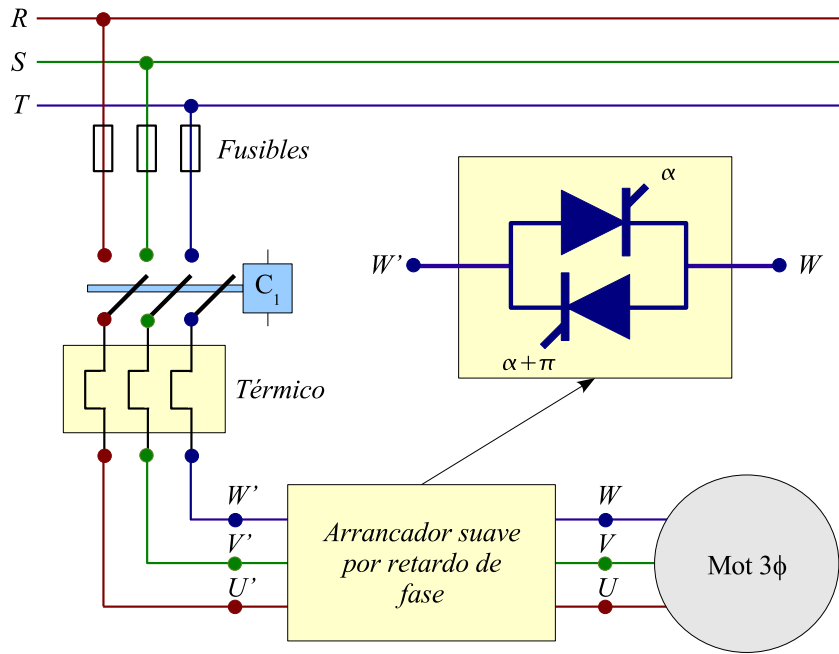


Figura 7.9 Arrancador suave por retardo de fase mediante tiristores

4. Arrancadores suaves:

Mediante convertidores electrónicos de potencia, se puede realizar un arranque suave de la máquina, incrementando la tensión en forma continua a medida que la carga mecánica acelera. Este tipo de arrancador puede limitar la corriente de arranque y reducir considerablemente los esfuerzos mecánicos ocasionados por los arranques bruscos. Los principales problemas de estos arrancadores son el costo y la inyección de corrientes armónicas a la red. En la figura 7.9 se detalla un diagrama de un arrancador suave a tiristores.

7.5. Régimen desequilibrado de las máquinas de inducción

Si una máquina de inducción se encuentra girando en régimen permanente a la velocidad ω_r , en la misma dirección del campo magnético rotatorio, y en ese preciso instante se invierte la conexión de dos fases del estator, el campo rotante invierte el sentido de rotación y el deslizamiento de la máquina cambia bruscamente. La velocidad de la máquina durante este proceso prácticamente instantáneo no varía apreciablemente debido a la inercia del sistema electromecánico. Posteriormente el rotor de la máquina se frena, hasta detenerse y se acelera nuevamente en la dirección del nuevo campo rotante, hasta alcanzar una nueva condición de equilibrio.

El deslizamiento de la máquina en el instante previo a la inversión de las fases es:

$$s_1 = \frac{\omega_e - \omega_m}{\omega_e} = 1 - \frac{\omega_r}{\omega_e} \quad (7.2)$$

Cuando se invierte el sentido de rotación del campo magnético rotatorio, pero aún no ha variado

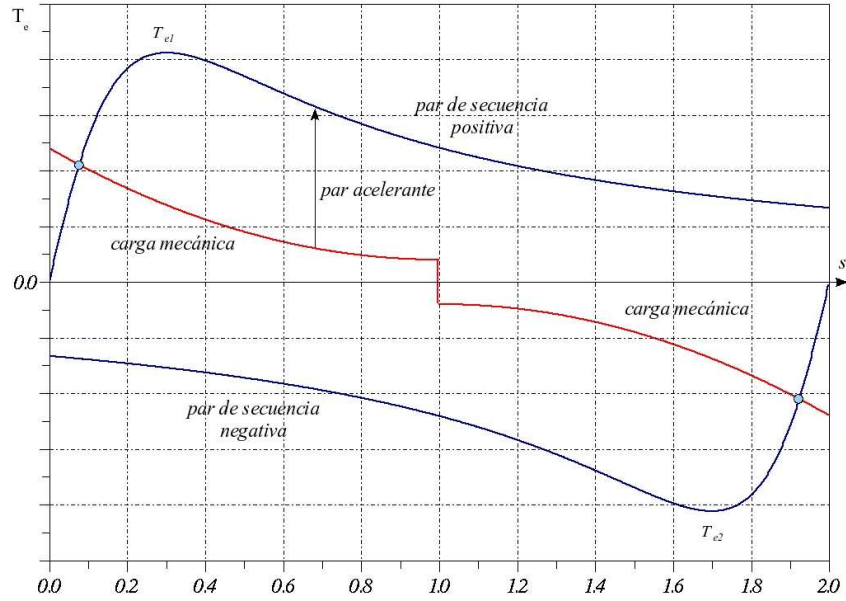


Figura 7.10 Par eléctrico antes y después de la inversión de fases

la velocidad, el deslizamiento es:

$$s_2 = \frac{-\omega_e - \omega_m}{-\omega_e} = 1 + \frac{\omega_r}{\omega_e} \quad (7.3)$$

Sumando las relaciones 7.2 y 7.3 se obtiene:

$$s_1 + s_2 = 2 \quad (7.4)$$

El circuito equivalente de la máquina no cambia al invertirá el campo magnético rotatorio, lo único que varía es el deslizamiento de la máquina en ese instante. La expresión 7.4 determina el deslizamiento después de la inversión de las fases, a partir del deslizamiento previo:

$$s_2 = 2 - s_1 \quad (7.5)$$

El par acelerante se calcula, según se observa en la figura 7.10, por la diferencia entre el par eléctrico y el par mecánico. El par eléctrico en la nueva condición invierte su sentido por el intercambio de las fases, el par neto acelerante es negativo y la máquina se frena perdiendo velocidad:

$$T_a = T_e - T_m = J \frac{d\omega_r}{dt} < 0 \quad (7.6)$$

El proceso descrito anteriormente se puede representar mediante el circuito equivalente que se muestra en la figura 7.11(b). Este circuito equivalente es idéntico al circuito equivalente analizado en el capítulo 6, excepto por el deslizamiento.

Si las tensiones de alimentación de una máquina de inducción no son balanceadas, las corrientes que fluyen por las bobinas tampoco lo serán. Cuando el sistema de corrientes que circulan por las bobinas no son equilibradas, el campo magnético en el interior de la máquina no es rotatorio.

Si se mantienen las condiciones de linealidad en el modelo de la máquina, es posible sustituir el sistema de tensiones trifásicas desequilibradas por tres sistemas equilibrados de *secuencia positiva, negativa y cero*, haciendo uso de la transformación de componentes simétricas. Cada uno de estas componentes se analiza independientemente y posteriormente se superponen las tres componentes para determinar la solución final.

Para descomponer un sistema trifásico en *componentes simétricas* se utiliza la siguiente transformación conservativa en potencia:

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ V_+ \\ V_- \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \\ 1 & e^{j\frac{4\pi}{3}} & e^{j\frac{2\pi}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

La transformación inversa de componentes simétricas a magnitudes de fase es:

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{j\frac{4\pi}{3}} & e^{j\frac{2\pi}{3}} \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ V_+ \\ V_- \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ V_+ \\ V_- \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

El modelo de secuencia positiva de la máquina de inducción se desarrolló en el capítulo 6⁵. El circuito equivalente de secuencia negativa difiere del modelo de secuencia positiva tan solo en el deslizamiento. Cuando una máquina de inducción es alimentada mediante un sistema trifásico equilibrado de secuencia negativa, el campo magnético rotatorio gira en sentido contrario a las agujas del reloj, la velocidad del campo estas condiciones es $-\omega_e$.

Si se alimenta la máquina de inducción con un sistema de corrientes homopolares⁶, los flujos producidos por tres corrientes iguales se neutralizan dentro de la máquina, debido a que las bobinas tienen sus ejes magnéticos desfasados 120° unas de otras. El campo en el entrehierro es nulo y por esta razón la máquina no está magnetizada. El único flujo que producen las corrientes de secuencia cero es el de dispersión de las bobinas. El modelo de secuencia cero también debe incluir la resistencia del circuito estatístico.

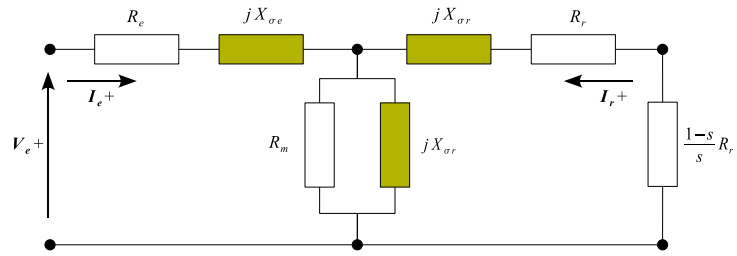
Conocidas las tensiones de secuencia positiva, negativa y cero que se han aplicado a la máquina, se calcula el par eléctrico de secuencia positiva y de secuencia negativa. La secuencia cero no contribuye al par eléctrico, debido a que no produce campo magnético en el entrehierro. La superposición de los pares de secuencia positiva y negativa, que están en oposición, determina el par resultante en el eje de la máquina. El par eléctrico disminuye cuando existen desequilibrios en la fuente de alimentación. La red de secuencia cero no produce par, pero incrementa las corrientes, las pérdidas y el calentamiento, reduciendo el rendimiento de la máquina. Por esta razón es poco frecuente conectar el neutro de la máquina de inducción a la red.

Las componentes simétricas son una herramienta eficaz para el análisis de los desequilibrios más frecuentes a que puede estar sometida la máquina de inducción⁷. Para resolver los desequilibrios es necesario definir las condiciones de contorno del problema en el dominio de las fases

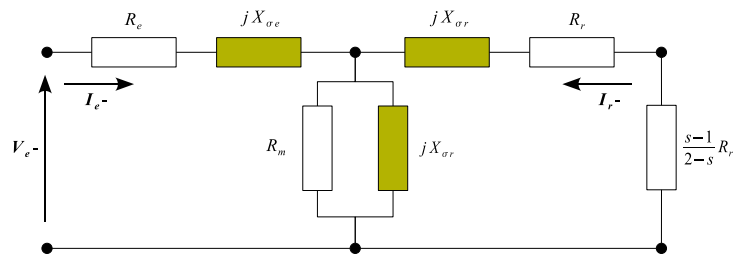
⁵Queda representado por el circuito equivalente.

⁶Esta palabra significa con la misma polaridad. Esto se refiere a la componente de secuencia cero.

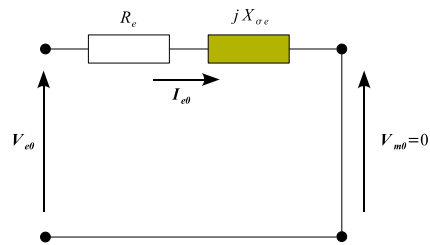
⁷La aplicación adecuada de esta herramienta requiere que el convertidor sea simétrico, los desequilibrios al interior de la máquina acoplan los modos de secuencia y vuelven impráctica la aplicación de esta metodología.



(a) Modelo de secuencia positiva



(b) Modelo desecuencia negativa



(c) Modelo de secuencia cero

Figura 7.11 Modelos de secuencia de la máquina de inducción

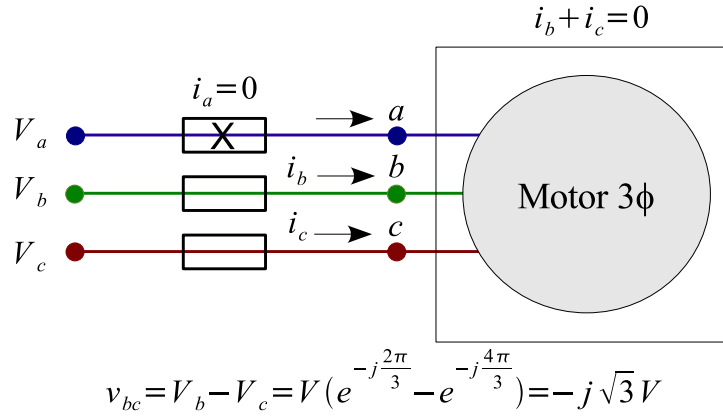


Figura 7.12 Apertura del fusible de la fase "a" de una máquina de inducción sin conexión de neutro

y transformar estas relaciones al dominio de la secuencia. Las condiciones de contorno transformadas y los modelos de secuencia de la máquina de inducción, permiten establecer el sistema de ecuaciones del cual se obtienen las tres tensiones de secuencia sobre la máquina. Con esta información se puede calcular el par de secuencia positiva y el de secuencia negativa. Todo esto, para una determinada velocidad o deslizamiento de la máquina. En algunos casos, el sistema de ecuaciones se puede representar mediante un circuito eléctrico, facilitando de esta forma la solución del problema. Algunos desequilibrios frecuentes en una máquina de inducción son:

1. Apertura del fusible de una fase, sin conexión del neutro:

En la figura se ha representado una máquina de inducción que se encontraba operando en un punto estable, y repentinamente se abre el fusible de la fase "a", quedando conectadas las otras dos fases a la red. Esta máquina tiene una conexión sin neutro corrido.

Las tres condiciones de contorno de la máquina de inducción en las condiciones descritas en la figura 7.12 son:

$$I_a = 0 \quad (7.9)$$

$$I_b + I_c = 0 \quad (7.10)$$

$$V_b - V_c = V\angle -120^\circ - V\angle -240^\circ = \sqrt{3}V\angle -90^\circ = -j\sqrt{3}V \quad (7.11)$$

Utilizando la expresión 7.7 para convertir las condiciones de contorno sobre las corrientes de fase a condiciones de secuencia, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} I_0 \\ I_+ \\ I_- \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha - \alpha^2 \\ \alpha^2 - \alpha \end{bmatrix} I_b \quad (7.12)$$

La expresión 7.12 indica que la suma de las componentes simétricas de corriente para la secuencia positiva y negativa es cero. Además la componente de secuencia cero también

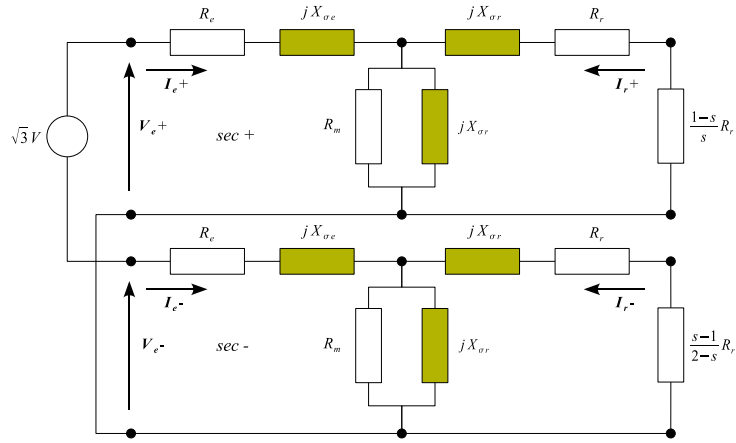


Figura 7.13 Circuito equivalente de la apertura del fusible de la fase "a" de una máquina de inducción sin neutro

es nula debido a que la máquina no tiene el neutro conectado:

$$I_0 = 0 \quad (7.13)$$

$$I_+ + I_- = 0 \quad (7.14)$$

De la transformación 7.8 y la condición de contorno 7.9 se establece el siguiente resultado:

$$V_b - V_c = \frac{1}{\sqrt{3}} [(V_0 + \alpha^2 V_+ + \alpha V_-) - (V_0 + \alpha V_+ + \alpha^2 V_-)] = -j\sqrt{3}V \quad (7.15)$$

La ecuación anterior determina una relación definida entre las tensiones de secuencia positiva y negativa en la máquina:

$$V_+ - V_- = \sqrt{3}V \quad (7.16)$$

Además deben incluirse las tres condiciones sobre las impedancias de secuencia de la máquina:

$$\begin{aligned} V_0 &= Z_0 \cdot I_0 \\ V_+ &= Z_+(s) \cdot I_+ \\ V_- &= Z_-(s) \cdot I_- \end{aligned} \quad (7.17)$$

Sustituyendo las expresiones 7.17 y 7.14 en 7.16 se obtiene el siguiente resultado:

$$\sqrt{3}V = Z_+(s) \cdot I_+ - Z_-(s) \cdot I_- = [Z_+(s) + Z_-(s)] I_+ \quad (7.18)$$

En la figura 7.13 se representa el circuito equivalente en el dominio de la secuencia, identificado con el resultado obtenido en la expresión 7.18. Cuando la máquina se encuentra operando a una velocidad ω_r diferente de cero, los deslizamientos de secuencia positiva s_+ y de secuencia negativa s_- , son diferentes y por lo tanto las impedancias de secuencia también. Como la corriente de secuencia positiva circula por las dos impedancias, las

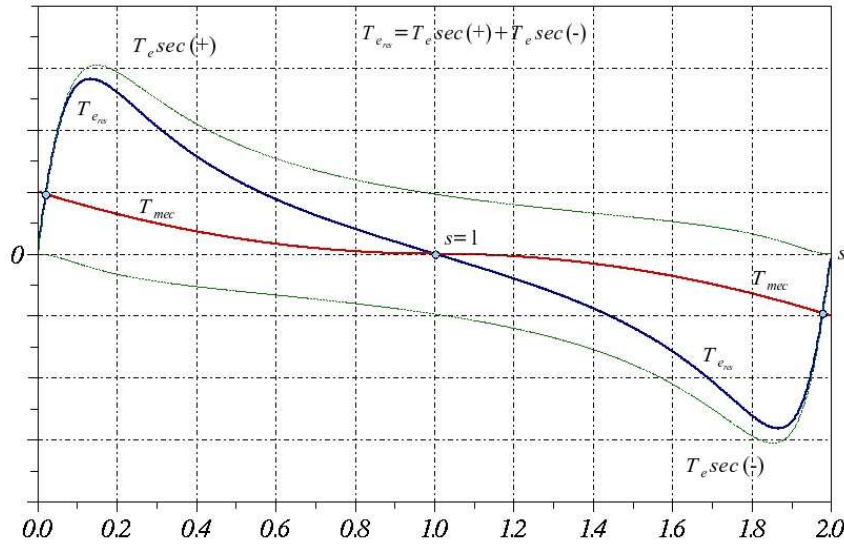


Figura 7.14 Característica par-deslizamiento con el fusible de la fase "a" abierto y sin conexión del neutro a la red

tensiones de secuencia sobre cada impedancia son distintas y se produce una diferencia entre el par de secuencia positiva y el par de secuencia negativa. La máquina podrá seguir operando si la carga no es demasiado grande. Si la máquina se encontraba detenida previamente $\omega_r = 0$, no se produce par eléctrico neto debido a que los deslizamientos de secuencia positiva y negativa valen uno en esta condición de velocidad, cada una de las secuencias ofrece la misma impedancia a la fuente, y por tal motivo los pares de secuencia también son iguales. En la figura 7.14 se presenta la característica par-deslizamiento para una máquina de inducción con la fase "a" abierta. Se puede observar que no existe par de arranque y que el par máximo es menor que en la operación balanceada. Como la matriz de componentes simétricas utilizada en este análisis es hermitiana, la transformación es conservativa en potencia y no es necesario regresar nuevamente al dominio de las fases para el cálculo de potencias o pares. Si es necesario determinar las corrientes en las fases hay que recurrir a la transformación inversa de componentes simétricas definida en la relación 7.8.

2. Apertura del fusible de la fase "a" con el neutro conectado:

En la figura -154- se presenta el diagrama de una máquina de inducción conectada con neutro corrido, con apertura del fusible de la fase "a". En este caso, la corriente por la fase "a" es cero, pero la suma de las corrientes de las fases sanas no. Las tres condiciones de contorno en el dominio de fase son:

$$I_a = 0 \quad (7.19)$$

$$V_b = V \angle -120^\circ \quad (7.20)$$

$$V_c = V \angle -240^\circ \quad (7.21)$$

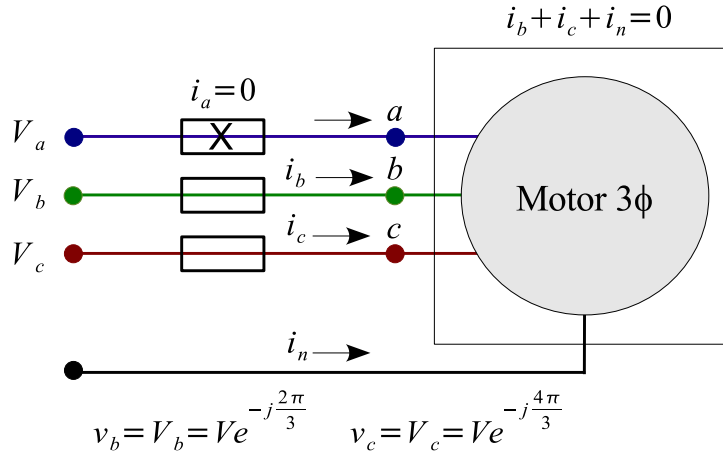


Figura 7.15 Apertura del fusible de la fase "a" con el neutro conectado

Sustituyendo las condiciones de contorno 7.20 y 7.21 en la transformación 7.7 se obtiene el siguiente resultado:

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ V_+ \\ V_- \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ \alpha^2 V \\ \alpha V \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} V_a + \alpha V + \alpha^2 V \\ V_a + 2V \\ V_a + \alpha V + \alpha^2 V \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

En la expresión 7.22 se observa que las tensiones de secuencia negativa y cero son iguales, además la diferencia entre la tensión de secuencia positiva y cualquiera de las otras dos tensiones de secuencia, es independiente de V_a . Por esta razón es posible expresar lo siguiente:

$$V_- = V_0 \quad (7.23)$$

$$V_+ - V_- = V_+ - V_0 = \sqrt{3}V \quad (7.24)$$

De la transformación 7.8 permite encontrar la relación entre las corrientes de secuencia, a partir de la condición de contorno 7.19:

$$I_a = \frac{1}{\sqrt{3}}(I_0 + I_+ + I_-) = 0 \Rightarrow I_0 + I_+ + I_- = 0 \quad (7.25)$$

A las expresiones 7.23, 7.24 y 7.25 es necesario añadir las relaciones entre las tensiones de secuencia y las corrientes de secuencia 7.17. Con las expresiones 7.17 y 7.23 a 7.25 se determina el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{bmatrix} Z_+(s) & -Z_-(s) & 0 \\ 0 & Z_-(s) & -Z_0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_+ \\ I_- \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.26)$$

El sistema de ecuaciones 7.26, puede ser resuelto para las tres corrientes. Una vez conocidas estas variables, se determinan de las expresiones 7.17, las tensiones de secuencia positiva y negativa, con las cuales se pueden evaluar los pares y potencias para esta condición de operación. Las dos primeras ecuaciones del sistema 11.31, son ecuaciones de

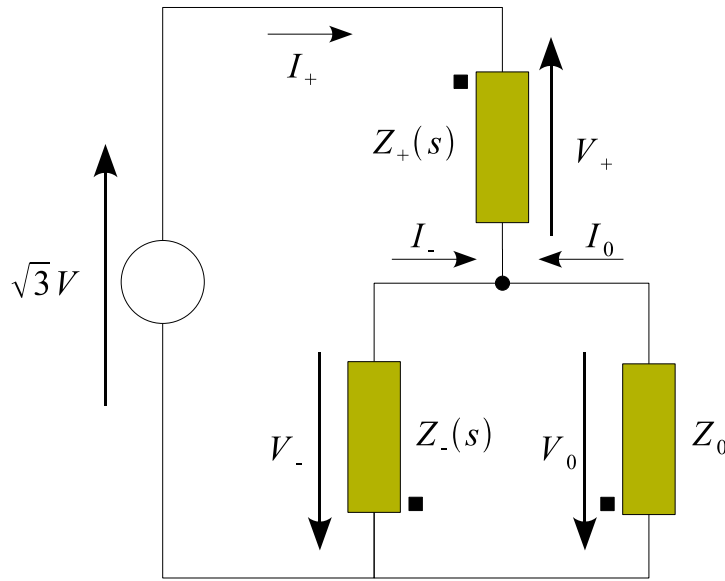


Figura 7.16 Circuito equivalente de la máquina de inducción con neutro conectado y fase "a" abierta

mallas y la tercera es una ecuación de nodos. Con estas ecuaciones se puede construir un circuito equivalente tal como se muestra en la figura 7.16. Cuando el neutro está conectado, la máquina produce par de arranque con una fase desconectada. Las tensiones de secuencia positiva y negativa son diferentes, debido a que la impedancia de secuencia cero queda conectada en paralelo con la impedancia de secuencia negativa. Recordando que la impedancia de secuencia cero tiene un valor muy reducido, debido a que está formada por la resistencia de la bobina estática y su reactancia de dispersión. El par de secuencia positiva es mayor que el de secuencia negativa en este caso. En la figura 7.17 se presenta el gráfico de la característica par-deslizamiento de una máquina de inducción en estas condiciones de operación. Se ha indicado en la misma figura la característica para la operación equilibrada.

3. Pérdida de los fusibles de las fases "b" y "c", con neutro conectado:

En la figura 7.18 se ha representado la condición de operación de una máquina de inducción con neutro corrido, en la cual se abren repentinamente las fases "b" y "c". Las condiciones de contorno en el dominio de las fases para este caso son:

$$V_a = V \angle 0^\circ = V \quad (7.27)$$

$$I_b = I_c = 0 \quad (7.28)$$

De la transformación 7.8 y de la condición de contorno 7.27, se obtiene:

$$V_a = \frac{1}{\sqrt{3}}(V_0 + V_+ + V_-) = V \Rightarrow V_0 + V_+ + V_- = \sqrt{3}V \quad (7.29)$$

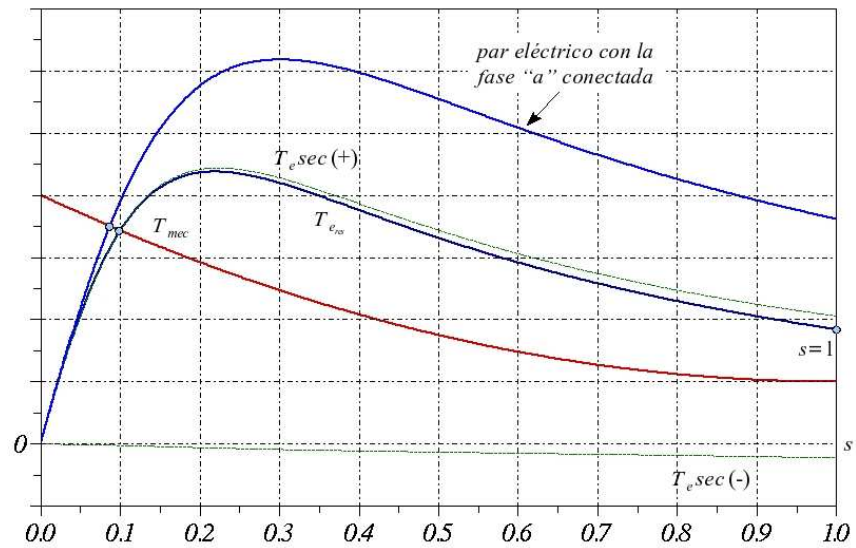


Figura 7.17 Característica par-deslizamiento con apertura de la fase "a" con neutro conectado

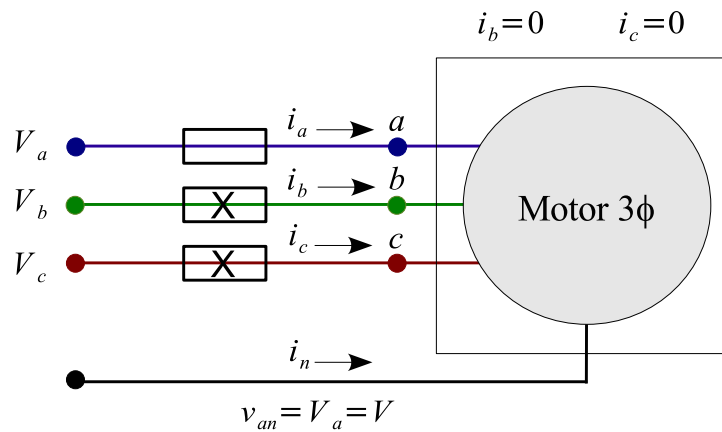


Figura 7.18 Apertura de las fases "b" y "c" con neutro conectado

Mediante la transformación 7.10, y la condición 7.28, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} I_0 \\ I_+ \\ I_- \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} I_a \quad (7.30)$$

La expresión 7.30 indica que las tres corrientes de secuencia son iguales. Las relaciones entre las tensiones de secuencia y las corrientes de secuencia están determinadas por las impedancias de secuencia 7.17. Mediante la ecuación 7.29, el sistema 7.30 y las tres relaciones entre las tensiones y corrientes de secuencia 7.17 se establece el siguiente resultado para este caso:

$$\begin{bmatrix} Z_+(s) + Z_-(s) + Z_0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_+ \\ I_- \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.31)$$

El sistema de ecuaciones 7.31, puede ser representado por un circuito equivalente donde las tres impedancias de secuencia se encuentran en serie, alimentadas por una fuente de tensión de valor $\sqrt{3}V$. En este sistema la primera ecuación representa la malla y las otras dos los nodos del circuito. En la figura 7.19 se ha representado el circuito equivalente para esta condición de operación. Es interesante destacar que es muy parecido al circuito de la figura 7.13, haciendo la salvedad de que en este caso queda en serie con el circuito la impedancia de secuencia cero. La conexión de la impedancia de secuencia cero en serie con el circuito equivalente, reduce un poco las corrientes y tensiones sobre las redes de secuencia. Esto limita aun más el par de cada secuencia, pero la solución se asemeja mucho a la presentada en el gráfico de la figura 7.14, correspondiente a la pérdida del fusible de la fase "a" de la máquina sin neutro conectado a la red. En estas condiciones, tampoco existe par eléctrico de arranque.

7.6. Armónicas temporales en la máquina de inducción

En la modelación de la máquina de inducción se ha considerado que las fuentes que alimentan la máquina de inducción pueden o no ser balanceadas, pero contienen una sola frecuencia, que se denomina componente fundamental. En los procesos industriales, se utilizan frecuentemente convertidores electrónicos de potencia para la regulación y el control. Estos equipos pueden introducir contenido armónico en las fuentes de alimentación de las máquinas. Cuando están presentes armónicas temporales en la excitación es necesario realizar consideraciones adicionales en el modelo para poder realizar análisis de la respuesta de la máquina.

La simetría de las ondas de excitación inscriben el rango de las armónicas a los múltiplos impares de la componente de frecuencia industrial, o componente fundamental. Las armónicas temporales más frecuentes en los sistemas eléctricos de potencia son las siguientes:

Armónica	1 ^a	3 ^a	5 ^a	7 ^a	9 ^a	11 ^a	13 ^a
frecuencia	ω_e	$3\omega_e$	$5\omega_e$	$7\omega_e$	$9\omega_e$	$11\omega_e$	$13\omega_e$

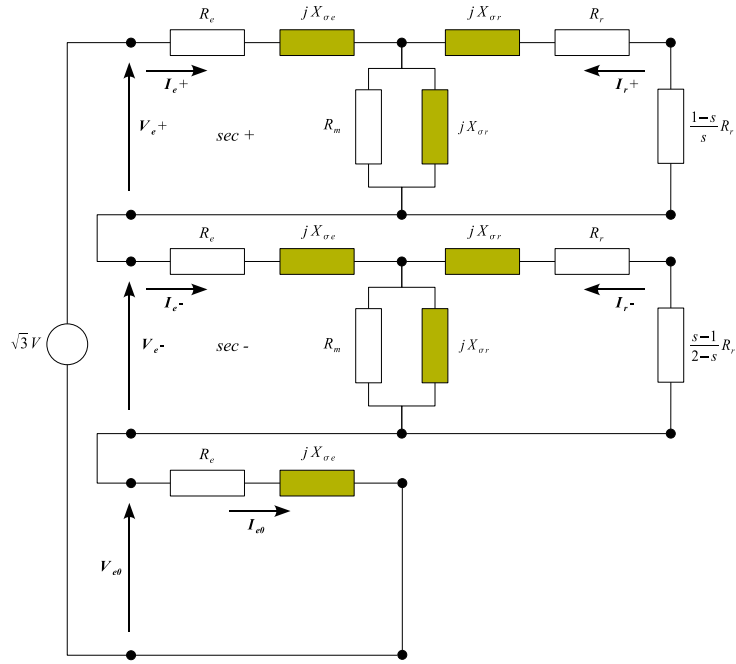


Figura 7.19 Circuito equivalente de la operación con las fases "b" y "c" abiertas y con neutro conectado

A continuación se desarrolla el modelo de la máquina de inducción para cada una de las armónicas más frecuentes. Si el convertidor es lineal, se puede utilizar el principio de superposición para determinar la respuesta completa de la máquina.

7.6.1. Sistema de terceras armónicas $3\omega_e$

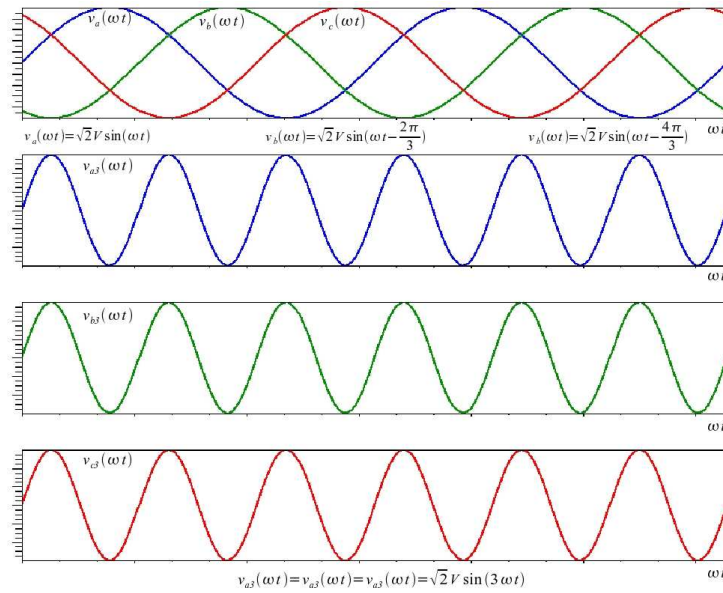
En la figura 7.20 se presenta un sistema trifásico de tensiones, de primera y tercera armónica. Si el sistema de primera armónica o fundamental es balanceado, las terceras armónicas se encuentran en fase. Las terceras armónicas de un sistema trifásico se encuentran en fase. Un sistema de tres tensiones en fase se comporta exactamente igual que un sistema de secuencia cero. Al estar en fase las tensiones, los flujos por las tres bobinas son iguales y se anulan en el entrehierro de la máquina. El circuito de secuencia cero de la máquina de inducción modela adecuadamente este tipo de excitación, si se tiene en cuenta que las reactancias se incrementan en un factor de tres. La resistencia del modelo no se altera, siempre y cuando sea posible despreciar el efecto pelicular en los conductores.

7.6.2. Sistema de quintas armónicas $5\omega_e$

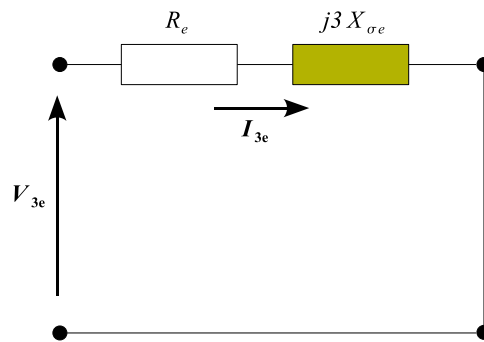
Un sistema de tensiones trifásicas de quinta armónica tiene la siguiente estructura:

$$V_{a5}(\omega_e t) = \sqrt{2}V_5 \sin 5(\omega_e t) = \sqrt{2}V_5 \sin(5\omega_e t) \quad (7.32)$$

$$V_{b5}(\omega_e t) = \sqrt{2}V_5 \sin 5(\omega_e t - \frac{2\pi}{3}) = \sqrt{2}V_5 \sin(5\omega_e t - \frac{4\pi}{3}) \quad (7.33)$$



(a) sistema de terceras armónicas



(b) Modelo de terceras armónicas

Figura 7.20 Sistema de terceras armónicas temporales y modelo de la máquina

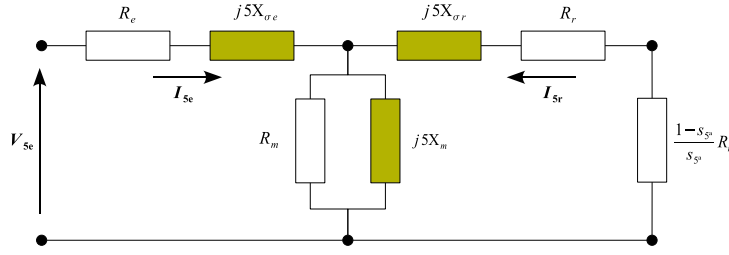


Figura 7.21 Circuito equivalente de la máquina de inducción excitada por quinta armónica

$$V_{c5}(\omega_e t) = \sqrt{2}V_5 \sin 5(\omega_e t - \frac{4\pi}{3}) = \sqrt{2}V_5 \sin(5\omega_e t - \frac{2\pi}{3}) \quad (7.34)$$

Estas tensiones corresponden a un sistema de secuencia negativa. Un sistema trifásico, sinusoidal y balanceado de quintas armónicas se comporta como un sistema de secuencia negativa. Cuando se alimentan las bobinas de una máquina trifásica con este sistema de tensiones, se produce un campo magnético rotatorio de secuencia negativa. El modelo de la máquina en este caso es el circuito equivalente de la máquina en secuencia negativa, amplificando las reactancias por cinco y calculando el deslizamiento correspondiente a la quinta armónica mediante la siguiente relación:

$$s_{5a} = \frac{-5\omega_e - \omega_r}{-5\omega_e} = \frac{5\omega_e + \omega_r}{5\omega_e} = 1 + \frac{\omega_r}{5\omega_e} = \frac{6 - s_{1a}}{5} \quad (7.35)$$

El par eléctrico producido por las quintas armónicas tiene la misma dirección que el campo magnético rotatorio producido por estas componentes, es contrario a las agujas del reloj. En la figura 7.21 se presenta el circuito equivalente de una máquina de inducción alimentada por un sistema trifásico balanceado de tensiones de quinta armónica. Las resistencias del estator y rotor se pueden mantener constantes, mientras que el efecto pelicular no sea importante. La resistencia de magnetización para estas frecuencias se puede corregir para considerar el incremento de pérdidas en el hierro por incremento de la frecuencia de excitación.

7.6.3. Sistema de séptimas armónicas $7\omega_e$

El sistema de tensiones trifásicas de séptimas armónica tiene la siguiente estructura:

$$V_{a7}(\omega_e t) = \sqrt{2}V_7 \sin 7(\omega_e t) = \sqrt{2}V_7 \sin(7\omega_e t) \quad (7.36)$$

$$V_{b7}(\omega_e t) = \sqrt{2}V_7 \sin 7(\omega_e t - \frac{2\pi}{3}) = \sqrt{2}V_7 \sin(7\omega_e t - \frac{2\pi}{3}) \quad (7.37)$$

$$V_{c7}(\omega_e t) = \sqrt{2}V_7 \sin 7(\omega_e t - \frac{4\pi}{3}) = \sqrt{2}V_7 \sin(7\omega_e t - \frac{4\pi}{3}) \quad (7.38)$$

Estas tensiones corresponden a un sistema de secuencia positiva. Un sistema trifásico balanceado de séptimas armónicas se comporta como un sistema de secuencia positiva. Cuando se alimentan las bobinas de una máquina trifásica con este sistema de tensiones, se produce un campo magnético rotatorio de secuencia positiva. El modelo de la máquina en este caso es el circuito equivalente en secuencia positiva, amplificando siete veces las reactancias y calculando

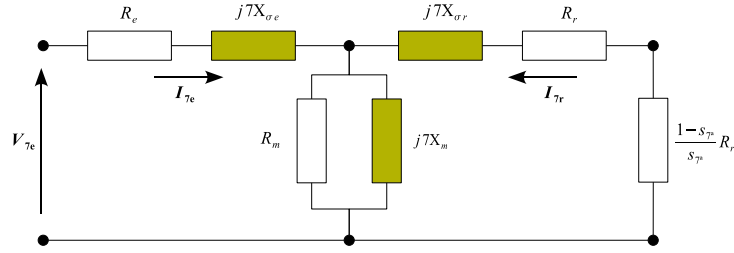


Figura 7.22 Circuito equivalente de la máquina de inducción excitada por séptima armónica

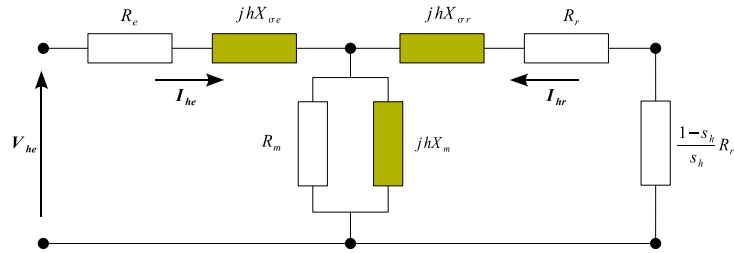


Figura 7.23 Circuito equivalente para la armónica de orden "h" de secuencia positiva o negativa

el deslizamiento correspondiente a la séptima armónica mediante la siguiente relación:

$$s_{7a} = \frac{7\omega_e - \omega_r}{7\omega_e} = \frac{6 + s_{1a}}{7} \quad (7.39)$$

El par eléctrico producido por las séptimas armónicas tiene la misma dirección que el campo magnético rotatorio producido por estas componentes, gira en el mismo sentido de las agujas del reloj. En la figura 7.22 se presenta el circuito equivalente de una máquina de inducción alimentada por un sistema trifásico balanceado de tensiones de séptima armónica. Las resistencias del estator y rotor se pueden mantener constantes, mientras que el efecto pelicular no sea importante. La resistencia de magnetización para estas frecuencias se puede corregir para considerar el incremento de pérdidas en el hierro por incremento de la frecuencia de excitación.

7.6.4. Sistema armónico de orden "h" $h\omega_e$

Conocidos los modelos de primera, tercera, quinta y séptima armónica, es posible identificar la generalización del modelo para cualquier armónica impar de orden "h". El circuito equivalente que modela el comportamiento de una máquina de inducción trifásica, excitada mediante una fuente armónica de orden "h" se ha representado en la figura 7.23. Como en los casos anteriores, las reactancias crecen proporcionalmente al orden de la armónica, las resistencias son constantes mientras que pueda ser despreciado el efecto pelicular y el incremento de pérdidas en el hierro. Es importante destacar que aun cuando las pérdidas en el hierro crecen con la frecuencia, la densidad de flujo decrece según la ley de Faraday, atenuando este incremento.

Para calcular el deslizamiento correspondiente a la armónica "h", s_h , es necesario determinar si una armónica es de secuencia positiva, negativa o cero. Todas las armónicas múltiplos de tres en un sistema trifásico son de secuencia cero, y como no producen campo magnético rotatorio,

no contribuyen a la producción de par eléctrico. El resto de las armónicas impares producen pares eléctricos positivos o negativos según sea la secuencia del sistema armónico que genera el campo magnético rotatorio.

Para que una armónica de orden "h" en un sistema trifásico sea de secuencia positiva, se debe cumplir la siguiente relación:

$$\frac{2\pi}{3}h = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \Rightarrow h = (2n - 1) = 1 + 3k \Rightarrow n = 1 + \frac{3k}{2} \quad (7.40)$$

Como "h" debe ser un número impar, "n" debe pertenecer a los número naturales, esto implica que "k" debe ser múltiplo de dos:

$$k = 2m ; \forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 1 + 3m \Rightarrow h = 6m + 1 ; \forall m \in \mathbb{N} \quad (7.41)$$

Para que una armónica de orden "h" en un sistema trifásico sea de secuencia negativa, se debe cumplir la relación siguiente:

$$\frac{2\pi}{3}h = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k \Rightarrow h = (2n - 1) = 2 + 3k \Rightarrow n = \frac{3(k + 1)}{2} \quad (7.42)$$

Como "h" debe ser un número impar, "n" debe pertenecer a los número naturales, y esto implica que "k + 1" debe ser múltiplo de dos:

$$k + 1 = 2m ; \forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 3m \Rightarrow h = 6m - 1 ; \forall m \in \mathbb{N}, m \neq 0 \quad (7.43)$$

En resumen:

Armónicas de secuencia positiva: $h = 6m + 1, m = 0, 1, 2, \dots$

Armónicas de secuencia negativa: $h = 6m - 1, m = 1, 2, 3, \dots$

El deslizamiento de una armónica de secuencia positiva se calcula mediante la siguiente expresión:

$$s_{h+} = \frac{h_+\omega_e - \omega_r}{h_+\omega_e} = \frac{h_+\omega_e - (1 - s_{1a})\omega_e}{h_+\omega_e} = \frac{h_+ - 1 + s_{1a}}{h_+} \quad (7.44)$$

y el deslizamiento para una armónica de secuencia negativa según la expresión:

$$s_{h-} = \frac{-h_-\omega_e - \omega_r}{-h_-\omega_e} = \frac{h_-\omega_e + \omega_r}{h_-\omega_e} = \frac{h_- + 1 - s_{1a}}{h_-} \quad (7.45)$$

Como aplicación del modelo de armónicas temporales de la máquina de inducción se puede evaluar la característica par-deslizamiento de un convertidor alimentado mediante una fuente trifásica balanceada de tensión periódica, no sinusoidal. Un de los casos más frecuentes que aparecen en la práctica se muestra en la figura 7.24, y corresponde a la salida de un inversor trifásico sin modulación de pulso.

Si se calcula la distribución armónica de la fuente, mediante la descomposición en series de Fourier, o con el algoritmo rápido de la transformada de Fourier⁸, se obtiene el espectro representado

⁸FFT.

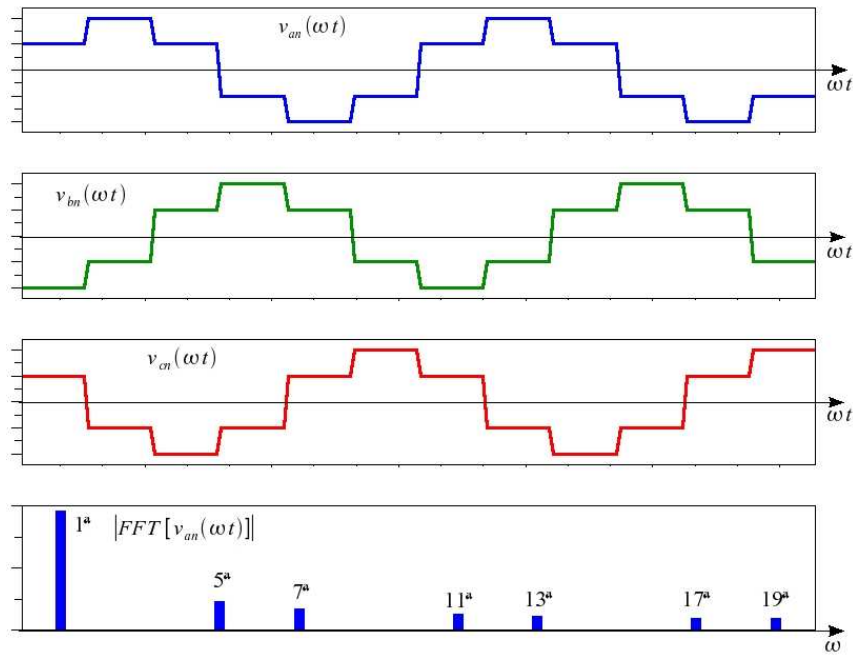


Figura 7.24 Tensiones de alimentación aplicadas a una máquina de inducción y su correspondiente espectro armónico

<i>Frecuencia</i>	$1 \times \omega$	$5 \times \omega$	$7 \times \omega$	$11 \times \omega$	$13 \times \omega$	$17 \times \omega$	$19 \times \omega$
<i>Amplitud</i>	0,955	0,192	0,138	0,089	0,076	0,059	0,054

Tabla 7.1 Amplitud de las tensiones armónicas del sistema de tensiones presentado en la figura 7.24

en el último gráfico de la figura 7.24. Los valores de las diferentes componentes armónicas de la tensión de alimentación, obtenidos utilizando el algoritmo FFT, se resumen en la tabla 7.1.

Mediante el espectro armónico se determinan las contribuciones al par eléctrico de las principales armónicas, utilizando el circuitos equivalente ilustrado en la figura 7.23 correspondiente al orden armónico considerado. Como en el caso considerado, las componentes armónicas son reducidas con respecto a la componente fundamental, el par eléctrico total es prácticamente igual al par eléctrico producido por la primera armónica de la fuente. En la figura 7.25 se han representado las contribuciones al par eléctrico de las armónicas consideradas, con respecto al deslizamiento s . El par eléctrico total T_T se ha escalado por 100 para poder destacar las componentes armónicas. La reducción de los pares armónicos en la máquina se debe principalmente a dos factores: la reducción de la tensión armónica que afecta cuadráticamente al par y el orden armónico que incrementa linealmente las reactancias, reduciendo aún más el par eléctrico para esa armónica de tensión. De este hecho, se deduce que la máquina de inducción se comporta como un filtro pasabajo, atenuando los pares eléctricos producidos por excitaciones de alta frecuencia. Un comportamiento similar, pero no tan acentuado, ocurre con las corrientes.

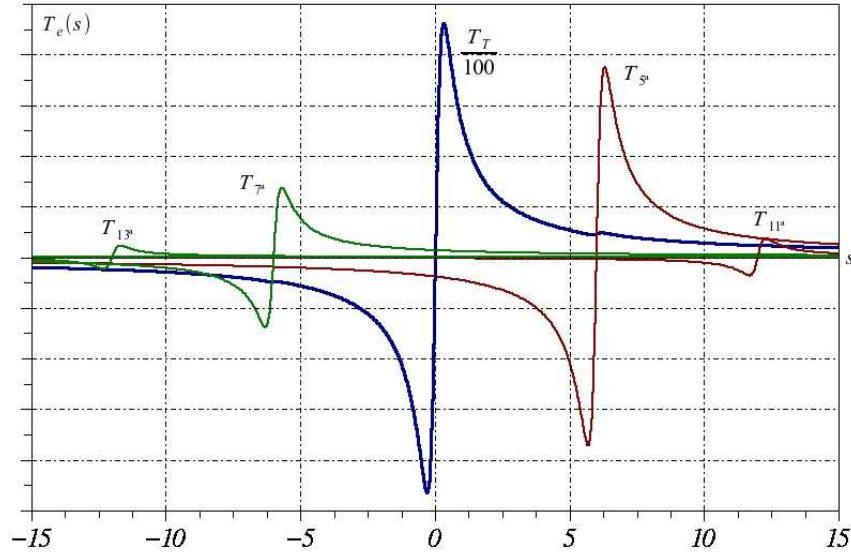


Figura 7.25 Distribución armónica del par eléctrico total

7.7. Armónicas espaciales en la máquina de inducción

Los conductores en el interior de la máquina se encuentran repartidos dentro de las ranuras. La distribución de los conductores se realiza para producir fuerzas magnetomotrices sinusoidales en el espacio. Como las ranuras se reparten uniformemente en la periferia, junto con la componente fundamental de la fuerza magnetomotriz, aparecen otras componentes. Los modelos de la máquina desarrollados hasta el momento, consideran que la distribución del campo es sinusoidal en el espacio. En esta sección se analizan las causas y consecuencias de la presencia de armónicas espaciales en el interior de la máquina.

El caso más simple de distribución de los conductores en una máquina se presenta en la figura 7.26. Se muestra un estator con dos ranuras, por una entran los conductores de la bobina y por la otra ranura salen los retornos. La fuerza magnetomotriz originada por esta máquina, se calcula mediante la ley circuital de Ampère y se expresa de la siguiente forma:

$$\mathcal{F}(\theta) = \begin{cases} Ni, & \text{si } 0 \leq \theta < \pi \\ -Ni, & \text{si } \pi \leq \theta < 2\pi \end{cases} \quad (7.46)$$

La fuerza magnetomotriz 7.46 se puede expresar en series de Fourier mediante la siguiente relación:

$$\mathcal{F}(\theta) = \frac{4}{\pi} Ni \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)\theta}{2k-1} \quad (7.47)$$

Suponiendo que a la bobina de esta máquina se le inyecta corriente sinusoidal a una sola frecuencia:

$$\mathcal{F}(\theta, t) = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} NI \sin(\omega_e t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)\theta}{2k-1} \quad (7.48)$$

La expresión 7.48 determina la fuerza magnetomotriz en el espacio y en el tiempo, producida

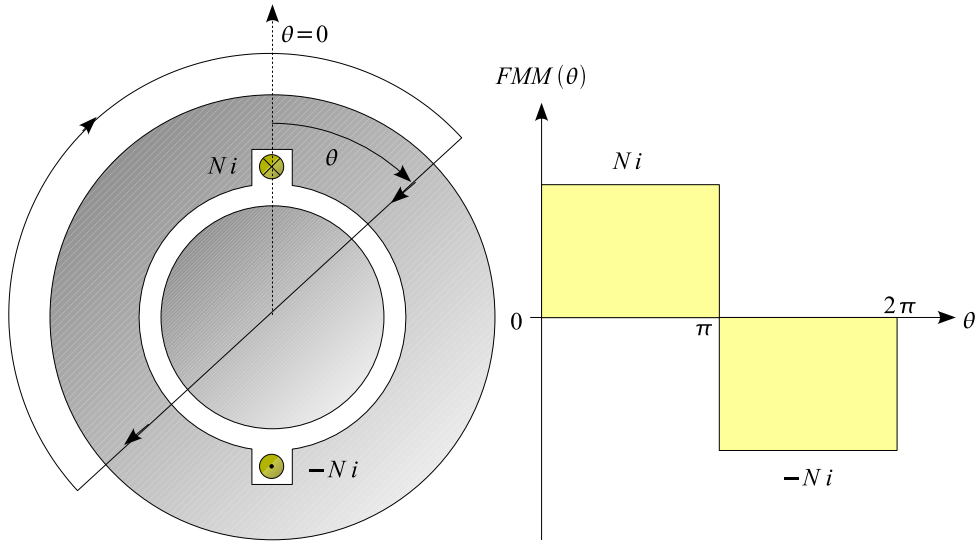


Figura 7.26 Distribución de la fuerza magnetomotriz en una máquina con dos ranuras

por una bobina concentrada. Si la máquina posee m fases, espaciadas unas de otras un ángulo de $\frac{2\pi}{m}$ y se inyecta a cada fase una corriente sinusoidal de igual magnitud y frecuencia, pero desfasada temporalmente el mismo ángulo espacial de la bobina, la fuerza magnetomotriz para la bobina genérica q es:

$$\mathcal{F}_q(\theta, t) = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} NI \sin(\omega_e t - \frac{2\pi}{m} q) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin[(2k-1)(\theta - \frac{2\pi}{m} q)]}{2k-1} \quad (7.49)$$

Incluyendo el término sinusoidal temporal de la expresión anterior en la sumatoria y descomponiendo el producto de los senos en suma de cosenos, se obtiene el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_q(\theta, t) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} NI \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \left\{ \cos \left[\omega_e t - \theta(2k-1) - \frac{4\pi}{m}(1-k)q \right] + \dots \right. \\ \left. \dots - \cos \left[\omega_e t + \theta(2k-1) - \frac{4\pi}{m}kq \right] \right\} \end{aligned} \quad (7.50)$$

La expresión anterior indica que la fuerza magnetomotriz que produce cada bobina se descompone en infinitos campos magnéticos rotatorios de secuencia positiva y de secuencia negativa. La velocidad de fase de cada uno de estos campos es un sub-armónico de la frecuencia de las corrientes inyectadas en las bobinas.

La fuerza magnetomotriz resultante en el entrehierro se obtiene al sumar las contribuciones de las m fases:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_T(\theta, t) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} NI \sum_{q=0}^{m-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \left\{ \cos \left[\omega_e t - \theta(2k-1) - \frac{4\pi}{m}(1-k)q \right] + \dots \right. \\ \left. \dots - \cos \left[\omega_e t + \theta(2k-1) - \frac{4\pi}{m}kq \right] \right\} \end{aligned} \quad (7.51)$$

Si $\frac{2(1-k)}{m}$ es un número entero, la superposición de las m fuerzas magnetomotrices de secuencia positiva se encuentran en fase para cada una de las armónicas espaciales. Por otra parte si $\frac{2k}{m}$ es un número entero, entonces las fuerzas magnetomotrices de secuencia negativa son las que están en fase para cada uno de los órdenes armónicos. Cuando no se cumplen estas condiciones, se superponen m cosenos por cada armónica igualmente desfasados unos de otro y la sumatoria de estos término m bobinas:

$$\mathcal{F}_{T_{2k-1}}(\theta, t) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} mNI \frac{\cos[\omega_e t - \theta(2k-1)]}{2k-1} ; \text{ si } 2\frac{1-k}{m} \in \mathbb{Z} \quad (7.52)$$

$$\mathcal{F}_{T_{2k-1}}(\theta, t) = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} mNI \frac{\cos[\omega_e t + \theta(2k-1)]}{2k-1} ; \text{ si } \frac{2k}{m} \in \mathbb{Z} \quad (7.53)$$

$$\mathcal{F}_{T_{2k-1}}(\theta, t) = 0 ; \text{ si } 2\frac{1-k}{m} \notin \mathbb{Z} \wedge \frac{2k}{m} \notin \mathbb{Z} \quad (7.54)$$

La fuerza magnetomotriz armónica 7.52 produce un campo magnético rotatorio de secuencia positiva cuya velocidad de fase es:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\omega_e}{2k-1} \quad (7.55)$$

La fuerza magnetomotriz armónica 7.53 produce un campo magnético rotatorio de secuencia negativa y su velocidad de fase es:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\omega_e}{2k-1} \quad (7.56)$$

Las armónicas espaciales generan campos magnéticos rotatorios que giran a velocidades que son submúltiplos de la velocidad sincrónica. Las armónicas espaciales se comportan en el interior de la máquina, como si esta tuviera el número de pares de polos correspondiente al orden de la armónica. La amplitud de cada armónica depende de la distribución de las bobinas en las ranuras de la máquina. En una máquina cuyas bobinas se encuentran concentradas en un par de ranuras, la amplitud de la fuerza magnetomotriz disminuye directamente con el orden de la armónica, el par eléctrico se calcula a partir del producto de las fuerzas magnetomotrices y por esta razón disminuye con el cuadrado del orden de la armónica espacial correspondiente.

En las máquinas reales, las bobinas de cada fase se distribuyen en varias ranuras y el contenido armónico espacial se puede reducir aun más. Además es posible eliminar algunas armónicas mediante el acortamiento de paso⁹. Este acortamiento reduce la contribución de las fuerzas electromotrices producidas por las bobinas. El factor de paso en una bobina con acortamiento de paso γ para la primera armónica espacial es:

$$k_{p1} = \cos \frac{\gamma}{2} \quad (7.57)$$

La armónica espacial $2k-1$ se repite $2k-1$ veces en el interior de la máquina. A cada período espacial de repetición del campo armónico le corresponde un ángulo mecánico igual a $\frac{2\pi}{2k-1}$. Desde el punto de vista de las armónicas espaciales, el acortamiento de paso es un ángulo $2k-1$

⁹El retorno de cada bobina se realiza en un ángulo inferior a 180° .

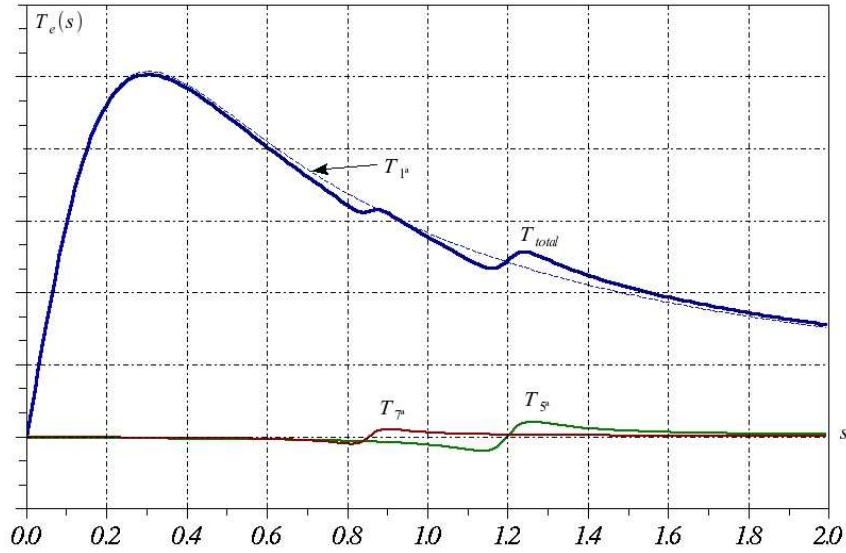


Figura 7.27 Efecto de las componentes armónicas espaciales en el par eléctrico

veces mayor. Por esta razón se tiene:

$$k_{p(2k-1)} = \cos \frac{(2k-1)\gamma}{2} \quad (7.58)$$

Para eliminar la fuerza magnetomotrices correspondiente a una armónica determinada, se puede utilizar la relación 7.58. Si se quiere eliminar la armónica $2k-1$, se tiene:

$$k_{p(2k-1)} = \cos \frac{(2k-1)\gamma}{2} = 0 \Rightarrow \frac{(2k-1)\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{2k-1} \quad (7.59)$$

En la figura 7.27 se muestra la característica par eléctrico-deslizamiento de una máquina de inducción trifásica, con las bobinas de cada fase concentradas en un par de ranuras. También se han representado en el mismo gráfico las contribuciones al par eléctrico de la quinta y séptima armónica espacial. En las máquinas reales, estos efectos se ven reducidos considerablemente por la distribución de los conductores en la periferia de la máquina.

7.8. La máquina de inducción bifásica

En el sector industrial, comercial y residencial se utiliza una gran variedad de máquinas de inducción monofásicas. Estas máquinas se encuentran en el rango de potencia comprendido entre fracciones de kW y un máximo de $2 kW$ aproximadamente. Accionan electrodomésticos, bombas, ventiladores, extractores, compresores, cadenas de montaje, transporte de materias primas, etc. Aun cuando se les denomina máquinas monofásicas, este nombre se refiere a la fuente de alimentación, porque en su estructura interna deben poseer al menos dos fases¹⁰ para que sea posible producir par eléctrico a cualquier deslizamiento.

¹⁰Generalmente ortogonales para maximizar la producción del par eléctrico.

Una máquina monofásica, produce un campo magnético pulsante cuando se excita su devanado con corriente alterna. En una máquina bifásica, las fases se encuentran a 180° y el campo magnético que producen las corrientes¹¹ inyectadas en estas dos bobinas, también son pulsantes. El caso trifásico no requiere explicaciones adicionales porque ha sido analizado en detalle a lo largo del texto.

La máquina tetrafásica es muy peculiar e interesante, posee cuatro fases separadas espacialmente unas de otras 90° . Las corrientes balanceadas, inyectadas en una máquina tetrafásica, también están desfasadas en 90° en el tiempo. Estos dos hechos implican que las bobinas a y c producen flujos iguales, y con las bobinas b y d sucede exactamente lo mismo. En definitiva existen dos grados de libertad, se genera campo en la dirección de las bobinas a y c , o en la dirección de las bobinas b y d . La máquina bifásica convencional, es una máquina tetrafásica donde tanto las fases a y c , como las fases b y d están conectadas en serie.

La máquina bifásica desarrollada a partir de una máquina tetrafásica, funciona en régimen equilibrado, exactamente igual que una máquina trifásica convencional. En la práctica es frecuente operar estas máquinas con una fuente monofásica. Esto produce desequilibrios en la máquina que deben ser analizados mediante las transformaciones de componentes simétricas. En esta sección se particularizará la teoría de las componentes simétricas para el análisis de la máquina de inducción bifásica.

Un sistema lineal puede ser analizado mediante la formulación de un sistema de ecuaciones lineales. Esta formulación expresa las interrelaciones existentes entre las diferentes variables de estado del sistema y generalmente estas variables pueden estar fuertemente interrelacionadas. Se dice en esta situación que el sistema de ecuaciones está acoplado. En los sistemas lineales algebraicos es relativamente sencillo invertir la matriz de acoplamientos, para calcular las variables de interés. En los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, esta técnica es más compleja. El análisis modal mediante autovalores y autovectores, permite desacoplar un sistema lineal de n ecuaciones diferenciales de primer orden, en n sistemas completamente independientes.

En la modelación de las máquinas de inducción aparecen siempre acoplamientos que pueden ser expresados mediante matrices cíclicas¹². La diagonalización de estas matrices mediante métodos modales es de gran utilidad práctica. El caso trifásico puede orientar sobre la generalización de este método al caso tetrafásico. Para diagonalizar una matriz cíclica trifásica se deben obtener en primer lugar los tres autovalores asociados:

$$\det([C] - \gamma [I]) = 0 \Rightarrow \det \begin{bmatrix} a - \gamma & b & c \\ c & a - \gamma & b \\ b & c & a - \gamma \end{bmatrix} = 0$$

$$(a - \gamma)^2 + b^2 + c^2 - 3bc(a - \gamma) = 0$$

$$\gamma_0 = a + b + c \quad (7.60)$$

$$\gamma_1 = a + be^{j\frac{2\pi}{3}} + ce^{j\frac{4\pi}{3}} \quad (7.61)$$

¹¹Bifásicas equilibradas: $I_a = I$, $I_b = -I$.

¹²También aparecen matrices completamente simétricas que pueden ser un caso particular de las cíclicas. En el sistema de ecuaciones 6.1 se pueden destacar estos tipos de matrices.

$$\gamma_1 = a + be^{j\frac{4\pi}{3}} + ce^{j\frac{2\pi}{3}} \quad (7.62)$$

La matriz de autovectores asociada con la matriz cíclica es la transformación hermitiana de componentes simétricas:

$$([C] - \gamma[I])[V]; [V] = [[V_1] [V_2] [V_3] \cdots [V_n]]$$

$$[V] = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \\ 1 & e^{j\frac{4\pi}{3}} & e^{j\frac{2\pi}{3}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \alpha^2 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha = e^{j\frac{2\pi}{3}} \quad (7.63)$$

Siguiendo un procedimiento similar al realizado en 7.60 a 7.63 permite determinar la transformación de componentes simétricas tetrafásicas, corresponde a la matriz de autovalores de la matriz cíclica tetrafásica:

$$\det([C] - \gamma[I]) = 0 \Rightarrow \det \begin{bmatrix} a - \gamma & b & c & d \\ d & a - \gamma & b & c \\ c & d & a - \gamma & b \\ b & c & d & a - \gamma \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\gamma_0 = a + b + c + d \quad (7.64)$$

$$\gamma_1 = a + be^{j\frac{\pi}{2}} + ce^{j2\frac{\pi}{2}} + de^{j3\frac{\pi}{2}} = (a - c) + j(b - d) \quad (7.65)$$

$$\gamma_2 = a + be^{j2\frac{\pi}{2}} + ce^{j4\frac{\pi}{2}} + de^{j6\frac{\pi}{2}} = a - b + c - d \quad (7.66)$$

$$\gamma_3 = a + be^{j3\frac{\pi}{2}} + ce^{j6\frac{\pi}{2}} + de^{j9\frac{\pi}{2}} = (a - c) + j(d - b) \quad (7.67)$$

100

La matriz hermitiana de autovectores correspondiente es:

$$[V] = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{j\frac{\pi}{2}} & e^{j2\frac{\pi}{2}} & e^{j3\frac{\pi}{2}} \\ 1 & e^{j2\frac{\pi}{2}} & e^{j4\frac{\pi}{2}} & e^{j4\frac{\pi}{2}} \\ 1 & e^{j3\frac{\pi}{2}} & e^{j6\frac{\pi}{2}} & e^{j9\frac{\pi}{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} \quad (7.68)$$

La primera y tercera fila de la matriz de autovalores 7.68 determinan las dos posibles componentes de secuencia cero de un sistema tetrafásico. La segunda fila define la componente de secuencia positiva. La última fila de la expresión 7.68 determina la componente de secuencia negativa en el sistema tetrafásico. Esta información se deduce aplicando la transformación a un vector de entrada de la secuencia adecuada. Por ejemplo, si se desea demostrar que la segunda fila genera la secuencia positiva, se aplica la transformación al vector de secuencia positiva:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \\ -1 \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.69)$$

En las máquinas bifásicas de inducción la corriente de la fase a está en oposición con la fase

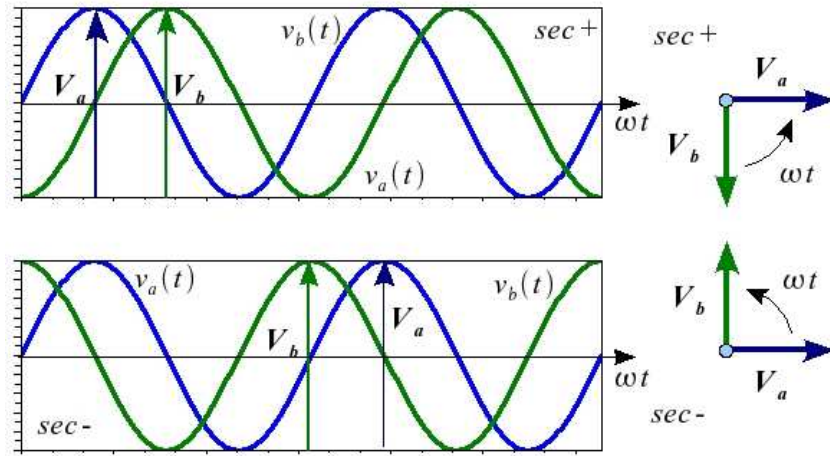


Figura 7.28 Fasores de secuencia positiva y negativa en un sistema bifásico equilibrado

c y la corriente de la fase b en oposición a la de la fase d . Incluyendo estas condiciones de contorno en la transformación 7.69, y escogiendo los coeficientes apropiadamente para que la nueva transformación sea hermitiana, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ -x_a \\ -x_b \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2j \\ 0 & 0 \\ 2 & -2j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_+ \\ x_- \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} \quad (7.70)$$

$$\begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_+ \\ x_- \end{bmatrix} \quad (7.71)$$

Las expresiones 7.70 y 7.71, se conocen como la transformación directa e inversa de componentes simétricas bifásicas. En la figura -169- se presentan dos grupos de fasores, el de la izquierda gira en secuencia positiva y el de la derecha en secuencia negativa.

Si a los devanados de la máquina bifásica de inducción se les aplican tensiones bifásicas desequilibradas, la expresión 7.70 permite descomponer en secuencia positiva y negativa las tensiones de fase. Como la máquina bifásica equilibrada no se diferencia en su comportamiento de la máquina de inducción trifásica equilibrada. Las redes de secuencia de la máquina bifásica son iguales a las redes de secuencia positiva y negativa de una máquina trifásica. En la figura 7.29 se presenta una aplicación de la máquina bifásica de inducción para el control de velocidad. Mediante un transformador con relación variable, se puede ajustar la tensión de alimentación en una de las fases de la máquina. Este control permite ajustar el par y la velocidad del motor.

Las tensiones de secuencia en la máquina de la figura 7.29 son:

$$\begin{bmatrix} V_+ \\ V_- \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \angle 0^\circ \\ kV \angle -90^\circ \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1+k \\ 1-k \end{bmatrix} V \quad (7.72)$$

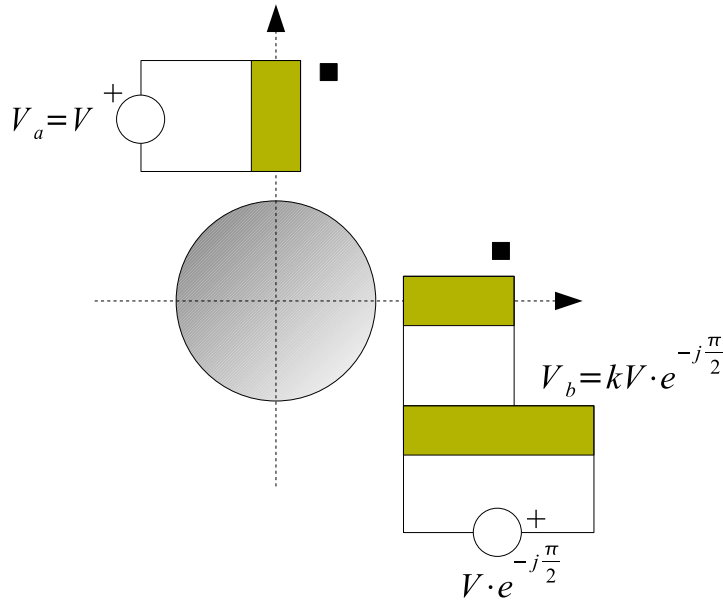


Figura 7.29 Control de par eléctrico mediante una máquina de inducción bifásica

Variando la relación de transformación k se controla el par eléctrico de la máquina. Cuando $k = 1$, el sistema está alimentado sólo por secuencia positiva. A medida que k disminuye, aumenta el par de secuencia negativa reduciendo el par efectivo. Si el valor de k invierte su polaridad, la máquina girará en sentido contrario. Los deslizamientos de secuencia positiva y negativa se calculan con la misma metodología empleada en la máquina trifásica $s_+ + s_- = 2$. El par se evalúa superponiendo las contribuciones de secuencia positiva y negativa, obtenidas mediante los circuitos equivalentes de la secuencia correspondiente.

En la página 276 se analizó el comportamiento de una máquina de inducción trifásica con las fases b y c desconectadas. Esta máquina no produce par de arranque, pero es capaz de mantener par eléctrico en puntos de operación cuyos deslizamientos estén próximos a cero. Este hecho es utilizado para operar las máquinas de inducción alimentadas mediante redes monofásicas. El arranque de estos motores implica consideraciones adicionales que serán discutidas posteriormente.

En la figura 7.30 se presenta el esquema de una máquina monofásica de inducción y la distribución de la fuerza magnetomotriz producida por una corriente sinusoidal que circulan por su bobina. La forma de la fuerza magnetomotriz se mantiene constante, pero la magnitud varía en el tiempo, proporcional a la corriente inyectada instantáneamente. La fuerza magnetomotriz producida por esta máquina es pulsante, se mantiene la forma en el espacio, pero varía su amplitud en el tiempo. Un campo pulsante se pueden descomponer en dos campos rotantes con velocidades de fase contrarias:

$$\mathcal{F}_a(\theta, t) = Ni_a(\omega_e t) \cos \theta = \sqrt{2}NI \cos(\omega_e t) \cos \theta \Rightarrow$$

$$\mathcal{F}_a(\theta, t) = \frac{\sqrt{2}NI}{2} [\cos(\omega_e t - \theta) + \cos(\omega_e t + \theta)] \quad (7.73)$$

En la figura 7.30 se muestra como la composición de dos fuerzas magnetomotrices rotatorias, de

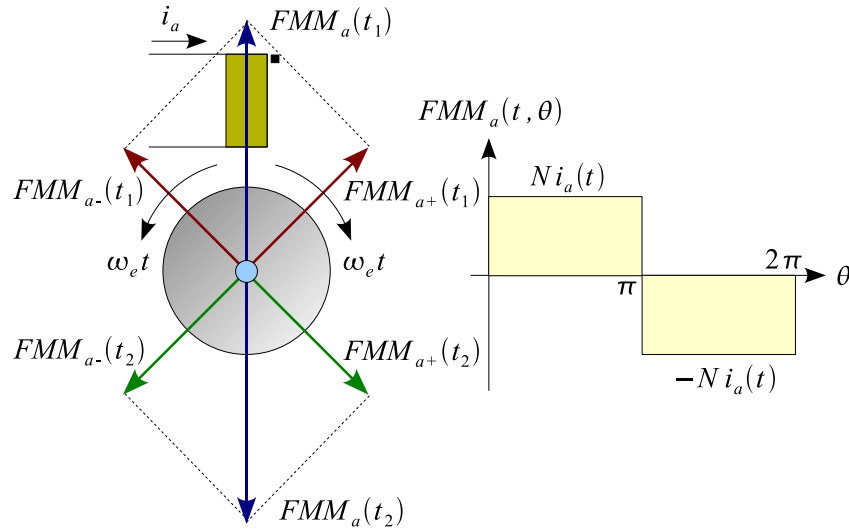


Figura 7.30 Descomposición de la fuerza magnetomotriz pulsante en dos rotantes

sentidos de giro contrarios e iguales en amplitud, producen una fuerza magnetomotriz pulsante.

La descomposición de la fuerza magnetomotriz pulsante en dos fuerzas magnetomotrices rotantes iguales y contrapuestas en su sentido de giro, permite obtener un circuito equivalente para la máquina de inducción monofásica. Cada una de las fuerzas magnetomotrices rotantes tiene la mitad de amplitud de la fuerza magnetomotriz pulsante. Las fuerzas electromotrices generadas por cada una de las fuerzas magnetomotrices rotantes, es la mitad de la fuerza electromotriz total en la bobina de la máquina. Durante el arranque ($s = 1$), no existe par eléctrico en la máquina debido a que la componente de secuencia positiva es igual y contraria a la componente de secuencia negativa ($T_e = T_+ - T_- = 0$). Las dos redes de secuencia en esta condición son iguales, y debe circular la misma corriente por cada una de ellas. Las redes de secuencia deben estar conectadas en serie, para garantizar la igualdad de corriente y la superposición de las fuerzas electromotrices. Los parámetros de cada red de secuencia deben ser la mitad de los parámetros de la bobina, para producir la mitad de la fuerza electromotriz de la máquina en cada secuencia, cuando el rotor está detenido. En la figura 7.31 se presenta el circuito equivalente propuesto para la máquina monofásica de inducción.

Las componentes simétricas bifásicas permiten determinar el circuito equivalente de la máquina de inducción monofásica. Conectando una fuente monofásica a la fase a de una máquina bifásica, se obtienen las siguientes condiciones de contorno:

$$V_a = V \angle 0^\circ = V \quad (7.74)$$

$$I_b = 0 \quad (7.75)$$

Transformando las condiciones de contorno 7.74 y 7.75 mediante la transformación de componentes simétricas bifásicas 7.70 se obtienen las siguientes relaciones:

$$V_+ + V_- = Z_+(s)I_+ + Z_-(s)I_- = \sqrt{2}V \quad (7.76)$$

$$I_+ = I_- \quad (7.77)$$

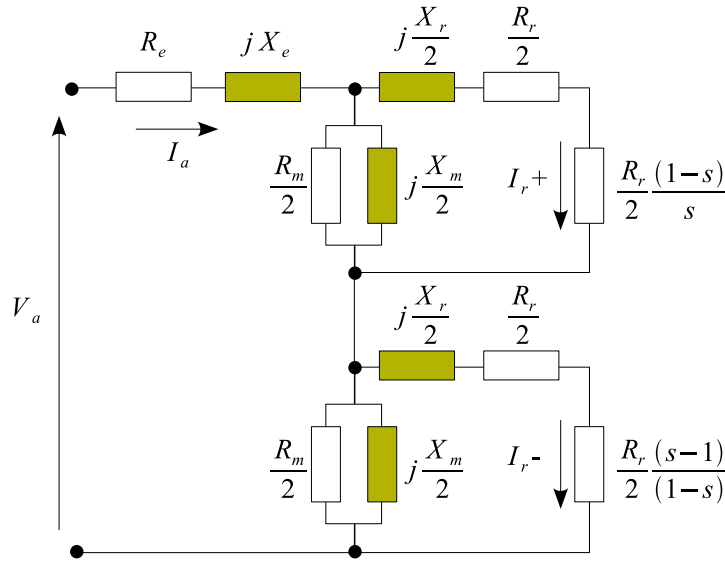


Figura 7.31 Circuito equivalente de la máquina monofásica de inducción

De las expresiones 7.76 y 7.77, aplicando la transformación inversa de componentes simétricas 7.71, se obtiene:

$$\sqrt{2}V = [Z_+(s) + Z_-(s)] I_+ = [Z_+(s) + Z_-(s)] \frac{I_a}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$V = \frac{Z_+(s) + Z_-(s)}{2} I_a \quad (7.78)$$

La expresión 7.78 coincide con el circuito equivalente presentado en la figura 7.31. De esta forma, el razonamiento intuitivo utilizado para obtener este circuito a partir de la descomposición de la fuerza magnetomotriz pulsante en fuerzas magnetomotrices rotantes queda demostrado.

Si el rotor no está detenido, las impedancias de secuencia positiva y negativa son diferentes. Aparece una diferencia en las tensiones de secuencia y en los campos magnéticos rotatorios de secuencia positiva y negativa. La superposición de dos campos magnéticos rotatorios contrarotativos produce un campo pulsante. Si estos campos rotantes difieren en amplitud se obtiene un campo magnético elíptico. En el eje magnético de la bobina, el campo elíptico obtiene una amplitud máxima y a 90° obtiene la amplitud mínima. En la figura 7.32 se muestra la forma del campo magnético elíptico producido durante la operación de la máquina de inducción monofásica.

Cuando el rotor de la máquina está detenido, las dos fuerzas magnetomotrices son iguales, y los pares se neutralizan. Si existe una velocidad en cualquiera de los dos sentidos, el campo pulsante induce fuerza electromotriz en el rotor, esta fuerza electromotriz fuerza la circulación de corriente por este circuito, creando un campo magnético que refuerza una de las componentes y debilita a la otra. En la figura 7.33 se presenta la característica par-deslizamiento de este tipo de máquinas.

Como la máquina de inducción monofásica no puede arrancar por si sola, es necesario utilizar bobinas auxiliares para producir par eléctrico durante el proceso de aceleración de la máquina y

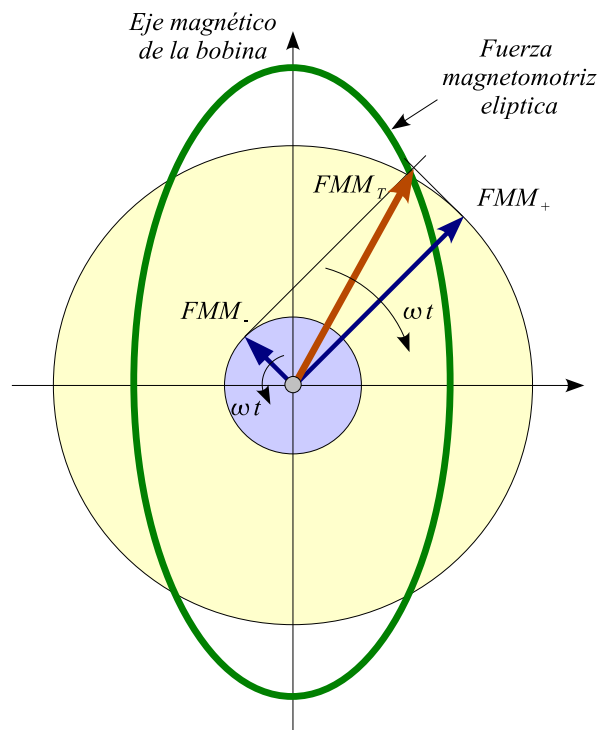


Figura 7.32 Campo magnético elíptico de la máquina monofásica

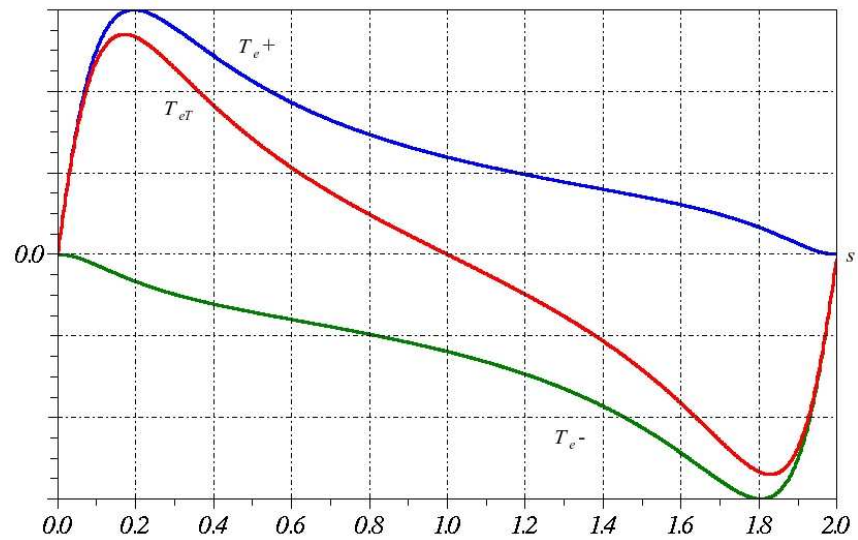


Figura 7.33 Característica par-deslizamiento de la máquina monofásica de inducción

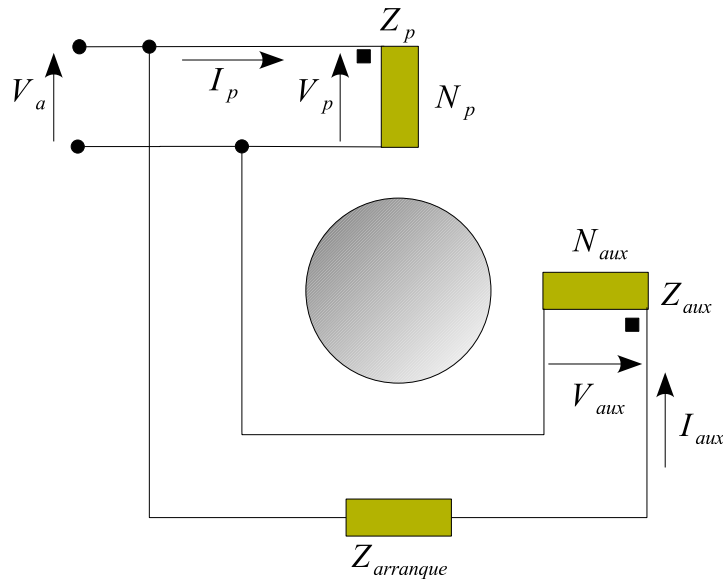


Figura 7.34 Máquina monofásica de inducción con circuito auxiliar de arranque

su carga. Mientras que el rotor de la máquina monofásica está detenido, el campo en el entrehierro es pulsante y no puede producir par. Es necesario un campo rotante, circular ó elíptico para el arranque autónomo de la máquina. Durante la aceleración de la carga mecánica se añade a la máquina de inducción monofásica un bobina auxiliar en cuadratura con la bobina principal. En estas condiciones el funcionamiento corresponde al de una máquina bifásica desequilibrada.

Aun cuando la máquina monofásica posee un devanado auxiliar en cuadratura con el devanado principal, no se puede asociar directamente a una máquina bifásica. La bobina auxiliar es en general, utilizada solamente durante el proceso de arranque y se diseña con una sección mucho menor que la del devanado principal. Una vez que la máquina alcanza una velocidad comprendida entre un 70 y un 80 % de la velocidad sincrónica, un interruptor centrífugo desconecta la bobina auxiliar con la finalidad de aumentar el rendimiento de la máquina en el punto de operación.

Las diferencias físicas entre la bobina auxiliar de arranque y el devanado principal de la máquina, permiten obtener mediante una fuente de tensión monofásica, corrientes diferentes y desfasadas en las dos bobinas. Al estar desfasadas estas corrientes, se produce un campo elíptico y se obtiene par eléctrico. El desfase entre las corrientes se puede incrementar utilizando resistencias, inductancias o condensadores en serie con la bobina auxiliar. Lo más frecuente es conectar condensadores en serie con la bobina auxiliar para producir el máximo desfase posible entre las dos corrientes, incrementando de esta forma el par de arranque. En la figura 7.34 se presenta el diagrama de esta solución.

Las máquinas monofásicas comerciales, requieren condensadores muy grandes durante el arranque ($50 \sim 200 \mu F$). Estos condensadores se diseñan especialmente para que sean económicos, a espesas de producir pérdidas considerables cuando están en operación. Para incrementar el rendimiento de la máquina, se desconecta el condensador de arranque y el devanado auxiliar posteriormente a la aceleración de la carga. Al desconectar el condensador y la bobina auxiliar mediante el interruptor centrífugo, la máquina continúa su operación como motor monofásico.

El análisis de la máquina de inducción monofásica con devanado auxiliar y condensador de arranque se realiza mediante la transformación de componentes simétricas bifásicas, pero es necesario realizar algunas consideraciones previas. Las componentes simétricas diagonalizan sistemas acoplados, cíclicos o simétricos¹³. Esto implica que la red debe ser simétrica, para que los modos de secuencia resulten desacoplados. La máquina de inducción monofásica con devanado auxiliar de arranque no es una máquina simétrica, sus bobinas se diseñan con diferentes número de vueltas. Las resistencias de las bobinas también pueden ser diferentes en ambas bobinas. Para que el método de las componentes simétricas desacople las redes de secuencia es necesario equilibrar la máquina. Para este fin se supone que la máquina está constituida por dos bobinas iguales separadas espacialmente 90°, y que la diferencia en el número de vueltas de la bobina auxiliar se obtiene mediante un transformador externo de relación N_{aux} a N_p . Las diferencias en resistencias o en impedancias conectadas en serie con el devanado auxiliar se corrigen con la conexión externa de una impedancia Z_x que realiza el balance.

Si la máquina se transforma a una máquina bifásica balanceada, sus bobinas tendrán el número de vueltas N_p del enrollado principal, y todos los desequilibrios se transfieren como conexiones externas al convertidor. El nuevo esquema se resuelve mediante la descomposición en componentes simétricas bifásicas. En la figura 7.35 se presenta el esquema del circuito propuesto, con la máquina equilibrada y las conexiones externas necesarias para reproducir la situación original de la máquina bifásica desequilibrada.

Para mantener la fuerza magnetomotriz de la bobina auxiliar en la máquina bifásica equilibrada se debe cumplir la siguiente relación:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{aux} &= N_{aux}I_{aux} = N_p I'_{aux} \Rightarrow \\ \frac{I'_{aux}}{I_{aux}} &= \frac{N_{aux}}{N_p} = \frac{1}{a}\end{aligned}\quad (7.79)$$

La impedancia de entrada hacia el devanado auxiliar, vista desde la red, tiene que mantenerse constante antes y después de equilibrar la máquina:

$$\begin{aligned}Z_{arranque} + Z_{aux} &= \frac{Z_x + Z_p}{a^2} \Rightarrow \\ Z_x &= a^2(Z_{arranque} + Z_{aux}) - Z_p\end{aligned}\quad (7.80)$$

El circuito equivalente de la máquina monofásica con condensador de arranque se puede obtener ahora utilizando las componentes simétricas bifásicas. Las tensiones de secuencia son:

$$\begin{bmatrix} V_+ \\ V_- \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_p \\ V_{aux} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ aV - Z_x I'_{aux} \end{bmatrix}\quad (7.81)$$

Las corrientes de fase se expresan en función de las corrientes de secuencia, mediante la transformación inversa:

$$\begin{bmatrix} I_p \\ I'_{aux} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_+ \\ I_- \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I_+ + I_- \\ j(I_- - I_+) \end{bmatrix}\quad (7.82)$$

¹³Los sistemas simétrico son sistemas cíclicos donde $a \neq b = c = d$.

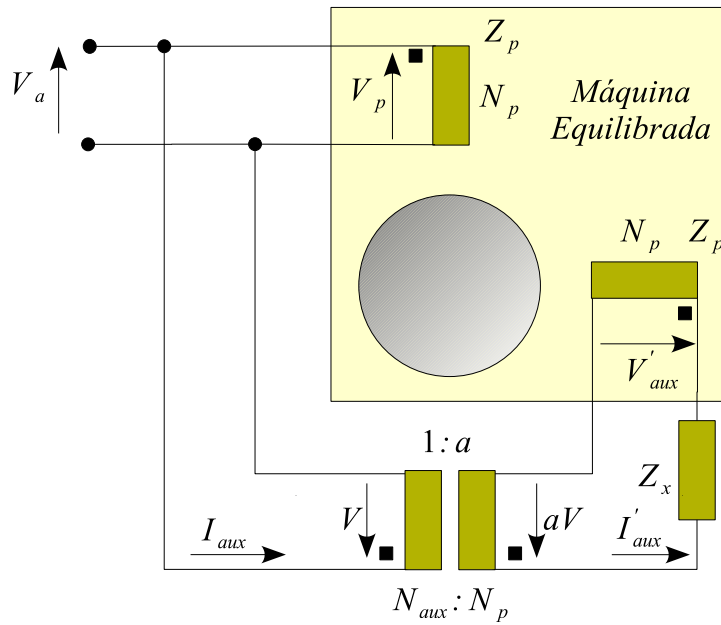


Figura 7.35 Modelo equilibrado de la máquina monofásica con devanado auxiliar de arranque

Sustituyendo el valor de I'_{aux} obtenido en la expresión 7.82, en el sistema de ecuaciones 7.81 se obtiene el siguiente resultado:

$$\begin{bmatrix} V_+ \\ V_- \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} (1 + ja)V - \frac{Z_x}{\sqrt{2}}(I_+ - I_-) \\ (1 - ja)V - \frac{Z_x}{\sqrt{2}}(I_+ + I_-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_+ I_+ \\ Z_- I_- \end{bmatrix} \quad (7.83)$$

Agrupando términos en la expresión 7.835 se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \frac{1+ja}{\sqrt{2}} V \\ \frac{1-ja}{\sqrt{2}} V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (Z_+ + \frac{Z_x}{2}) & -\frac{Z_x}{2} \\ -\frac{Z_x}{2} & (Z_- + \frac{Z_x}{2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_+ \\ I_- \end{bmatrix} \quad (7.84)$$

El sistema de ecuaciones 7.84, representa el circuito equivalente de la figura 7.36. Donde Z_+ y Z_- son las impedancias de secuencia positiva y negativa de la máquina de inducción bifásica equilibrada. Mediante el circuito equivalente de la máquina de inducción monofásica durante el arranque, o con el sistema de ecuaciones 7.36, se pueden calcular las corrientes de secuencia y las tensiones de secuencia. Como las fuentes de tensión aplicadas en las dos mallas del circuito equivalente son diferentes, las corrientes de secuencia también lo son, aun cuando el rotor esté detenido y las impedancias de secuencia sean iguales. Esto explica la aparición de par de arranque en la máquina monofásica de inducción con devanado auxiliar.

La impedancia Z_x es responsable de la diferencia existente entre las corrientes de secuencia positiva y negativa. Por esta razón el ajuste de esta impedancia permite variar el par eléctrico de arranque. Esta impedancia, incluye la impedancia adicional para incrementar el desfase entre las corrientes de secuencia y un término que equilibra la máquina original, para que las redes de secuencia queden desacopladas y sea válida la expresión 7.83.

Al conectar un condensador para incrementar el par de arranque, la corriente en la bobina auxiliar adelanta a la corriente de la bobina principal. En un sistema bifásico de corrientes con

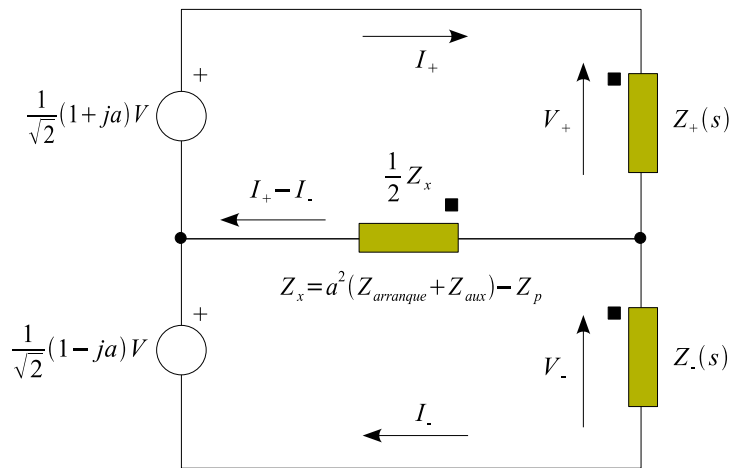


Figura 7.36 Circuito equivalente de la máquina monofásica de inducción con devanado auxiliar

adelanto de la fase auxiliar con respecto a la principal, el campo magnético de secuencia negativa es mayor que el de secuencia positiva y la máquina gira en el sentido contrario al de las agujas del reloj. Para invertir el sentido de giro, es suficiente con invertir la polaridad de una de las dos bobinas.

En la figura 7.37 se muestran las características par eléctrico-deslizamiento de una máquina monofásica de inducción con el devanado auxiliar conectado y desconectado. En serie con el devanado auxiliar se ha conectado un condensador que permite incrementar el par de arranque de la máquina. Cuando la máquina alcanza un 70 % de la velocidad de sincronismo, se desconecta el devanado auxiliar y continúa la operación como motor monofásico. Algunas máquinas se diseñan para mantener un condensador más pequeño y con menos pérdidas pero que se mantiene conectado indefinidamente.

La máquina de inducción monofásica con devanado auxiliar es capaz de producir pares de arranque mayores que el par nominal. Esta importante ventaja es útil en aplicaciones donde la cargas mecánicas en reposo requieren par de accionamiento muy grande. Los compresores son un ejemplo de este tipo de carga, por esta razón es frecuente el uso de motores monofásicos con devanados auxiliares en los equipos de refrigeración comercial y residencial. Otro ejemplo de aplicación es en grúas o pequeños elevadores. Si la potencia requerida por la carga mecánica supera los 2 kW, el accionamiento monofásico no es conveniente por razones de eficiencia y es más aconsejable utilizar máquinas trifásicas.

7.9. Análisis transitorio

En la sección 6.3 se obtuvo el modelo dinámico de la máquina de inducción expresado en el sistema de coordenadas de los *vectores espaciales* referidos al sistema de referencia del estator¹⁴. Esta representación tiene las ventajas de ser independiente de la posición angular θ ¹⁵ y reducir

¹⁴Sistema de ecuaciones 7.93 y figura 6.6.

¹⁵Aun cuando se mantiene la dependencia con la velocidad angular ω_r .

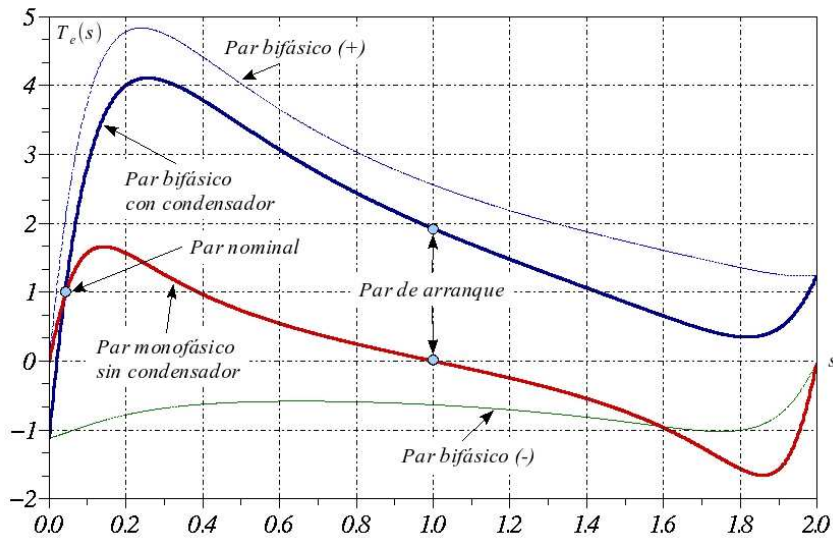


Figura 7.37 Comparación de las características par-deslizamiento con el devanado auxiliar conectado y desconectado

la dimensión del sistema de ecuaciones diferenciales. Por otra parte, las variables de estado en este modelo están acopladas.

Un nivel de simplificación y desacoplamiento mayor se obtiene en el modelo al proyectar los diversos fasores espaciales con respecto a una referencia determinada. Estas proyecciones son equivalentes a realizar una rotación de los vectores espaciales a las coordenadas dq analizada en el capítulo 4. En la transformación clásica a coordenadas dq el ángulo de rotación se define entre la referencia del estator¹⁶ y la posición del rotor. En general, se pueden seleccionar infinitas referencias de rotación completamente arbitrarias tales como la posición del fasor espacial de la corriente del estator, la corriente del rotor o la corriente de magnetización y la selección de cualquiera de estos patrones depende del análisis o la aplicación que se está realizando:

1. El vector espacial de la *corriente del estator* puede ser medido directamente.
2. El vector espacial de la *corriente de magnetización* está asociado directamente con el flujo resultante en el entrehierro y con la producción del par eléctrico.
3. El vector espacial de la *corriente del rotor* tiene incidencia sobre el rendimiento de la máquina y la transferencia de potencia al eje mecánico.
4. *Posición arbitraria* δ , permite acelerar la integración numérica de las variables de estado del modelo cuando se sintoniza esta referencia con las fluctuaciones de las fuentes o de la velocidad de rotación.
5. El vector espacial de la *corriente de magnetización modificada* puede desacoplar las derivadas de los vectores espaciales de las corrientes del estator y rotor proporcionando un modelo de la máquina de inducción donde se puede independizar la generación del flujo y

¹⁶Generalmente el eje magnético de la fase a .

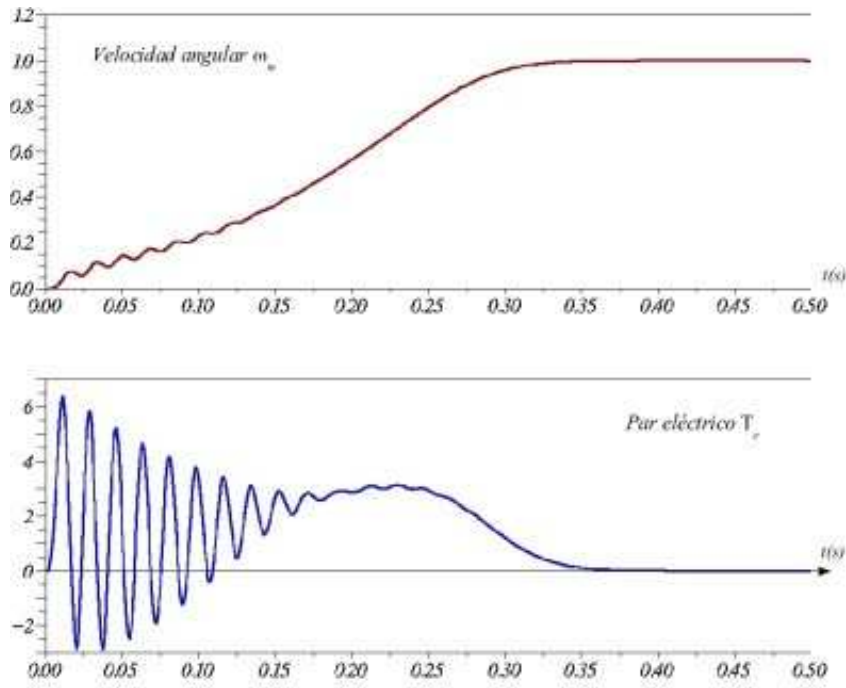


Figura 7.38 Par eléctrico y velocidad angular de la máquina de inducción excitada con un sistema de tensiones trifásicas balanceadas

la producción del par¹⁷. Es una de las referencias más utilizada en la literatura y se conoce como *modelo de campo orientado*.

En la figura 7.38 se muestra el par eléctrico y la velocidad angular producida por una máquina de inducción excitada mediante un sistema de tensiones trifásicas balanceadas utilizando el modelo 7.93 definido en el sistema coordenadas de las corrientes del estator. El código fuente 6 desarrolla el modelo numérico de la máquina de inducción en este sistema de coordenadas.

La corriente de magnetización modificada que determina la referencia del modelo de campo orientado se define como:

$$\mathbf{i}_m \equiv \mathbf{i}_e + \frac{L_r}{M_{er}} \mathbf{i}_r^e = i_m(t) \cdot e^{j\delta(t)} \quad (7.85)$$

El término $\frac{L_r}{M_{er}}$ refiere al sistema de referencia del estator todo el campo magnético producido por las corrientes del rotor que atraviesa el entrehierro de la máquina. En la figura 7.39 se presenta un diagrama de los vectores espaciales correspondientes a las corrientes de la máquina. El vector espacial de la corriente del estator se puede representar mediante dos componentes ortogonales, una paralela al fasor espacial de la corriente de magnetización \mathbf{i}_m y la otra en cuadratura, denominadas i_{de} e i_{qe} respectivamente. De acuerdo con la figura 7.39 se tiene:

$$i_{de}(t) + ji_{qe}(t) = \mathbf{i}_e e^{-j\delta(t)} = (i_{\alpha e} + ji_{\beta e}) \cdot (\cos \delta - j \sin \delta) \Rightarrow \quad (7.86)$$

¹⁷La difusión de este modelo se debe a la posibilidad de utilizar los esquemas de control de las máquinas de corriente continua para regular la velocidad de las máquinas de inducción.

Algoritmo 6 Modelo de la máquina de inducción en vectores espaciales referidos al estator

```
//Modelo dinámico de la máquina de inducción
//Programa principal (Scilab 3.0)

global R L L_1 G Jm Tm Ve j VS Ler
j=%i;VS=sqrt(2/3)*[1 exp(j*2*pi/3) exp(j*4*pi/3)];
Re=.02; Rr=0.06; Le=3.1; Lr= 3.1; Ler=3.0; Jm=250;
Ve=1;Tm=0;
R = [Re 0;0 Rr]; L=[Le Ler;Ler Lr]; G=[0 0;Ler Lr]; L_1=inv(L);
x0=[0;0;0;0;0;0];t0=0;t=0:0.001*377:.5*377;
x=ode(x0,t0,t,maquina);
subplot(2,1,1)
plot(t/377,x(5,:))
Te=Ler*imag((x(1,:)+j*x(2,:)).*(x(3,:)-j*x(4,:)));
xgrid
subplot(2,1,2)
plot(t/377,Te)
xgrid

//Fin del programa principal

//Cálculo de derivadas del modelo de la máquina

function px=maquina(t,x)
    global R L L_1 G Jm Tm Ve j VS Ler
    iae=x(1); ibe=x(2); iar=x(3); ibr=x(4); wm=x(5); theta=x(6);
    ie=iae+j*ibe;
    ir=iar+j*ibr;
    ve=Ve*VS*[cos(t);cos(t-2*pi/3);cos(t-4*pi/3)];
    vr=0+j*0;
    pii = L_1*([ve;vr]-(R-j*wm*G)*[ie;ir]);
    pwm= (Ler*imag(ie*ir')-Tm)/Jm;
    px(1)=real(pii(1));
    px(2)=imag(pii(1));
    px(3)=real(pii(2));
    px(4)=imag(pii(2));
    px(5)=pwm;
    px(6)=wm;
endfunction

//Fin del cálculo de las derivadas
```

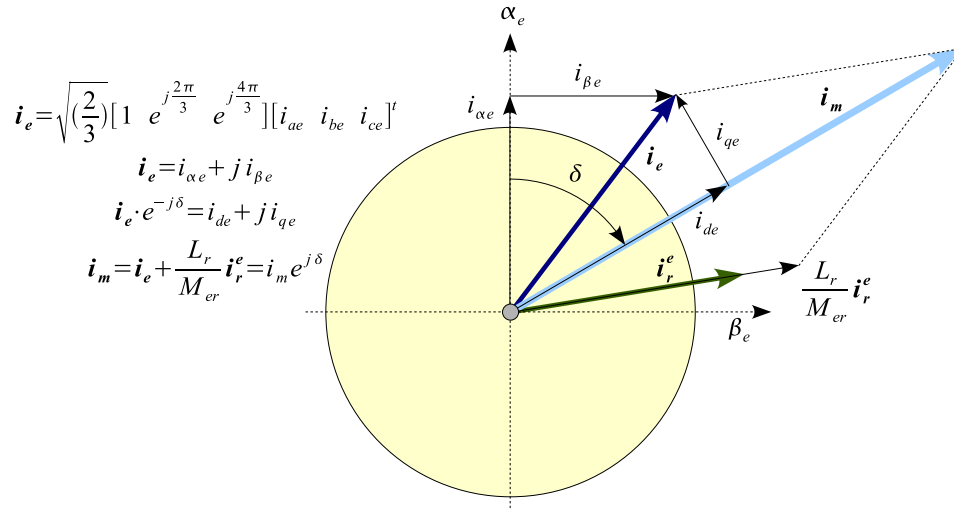


Figura 7.39 Vectores espaciales de las corrientes del modelo de la máquina de inducción

$$\begin{bmatrix} i_{de} \\ i_{qe} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta & -\sin \delta \\ \sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{\alpha e} \\ i_{\beta e} \end{bmatrix} \quad (7.87)$$

$$\begin{bmatrix} i_{\alpha e} \\ i_{\beta e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta & \sin \delta \\ -\sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{de} \\ i_{qe} \end{bmatrix} \quad (7.88)$$

donde:

$$\mathbf{i}_e = i_{\alpha e} + j i_{\beta e} = \sqrt{\frac{2}{3}} (i_{ae} + e^{j\frac{2\pi}{3}} i_{be} + e^{j\frac{4\pi}{3}} i_{ce}) \Rightarrow \quad (7.89)$$

$$\begin{bmatrix} i_{\alpha e} \\ i_{\beta e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ae} \\ i_{be} \end{bmatrix} \quad (7.90)$$

$$\begin{bmatrix} i_{ae} \\ i_{be} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{\alpha e} \\ i_{\beta e} \end{bmatrix} \quad (7.91)$$

$$i_{ae} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Re(\mathbf{i}_e) ; i_{be} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Re(\mathbf{i}_e e^{-j\frac{2\pi}{3}}) ; i_{ce} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Re(\mathbf{i}_e e^{-j\frac{4\pi}{3}}) \quad (7.92)$$

Reemplazando la corriente \mathbf{i}_r^e de la definición 7.85 de la corriente de magnetización modificada \mathbf{i}_m en el modelo de la máquina de inducción en coordenadas vectoriales referidas a las corrientes del estator 7.93, se obtiene:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_e \\ \mathbf{v}_r^e \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_e \\ \frac{M_{er}}{L_r} (\mathbf{i}_m - \mathbf{i}_e) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_e & M_{er} \\ M_{er} & L_r \end{bmatrix} p \begin{bmatrix} \mathbf{i}_e \\ \frac{M_{er}}{L_r} (\mathbf{i}_m - \mathbf{i}_e) \end{bmatrix} + \\ &= \dots - j\dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M_{er} & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_e \\ \frac{M_{er}}{L_r} (\mathbf{i}_m - \mathbf{i}_e) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$M_{er} \Im m \left\{ \mathbf{i}_e \left(\frac{M_{er}}{L_r} (\mathbf{i}_m - \mathbf{i}_e) \right)^* \right\} - T_m(\dot{\theta}) = J\ddot{\theta} + \rho\dot{\theta} \quad (7.93)$$

Reagrupando las variables de estado del sistema 7.93 se obtiene el modelo de la máquina de inducción expresado en coordenadas de campo orientado:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_e \\ \frac{1}{M_{er}} \mathbf{v}_r^e \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ -\frac{1}{T_r} & \frac{1}{T_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_e \\ \mathbf{i}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_e - \frac{M_{er}^2}{L_r} & \frac{M_{er}^2}{L_r} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} p \begin{bmatrix} \mathbf{i}_e \\ \mathbf{i}_m \end{bmatrix} + \dots \\ &\dots - j\dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_e \\ \mathbf{i}_m \end{bmatrix} \\ \frac{M_{er}^2}{L_r} \Im m \{ \mathbf{i}_e \cdot \mathbf{i}_m^* \} - T_m(\dot{\theta}) &= J\ddot{\theta} + \rho\dot{\theta} \end{aligned} \quad (7.94)$$

donde:

$$T_r = \frac{L_r}{R_r} \quad (7.95)$$

En el modelo de la máquina en coordenadas de campo orientado la expresión del par eléctrico se puede simplificar cuando se incluye la definición de la corriente de magnetización 7.85 y la transformación de la corriente del estator a coordenadas dq 7.86:

$$T_e = \frac{M_{er}^2}{L_r} \Im m \{ \mathbf{i}_e \cdot \mathbf{i}_m^* \} = \frac{M_{er}^2}{L_r} \Im m \{ \mathbf{i}_e \cdot i_m e^{-j\delta} \} = \frac{M_{er}^2}{L_r} i_m \cdot i_{qe} \quad (7.96)$$

La ecuación de la tensión del rotor referida al sistema de referencia del estator en el modelo de campo orientado es independiente de la derivada de las corrientes del estator. Por otra parte, es frecuente que la tensión del rotor es cero $\mathbf{v}_r^e = 0$. Multiplicando por $e^{-j\delta}$ la ecuación de tensión del rotor y separando esta expresión en parte real e imaginaria se obtienen las dos ecuaciones diferenciales escalares siguientes:

$$T_r p i_m + i_m = i_{de} \quad (7.97)$$

$$T_r i_m (\dot{\delta} - \dot{\theta}) = i_{qe} \quad (7.98)$$

Las expresiones 7.96, 7.97 y 7.98 tienen un paralelismo con el modelo dinámico de la máquina de corriente continua. La ecuación 7.97 determina el comportamiento del campo¹⁸ de la máquina de inducción y se puede controlar ajustando la componente directa de la corriente del estator i_{de} . La componente cuadratura i_{qe} por otra parte determina mediante la expresión 7.98 el deslizamiento $(\dot{\delta} - \dot{\theta})$ existente entre la velocidad angular del campo y la velocidad angular del rotor¹⁹. El par eléctrico 7.96 queda determinado por el producto de la magnitud de la corriente de campo i_m y la componente cuadratura de la corriente del estator²⁰. Una de las ventajas más importantes

¹⁸Esta ecuación es similar a la ecuación del campo de una máquina de corriente continua $L_f p i_f + R_f i_f = v_f$.

¹⁹Esta ecuación es comparable directamente con el modelo de la armadura de la máquina de corriente continua $V_a - G\omega_m i_f = R_a i_a$.

²⁰En la máquina de corriente continua el par queda determinado por el producto de la corriente de campo y la corriente de armadura $T_e = G i_f i_a$.

de este modelo reside en la posibilidad de regular el par y la velocidad de la máquina mediante el control de las corrientes del estator. Utilizando fuentes de corriente controladas, es posible el accionamiento a velocidad variable de la máquina sin utilizar la ecuación de las tensiones del estator.

El modelo escalar completo en coordenadas de campo orientado es:

$$\begin{cases} p i_{de} = (L_e - \frac{M_{er}^2}{L_r})^{-1} \left\{ v_{de} - (R_e + R_r \frac{M_{er}^2}{L_r^2}) i_{de} \right\} + \omega_m i_{qe} + \frac{i_{qe}^2}{T_r i_m} + R_r \frac{M_{er}^2}{L_r^2} i_m \\ p i_{qe} = -\omega_m i_{de} - \frac{i_{de} i_{qe}}{T_r i_m} - (L_e - \frac{M_{er}^2}{L_r})^{-1} \left\{ (R_e + R_r \frac{M_{er}^2}{L_r^2}) i_{qe} - \frac{M_{er}^2}{L_r} \omega_m i_m - v_{qe} \right\} \\ p i_m = \frac{i_{de} - i_m}{T_r} \\ p \delta = \omega_m + \frac{i_{qe}}{T_r i_m} \\ p \omega_m = \frac{1}{J} \left\{ \frac{M_{er}^2}{L_r} i_m \cdot i_{qe} - T_m(\omega_m) \right\} \end{cases} \quad (7.99)$$

El modelo de campo orientado 7.99, requiere que la corriente de magnetización sea diferente de cero $i_m \neq 0$. Si este requisito no se cumple, se pierde la referencia δ , debido a que $p\delta \rightarrow \infty$. En algunos casos es posible asumir que en las condiciones iniciales la corriente i_m tiene un valor de remanencia que permita iniciar la integración numérica, pero aun así si durante el proceso en algún intento de tiempo esta corriente se anula, el sistema de ecuaciones diferenciales pierde la referencia y debe encontrarse algún modelo alternativo que permita continuar la integración. El sistema de coordenadas referidas a una posición angular arbitraria δ permite resolver este problema y plantea una generalización del modelo que permite en muchos casos acelerar el cálculo de las variables de estado.

En el modelo de referencia arbitraria se refieren todos los vectores espaciales del sistema 7.100 a una posición angular δ , que gira a la velocidad $\dot{\delta}$. Para esto, se multiplican todos los vectores espaciales por $e^{-j\delta}$ obteniéndose el resultado siguiente:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_e^\delta \\ \mathbf{v}_r^\delta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_e & 0 \\ 0 & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_e^\delta \\ \mathbf{i}_r^\delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_e & M_{er} \\ M_{er} & L_r \end{bmatrix} p \begin{bmatrix} \mathbf{i}_e^\delta \\ \mathbf{i}_r^\delta \end{bmatrix} + \dots \\ &\quad \dots + j \begin{bmatrix} \dot{\delta} L_e & \dot{\delta} M_{er} \\ (\dot{\delta} - \dot{\theta}) M_{er} & (\dot{\delta} - \dot{\theta}) L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_e^\delta \\ \mathbf{i}_r^\delta \end{bmatrix} \\ M_{er} \Im m \left\{ \mathbf{i}_e^\delta (\mathbf{i}_r^\delta)^* \right\} - T_m(\dot{\theta}) &= J \ddot{\theta} + \rho \dot{\theta} \end{aligned} \quad (7.100)$$

El par eléctrico calculado a partir de la integración de las ecuaciones diferenciales que modelan el comportamiento de la máquina, presenta fuertes oscilaciones durante el arranque, debido a que la fuente debe incrementar el flujo en el entrehierro para producir par. Estas oscilaciones son semejantes al fenómeno de energización de un transformador. La velocidad también es afectada por las fuertes perturbaciones del par eléctrico, pero en menor medida debido al retardo que introduce la inercia.

7.10. Control de velocidad

La máquina de inducción proporcionó desde su invención a finales del siglo XIX un mecanismo conveniente para la conversión electromecánica de energía porque además de ser simple, robusta y económica, utiliza directamente fuentes de corriente alterna polifásicas. Las máquinas de corriente continua requieren sistemas de rectificación que si son controlables en tensión permiten la regulación de velocidad. Las máquinas de inducción tienen una reducida controlabilidad de la velocidad cuando operan en régimen permanente alimentadas por una fuente de tensión alterna de frecuencia industrial, pero cuando son alimentadas con tensión y frecuencia variable es posible regular la velocidad mecánica de estos convertidores. Durante mucho tiempo esto fue poco práctico porque para obtener sistemas de frecuencia variable se requerían varias máquinas operando conjuntamente²¹. Hoy en día los controladores electrónicos de potencia ofrecen una gran variedad de fuentes reguladas que han permitido que la máquina de inducción sea una alternativa importante para el accionamiento de cargas mecánicas a velocidad variable.

7.10.1. Control tensión-frecuencia

Variando la frecuencia de las tensiones aplicadas a las bobinas del estator, cambia la velocidad sincrónica de la máquina. La variación de la frecuencia afecta proporcionalmente las reactancias de magnetización y dispersión en el circuito equivalente, pero las resistencias se mantienen aproximadamente constantes, considerando que el efecto pelicular es poco pronunciado²². Para que la densidad de flujo magnético se mantenga prácticamente constante y en los límites de diseño de la máquina, es conveniente variar la amplitud de la tensión de alimentación en la misma proporción que se varía la frecuencia. De esta forma, la magnitud del par eléctrico es similar a la que se obtiene a frecuencia nominal, pero la velocidad es variable.

En la figura 7.40 se presentan las características par eléctrico-velocidad para una máquina de inducción alimentada mediante cuatro frecuencias diferentes, manteniendo constante la relación entre la amplitud de la tensión y la frecuencia de alimentación. Incrementando paulatinamente la frecuencia es posible acelerar una carga mecánica pasando por los puntos 1, 2, 3 hasta alcanzar el punto 4. Si la variación de la frecuencia es lenta en comparación con la inercia del conjunto máquina-carga mecánica, la corriente se reduce con respecto a un arranque directo. También es posible mantener cualquier punto de operación intermedio, aumentando o reduciendo la velocidad. Operando a baja frecuencia, se incrementa el par de arranque, pero el par máximo de la máquina es prácticamente constante, siempre y cuando las reactancias sean mucho mayores que las resistencias del modelo.

Este controlador de velocidad requiere una fuente de tensión trifásica regulable en magnitud y frecuencia. En el pasado esta fuente se podía obtener mediante una máquina sincrónica regulada en velocidad y en su campo. Esta solución trasladaba al eje mecánico de la máquina sincrónica

²¹El equipo denominado Ward-Leonar está configurado por cuatro máquinas, un motor de inducción que acciona a velocidad más o menos constante a un generador de corriente continua, cuyo campo se ajusta para acelerar a un motor de corriente continua a velocidad variable que acciona a un generador sincrónico que mediante su correspondiente devanado de campo regula la tensión generada, cuya frecuencia queda determinada por el motor de corriente continua.

²²Cuando una bobina se realiza con varias vueltas, el efecto pelicular tiende a reducirse cuando se compara al fenómeno que sucede en un conductor macizo.

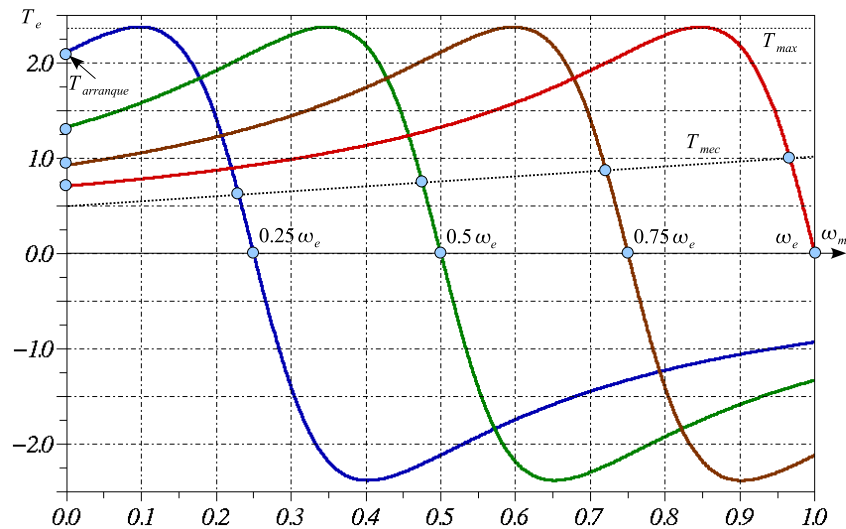


Figura 7.40 Control tensión-frecuencia constante en la máquina de inducción

todo el problema de regulación. Mediante interruptores electrónicos de alta velocidad es posible construir fuentes de tensión alterna regulada en frecuencia y en magnitud. Esta alternativa desarrollada durante la década de los 30 con las válvulas de vapor de mercurio, evolucionó en la década de los 80 con la aparición de los tiristores y transistores de gran potencia. Los inversores de tensión convierten fuentes de tensión o corriente continua en fuentes de tensión o corriente alterna.

En la figura 7.41 se muestra el mecanismo de inversión en el caso más simple, un inversor monofásico. Alternadamente se conectan los interruptores 1, 2 y 3, 4. Esto conecta la mitad del tiempo la carga entre positivo y negativo de la fuente de tensión V_{cc} , el resto del tiempo ocurre lo contrario $-V_{cc}$. El resultado final es una fuente de tensión alterna no sinusoidal, cuya frecuencia depende de la velocidad de operación de los interruptores. La amplitud de esta fuente es constante. Si la fuente de tensión continua V_{cc} es regulable, se puede obtener una fuente cuya relación tensión frecuencia sea constante. Mediante el inversor también es posible regular la amplitud de la tensión de salida. Para lograr esto, durante algunos instantes del período de conexión de un grupo de interruptores, conectan los interruptores superiores o inferiores para aplicar tensión cero sobre las bobinas $V = 0$, o incluso se conectan los interruptores contrarios en ese período, que invierte la polaridad. Esta técnica de control se denomina modulación del ancho del pulso, y existe varios métodos que además de regular el nivel de tensión, permiten reducir el contenido armónico de la fuente²³.

La máquina de inducción convencional requiere una alimentación polifásica balanceada para su operación. Esta fuente se obtiene mediante un puente inversor polifásico. Un puente inversor de este tipo posee una rama con dos interruptores por cada fase. En un inversor es necesario conectar un diodo de descarga libre en paralelo con los semiconductores para permitir después de la desconexión de los interruptores estáticos, la circulación de la corriente inductiva de la carga. En un inversor trifásico son necesarios seis interruptores estáticos, en tres ramas. Cada uno

²³Uno de las modulaciones más utilizada en la práctica es la conocida como PWM (**P**ulse **W**idth **M**odulation), que ajusta el ancho de cada pulso siguiendo un patrón sinusoidal que permite reducir considerablemente las armónicas de baja frecuencia.

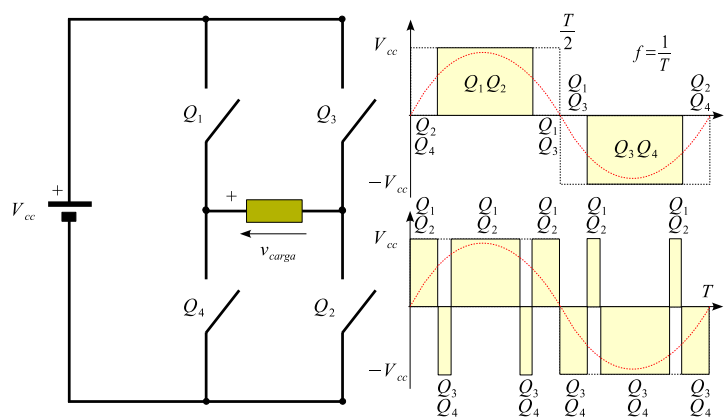


Figura 7.41 Inversor monofásico y modulación del ancho del pulso

de estos interruptores debe estar conectado durante la mitad del período total. Los interruptores de la misma rama son complementarios, si uno está encendido, el otro debe estar apagado para evitar un corto circuito en la fuente. Las órdenes de encendido o apagado de los seis elementos se encuentran desfasados en $\frac{2\pi}{3}$. En la figura 7.42 se representa el esquema de un puente inversor trifásico, la carga y la forma de onda de las tensiones aplicadas sobre ella. Los interruptores se han numerado en el orden correlativo en que deben ser encendidos para producir un sistema trifásico balanceado de tensiones no sinusoidales de secuencia positiva. La amplitud de la tensión es constante, pero su frecuencia depende del período de conexión de los interruptores.

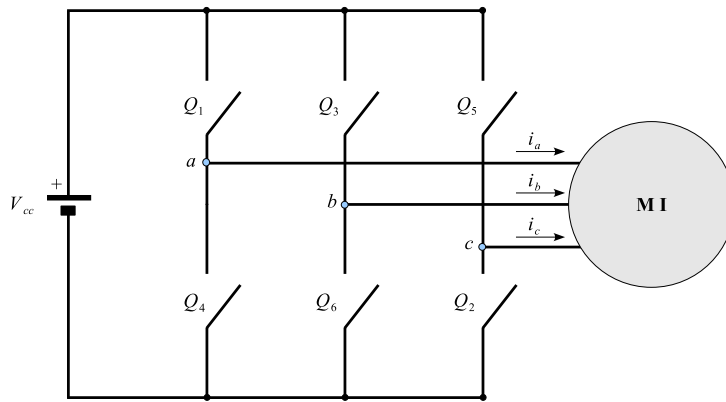
Descomponiendo las formas de onda de la figura 7.42 en series de Fourier, se puede analizar el comportamiento de la máquina de inducción sometida a este tipo de excitación. Si la fuente primitiva es de corriente alterna, la tensión de entrada al inversor puede ser variada mediante un puente rectificador controlado. La fuente de corriente continua obtenida mediante bancos de baterías o por rectificación no controlada de sistemas de tensión alterna, se pueden regular mediante trocadores de tensión²⁴. La rapidez alcanzada por los dispositivos electrónicos de potencia²⁵ permiten controlar el ancho del pulso de la onda e incluso su contenido armónico. En la figura 7.43 se muestra el diagrama de un controlador de velocidad para un motor de inducción que utiliza el método tensión-frecuencia constante. El sistema realimenta la velocidad o la posición del eje mecánico y lo compara con una referencia determinada por el usuario o por la aplicación. El error obtenido de la comparación entre las medidas y las referencias es utilizado por el controlador para definir las señales de encendido y apagado de los interruptores. Este controlador debe introducir un retardo en el proceso para reducir las corrientes de la máquina. El controlador varían la amplitud de la tensión de la fuente de energía y después de ser filtrada, esta tensión alimenta al inversor trifásico. El inversor aplica una tensión alterna no sinusoidal a la máquina con una frecuencia y una tensión determinada por el controlador.

7.10.2. Control por campo orientado

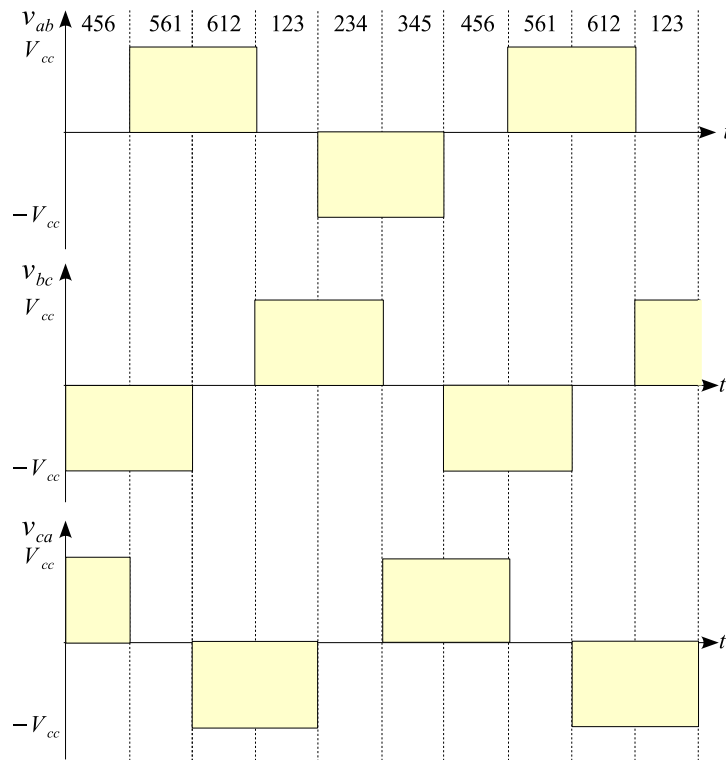
En la figura 7.44 se presenta el diagrama de bloques que corresponde al modelo de la máquina de inducción en variables de campo orientado y la transformación desde las coordenadas primitivas

²⁴Denominados en ingles *choppers*.

²⁵Tiristores, Transistores de potencia, GTO's, etc.



(a) Puente inversor trifásico



(b) Tensiones aplicadas a la máquina por el puente inversor

Figura 7.42 Alimentación de la máquina de inducción mediante un puente inversor trifásico

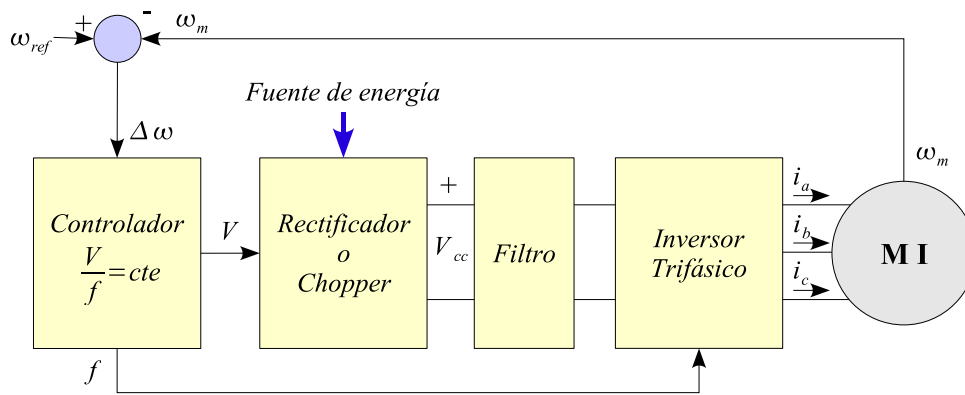


Figura 7.43 Variador de velocidad por control tensión-frecuencia constante

a estas nuevas coordenadas. En este modelo, el par eléctrico depende del producto de la corriente de magnetización y de la corriente cuadratura del estator. Los sistemas de control por campo orientado se fundamentan en la posibilidad de ajustar el valor de estas dos variables.

Tal como sucede en las máquinas de corriente continua, el campo tiene una constante de tiempo relativamente lenta. Para incrementar la velocidad de respuesta del sistema es conveniente mantener la corriente de magnetización i_m en el máximo valor posible²⁶. De esta forma el par se controla mediante la corriente cuadratura i_{qe} . La corriente de magnetización se controla mediante el ajuste de la corriente directa i_{de} . En régimen permanente estas dos corrientes tienen el mismo valor, hecho que se deduce inmediatamente de la ecuación diferencial 7.97.

El principal problema de los controladores por campo orientado consiste en determinar el valor de las corrientes o tensiones de alimentación que producen los valores deseados de las variables de campo orientado. La transformación directa e inversa entre variables primitivas y variables de campo orientado dependen de la posición instantánea $\delta(t)$ del vector espacial de la corriente de magnetización i_m . Esto presenta un problema importante para este tipo de controladores, por las dificultades que tiene la medición o estimación de este ángulo. La medición requiere sensores internos en la máquina²⁷. Estimar la posición del vector espacial de la corriente de magnetización, requiere la integración en tiempo real del sistema de ecuaciones diferenciales que modelan la máquina. La primera solución es costosa y difícil de implantar en la práctica, la segunda alternativa depende de la velocidad del estimador, de la precisión del modelo y de la variabilidad de los parámetros durante la operación.

En la figura 7.45 se muestra el controlador de velocidad de un motor de inducción en coordenadas de campo orientado donde se utiliza un inversor controlado en corriente. El inversor inyecta las corrientes en el estator de la máquina según la referencia calculada previamente por el controlador. De la medición directa de las corrientes por las bobinas y de la velocidad del rotor se estiman los valores de las variables transformadas mediante un modelo semejante al ilustrado en la figura 7.44. Estos valores permiten calcular el par eléctrico y la corriente de magnetización. Las estimaciones pueden compararse con los valores de par y velocidad deseados y producir un error que se utiliza para incrementar o disminuir las referencias de la corriente directa y cuadra-

²⁶Normalmente el valor nominal, que en general está en el codo de saturación del material ferromagnético.

²⁷Bobinas exploradoras o pastillas de efecto Hall que detecten la intensidad del campo magnético en el entrehierro.

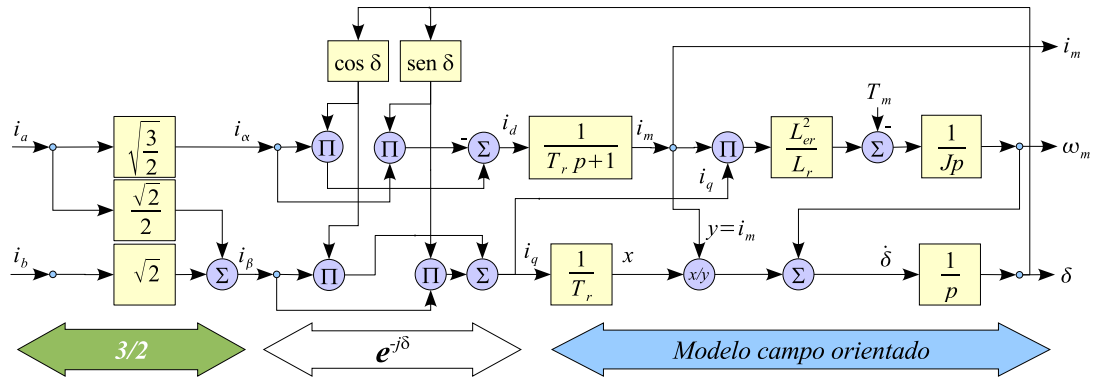


Figura 7.44 Modelo de la máquina de inducción en variables de campo orientado

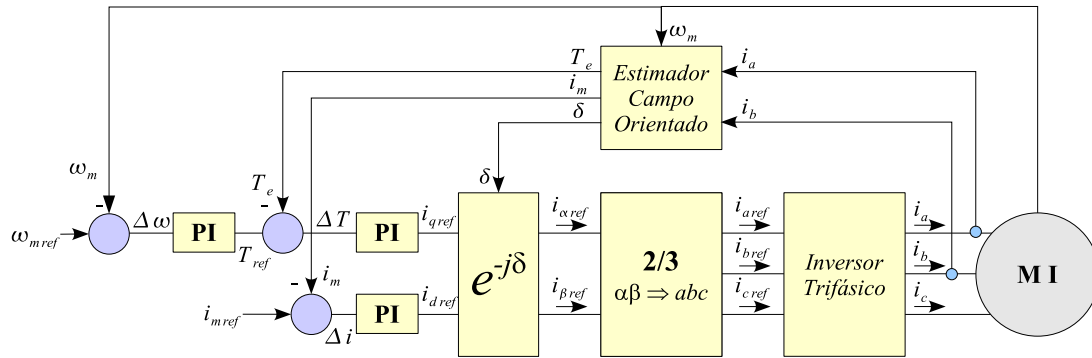


Figura 7.45 Controlador de velocidad en coordenadas de campo orientado

tura. Las referencias de corrientes, obtenidas a partir de las diferencias entre pares y velocidades, deseados y estimados, se transforman al sistema de coordenadas α y β , para lo cual es necesario utilizar la estimación de la posición del vector espacial de la corriente de magnetización. Las corrientes de referencia en coordenadas α y β se transforman nuevamente a variables primitivas a , b y c . Las corrientes de referencia se aplican como entrada al inversor controlado en corriente. El inversor sigue muy de cerca a las referencias de corriente en coordenadas primitivas e inyecta a las bobinas de la máquina estas corrientes.

La referencia de la corriente de campo es conveniente mantenerla en el mayor valor posible para incrementar la velocidad de respuesta del sistema. Cuando la máquina excede la velocidad sincrónica, es recomendable debilitar el campo para no exceder el límite de la potencia nominal.

El inversor controlado por corriente es un convertidor electrónico que mide las corrientes por cada fase del puente y las compara con las referencias. Cuando la diferencia entre el valor medido de la corriente en una fase y su referencia exceden un cierto valor de histéresis, se conecta uno de los interruptores de la rama del puente que corrige el error. Si la corriente es menor que la referencia se conecta la fase correspondiente, a la barra positiva del puente mediante el interruptor estático. Si la corriente es mayor que la referencia se conecta la fase a la barra negativa. Para las diferencias comprendidas dentro del rango de la histéresis no se alteran las condiciones previas de conectividad de los interruptores. En este control del inversor es necesario un cierto retardo en la variación de las corrientes para evitar que la frecuencia de operación de los interruptores estáticos sea muy elevada. El retardo depende de la relación entre las inductancias y resistencias

de la máquina. Aumentar la histéresis del control, disminuye la frecuencia de interrupción, pero reduce la precisión en el seguimiento de la referencia.

El controlador de velocidad de la figura 7.45 también puede ser realizado mediante puentes controlados por tensión, pero en este caso es necesario añadir al modelo de estimación de variables, la ecuación de tensión del estator y calcular las referencias de tensión que producen las condiciones de par y velocidad deseadas.

El principal problema del estimador de variables internas de la máquina es la variabilidad de los parámetros con la temperatura, la frecuencia y la saturación. En particular el modelo del estimador ilustrado en la figura 7.44 es muy sensible al valor de la constante de tiempo del rotor T_r , debido a que influye directamente en la magnitud y dirección instantánea de la corriente de magnetización. Los errores en la estimación del verdadero ángulo δ producen errores en la transformación de coordenadas primitivas a coordenadas de campo orientado, y esta transformación es la que permite desacoplar el par eléctrico en dos componentes independientes. Los variadores de velocidad modernos incluyen esquemas de control adaptivo que determinan y corrigen en línea el valor de la constante de tiempo del rotor utilizado por el estimador de variables.

7.10.3. Control directo de par

El control directo de par²⁸ es una herramienta empleada frecuentemente en el control de velocidad de la máquina de inducción. El interés fundamental de esta técnica reside en la posibilidad de controlar el flujo y el par sin utilizar modelos de la máquina. Los métodos de control que se fundamentan en modelos de las máquinas para estimar el par o los enlaces de flujo introducen errores debido a las hipótesis simplificadoras utilizadas²⁹ para su deducción o por la variación de los parámetros en la operación³⁰. El control directo de par se fundamenta en la posibilidad de obtener el valor del par eléctrico utilizando variables que pueden ser medidas directamente en el estator de la máquina³¹. El par eléctrico se obtiene del producto vectorial del vector espacial³² del enlace de flujo del estator y el vector espacial de la corriente del estator:

$$T_e = \lambda_e \times \mathbf{i}_e \quad (7.101)$$

Para determinar el enlace de flujo λ_e en la expresión 7.101 se integra la fuerza electromotriz que aparece en las bobinas del estator:

$$\lambda_e = \int_0^t \mathbf{e}_e dt' = \int_0^t (\mathbf{v}_e - R_e \mathbf{i}_e) dt' = |\lambda_e(t)| \cdot e^{j\delta_e(t)} \quad (7.102)$$

El módulo del enlace de flujo $|\lambda_e(t)|$ y su correspondiente ángulo $\delta_e(t)$ se pueden controlar mediante la selección apropiada de la tensión \mathbf{v}_e . En un inversor o en un rectificador activo

²⁸DTC por sus siglas en inglés (**D**irect **T**orque **C**ontrol)

²⁹Saturación, pérdidas, ranuras, desequilibrios, etc.

³⁰Esta variación se puede deber a cambios en la temperatura del convertidor o por saturación del material ferromagnético.

³¹Tensiones y corrientes.

³² $\vec{x} = \sqrt{\frac{2}{3}}(x_a + x_b \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}} + x_c \cdot e^{j\frac{4\pi}{3}})$

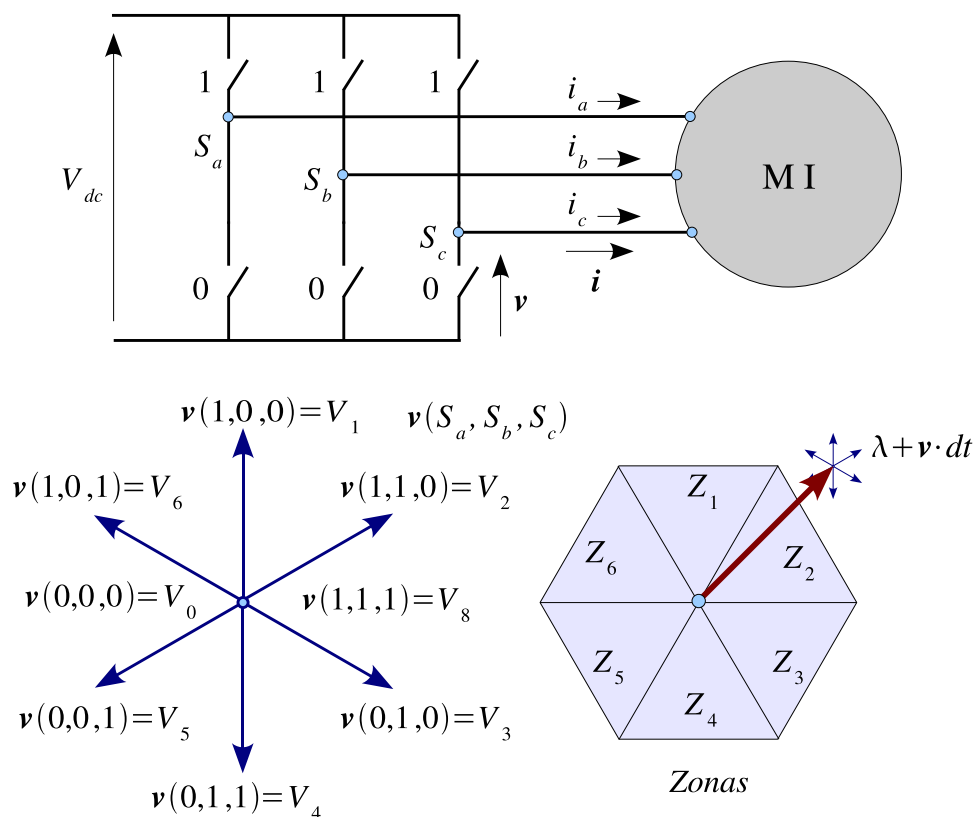


Figura 7.46 Vectores espaciales de la tensión de salida de un inversor activo

existen solamente siete posibles vectores espaciales de la tensión tal como se muestra en la figura 7.46. Seleccionar apropiadamente el vector espacial de la tensión \mathbf{v}_e que produce la variación deseada del enlace de flujo y del par eléctrico para un estado dado de estas variables genera la tabla 7.2. En una de las seis zonas donde puede estar el flujo se escoge el vector espacial que aumenta o disminuye más el enlace de flujo, acelerando o frenando este vector para regular el par.

En la figura se presenta el par eléctrico y el vector espacial del enlace de campo de una máquina de inducción cuya velocidad ha sido regulada mediante un control directo de par. En comparación con el control por campo orientado, este método introduce fluctuaciones muy rápidas del par para ajustar su valor medio de acuerdo con la referencia, pero a cambio es prácticamente

$error T_e$	$error \lambda_e$	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6
$e_T > 0$	$e_\lambda > 0$	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_1
$e_T > 0$	$e_\lambda < 0$	V_3	V_4	V_5	V_6	V_1	V_2
$e_T < 0$	$e_\lambda > 0$	V_6	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
$e_T < 0$	$e_\lambda < 0$	V_5	V_6	V_1	V_2	V_3	V_4

Tabla 7.2 Selección del vector espacial de la tensión que realiza la corrección más rápida del error de enlace de flujo y par eléctrico para cada una de las seis zonas espaciales

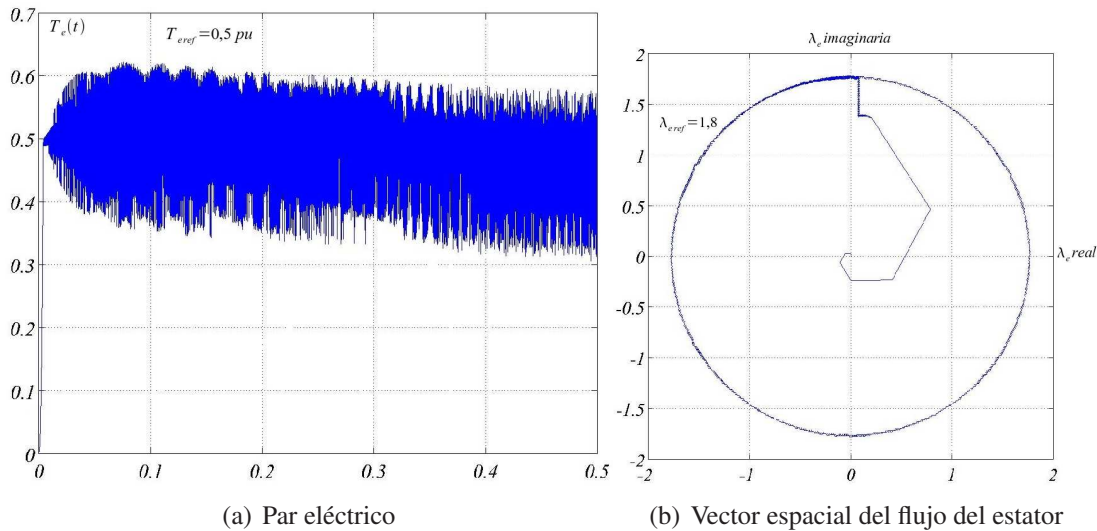


Figura 7.47 Par eléctrico y enlace de flujo de un motor de inducción accionado mediante un controlador directo de par.

independiente de la variación de los parámetros de la máquina³³.

7.11. Sumario

1. El *proceso de arranque* de la máquina de inducción requiere solicitaciones importantes tanto para el sistema eléctrico como para el propio convertidor. Cuando se realiza a plena tensión las corrientes pueden alcanzar magnitudes superiores a cinco veces los valores nominales. Para limitar las caídas de tensión en los alimentadores y el calentamiento de la máquina se utilizan diversos arrancadores tales como el *estrella-delta*, por *autotransformador* o el *arranca suave*, cuyo fundamento se basa en reducir la tensión aplicada a las bobinas. El inconveniente de estos mecanismos de arranque es la reducción del par de accionamiento proporcionalmente al cuadrado de la tensión aplicada.
2. La máquina de inducción con rotor de *jaula de ardilla* puede incrementar el par eléctrico durante el arranque cuando se diseña con *barras profundas*. El efecto pelicular distribuye no uniformemente las corrientes en estas barras dependiendo de la frecuencia del campo con que son cortadas. Cuando la velocidad del rotor es cero, la frecuencia es máxima y las barras presentan una alta resistencia equivalente debido al efecto pelicular. Durante la operación en régimen permanente, el deslizamiento y la frecuencia de corte de las barras por el campo son mucho menores y el efecto pelicular se hace despreciable, reduciendo la resistencia equivalente del rotor. Las máquinas de inducción de rotor bobinado pueden añadir resistencias externas en el rotor durante el arranque para incrementar el par, la cual si se elimina durante la operación en régimen permanente incrementa el rendimiento.

³³ A excepción de la resistencia del estator que puede ser ajustada periódicamente, y cuyas fluctuaciones introducen errores poco significativos para el controlador de velocidad.

3. Las *componentes simétricas* son una herramienta eficaz para el *análisis desequilibrado* de la máquina de inducción. Permiten descomponer un modelo acoplado en varios modelos desacoplados. Las condiciones de contorno en fase se deben convertir al dominio de la secuencia, conformando junto con los modelos de secuencia un sistema cuya solución es más simple por no tener acoplamientos entre secuencias. Las componentes simétricas pueden ser aplicadas solamente sobre máquinas totalmente simétricas, pero sus conexiones externas pueden tener cualquier clase de desequilibrio. En algunas ocasiones es posible determinar un circuito equivalente para ciertas conexiones de desequilibrio que simplifica la solución del sistema de ecuaciones. Las componentes simétricas tienen gran utilidad cuando son aplicadas para desacoplar los modelos transitorios de la máquina de inducción.
4. El modelo de la máquina de inducción puede ser extendido para permitir el análisis de *armónicas temporales* en la fuente de alimentación o por las *armónicas espaciales* debidas a la distribución de los devanados. En estos casos se utiliza el principio de superposición, y en cada armónica espacial o temporal se debe analizar su secuencia correspondiente, de tal manera que la superposición del par se realice con el signo adecuado. Las reactancias del modelo de una armónica temporal se amplifican en este orden mientras que las resistencias se consideran prácticamente constantes. En las sub-armónicas espaciales ocurre un efecto similar pero en este caso hay un decrecimiento de la frecuencia y de la reactancia. Para la determinación del deslizamiento de cada armónica o sub-armónica se debe tener en cuenta su correspondiente secuencia. En cuando las armónicas temporales incrementan las corrientes para un determinado deslizamiento, su efecto sobre el par eléctrico es menos importante de lo que cabría pensar, debido a la dependencia cuadrática del par con la tensión de alimentación. La distribución de los conductores en las máquinas de inducción industriales, reduce considerablemente el efecto de las armónicas espaciales.
5. Generalizando las componentes simétricas polifásicas es posible encontrar una transformación que desacople las máquinas tetrafásicas. Esta geometría permite la representación de la *máquina bifásica* de inducción mediante dos secuencias. Los desequilibrios internos de la máquina bifásica de inducción pueden ser transformados en desequilibrios externos aplicados a una máquina equilibrada. Las máquinas bifásicas tienen un ámbito de aplicación muy extenso para aquellos accionamientos residenciales, comerciales e industriales de baja potencia ($< 2 kW$). En la práctica se utiliza un arranque bifásico mediante un condensador en serie que desfasa la corriente por la bobina auxiliar y cuando se ha alcanzado entre un 70~75 % de la velocidad nominal, se desconecta este circuito mediante un contactor centrífugo que gira con el eje del motor. Una vez que el circuito auxiliar es desconectado la máquina se mantiene operando monofásicamente.
6. Las componentes simétricas y los *vectores espaciales* permiten representar eficazmente la máquina de inducción en régimen transitorio. Estos modelos determinan fenómenos no previstos por el modelo clásico de la máquina tales como las oscilaciones del par eléctrico durante un arranque a plena tensión y frecuencia. Los modelos transitorios son necesarios para analizar el comportamiento de los controladores de velocidad. Estos modelos pueden ser utilizados para estimar el valor instantáneo de variables internas de la máquina como

son los enlace de flujo o el par eléctrico.

7. Con el desarrollo de la electrónica de potencia ha sido posible ampliar el rango de aplicación de la máquina de inducción al *control de velocidad*. La disponibilidad de fuentes de tensión y frecuencia variable permite la operación de estos convertidores a cualquier velocidad, con bajas corrientes y altos pares de accionamiento. Los controles de velocidad por regulación tensión-frecuencia, campo orientado y control directo de par son tres soluciones utilizadas frecuentemente.

7.12. Ejemplos resueltos

Ejemplo 1: Máquina de inducción con rotor de barra profunda

Una máquina de inducción de rotor de jaula de ardilla con barras profundas posee los siguientes valores de sus parámetros en el sistema adimensional de medidas:

R_e	$X_{\sigma e}$	R_m	X_m	X_{12}	R_1	X_2	R_2
0,02	0,1	100	4,0	0,06	0,08	0,06	0,02

Determinar³⁴:

1. El deslizamiento del punto nominal, si se asume que los parámetros se han especificado en la base de la potencia nominal en el eje.
2. Las corrientes del estator en las siguientes condiciones:
 - a) Arranque ($s = 1; \omega_m = 0$)
 - b) Punto nominal ($s = s_n; \omega_m = \omega_{mn}$)
 - c) Vacío ($s = 0; \omega_m = \omega_e = 1$)
 - d) Par máximo
3. La estimación de los parámetros de dicho convertidor en base a las cuatro corrientes determinadas en el punto anterior.
4. El par eléctrico y el rendimiento producido por el convertidor en función del deslizamiento.

Solución:

³⁴Es recomendable realizar un programa en una aplicación de alto nivel tal como Scilab, Matlab u Octave para obtener los resultados de este ejemplo.

1. El deslizamiento del punto nominal, si se asume que los parámetros se han especificado en la base de la potencia nominal en el eje:

Cuando la máquina alcanza el deslizamiento nominal s_n , el eje entrega a la carga la potencia nominal 1, 0. De esta forma se tiene:

$$P_{eje_n} = \frac{1 - s_n}{s_n} [R_{r1} |I_{r1}(s_n)|^2 + R_{r2} |I_{r2}(s_n)|^2] = 1, 0 \quad (7.103)$$

donde:

$$\begin{bmatrix} I_e(s_n) \\ I_{r2}(s_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{th} + R_{r1} \frac{1}{s_n} & -R_{r1} \frac{1}{s_n} \\ -R_{r1} \frac{1}{s_n} & (R_{r1} + R_{r2}) \frac{1}{s_n} + jX_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_{th} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_{r1}(s_n) = I_e(s_n) - I_{r2}(s_n)$$

$$V_{th} = V_e \frac{Z_m}{Z_e + Z_m} ; \quad Z_{th} = \frac{Z_e \cdot Z_m}{Z_e + Z_m} + jX_{12}$$

$$Z_e = R_e + jX_e ; \quad Z_m = \frac{jX_m R_m}{R_m + jX_m}$$

En el código 7 se presenta un programa ejecutable mediante la aplicación Scilab 3 que permite determinar el deslizamiento nominal a partir de la expresión 7.103. El resultado obtenido es:

$$s_n = 0,01886$$

2. Las corrientes del estator en las siguientes condiciones:

Con el mismo algoritmo desarrollado en el código 7, es posible determinar las corrientes siguientes:

- a) Arranque ($s = 1; \omega_m = 0$): $I_{e1} = 5,2915 \angle -74,7^\circ p.u.$
- b) Punto nominal ($s = s_n; \omega_m = \omega_{mn}$): $I_{en} = 5,2915 \angle -74,7^\circ p.u.$
- c) Vacío ($s = 0; \omega_m = \omega_e = 1$): $I_{e0} = 1,1821 \angle -24^\circ p.u.$
- d) Par máximo ($s = 0,0809$): $I_{T_{max}} = 1,4784 \angle -44,3^\circ p.u.$

3. La estimación de los parámetros de dicho convertidor en base a las cuatro corrientes determinadas en el punto anterior.

Para este fin se puede adaptar el algoritmo 4 presentado en el capítulo 6 para resolver la estimación de los parámetros de máquinas con rotor de jaula de barra profunda. El algoritmo 8 es una adaptación que permite resolver este tipo de problemas. En la tabla 7.3 se muestran los resultados obtenidos:

Algoritmo 7 Determinación del deslizamiento nominal para una máquina de inducción con rotor de jaula profunda cuyos datos se expresan en el sistema adimensional de unidades

```

j=%i;i=j;pi=%pi;error_max=1e-3; //Definición de constantes
Re=0.02; Rm=100; Rr1=0.08; Rr2=0.02; //Parámetros resistivos
Xe=0.10; Xm=4; Xl2=0.06; X2=0.06; //Parámetros inductivos
Ve=1;Pneje=1; //Tensión y potencia nominal
Ze =Re+j*Xe; //Impedancia del estator
Zm=j*Xm*Rm/(Rm+j*Xm); //Impedancia de magnetización
Zth=Ze*Zm/(Ze+Zm)+j*Xl2; //Impedancia de Thèvenin
Vth=Ve*Zm/(Ze+Zm); //Tensión de Thèvenin
s=.0001:1/1000:1; //Barrido del deslizamiento
n=size(s); //Tamaño del vector deslizamiento
sn=0; Pn=0; //Inicialización de variables
for i=1:n(2); //Barrido del deslizamiento

    Ier=inv([Zth+Rr1/s(i),-Rr1/s(i);-Rr1/s(i),((Rr1+Rr2)/s(i))+j*X2])*[Vth;0];
    Zr=((Rr2/s(i)+j*X2).*(Rr1/s(i)))/((Rr2/s(i)+j*X2)+(Rr1/s(i)));
    Vm = Ier(1)*Zr; //Cálculo de la tensión de magnetización
    Ie(i)=Ier(1)+Vm/Zm; //Almacena la corriente del estator
    Ir1=abs(Ier(1)-Ier(2)); //Corriente por Rr1
    Ir2=abs(Ier(2)); //Corriente por Rr2
    Te(i)=(1/s(i))*(Rr1*Ir1^2+Rr2*Ir2^2); //Cálculo del par eléctrico
    Peje(i)=((1-s(i))/s(i))*(Rr1*Ir1^2+Rr2*Ir2^2); //Cálculo de la potencia
    Pent(i)=real(Ve*Ie(i)); //Potencia de entrada
    eficiencia(i)=Peje(i)/Pent(i); //Eficiencia
    if abs((Peje(i)-Pneje)/Pneje)<=error_max & s(i)<=.1 then
        sn=s(i);Pn=Peje(i);i_n=i; //Almacena el punto nominal
    end,
    if abs(s(i)-0.08)<=error_max then

        sTmax=s(i);Tmax=Te(i);i_Tmax=i;IeTmax=Ie(i); //Almacena punto de par máximo
    end,
end
//Resultados
sn Pn In=Ie(i_n) // Punto nominal
sTmax IeTmax // Par máximo
Ie_vac=Ie(1) Ie_arr=Ie(n(2)) // Corrientes de vacío y rotor bloqueado
subplot(2,1,1)
plot(s,Te) // Gráfico del par
subplot(2,1,2)
plot(s(1:200),eficiencia(1:200)) // Gráfico del rendimiento

```

Parámetro	Inicial	Estimación	Exacto
R_e	0,0200	0,0200	0,02
$X_{\sigma e}$	0,12	0,0999802	0,1
R_m	92	100,00115	100
X_m	3,6	4,0000196	4
$X_{\sigma 12}$	0,05	0,0600199	0,06
R_{r1}	0,09	0,0799995	0,08
$X_{\sigma 2}$	0,05	0,0600002	0,06
R_{r1}	0,03	0,0200001	0,02
$\Psi(\mathbf{X})$	0,2007	$1,84 \times 10^{-13}$	$7,39 \times 10^{-14}$

Tabla 7.3 Parámetros obtenidos mediante el programa 8

Algoritmo 8 Estimación de parámetros de la máquina de inducción con rotor de barra profunda

```
// Los parámetros del circuito equivalente de esta máquina son:
// Re = .02 p.u. Xe = .10 p.u. Rm = 100. p.u. Xm = 4.0 p.u.
// Xl2= .06 p.u. Rr1= .08 p.u. X2 = .06 p.u. Rr2= .02
// Vector de arranque x0: [Xe,Rm,Xm,Xl2,Rr1,X2,Rr2]
x0=[.12 92 3.6 .05 .09 .05 .03]'
//
// Llamada a la rutina optim que calcula los valores
// de los parámetros x que minimizan la función de costo.
//
[Psi,x,g] = optim(list(NDcost,costo),x0);
//
// En el vector x se han cargado los parámetros óptimos de la
// estimación. La solución es:
//
Refin = 0.02 // Medición directa de la resistencia estator
Xefin = x(1) // Reactancia de dispersión del estator
Rmfin = x(2) // Resistencia de magnetización
Xmfin = x(3) // Reactancia de magnetización
Xl2fin= x(4) // Reactancia fuga estator rotor
Rr1fin= x(5) // Resistencia de la barra superficial
X2fin = x(6) // Reactancia de fuga de la barra profunda
Rr2fin= x(7) // Resistencia de la barra profunda
Psi // Costo final
```

4. El par eléctrico y el rendimiento producido por el convertidor en función del deslizamiento.

En la figura 7.48 se presentan los gráficos del par eléctrico y rendimiento en función del deslizamiento para la máquina analizada.

Ejemplo 2: Conexión desequilibrada de la máquina de inducción

Una máquina de inducción está alimentada mediante una fuente sinusoidal de frecuencia industrial en la fase *a*. La fase *b* tiene conectada un condensador de valor conocido *C*. La fase *c* se encuentra en circuito abierto. Determine la expresión del par eléctrico en función del deslizamiento.

Solución:

Para determinar el par eléctrico en función del deslizamiento, es necesario convertir las condiciones de contorno en las fases al dominio de la secuencia. En un sistema trifásico deben obtenerse tres condiciones de contorno independiente, que en este caso pueden expresarse como:

$$V_a = V ; V_b = -j \frac{I_b}{\omega C} ; I_c = 0 \quad (7.104)$$

Algoritmo 9 Función de costo a ser minimizada

```
//*****
function Psi = costo(x)
//*****
// Evaluación de la función de costos por mínimos cuadrados.
// Psi = Sumatoria(errores relativos)^2
// Deslizamientos correspondientes a los ensayos de vacío,
// carga, par máximo y rotor bloqueado.
//
Re = 0.02; // Medición directa de la resistencia estator
Xe = x(1); // Reactancia de dispersión del estator
Rm = x(2); // Resistencia de magnetización
Xm = x(3); // Reactancia de magnetización
Xl2= x(4); // Reactancia fuga estator rotor
Rr1= x(5); // Resistencia de la barra superficial
X2 = x(6); // Reactancia de fuga de la barra profunda
Rr2= x(7); // Resistencia de la barra profunda
//
// Vector de las impedancias de entrada medidas en los ensayos.
//
j=%i; // Definición de j como número complejo
// Los parámetros exactos del circuito equivalente de esta máquina son:
// Re = .02 p.u. Xe = .10 p.u.
// Rm = 100. p.u. Xm = 4.0 p.u.
// Xl2= .06 p.u. Rr1= .08 p.u.
// x2 = .006 p.u. Rr2= .02 p.u.
//
// Los ensayos realizados dieron los siguientes resultados:
s = [0.0001 0.01886 0.0809 1]';
Zmedida = [.2773721+j*4.0832533;.7997782+j*0.3603657;
           .2122956+j*0.2080942;.0522325+j*0.1893435];
//
// Evaluación de las impedancias calculadas mediante la estimación
// de los parámetros del modelo.
//
Ze = Re+j*Xe; // Impedancia estator
Zm = (Rm*j*Xm)/(Rm+j*Xm); // Impedancia magnetización
Zth= Ze*Zm/(Ze+Zm)+j*Xl2; // Impedancia de Thévenin
Ve = 1.00; // Tensión del estator
Vth= Zm*Ve/(Zm+Ze); // Tensión de Thevenin
for i=1:4

    Ier=inv([Zth+Rr1/s(i),-Rr1/s(i);-Rr1/s(i),((Rr1+Rr2)/s(i))+j*X2]))*[Vth;0];
    Ir(i)=Ier(1); // Almacena la corriente del rotor
end
Zr=(Rr2./s+j*X2).*(Rr1./s)./((Rr2./s+j*X2)+(Rr1./s));
Vm = Ir.*Zr; // Tensión rama magnetizante
Im = Vm/Zm; // Corriente de magnetización
Ie = Im+Ir; // Corriente del estator
Zcalculada=Ve./Ie; // Impedancia de entrada calculada
// Cálculo del error relativo entre las medidas y el modelo
err = (Zmedida-Zcalculada)./Zmedida;
endfunction;
```

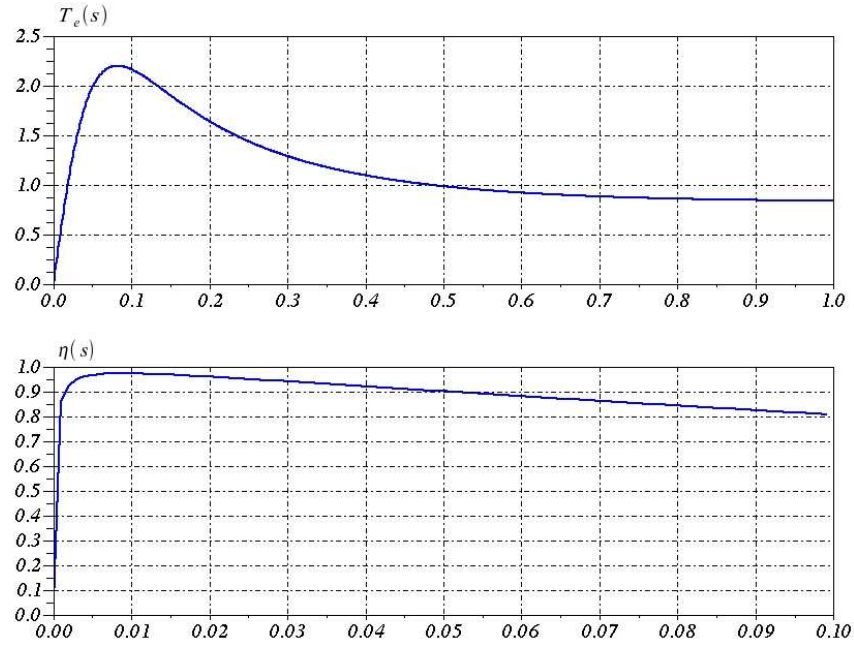


Figura 7.48 Par eléctrico y rendimiento con respecto al deslizamiento de la máquina de inducción con rotor de barras profundas

Utilizando la transformación de componentes simétricas 7.7 se obtienen las condiciones de contorno en el dominio de la secuencia:

$$V_a = V = \frac{1}{\sqrt{3}}(V_0 + V_+ + V_-) \quad (7.105)$$

$$V_b = \frac{1}{\sqrt{3}}(V_0 + \alpha^2 V_+ + \alpha V_-) = -\frac{j}{\sqrt{3}\omega C}(I_0 + \alpha^2 I_+ + \alpha I_-) \quad (7.106)$$

$$I_c = 0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(I_0 + \alpha I_+ + \alpha^2 I_-) \quad (7.107)$$

En las expresiones 7.105, 7.106 y 7.107 se relacionan las tres tensiones de secuencia con las tres corrientes de secuencia. Para completar el sistema de ecuaciones que permita determinar el comportamiento de la máquina de inducción sometida a estas condiciones desequilibradas es necesario añadir las tres expresiones que relacionan las tensiones de secuencia con las corrientes de secuencia en una máquina de inducción trifásica equilibrada:

$$V_+ = Z_+(s) \cdot I_+ ; V_- = Z_-(s) \cdot I_- ; V_0 = Z_0 \cdot I_0 \quad (7.108)$$

De esta forma se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 + \frac{j}{\omega C Z_0} & \alpha^2(1 + \frac{j}{\omega C Z_+(s)}) & \alpha(1 + \frac{j}{\omega C Z_-(s)}) \\ \frac{1}{Z_0} & \frac{1}{Z_+} & \frac{1}{Z_-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0(s) \\ V_+(s) \\ V_-(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.109)$$

Del sistema de ecuaciones 7.109 se obtienen las tres tensiones de secuencia en función del deslizamiento. Conocidas $V_+(s)$ y $V_-(s)$, se determina el par eléctrico que produce cada secuencia³⁵:

$$T_e = T_{e+} - T_{e-} = \frac{V_{th+}^2(s) \frac{R_r}{s}}{\omega [(R_{th} + \frac{R_r}{s})^2 + X_{th}^2]} - \frac{V_{th-}^2(s) \frac{R_r}{2-s}}{\omega [(R_{th} + \frac{R_r}{2-s})^2 + X_{th}^2]} \quad (7.110)$$

donde:

$$V_{th+}(s) = \frac{Z_m}{Z_m + Z_e} V_+(s) ; \quad V_{th-}(s) = \frac{Z_m}{Z_m + Z_e} V_-(s)$$

Ejemplo 3: Armónicas temporales de una máquina de inducción pentafásica

Determine la dirección en que producen par eléctrico las armónicas temporales de una máquina pentafásica de inducción.

Solución:

1. PRIMERA ARMÓNICA: Las primeras armónicas de las corrientes de una máquina pentafásica tienen la estructura siguiente:

$$\begin{aligned} i_a(t) &= \sqrt{2} I_1 \cos(\omega t) \\ i_b(t) &= \sqrt{2} I_1 \cos(\omega t - \frac{2\pi}{5}) \\ i_c(t) &= \sqrt{2} I_1 \cos(\omega t - \frac{4\pi}{5}) \\ i_d(t) &= \sqrt{2} I_1 \cos(\omega t - \frac{6\pi}{5}) \\ i_e(t) &= \sqrt{2} I_1 \cos(\omega t - \frac{8\pi}{5}) \end{aligned} \quad (7.111)$$

La fuerza magnetomotriz producida por las corriente 7.111 es:

$$\mathcal{F}_{R1}(t, \theta) = \sqrt{2} N I_1 \sum_{k=a}^e \cos(\omega t - \frac{2k\pi}{5}) \cos(\theta - \frac{2k\pi}{5}) = \frac{\sqrt{25} N I_1}{2} \cos(\omega t - \theta)$$

que es un campo magnético rotatorio de secuencia positiva $\frac{d\theta}{dt} = \omega$. En esta expresión $a = 0, b = 1, \dots, e = 4$.

2. TERCERA ARMÓNICA: En este caso se obtiene la expresión siguiente para la fuerza magnetomotriz de tercera armónica:

$$\mathcal{F}_{R3}(t, \theta) = \sqrt{2} N I_3 \sum_{k=a}^e \cos 3(\omega t - \frac{2k\pi}{5}) \cos(\theta - \frac{2k\pi}{5}) = 0$$

que es un campo magnético rotatorio de secuencia cero.

³⁵Es necesario recordar en este punto que la secuencia cero no produce par eléctrico.

3. QUINTA ARMÓNICA: En este caso se obtiene la expresión siguiente para la fuerza magnetomotriz de quinta armónica:

$$\mathcal{F}(t, \theta) = \sqrt{2}NI_5 \sum_{k=a}^e \cos 5(\omega t - \frac{2k\pi}{5}) \cos(\theta - \frac{2k\pi}{5}) = 0$$

que es un campo magnético rotatorio de secuencia cero.

4. SÉPTIMA ARMÓNICA: En este caso se obtiene la expresión siguiente para la fuerza magnetomotriz de séptima armónica:

$$\mathcal{F}_{R7}(t, \theta) = \sqrt{2}NI_7 \sum_{k=a}^e \cos 7(\omega t - \frac{2k\pi}{5}) \cos(\theta - \frac{2k\pi}{5}) = 0$$

que es un campo magnético rotatorio de secuencia cero.

5. NOVENA ARMÓNICA: En este caso se obtiene la expresión siguiente para la fuerza magnetomotriz de séptima armónica:

$$\mathcal{F}(t, \theta) = \sqrt{2}NI_9 \sum_{k=a}^e \cos 9(\omega t - \frac{2k\pi}{5}) \cos(\theta - \frac{2k\pi}{5}) = \frac{\sqrt{25}NI_9}{2} \cos(9\omega t + \theta)$$

que es un campo magnético rotatorio de secuencia negativa de velocidad $\frac{d\theta}{dt} = -9\omega$.

6. DÉCIMO PRIMERA ARMÓNICA: En este caso se obtiene la expresión siguiente para la fuerza magnetomotriz de séptima armónica:

$$\mathcal{F}(t, \theta) = \sqrt{2}NI_{11} \sum_{k=a}^e \cos 11(\omega t - \frac{2k\pi}{5}) \cos(\theta - \frac{2k\pi}{5}) = \frac{\sqrt{25}NI_{11}}{2} \cos(11\omega t - \theta)$$

que es un campo magnético rotatorio de secuencia positiva de velocidad $\frac{d\theta}{dt} = 11\omega$.

En resumen, la secuencia de las armónicas temporales para una máquina de inducción pentafásica equilibrada es la siguiente:

1 ^a	3 ^a	5 ^a	7 ^a	9 ^a	11 ^a	13 ^a	15 ^a	17 ^a	19 ^a	21 ^a	...
+	0	0	0	-	+	0	0	0	-	-	...

Ejemplo 4: Selección del condensador de arranque de una máquina de inducción monofásica

Una máquina de inducción monofásica posee un devanado auxiliar construido con la mitad de vueltas del principal y con un conductor de igual sección, para permitir el arranque por

condensador. Los datos de esta máquina son los siguientes:

$P_{n\text{ eje}}$	V_n	η_n	n_n	$\cos \phi_n$	f
500 W	110 V	65 %	1700 rpm	0,80	60 Hz

Determine el valor del condensador que produce el máximo par de arranque³⁶.

Solución:

En primer lugar es necesario determinar los parámetros del circuito equivalente de esta máquina. En el punto nominal de operación actúa solamente el devanado principal y el circuito equivalente en este caso es el que se ha ilustrado en la figura 7.31. Despreciar la rama de magnetización, simplifica los cálculos necesarios para la determinación paramétrica. En este caso:

$$\begin{aligned}
 I_a &= \frac{V_n}{R_e + \frac{1}{2}R_r \left[\frac{1}{s_n} + \frac{1}{2-s_n} \right] + j(X_{\sigma e} + X_{\sigma r})} = \\
 &= \frac{P_{n\text{ eje}}}{V_n \cdot \cos \phi_n \cdot \eta_n} \angle -\arccos(0,80) = 8,741 \angle -36,87^\circ \text{ A} \quad (7.112)
 \end{aligned}$$

De la expresión 7.112, obtenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
 R_e + 9,257R_r &= 10,06 \Omega \\
 X_e + X_r &\approx 2X_e = 7,55 \Omega
 \end{aligned}$$

En el punto nominal se entrega el par nominal en el eje:

$$\begin{aligned}
 T_{en} &= \frac{P_{n\text{ eje}}}{\omega_n} = \frac{500}{\frac{2\pi 1700}{60}} = 2,8086 \text{ Nm} = I_{en}^2 \frac{R_r}{2\omega_s} \left[\frac{1}{s_n} - \frac{1}{2-s_n} \right] \Rightarrow \\
 R_r &= \frac{2 \cdot T_{en} \cdot \omega_s}{|I_{en}|^2 \left[\frac{1}{s_n} - \frac{1}{2-s_n} \right]} = 0,7925 \Omega \\
 R_e &= 10,06 - 9,257 \times 0,7925 = 2,7238 \Omega \\
 X_e &\approx X_r \approx 3,775 \Omega
 \end{aligned}$$

El devanado auxiliar tiene la mitad de vueltas del enrollado principal y la sección del conductor es la misma, por tanto su resistencia debe ser la mitad de la resistencia del estator. La reactancia depende del cuadrado del número de vueltas y por tal motivo la reactancia de esta bobina es la cuarta parte de la reactancia del devanado principal. En resumen:

R_{ep}	$X_{\sigma ep}$	R_r	$X_{\sigma r}$	R_{aux}	X_{aux}
2,7238 Ω	3,775 Ω	0,7925 Ω	3,775 Ω	1,3619 Ω	0,94375 Ω

³⁶Puede despreciar el efecto de las pérdidas y de la rama de magnetización.

La relación de transformación $a = \frac{N_p}{N_{aux}} = 2$, permite determinar la impedancia Z_x , de acuerdo con la expresión 7.80 como:

$$\begin{aligned} Z_x &= a^2 \left(-\frac{j}{\omega C} + Z_{aux} \right) - Z_p = \\ &= 4(-jX_c + 1,3619 + j0,94375) - 2,7238 - j3,775 = \\ &= 2,7238 - j4X_c \end{aligned}$$

Las impedancias de secuencia positiva y negativa en el arranque son iguales y su valor es:

$$Z_+ = Z_- = R_e + R_r + j(X_{\sigma e} + X_{\sigma r}) = 3,5163 + j7,55 \Omega$$

Introduciendo estos valores en el sistema de ecuaciones 7.84 se pueden obtener las corrientes de secuencia positiva I_+ y negativa I_- para un determinado valor del condensador C , o de la reactancia X_c . El par de arranque se obtiene de la siguiente forma:

$$T_e(s=1) = \frac{R_r}{\omega_s} [|I_+|^2 - |I_-|^2]$$

En la siguiente tabla se presentan los resultados obtenidos al hacer un barrido de la reactancia capacitiva X_c :

X_c	$1,8 \Omega$	$2,0 \Omega$	$2,2 \Omega$	$2,4 \Omega$	$2,6 \Omega$
T_e	$2,06 Nm$	$2,17 Nm$	$2,22 Nm$	$2,20 Nm$	$2,12 Nm$

La reactancia que produce el máximo par en el arranque es aproximadamente $2,2 \Omega$, por esta razón la máquina debería utilizar un condensador de $1,2 mF$.

Ejemplo 5: Vector espacial de las tensiones línea-línea

Utilizando la transformación a vectores espaciales determine:

1. El vector espacial de las tensiones del estator de una máquina de inducción a partir de las tensiones línea a línea.
2. La potencia activa y reactiva instantánea.

Solución:

1. El vector espacial de las tensiones del estator de una máquina de inducción a partir de las tensiones línea a línea:

El vector espacial de las tensiones del estator se obtiene directamente a partir de las tensiones línea a neutro mediante la expresión 6.7:

$$\mathbf{v}_e = \sqrt{\frac{2}{3}}(v_a + \alpha v_b + \alpha^2 v_c)$$

Si se aplica esta transformación a las tensiones línea a línea se obtiene el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_e^{L-L} &= \sqrt{\frac{2}{3}}(v_{ab} + \alpha v_{bc} + \alpha^2 v_{ca}) \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}}[(v_a + \alpha v_b + \alpha^2 v_c) - (v_b + \alpha v_c + \alpha^2 v_a)] = \\ &= \left[\sqrt{\frac{2}{3}}(v_a + \alpha v_b + \alpha^2 v_c) - \alpha^2 \sqrt{\frac{2}{3}}(\alpha v_b + \alpha^2 v_c + \alpha^3 v_a) \right] = \\ &= [\mathbf{v}_e - \alpha^2 \mathbf{v}_e] = (1 - \alpha^2) \mathbf{v}_e \Rightarrow \\ \mathbf{v}_e &= \frac{1}{1 - \alpha^2} \mathbf{v}_e^{L-L} = \frac{\sqrt{2}e^{-j\frac{2\pi}{6}}}{3} (v_{ab} + \alpha v_{bc} + \alpha^2 v_{ca}) \end{aligned}$$

2. La potencia activa y reactiva instantánea:

Para obtener la potencia activa y reactiva instantánea mediante los vectores espaciales se realiza el producto del vector espacial de la tensión espacial por el conjugado del vector espacial de la corriente:

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{i}_e^* = \sqrt{\frac{2}{3}}(v_a + \alpha v_b + \alpha^2 v_c) \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}(i_a + \alpha^2 i_b + \alpha i_c) = \\ &= \frac{2}{3} [(v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c) + \alpha(v_a i_c + v_b i_a + v_c i_b) + \alpha^2(v_c i_a + v_b i_c + v_a i_b)] = \\ &= \frac{2}{3} \left[(v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c) - \frac{1}{2}(v_a i_c + v_b i_a + v_c i_b + v_c i_a + v_b i_c + v_a i_b) \right] + \dots \\ &\quad \dots + j \frac{2}{3} \left[\frac{\sqrt{3}}{2}(v_a i_c + v_b i_a + v_c i_b - v_c i_a - v_b i_c - v_a i_b) \right] = \\ &= \frac{2}{3} \left[(v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c - \frac{1}{2}v_a(i_c + i_b) - \frac{1}{2}v_b(i_a + i_c) - \frac{1}{2}v_c(i_a + i_b)) \right] + \dots \\ &\quad \dots + j \frac{2}{3} \left[\frac{\sqrt{3}}{2}(v_{ab} i_c + v_{bc} i_a + v_{ca} i_b) \right] = \\ &= (v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c) + j \frac{1}{\sqrt{3}}(v_{ab} i_c + v_{bc} i_a + v_{ca} i_b) = p + jq \end{aligned}$$

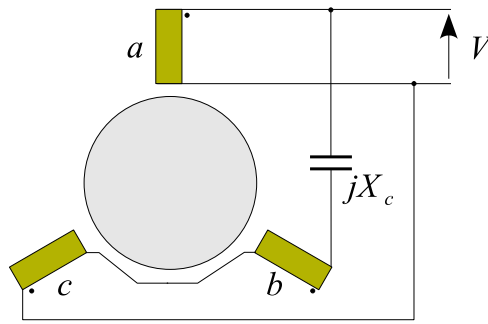


Figura 7.49 Conexión monofásica de una máquina de inducción trifásica

$R_e = 0,01$	$X_{\sigma e} = 0,2$	$X_m = 3$	$R_m = 30$	$V_n = 416 \text{ V}$
$X_{12} = 0,15$	$R_{r1} = 0,15$	$R_{r2} = 0,06$	$X_2 = 0,3$	$I_n = 97 \text{ A}$

Tabla 7.4 Parámetros del motor de inducción del ejercicio 3

7.13. Ejercicios propuestos

- Un motor trifásico de inducción trifásico, cuyos parámetros se encuentran dentro de los límites teóricos, se conecta como se muestra en la figura 7.49. Determine:
 - El valor de X_c para que la máquina arranque con par máximo.
 - El deslizamiento nominal de la máquina.
 - El rendimiento del punto nominal
- Conocidos todos los parámetros de una máquina de inducción con rotor de doble jaula, realice un algoritmo que permita calcular:
 - El par máximo de la máquina.
 - El deslizamiento correspondiente a una potencia específica en el eje.
- De un motor de inducción de doble jaula se conocen los parámetros y valores nominales que se expresan en la tabla 7.4. Calcule:
 - El par de arranque con una tensión de la fuente de 400 V.
 - La potencia nominal en el eje del motor y el rendimiento en este punto de operación.

4. Un motor de inducción trifásico balanceado con sus valores dentro de los límites teóricos para su circuito equivalente, se alimenta con tensión y frecuencia nominal en su fase *a*, mientras que en cada una de las fases *b* y *c*, se conecta una reactancia capacitiva de valor $0,2 pu$. Determine:
 - a) El par y la corriente de arranque de la máquina en estas condiciones.
 - b) El rendimiento en el punto nominal de operación.

5. Una máquina monofásica de inducción con arranque por condensador de $1,5 HP$, $208 V$, $60 Hz$, factor de potencia $0,77$, rendimiento nominal 65% y velocidad nominal $1700 rpm$, tiene un devanado auxiliar con un tercio de vueltas del principal, pero su resistencia es idéntica a la del principal. Determine: 1.
 - a) El condensador necesario en el circuito auxiliar para que la máquina arranque con un campo magnético rotatorio. 2.
 - b) La corriente y el par de arranque conectando el devanado auxiliar sin el condensador de arranque.

6. Una máquina monofásica de inducción con arranque por condensador de $1 HP$, $120 V$, $60 Hz$, factor de potencia $0,8$, rendimiento nominal 60% y velocidad nominal $1650 rpm$, posee una reactancia de dispersión de $0,4 pu^{37}$. El devanado auxiliar tiene la mitad de vueltas del principal, pero su resistencia es el doble. El condensador de arranque es de $30 \mu F$. Determine:
 - a) La corriente y el par de arranque con el condensador conectado.
 - b) La corriente y el par de arranque conectando el devanado auxiliar sin el condensador de arranque.

7. Una máquina de inducción monofásica de $\frac{1}{4} HP$, $120 V$, $3,7 A$, factor de potencia nominal $0,7$ y velocidad nominal $1650 rpm$, tiene en su devanado auxiliar un tercio del número de vueltas de la bobina principal y su resistencia es el doble. Durante el proceso de arranque se utiliza un condensador de $5 \mu F$, pero cuando la máquina alcanza el 75% de la velocidad nominal, el circuito auxiliar se desconecta. La rama de magnetización puede ser despreciada. Determine:
 - a) La corriente y el par de arranque.
 - b) El punto de operación si la máquina se encuentra operando a $1700 rpm$.

³⁷La rama de magnetización puede ser despreciada en este problema.

8. Calcule el valor de la capacitancia del condensador que es necesario conectar en serie con una de las bobinas, para producir un campo magnético rotatorio durante el arranque de una máquina bifásica equilibrada, alimentada por una fuente monofásica. Se conoce la impedancia de entrada de la máquina de inducción en la condición de rotor bloqueado.
9. Realice un programa que le permita integrar las ecuaciones de campo orientado que representan el comportamiento transitorio de la máquina de inducción. Simule el arranque en vacío y con plena carga. Represente gráficamente, para las dos condiciones de arranque, las siguientes variables en función del tiempo³⁸:
 - a) El par instantáneo.
 - b) La magnitud de la corriente de magnetización.
 - c) La velocidad del vector de corriente de magnetización.
 - d) La velocidad del rotor.
 - e) Las corriente directa y la corriente cuadratura.
 - f) La corriente en la fase a de la máquina.
 - g) El lugar geométrico de la corriente del estator desde el arranque hasta el régimen permanente.
10. Demuestre que independientemente del número de fases de una máquina de inducción, siempre es posible su modelación en régimen permanente y transitorio con las ecuaciones de campo orientado.
11. Demuestre mediante el modelo de campo orientado de la máquina de inducción en condiciones de régimen permanente, que el par máximo se obtiene cuando son iguales las componentes directa y cuadratura de la corriente del estator, representada en el sistema de referencia rotórico.
12. Determine el vector espacial de las tensiones del estator a partir de las tensiones línea a línea que alimentan la máquina de inducción³⁹.
13. Determine el valor de la potencia activa y reactiva instantánea a partir de las definiciones de los vectores espaciales de tensión y corriente⁴⁰.

³⁸Sugerencia: Puede utilizar cualquier herramienta de cálculo tal como Matlab, Scilab, Octave, Fortran, C++, Simulink, Basic o equivalentes.

³⁹Sugerencia: Aplique la transformación de vectores espaciales a las tensiones de línea a línea.

⁴⁰Sugerencia: Recuerde que la potencia aparente se determina multiplicando la tensión por el conjugado de la corriente.

Bibliografía

- [1] J. M. Aller, "Simple Matrix Method to Introduce Spatial Vector Transformations and Oriented Field Equations in Electric Machine Courses," ICEM96 Proceedings, Vol. III, pp. 519-524, September, 1996. Vigo, Spain.
- [2] F. Blaske, "The Principle of Field Orientation as Applied to New TRASKVEKTOR Closed-Loop Control System for Rotating-Field Machines," Siemens Review, Vol. 34, pp. 217-220, May 1972. F. Blaske, "The Principle of Field Orientation as Applied to New TRASKVEKTOR Closed-Loop Control System for Rotating-Field Machines," Siemens Review, Vol. 34, pp. 217-220, May 1972.
- [3] E. Clarke; "Circuit Analysis of A-C Power Systems. Volume I: Symmetrical and Related Components," General Electric Company, Seventh printing, 1961.
- [4] M. Cortés, "Curso Moderno de Máquinas Eléctricas Rotativas," Barcelona Editores Técnicos Asociados 1994-1995.
- [5] S. J. Chapman, "Máquinas Eléctricas," McGraw-Hill, 1987.
- [6] A. E. Fitzgerald, C. Kingsley, Jr. & A. Kusko, "Electric Machinery: The Processes, Devices, and Systems of Electromechanical Energy Conversion," McGraw-Hill, Third Edition, 1971.
- [7] C. L. Fortescue; "Method of Symmetrical Coordinates Applied to the Solution of Polyphase Networks," AIEE Transactions, Vol. 37, 1918, pp. 1027-1140.
- [8] M.P. Kostenko & L.M. Piotrovski "Máquinas Eléctricas," Vol. II, Editorial Mir, Second edition, Moscú 1979.
- [9] G. Kron; "The Application of Tensors to the Analysis of Rotating Electrical Machinery," General Electric Review, Schenectady, New York 1942.
- [10] A. S. Langsdorf, "Theory of Alternating Current Machinery," Tata McGraw-Hill, Second Edition, 1974.

- [11] W. Leonhard, "Control of Electrical Drives," Springer - Verlag - Berlin, Heideberg 1985.
- [12] F. S. Maginnins & N. R. Schultz, "Transient Performance of Induction Motors," AIEE Transactions, Vol. 64, pp 651-656, 1944.
- [13] G. McPherson & R. D. Laramore, "An Introduction to Electrical Machines and Transformers," John Wiley & Sons, 1990.
- [14] R. Richter, "Elektrische Maschinen, Vol. IV," Verlag Birkhäuser AG, Basel, 1954.
- [15] J. Sanz, "Máquinas Eléctricas," Prentice Hall, España 2002.
- [16] L. Serrano, "Fundamentos de Máquinas Eléctricas Rotativas," Universidad Politécnica de Valencia, 1989.
- [17] L. Serrano, "The Modern Space-Phasor Theory, Part I: Its Coherent Formulation and its Advantages for Transient Analysis of Converted-Fed AC Machines," European Transactions on Electrical Power Engineering, ETEP Vol. 3, N° 2, Mar./Apr. 1993, pp. 171-180. VDE-VERLAG
- [18] L. Serrano, "The Modern Space-Phasor Theory, Part II: Comparison with the Generalized Machine Theory and the Space-Vector Theory," European Transactions on Electrical Power Engineering, ETEP Vol. 3, N° 3, May/June. 1993, pp. 213-219. VDE-VERLAG
- [19] G. Thaler & M. Wilcox, "Máquinas Eléctricas," Editorial Limusa, Mexico, 1979.
- [20] F. Tiberio, "Pruebas sobre Máquinas Eléctricas," Editorial Vicens-Vives, Primera Edición, 1965.
- [21] P. Vas; "Vector Control of AC Machines," Oxford University Press, 1990
- [22] P. Vas, "Electrical Machines and Drives. A Space Vector Approach," Oxford University Press, 1992
- [23] C.G. Veinott; "Motores Eléctricos de Potencia Fraccionaria y Subfraccionaria," Marcombo, 1978.
- [24] D. C. White & H. H. Woodson, "Electromechanical Energy Conversion," John Wiley & Sons, New York 1959.

CAPÍTULO 8

La Máquina Sincrónica

Las máquinas de corriente continua y de inducción tienen un amplio rango de aplicaciones industriales tales como tracción, bombeo, control y otros¹. Sin embargo, la operación del sistema eléctrico de potencia requiere la conversión de grandes cantidades de energía primaria², en energía y potencia eléctrica. La energía eléctrica puede ser transportada y convertida en otras formas de energía en forma limpia y económica. La máquina sincrónica es hoy por hoy, el convertidor utilizado más ampliamente para realizar esta tarea.

Dependiendo del sistema mecánico de accionamiento³, las máquinas sincrónicas pueden construirse de rotor liso cuando deban operar en altas velocidades⁴, o con rotor de polos salientes cuando son accionadas a menor velocidad. En la figura 8.1 se observan dos salas de máquinas de plantas de generación hidroeléctrica y térmica⁵.

Aun cuando un gran porcentaje de máquinas sincrónicas son utilizadas como generadores en las plantas de producción de energía eléctrica, debido fundamentalmente al alto rendimiento que es posible alcanzar con estos convertidores⁶ y a la posibilidad de controlar la tensión, en numerosas ocasiones se emplea industrialmente como elemento motriz. Como otros convertidores electromecánicos, la máquina sincrónica es completamente reversible y se incrementa día a día el número de aplicaciones donde puede ser utilizada con grandes ventajas, especialmente cuando se controla mediante fuentes electrónicas de frecuencia y tensión variable. El principal inconveniente para su uso como motor es que no desarrolla par de arranque, pero si se incluye en el rotor de la máquina un devanado auxiliar de jaula de ardilla, es posible obtener par de aceleración como motor de inducción hasta una velocidad cercana a la de sincronismo, y excitar

¹Condiciones todas de motorización o tracción de carga mecánica.

²Petróleo, gas natural, agua, carbón, uranio, viento, oleaje, luz.

³Tipo de turbina hidráulica, térmica, eólica, etc.

⁴3000 rpm a 50 Hz ó 3600 rpm a 60 Hz.

⁵Guri y Tocoa en Venezuela y la planta nuclear Diablo Cayon en California.

⁶Las máquinas de inducción no pueden producir par sin pérdidas en el rotor a diferencia de las máquinas sincrónicas donde este requisito desaparece.



(a) Guri en Venezuela



(b) Diablo Cayon en California



(c) Guri, estator en construcción



(d) Tacoa en Venezuela



(e) Guri, casa de máquinas

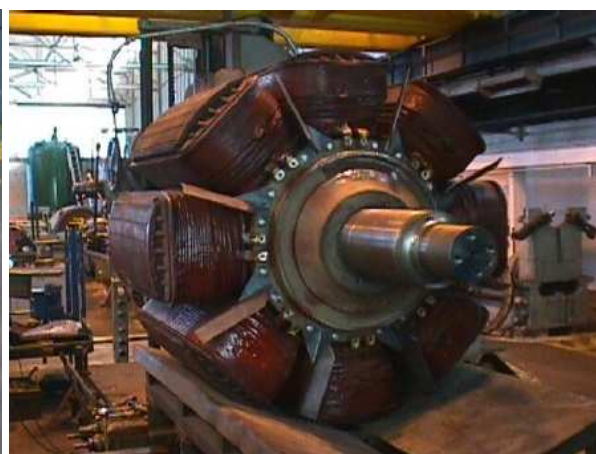


(f) Macagua, sala de máquinas

Figura 8.1 Plantas hidroeléctricas y térmicas



(a) Estator de la máquina sincrónica



(b) Rotor de polos salientes

Figura 8.2 Partes de las máquinas sincrónicas

en el momento apropiado la bobina del campo, con la finalidad de sincronizar la máquina a la red mediante los pares transitorios adicionales que se obtienen durante este proceso. Si la fuente de alimentación puede reducir la frecuencia angular de las tensiones o corrientes de armadura a valores muy bajos, la máquina es capaz de sincronizarse a esa red y posteriormente ser acelerada al mismo tiempo que se incrementa paulatinamente la frecuencia de la fuente. Como la construcción de fuentes de gran potencia controladas en frecuencia es hoy día factible mediante puentes inversores con interruptores estáticos, es posible que en el futuro esta máquina incremente notablemente su importancia como accionamiento industrial, e incluso desplace a las máquinas de corriente continua.

8.1. Descripción de la máquina sincrónica

La máquina sincrónica es un convertidor electromecánico de energía con una pieza giratoria denominada rotor o campo, cuya bobina se excita mediante la inyección de una corriente continua, y una pieza fija denominada estator o armadura por cuyas bobinas circula corriente alterna. Las corrientes alternas que circulan por los enrollados del estator producen un campo magnético rotatorio que gira en el entrehierro de la máquina con la frecuencia angular de las corrientes de armadura. El rotor debe girar a la misma velocidad del campo magnético rotatorio producido en el estator para que el par eléctrico medio pueda ser diferente de cero. Si las velocidades angulares del campo magnético rotatorio y del rotor de la máquina sincrónica son diferentes, el par eléctrico medio es nulo. Por esta razón a esta máquina se la denomina sincrónica; el rotor gira mecánicamente a la misma frecuencia del campo magnético rotatorio del estator durante la operación en régimen permanente. En la figura 8.2(a) y (b), se observa el estator y rotor de una máquina sincrónica de polos salientes.

Durante la operación de la máquina sincrónica en régimen permanente, la velocidad mecánica del rotor es igual a la velocidad angular del campo magnético rotatorio producido por el estator. En estas condiciones, sobre los conductores o bobinas del campo no se induce fuerza electromotriz. Para producir fuerza magnetomotriz en el rotor es necesario inyectar corriente en esta bobina mediante una fuente externa. De esta forma se obtienen dos campo magnéticos rotatorios

que giran a la misma velocidad, uno producido por el estator y otro por el rotor. Estos campos interactúan produciendo par eléctrico medio y se realiza el proceso de conversión electromecánica de energía. De acuerdo con la expresión 4.44, la condición necesaria, pero no suficiente, para que el par medio de la máquina sea diferente de cero es:

$$\omega_e = p \cdot \omega_m \quad (8.1)$$

donde:

p es el número de pares de polos de la máquina sincrónica.

La bobina del rotor o campo de la máquina sincrónica se alimenta mediante la inyección de corriente continua, como se mencionó anteriormente, con la finalidad de producir un campo magnético de magnitud constante, semejante al de un imán permanente, pero de una intensidad mucho mayor. Debido a que el rotor de la máquina gira en régimen permanente a la velocidad sincrónica, el campo magnético constante producido en este sistema se comporta, desde el punto de vista del estator, como un campo magnético rotatorio. En la figura 8.3 se ha representado el esquema básico de una máquina sincrónica trifásica de polos salientes.

Para evaluar la magnitud del par en una máquina sincrónica se puede recordar la expresión 4.55:

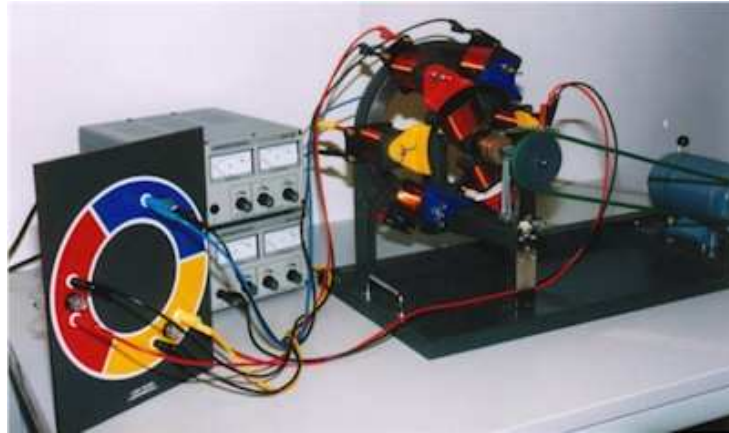
$$T_e = k \cdot F_r F_e \sin \delta \quad (8.2)$$

donde:

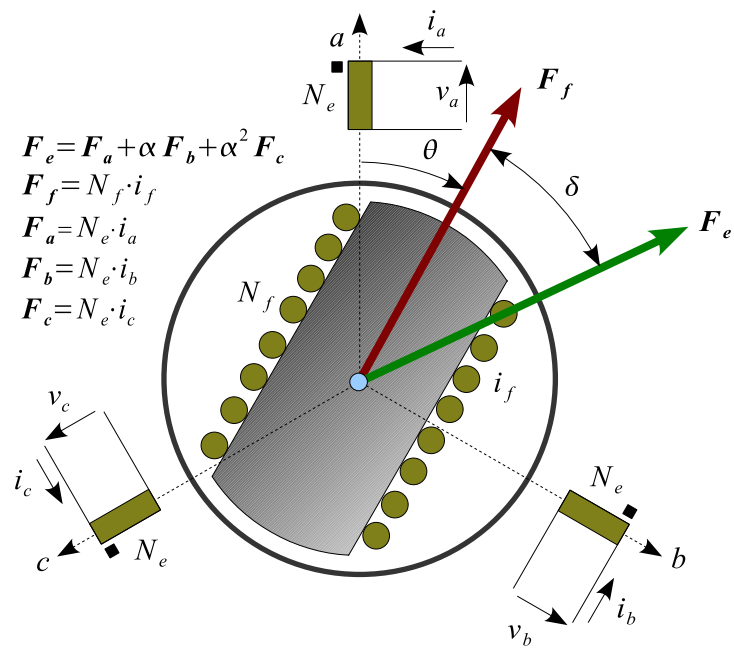
k	es una constante de proporcionalidad que depende de la geometría de la máquina y de la disposición física de las bobinas.
F_e	es la amplitud de la distribución sinusoidal de la fuerza magnetomotriz del estator.
F_r	es la amplitud de la distribución sinusoidal de la fuerza magnetomotriz del rotor.
δ	es el ángulo entre las amplitudes de las dos fuerzas magnetomotrices, conocido generalmente como ángulo de carga.

Las fuerzas magnetomotrices del estator F_e , y del rotor F_r tienen una amplitud constante y para que en la expresión 8.2 el par medio resulte constante, es necesario que el ángulo δ entre las dos fuerzas magnetomotrices sea constante en el tiempo durante la operación en régimen permanente. Para lograr esto, las dos fuerzas magnetomotrices deben girar a la misma velocidad angular.

Cuando la máquina sincrónica se encuentra desequilibrada, el campo magnético rotatorio producido por las bobinas del estator es elíptico. Este campo se puede descomponer en dos campos magnéticos rotatorios circulares de sentidos contrarrotativos. Para que sea posible la producción de par eléctrico medio en estas condiciones, es necesario que la velocidad del rotor esté sincronizada con uno de los dos campos magnéticos contrarrotativos. El campo que está fuera de



(a) Modelo elemental demostrativo



(b) Esquema básico

Figura 8.3 Esquema básico de una máquina sincrónica trifásica de polos salientes

sincronismo y gira en el sentido contrario del rotor, produce par eléctrico transitorio, pero su valor medio es cero.

Si se cortocircuita la bobina de campo en el rotor de la máquina sincrónica, es posible en ciertos casos acelerar el rotor como si fuera un motor de inducción con rotor devanado. En el campo se inducen fuerzas electromotrices con la frecuencia del deslizamiento cuando el campo magnético rotatorio del estator corta a los conductores del campo. La fuerza electromotriz inducida en el rotor fuerza la circulación de corrientes por este devanado. Aun cuando el par eléctrico puede ser muy reducido, en algunas ocasiones este método puede ser utilizado para arrancar en la máquina sincrónica sin cargas mecánicas acopladas.

8.2. Modelo de la máquina sincrónica

Analizando el comportamiento de los ejes eléctricos de la máquina sincrónica en el sistema de coordenadas correspondiente a las bobinas reales o físicas, se satisface el siguiente sistema de ecuaciones:

$$[v_{abc,f}] = [R_{abc,f}] [i_{abc,f}] + \frac{d}{dt} [\lambda_{abc,f}] \quad (8.3)$$

En los sistemas lineales, la relación entre las corrientes que circulan por las bobinas y los enlaces de flujo que las enlazan vienen dados por la relación:

$$[\lambda_{abc,f}(\theta, i)] = [L_{abc,f}(\theta)] [i_{abc,f}] \quad (8.4)$$

Sustituyendo esta relación en la expresión 8.3 se obtiene el resultado siguiente:

$$\begin{aligned} [v_{abc,f}] &= [R_{abc,f}] [i_{abc,f}] + [L_{abc,f}] \frac{d}{dt} [i_{abc,f}] + \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{dt} [L_{abc,f}] [i_{abc,f}] = \\ &= [R_{abc,f}] [i_{abc,f}] + [L_{abc,f}] p [i_{abc,f}] + \dot{\theta} \cdot [\tau_{abc,f}] [i_{abc,f}] \end{aligned} \quad (8.5)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales 8.5 representa el comportamiento dinámico de las bobinas de la máquina sincrónica en coordenadas primitivas. Este sistema se expresa en forma canónica como:

$$p [i_{abc,f}] = [L_{abc,f}]^{-1} \left\{ [v_{abc,f}] - \left[[R_{abc,f}] + \dot{\theta} \cdot [\tau_{abc,f}] \right] [i_{abc,f}] \right\} \quad (8.6)$$

La matriz de inductancia $[L_{abc,f}]$ depende de la posición relativa θ del rotor con respecto al estator, por esta razón la matriz de transición de estado también depende de la posición angular del rotor. Si la velocidad de la máquina es constante, la posición angular del rotor es:

$$\theta = \theta_0 + \omega_m t \quad (8.7)$$

La solución del sistema 8.6 puede obtenerse mediante métodos numéricos de integración, utilizando algoritmos tales como Euler, Runge-Kutta o Adams entre muchos otros. El principal inconveniente que se presenta es la necesidad de evaluar e invertir la matriz de inductancias de la máquina en cada paso de integración, debido a la dependencia de esta matriz con la posición angular del rotor. Los computadores personales actuales son capaces de resolver este problema,

aun cuando en el pasado estos cálculos representaba grandes dificultades. Por este motivo durante varias décadas se desarrollaron transformaciones de coordenadas que simplifican el problema, aceleran notablemente los cálculos y permiten interpretar más fácilmente el comportamiento dinámico y estático de la máquina sincrónica.

Durante los períodos transitorios, la velocidad angular de la máquina cambia y la posición angular del rotor es una nueva variable de estado que debe ser evaluada para determinar su dependencia temporal. En este caso es necesario incorporar una ecuación adicional al sistema 8.6 para determinar el comportamiento dinámico del eje mecánico de la máquina:

$$\frac{1}{2} [i_{abc,f}]^t [\tau_{abc,f}] [i_{abc,f}] - T_m = J \ddot{\theta} + \alpha \dot{\theta} \quad (8.8)$$

Esta expresión representa el balance del par eléctrico y mecánico en el eje del rotor. El par acelerante es igual al par eléctrico del convertidor, menos el par resistente opuesto por la carga y por las pérdidas mecánicas. La ecuación diferencial 8.8 puede ser expresada mediante dos ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_m = \frac{1}{J} \left(\frac{1}{2} [i_{abc,f}]^t [\tau_{abc,f}] [i_{abc,f}] - T_m - \alpha \dot{\theta} \right) \\ \dot{\theta} = \omega_m \end{cases} \quad (8.9)$$

donde:

J	es el momento de inercia del rotor,
T_m	es el par mecánico resistente,
α	es el coeficiente de fricción dinámica

El sistema de seis ecuaciones diferenciales formado por las cuatro ecuaciones del sistema 8.6, y las dos ecuaciones mecánicas representadas por la expresión 8.9, definen el comportamiento dinámico y transitorio completo de la máquina sincrónica de la figura 8.3. Este sistema de ecuaciones diferenciales es no lineal y los coeficientes son variables en el tiempo, por este motivo es necesario recurrir a técnicas numéricas para evaluar el comportamiento de la máquina o simplificar el problema mediante la técnica de transformación de coordenadas.

En la matriz de inductancia de la máquina sincrónica, se encuentra toda la información necesaria para determinar su comportamiento. En la matriz de inductancia se resume la información sobre la disposición geométrica de las bobinas, sus acoplamientos, números de vueltas y reluctancias de los diferentes caminos magnéticos. Una vez conocida la matriz de inductancias se puede evaluar la matriz de par calculando la derivada parcial de esta matriz con respecto a la posición angular del rotor. La matriz de inductancias de la máquina sincrónica esquematizada en la figura 8.3 posee la siguiente estructura:

$$[L_{abc,f}(\theta)] = \begin{bmatrix} [L_{ee}(\theta)] & [L_{er}(\theta)] \\ [L_{re}(\theta)] & L_f \end{bmatrix} \quad (8.10)$$

$$[L_{ee}(\theta)] = \begin{bmatrix} L_{aa}(\theta) & M_{ab}(\theta) & M_{ac}(\theta) \\ M_{ba}(\theta) & L_{bb}(\theta) & M_{bc}(\theta) \\ M_{ca}(\theta) & M_{cb}(\theta) & M_{cc}(\theta) \end{bmatrix} ; [L_{ef}(\theta)] = [L_{fe}(\theta)]^t = \begin{bmatrix} M_{af}(\theta) \\ M_{bf}(\theta) \\ M_{cf}(\theta) \end{bmatrix}$$

donde:

e	es subíndice referido a las bobinas del estator,
f	es el subíndice referido a las bobinas del campo,
a, b, c	son los subíndices de las tres bobinas físicas del estator.

Para evaluar cada una de las inductancias definidas en la expresión 8.10, es necesario utilizar las expresiones 3.10 y 3.11, desarrolladas en el capítulo 3.

Cada una de las inductancias de la máquina sincrónica se puede representar como una función del ángulo θ . Esta función es periódica porque se repite nuevamente cada vez que el rotor realiza un giro completo. Esta propiedad permite representar estas funciones mediante expansiones en series de Fourier, con el ángulo θ como variable. Si la pieza polar se diseña convenientemente⁷, es posible representar las inductancias de la máquina con un número reducido de los términos de la serie. La expresión de la matriz de inductancias más simple consiste en considerar términos dependientes hasta en 2θ , para las inductancias estator-estator y términos en θ para las inductancias estator-rotor.

La inductancia del rotor L_f , es independiente de la posición θ del rotor debido a que el estator de la máquina es aproximadamente liso⁸. El resto de las inductancias propias y mutuas depende de la posición angular θ , si el rotor de la máquina es de polos salientes. Las permeancias de los caminos magnéticos de las bobinas del estator y de los acoplamientos estator-rotor son dependientes de la posición angular θ . Cuando la pieza polar del rotor se encuentra alineada con una de las bobinas del estator, el camino magnético posee la máxima permeancia. Si la pieza polar se encuentran en cuadratura con la bobina, el entrehierro es muy grande y disminuye la permeancia. La variación de la permeancia depende del ángulo 2θ porque una bobina alineada con el polo norte del rotor tiene el mismo camino magnético cuando el alineamiento ocurre con el polo sur. Estas inductancias se pueden representar aproximadamente mediante las siguientes funciones:

$$L_{aa}(\theta) = L_{1e} + M_{2e} \cos 2\theta + \dots \quad (8.11)$$

$$L_{bb}(\theta) = L_{1e} + M_{2e} \cos 2(\theta - \frac{2\pi}{3}) + \dots \quad (8.12)$$

$$L_{cc}(\theta) = L_{1e} + M_{2e} \cos 2(\theta - \frac{4\pi}{3}) + \dots \quad (8.13)$$

$$M_{ab}(\theta) = M_{ba}(\theta) = -M_{1e} - M_{2e} \cos 2(\theta + \frac{\pi}{6}) + \dots \quad (8.14)$$

$$M_{ac}(\theta) = M_{ca}(\theta) = -M_{1e} - M_{2e} \cos 2(\theta - \frac{\pi}{6}) + \dots \quad (8.15)$$

$$M_{bc}(\theta) = M_{cb}(\theta) = -M_{1e} - M_{2e} \cos 2(\theta - \frac{\pi}{2}) + \dots \quad (8.16)$$

donde⁹:

⁷Variando el entrehierro para producir una densidad de campo magnético distribuido sinusoidalmente.

⁸Para esta consideración es necesario despreciar el efecto de las ranuras del estator.

⁹En este caso la aproximación se debe a que la dispersión de la bobina no está siendo considerada. La dispersión puede ser considerada en el modelo como si estuviese conectada externamente a los bornes de la máquina.

$$L_d \equiv \frac{3}{2} (L_{1e} + M_{2e}) ; \quad L_q \equiv \frac{3}{2} (L_{1e} - M_{2e}) ; \quad L_{df} \equiv \sqrt{\frac{3}{2}} M_{ef} \quad (8.17)$$

$$L_{1e} = \frac{L_d + L_q}{3} ; \quad M_{2e} = \frac{L_d - L_q}{3} \quad (8.18)$$

$$M_{1e} \simeq \frac{L_{1e}}{2} \quad (8.19)$$

En lo que se refiere a los acoplamientos mutuos estator-rotor la funcionalidad de las inductancias es diferente porque al girar el rotor 180° , la bobina del campo invierte su polaridad. Las inductancias del estator varían entre un valor máximo y un mínimo, siempre positivo respecto a la posición angular del rotor. Sin embargo, los acoplamientos mutuos estator-rotor varían entre un valor máximo positivo hasta un valor máximo negativo, que en valor absoluto son idénticos, cuando el rotor de la máquina gira 180° . Las inductancias mutuas entre el estator y el rotor pueden ser aproximadas mediante las siguientes funciones:

$$M_{af}(\theta) = M_{fa}(\theta) = M_{ef} \cos \theta + \dots \quad (8.20)$$

$$M_{bf}(\theta) = M_{fb}(\theta) = M_{ef} \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) + \dots \quad (8.21)$$

$$M_{cf}(\theta) = M_{fc}(\theta) = M_{ef} \cos(\theta - \frac{4\pi}{3}) + \dots \quad (8.22)$$

Si el rotor de la máquina sincrónica es liso, todas las inductancias del estator son independientes de la posición del rotor. En esta situación la matriz de inductancias $[L_{abc,f}(\theta)]$, se expresa de la siguiente forma:

$$[L_{abc,f}(\theta)] = \begin{bmatrix} L_{1e} & M_{1e} & M_{1e} & M_{ef} \cos \theta \\ M_{1e} & L_{1e} & M_{1e} & M_{ef} \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ M_{1e} & M_{1e} & L_{1e} & M_{ef} \cos(\theta - \frac{4\pi}{3}) \\ M_{ef} \cos \theta & M_{ef} \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & M_{ef} \cos(\theta - \frac{4\pi}{3}) & L_f \end{bmatrix} \quad (8.23)$$

Aun para el caso de una máquina sincrónica de rotor liso, la solución del sistema de ecuaciones diferenciales que determina el comportamiento de la máquina sincrónica requiere el uso de métodos numéricos, debido a la dependencia de las inductancias mutuas entre el estator y el campo, con la posición θ del rotor. El modelo de la máquina sincrónica de rotor liso o de polos salientes se puede obtener mediante transformaciones del sistema de coordenadas. La transformación a vectores espaciales y la transformación a coordenadas $dq0$, introducidas en los capítulos 5 y 6 permiten simplificar notablemente estos modelos.

8.3. Transformación a vectores espaciales

Para aplicar la transformación de vectores espaciales a las ecuaciones 8.5 y 8.8 que representan el comportamiento de la máquina sincrónica en coordenadas primitivas es conveniente expresar por separado las ecuaciones del estator y del rotor:

$$[v_e] = [R_e] [i_e] + p \{ [L_{ee}] [i_e] + [L_{ef}] i_f \} \quad (8.24)$$

$$v_f = R_f i_f + p \{ [L_{fe}] [i_e] + L_f i_f \} \quad (8.25)$$

Aplicando esta transformación de vectores espaciales a la expresión 8.24, se obtienen el siguiente resultado:

$$\mathbf{v}_e = R_e \mathbf{i}_e + p \left\{ (L_{1e} + M_{1e}) \mathbf{i}_e + \frac{3}{2} M_{2e} e^{j2\theta} \mathbf{i}_e^* + \sqrt{\frac{3}{2}} M_{ef} e^{j\theta} i_f \right\} \quad (8.26)$$

donde:

$$\mathbf{v}_e = \sqrt{\frac{2}{3}} (v_a + \alpha v_b + \alpha^2 v_c) \quad (8.27)$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} [R_e] [i_e] = R_e \mathbf{i}_e \quad (8.28)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} [L_{ee}] [i_e] = \\ & = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} \cdot \dots \end{aligned}$$

$$\dots \cdot \left\{ \begin{bmatrix} L_{1e} & -M_{1e} & -M_{1e} \\ -M_{1e} & L_{1e} & -M_{1e} \\ -M_{1e} & -M_{1e} & L_{1e} \end{bmatrix} + M_{2e} \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\cos 2(\theta + \frac{\pi}{6}) & -\cos 2(\theta - \frac{\pi}{6}) \\ -\cos 2(\theta + \frac{\pi}{6}) & \cos 2(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\cos 2(\theta - \frac{\pi}{2}) \\ -\cos 2(\theta - \frac{\pi}{6}) & -\cos 2(\theta - \frac{\pi}{2}) & \cos 2(\theta - \frac{4\pi}{3}) \end{bmatrix} \right\} [i_e] =$$

$$\begin{aligned} & (L_{1e} + M_{1e}) \mathbf{i}_e + \frac{3}{2} M_{2e} e^{j2\theta} \mathbf{i}_e^* = \\ & = \frac{1}{2} (L_d + L_q) \mathbf{i}_e + \frac{1}{2} (L_d - L_q) e^{j2\theta} \mathbf{i}_e^* \end{aligned} \quad (8.29)$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix} [L_{ef}] i_f = \sqrt{\frac{3}{2}} M_{ef} e^{j\theta} i_f = L_{df} e^{j\theta} i_f \quad (8.30)$$

Reemplazando las definiciones de los vectores espaciales en la ecuación 8.25, se obtiene:

$$v_f = R_f i_f + p \left\{ L_{df} \left[\frac{e^{j\theta} \mathbf{i}_e^* + e^{-j\theta} \mathbf{i}_e}{2} \right] + L_f i_f \right\} \quad (8.31)$$

El par eléctrico es:

$$\begin{aligned} T_e &= \frac{1}{2} [i_{abc,f}]^t [\tau_{abc,f}] [i_{abc,f}] = \frac{1}{2} [i_e]^t [\tau_{ee}] [i_e] + [i_e]^t [\tau_{ef}] i_f = \\ &= j \frac{M_{2e}}{2} [i_e]^t \left\{ e^{j2\theta} \begin{bmatrix} -1 & e^{-j\frac{\pi}{3}} & e^{j\frac{\pi}{3}} \\ e^{-j\frac{\pi}{3}} & -e^{-j\frac{4\pi}{3}} & e^{-j\pi} \\ e^{j\frac{\pi}{3}} & e^{-j\pi} & -e^{-j\frac{8\pi}{3}} \end{bmatrix} - e^{-j2\theta} \begin{bmatrix} -1 & e^{j\frac{\pi}{3}} & e^{-j\frac{\pi}{3}} \\ e^{j\frac{\pi}{3}} & -e^{j\frac{4\pi}{3}} & e^{j\pi} \\ e^{-j\frac{\pi}{3}} & e^{j\pi} & -e^{j\frac{8\pi}{3}} \end{bmatrix} \right\} [i_e] + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \dots + j \frac{M_{ef}}{2} [i_e]^t \left\{ e^{j\theta} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j\frac{2\pi}{3}} \\ e^{-j\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix} - e^{-j\theta} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\frac{2\pi}{3}} \\ e^{j\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix} \right\} i_f = \\
& = \frac{3}{4j} M_{2e} \{ (e^{-j\theta} \mathbf{i}_e)^2 - (e^{j\theta} \mathbf{i}_e^*)^2 \} + j \frac{M_{ef}}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \{ e^{j\theta} \mathbf{i}_e^* - e^{-j\theta} \mathbf{i}_e \} i_f = \\
& = \frac{1}{2} (L_d - L_q) \Im m \{ (e^{-j\theta} \mathbf{i}_e)^2 \} + L_{df} \Im m \{ e^{-j\theta} \mathbf{i}_e \} i_f \quad (8.32)
\end{aligned}$$

Las expresiones 8.26, 8.31 y 8.32 modelan la máquina síncrona utilizando vectores espaciales. La principal ventaja de esta transformación consiste en la reducción de las tres ecuaciones del estator a una sola en variable compleja. Por otra parte, aun cuando la dependencia angular en θ se mantiene en este sistema de coordenadas, las correspondientes expresiones han sido simplificadas convenientemente al utilizar los términos $e^{\pm j\theta}$. En la expresión 8.32 correspondiente al par eléctrico pueden observarse dos componentes: el par de reluctancia y el par producido entre las fuerzas magnetomotrices del estator y del campo.

8.4. Transformación a coordenadas rotóricas

Para eliminar la dependencia en θ existente en el modelo de la máquina síncrona en vectores espaciales, es posible referir las variables del estator al sistema de referencia del rotor, el cual se encuentra exactamente en la posición θ con respecto al sistema solidario con el estator. Por esta razón es posible multiplicar la ecuación del estator por $e^{-j\theta}$ para referir estas ecuaciones a un sistema de coordenadas sincronizado con el eje del campo. Este nuevo sistema de coordenadas es conocido como ejes d y q . El eje directo d apunta en la misma dirección que el eje del campo f . El eje cuadratura q se encuentra a 90° en adelante con respecto al eje d . De esta forma se pueden introducir las siguientes definiciones:

$$\mathbf{v}_e^{dq} \equiv v_d + jv_q = \mathbf{v}_e e^{-j\theta} \quad (8.33)$$

$$\mathbf{i}_e^{dq} \equiv i_d + ji_q = \mathbf{i}_e e^{-j\theta} \quad (8.34)$$

Derivando la expresión 8.34 se obtiene la relación siguiente:

$$e^{-j\theta} p \mathbf{i}_e = p i_d + j p i_q + j \dot{\theta} \mathbf{i}_e^{dq} \quad (8.35)$$

Al multiplicar la ecuación 8.26 por el término de rotación $e^{-j\theta}$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
e^{-j\theta} \mathbf{v}_e &= R_e \mathbf{i}_e e^{-j\theta} + e^{-j\theta} p \left\{ \frac{1}{2} (L_d + L_q) \mathbf{i}_e + \frac{1}{2} (L_d - L_q) e^{j2\theta} \mathbf{i}_e^* + L_{df} e^{j\theta} i_f \right\} \Rightarrow \\
\mathbf{v}_e^{dq} &= R_e \mathbf{i}_e^{dq} + \frac{1}{2} (L_d + L_q) (p \mathbf{i}_e^{dq} + j \dot{\theta} \mathbf{i}_e^{dq}) + \frac{1}{2} (L_d - L_q) (p \mathbf{i}_e^{dq*} + j \dot{\theta} \mathbf{i}_e^{dq*}) + L_{df} (p i_f + j \dot{\theta} i_f) \quad (8.36)
\end{aligned}$$

Descomponiendo la expresión 8.36 en parte real y parte imaginaria, resulta:

$$v_d = R_e i_d + p (L_d i_d + L_{df} i_f) - \dot{\theta} L_q i_q = R_e i_d + p \lambda_d - \dot{\theta} \lambda_q \quad (8.37)$$

$$v_q = R_e i_q + p (L_q i_q) + \dot{\theta} (L_d i_d + L_{df} i_f) = R_e i_q + p \lambda_q + \dot{\theta} \lambda_d \quad (8.38)$$

Realizando transformaciones semejantes en la ecuación 8.31, se obtiene el resultado siguiente:

$$\begin{aligned} v_f &= R_f i_f + p \left\{ \frac{L_{df}}{2} \left[\mathbf{i}_e^{dq} + (\mathbf{i}_e^{dq})^* \right] + L_f i_f \right\} = \\ v_f &= R_f i_f + p (L_f i_f + L_{df} i_d) = R_f i_f + p \lambda_f \end{aligned} \quad (8.39)$$

Finalmente transformando las variables espaciales de la expresión 8.32 correspondiente al par eléctrico, se obtiene:

$$\begin{aligned} T_e &= \frac{1}{2} (L_d - L_q) \Im \{ (\mathbf{i}_e^{dq})^2 \} + L_{df} \Im \{ e^{-j\theta} \mathbf{i}_e \} i_f = \\ &= (L_d - L_q) i_d i_q + L_{df} i_q i_f = \lambda_d i_q - \lambda_q i_d = \lambda_e^{dq} \times \mathbf{i}_e^{dq} \end{aligned} \quad (8.40)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales que determina el comportamiento dinámico de la máquina sincrónica se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{cases} v_d = R_e i_d + p \lambda_d - \omega \lambda_q \\ v_q = R_e i_q + p \lambda_q + \omega \lambda_d \\ v_f = R_f i_f + p \lambda_f \\ J \dot{\omega} = \lambda_e^{dq} \times \mathbf{i}_e^{dq} - T_m(\omega) \end{cases} \quad (8.41)$$

donde:

$$\begin{aligned} \lambda_d &= L_d i_d + L_{df} i_f, \\ \lambda_q &= L_q i_q, \\ \lambda_f &= L_f i_f + L_{df} i_d, \\ \lambda_e^{dq} &= \lambda_d + j \lambda_q. \end{aligned}$$

8.5. Transformación de Park

En la máquina sincrónica, el campo magnético rotatorio producido por las fuerzas magnetomotrices de los devanados estatóricos, gira a la velocidad sincrónica ω_e . El rotor de la máquina también gira a la velocidad sincrónica $\omega_r = \omega_e$. Por esta razón es conveniente referir las ecuaciones diferenciales que definen el comportamiento de la máquina a un sistema de coordenadas solidario con el rotor. De acuerdo con estos lineamientos se definen los siguientes ejes magnéticos:

Eje d : Gira con respecto al estator a la velocidad del rotor, y en todo momento se encuentra colineal con el eje magnético del campo.

Eje q : Rota con respecto al estator a la velocidad del rotor, y en todo momento se encuentra en cuadratura con el eje magnético del campo.

Eje 0 : Fijo en el estator y se encuentra desacoplado magnéticamente del resto de los ejes de la máquina.

Eje f : Solidario con el sistema rotórico y colineal con el eje magnético de la bobina de campo.

Aun cuando los ejes d y q giran a igual velocidad que el rotor, estos ejes representan variables del estator. El eje 0 es necesario para permitir que la transformación de coordenadas sea bidireccional, es decir, se pueda transformar de variables primitivas a variables $dq0$ y viceversa. El eje 0 tiene una estrecha relación con las variables de secuencia cero de la transformación de componentes simétricas. En la práctica el eje 0 permite representar flujos de dispersión que no están acoplados con otras bobina de la máquina. En la figura 8.3(b) se ha representado el sistema de coordenadas $dq0 - f$.

La matriz de transformación de coordenadas $dq0-f$ a coordenadas primitivas se define mediante la relación:

$$[i_{abc,f}] = [A] [i_{dq0,f}] \quad (8.42)$$

Si la transformación anterior se escoge de tal forma que la matriz $[A]$ sea hermitiana¹⁰, la transformación es conservativa en potencia. Cuando la matriz es hermitiana y real, se obtiene:

$$[i_{dq0,f}] = [A]^{-1} [i_{abc,f}] = [A]^t [i_{abc,f}] \quad (8.43)$$

La matriz de transformación $[A]$ se puede obtener multiplicando la transformación de coordenadas primitivas a coordenadas ortogonales $\alpha\beta 0$ ¹¹, por la transformación de coordenadas $\alpha\beta 0$ a coordenadas $dq0$ ¹²:

$$\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_0 \end{bmatrix} \quad (8.44)$$

$$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} \quad (8.45)$$

$$\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) & -\sin \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos \left(\theta - \frac{4\pi}{3} \right) & -\sin \left(\theta - \frac{4\pi}{3} \right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} \quad (8.46)$$

La matriz de la expresión 8.46 se como transformación de Park. La transformación de coordenadas primitivas abc, f a coordenadas $dq0, f$ es:

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \\ i_f \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \left(\theta - \frac{4\pi}{3} \right) & 0 \\ -\sin \theta & -\sin \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) & -\sin \left(\theta - \frac{4\pi}{3} \right) & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_f \end{bmatrix} \quad (8.47)$$

¹⁰Inversa de la matriz de transformación $[A]$ igual a su traspuesta conjugada.

¹¹Transformación de Clark.

¹²Rotación en θ introducida en el capítulo 4.

La transformación de Park utilizada es hermitiana y por tanto es invariante en potencia:

$$\begin{aligned} p(t) &= [v_{abc,f}]^t [i_{abc,f}] = [[A] [v_{dq0,f}]]^t [[A] [i_{dq0,f}]] = \\ &= [v_{dq0,f}]^t [A]^t [A] [i_{dq0,f}] = [v_{dq0,f}]^t [i_{dq0,f}] = p(t) \end{aligned} \quad (8.48)$$

Aplicando la transformación 8.47, al sistema de ecuaciones 8.5, se obtiene:

$$[v_{dq0,f}] = [R_{dq0,f}] [i_{dq0,f}] + [L_{dq0,f}] p [i_{dq0,f}] + \dot{\theta} \cdot [G_{dq0,f}] [i_{dq0,f}] \quad (8.49)$$

donde:

$$[R_{dq0,f}] = [A]^t [R_{abc,f}] [A] \quad (8.50)$$

$$[L_{dq0,f}] = [A]^t [L_{abc,f}] [A] \quad (8.51)$$

$$[G_{dq0,f}] = [\tau_{dq0,f}] + [H_{dq0,f}] = [A]^t [\tau_{abc,f}] [A] + [A]^t [R_{abc,f}] \frac{d}{d\theta} [A] \quad (8.52)$$

Por otra parte, la ecuación dinámica del movimiento se puede expresar de la siguiente forma:

$$J\ddot{\theta} + \rho\dot{\theta} = \frac{1}{2} [i_{dq0,f}]^t [\tau_{dq0,f}] [i_{dq0,f}] - T_m \quad (8.53)$$

Evaluable explícitamente las expresiones 8.50 a 8.52 y sustituyendo el resultado en las ecuaciones diferenciales 8.49 y 8.53 se obtiene:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_d \\ v_q \\ v_0 \\ v_f \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} R_e + L_d p & -\omega L_q & 0 & L_{df} p \\ \omega L_d & R_e + L_q p & 0 & \omega L_{df} \\ 0 & 0 & R_0 + L_0 p & 0 \\ L_{df} p & 0 & 0 & R_f + L_f p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \\ i_f \end{bmatrix} \\ Jp\omega &= (L_d - L_q) i_d i_q + L_{df} i_q i_f - \rho\omega - T_m \end{aligned} \quad (8.54)$$

El modelo de la máquina sincrónica obtenido a partir de la transformación de vectores espaciales referidos a las coordenadas del rotor 8.41 coincide con el modelo 8.54, obtenido aplicando la transformación de Park 8.51. La transformación a vectores espaciales 8.27 y la transformación de Clark 8.44 están íntimamente relacionadas. Lo mismo sucede entre la rotación 8.45 y referir las variables espaciales del estator al sistema de coordenadas del rotor multiplicándolas por el término $e^{-j\theta}$.

En un sistema trifásico sin neutro no circula corriente de secuencia cero, pero cuando las tres corrientes de fase encuentran un camino de retorno, es necesario considerar esta componente. La componente de secuencia cero representa la circulación de corrientes iguales y en fase por las bobinas de la máquina. Estas corrientes no producen magnetización debido a que la suma de las fuerzas magnetomotrices de las tres bobinas es cero. Sin embargo, los flujos de dispersión si poseen componente de secuencia cero. En el modelo de la máquina no existe acoplamiento magnético de esta secuencia con el resto de las bobinas. Esta componente no puede producir par eléctrico, pero influye en las pérdidas de la máquina y en las fuerzas electromotrices sobre las bobinas. En la expresión 8.54 no aparecen fuerzas electromotrices de generación sobre la bobina de campo. Esto se debe a que el sistema de coordenadas $dq0$ es solidario al eje f del campo. Los

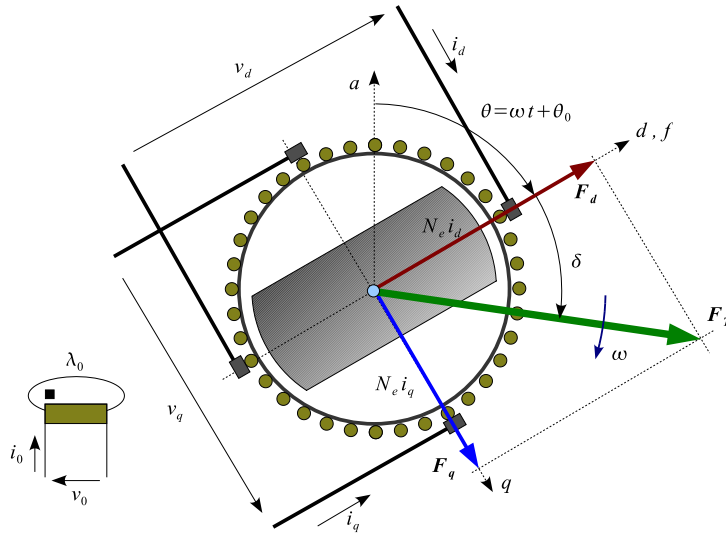


Figura 8.4 Modelo en coordenadas $dq0 - f$ de la máquina síncrona

flujos de las bobinas d y q no cruzan tangencialmente a los conductores del campo. Sin embargo, en este eje pueden aparecer fuerzas electromotrices por transformación, debido a que el flujo de la bobina del eje directo atraviesa el devanado de campo. Por el contrario, el eje cuadratura no puede producir ningún efecto sobre el campo debido a que se encuentra permanentemente en una posición ortogonal.

La máquina síncrona puede ser representada mediante un modelo físico en coordenadas $dq0 - f$, similar al obtenido en el capítulo 4 para la máquina generalizada. En la figura se presenta el modelo en coordenadas $dq0 - f$ que satisface las ecuaciones 8.54. En la máquina real, las corrientes i_d e i_q no circulan por ningún devanado físico, para determinar las corrientes reales es necesario aplicar la transformación inversa de coordenadas $dq0 - f$ a coordenadas primitivas.

Cada pareja de escobillas separa las capas de corriente de las bobinas equivalentes. La fuerza electromotriz de todos los conductores que forman cada una de las bobina se obtiene en bornes de las escobillas. Cuando por un par de escobillas se inyecta una corriente, esta circula entrando a los conductores a la derecha del eje que define la posición de estas escobillas, y saliendo en los conductores a la izquierda. Esta configuración produce una fuerza magnetomotriz orientada en el eje de las escobillas tal como se muestra en la figura 8.4.

Las fuerzas electromotrices de generación que aparecen sobre los conductores se recolectan en los circuitos que se encuentra en cuadratura con el flujo que las producen. El campo y la bobina del eje d producen generación sobre la bobina del eje q , y la bobina del eje q produce generación sobre el eje d , pero sobre la bobina de campo no se produce generación porque este devanado no es cortado por el flujo de los demás ejes. En el sistema de referencia utilizado, las fuerzas electromotrices de generación aparecen adelantadas 90° con respecto a los flujos que las producen. Si en las bobinas primitivas se inyecta un sistema balanceado de corrientes trifásicas, se obtienen las siguientes corrientes en el sistema de coordenadas $dq0$:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) \\ -\sin \theta & -\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \sqrt{2} I_e \begin{bmatrix} \cos(\omega t + \alpha) \\ \cos(\omega t + \alpha - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\omega t + \alpha - \frac{4\pi}{3}) \end{bmatrix} = \\
\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} &= \sqrt{3} I_e \begin{bmatrix} \cos(\theta - \omega t - \alpha) \\ -\sin(\theta - \omega t - \alpha) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.55)
\end{aligned}$$

Si la posición angular θ del rotor se sincroniza¹³ con la variación angular de las corrientes en la expresión 8.55, las corrientes en las coordenadas $dq0$ son independientes del tiempo. En esta condición, los términos que dependen de las derivadas de las corrientes se anulan. Corrientes constantes en el tiempo en este sistema de coordenadas, producen fuerzas magnetomotrices constantes en las bobinas $dq0$ transformadas. Como la transformación está sincronizada con la velocidad angular de las corrientes durante el régimen permanente, el campo magnético producido por las bobinas d y q , gira con la misma velocidad y como resultado se obtiene el mismo campo magnético rotatorio de la máquina sincrónica en coordenadas primitivas, excitada mediante un sistema trifásico balanceado de corrientes.

El par electromagnético de la máquina está determinado por la interacción entre fuerzas magnetomotrices no alineadas. Por una parte la fuerza magnetomotriz del campo produce par al interactuar con el flujo de la bobina que representa al eje q . La fuerza magnetomotriz del eje d produce par en su interacción con la fuerza magnetomotriz del enrollado cuadratura. Exactamente igual pero con sentido contrario, la fuerza magnetomotriz del eje q produce par con la fuerza magnetomotriz del eje d . Si la reluctancia de los caminos magnéticos d y q son iguales, estos dos pares se neutralizan. Cuando la reluctancia del eje d es menor que la del eje q , el par que produce la fuerza magnetomotriz del eje d sobre el eje q es mayor que en la dirección contraria y se produce un par neto resultante debido a la variación de reluctancia entre los dos ejes. Desde otro punto de vista se puede interpretar que la pieza polar intenta alinearse con la fuerza electromotriz resultante en la máquina. Si la máquina posee un rotor cilíndrico, este par es nulo. En la ecuación 8.40, el par eléctrico se divide en dos componentes, la primera es proporcional al producto de la corriente de campo i_f por la corriente de la bobina cuadratura i_q y la segunda componente depende del producto de las corrientes i_d e i_q . Esta última componente se anula si la inductancia L_d es igual a la inductancia L_q . La inductancia L_d está definida por la permeancia del eje directo, mientras que la inductancia L_q está definida por la permeancia del eje cuadratura.

En la figura 8.4 se han representado las fuerzas magnetomotrices en coordenadas $dq0$. Se observa que sobre la pieza polar aparecerá un par eléctrico que intentará alinear el rotor con la fuerza magnetomotriz total. Cuando se analizan las fuerzas electromotrices de generación en el sistema de ecuaciones 8.54 se observan dos términos similares, el primero depende de la inductancia L_q , que es proporcional a la permeancia del camino cuadratura y determina la generación sobre el eje directo, el segundo término depende de L_d , y es proporcional a la permeancia del camino directo y determina parte de la generación sobre el eje cuadratura.

¹³ $\theta(t) = \omega t + \theta_0$.

8.6. Régimen permanente

Para analizar el comportamiento de la máquina sincrónica en régimen permanente es necesario excitar los circuitos de armadura con un sistema equilibrado y simétrico de corrientes. Además, en estas condiciones el rotor de la máquina debe girar a la velocidad sincrónica. La posición relativa del rotor con respecto al sistema de referencia solidario al estator es:

$$\theta = \omega t + \theta_0 \quad (8.56)$$

Sustituyendo la expresión 8.56, en la transformación a coordenadas $dq0$ definida mediante la relación 8.55, se obtiene el siguiente resultado:

$$i_d = \sqrt{3}I_e \cos(\theta_0 - \alpha) ; \quad i_q = -\sqrt{3}I_e \sin(\theta_0 - \alpha) ; \quad i_0 = 0 \quad (8.57)$$

Las corrientes de régimen permanente en coordenadas primitivas, transformadas al sistema de coordenadas $dq0$ son independientes del tiempo. El argumento de las funciones trigonométricas $(\theta_0 - \alpha)$ proyecta la fuerza magnetomotriz producida por el sistema balanceado de corrientes primitivas según las direcciones de los nuevos ejes coordenados. En la figura 8.4 se representa el efecto de la transformación para un sistema en régimen permanente y equilibrado. Como las corrientes i_d , i_q e i_0 son independientes del tiempo, los términos de transformación son nulos en el nuevo sistema de coordenadas y en estas condiciones. Las ecuaciones del modelo 8.54 se reducen a:

$$v_d = R_e i_d - \omega L_q i_q = R_e i_d - X_q i_q \quad (8.58)$$

$$v_q = R_e i_q + \omega L_d i_d + \omega L_{df} i_f = R_e i_q + X_d i_d + e_f \quad (8.59)$$

$$v_f = R_f i_f \quad (8.60)$$

$$T_e = (L_d - L_q) i_d i_q + L_{df} i_q i_f \quad (8.61)$$

8.7. Diagrama fasorial

Mediante la transformación inversa de Park 8.46 se puede obtener la tensión de la fase a :

$$v_a(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} (v_d \cos \theta - v_q \sin \theta + \frac{1}{\sqrt{2}} v_0) \quad (8.62)$$

La tensión v_0 es nula debido a que no existe corriente de secuencia cero en el sistema trifásico balanceado¹⁴. Por otra parte, la transformación de coordenadas gira a velocidad sincrónica según se describe en la expresión 8.56. En estas condiciones se determina la tensión en bornes de la fase a de la máquina como:

$$\begin{aligned} v_a(t) &= \sqrt{\frac{2}{3}} v_d [\cos(\omega t + \theta_0) - v_q \sin(\omega t + \theta_0)] = \sqrt{\frac{2}{3}} \Re e [(v_d + j v_q) e^{j(\omega t + \theta_0)}] = \\ &= \Re e [\sqrt{2} (V_d + j V_q) e^{j(\omega t + \theta_0)}] = \Re e [\sqrt{2} V_e e^{j(\omega t + \theta_0)}] \end{aligned} \quad (8.63)$$

¹⁴En el sistema trifásico balanceado se tiene: $v_0 = v_a + v_b + v_c = 0$.

De acuerdo con esta expresión, el fasor que representa el valor efectivo de la tensión en la fase a del estator de la máquina sincrónica, en régimen permanente es:

$$\mathbf{V}_e = \mathbf{V}_d + \mathbf{V}_q = V_d + jV_q = \frac{v_d}{\sqrt{3}} + j\frac{v_q}{\sqrt{3}} \quad (8.64)$$

Con un razonamiento similar se obtiene la siguiente expresión para las corrientes en régimen permanente:

$$\mathbf{I}_e = \mathbf{I}_d + \mathbf{I}_q = I_d + jI_q = \frac{i_d}{\sqrt{3}} + j\frac{i_q}{\sqrt{3}} \quad (8.65)$$

Reemplazando las expresiones 8.64 y 8.65 en las ecuaciones 8.58 y 8.59, se obtienen las siguientes relaciones fasoriales:

$$\mathbf{V}_d = R_e \mathbf{I}_d + jX_q \mathbf{I}_q \quad (8.66)$$

$$\mathbf{V}_q = R_e \mathbf{I}_q + jX_d \mathbf{I}_d + j\frac{1}{\sqrt{3}}e_f = R_e \mathbf{I}_q + jX_d \mathbf{I}_d + \mathbf{E}_f \quad (8.67)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_e = \mathbf{V}_d + \mathbf{V}_q &= R_e (\mathbf{I}_d + \mathbf{I}_q) + jX_d \mathbf{I}_d + jX_q \mathbf{I}_q + \mathbf{E}_f \Rightarrow \\ \mathbf{V}_e &= R_e \mathbf{I}_e + jX_d \mathbf{I}_d + jX_q \mathbf{I}_q + \mathbf{E}_f \end{aligned} \quad (8.68)$$

En las expresiones 8.66 a 8.68, los fasores con subíndice d están orientados según la dirección del eje directo, y los fasores con subíndice q , apuntan en la dirección del eje cuadratura. El fasor \mathbf{E}_f se orienta en la dirección del eje q debido a que representa la fuerza electromotriz producida por la corriente del campo i_f sobre el eje q . En la ecuación 8.67 se observa que el fasor \mathbf{E}_f se obtiene multiplicando por j^{15} la fuerza electromotriz e_f producida por el campo y dividiendo este resultado por el factor $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Todas las magnitudes de los fasores de las expresiones anteriores se han definido en términos de valores efectivos, por esta razón no aparece en la definición de cada uno de los términos el coeficiente $\sqrt{2}$. En la ecuación fasorial 8.68 aparecen los términos $jX_d \mathbf{I}_d$ y $jX_q \mathbf{I}_q$, aun cuando aparentan ser caídas de tensión reactivas, en realidad representan fuerzas electromotrices de generación. Es necesario recordar que el operador imaginario j , produce una rotación de 90° . Como el fasor $X_d \mathbf{I}_d$ está dirigido según el eje directo, el fasor $jX_d \mathbf{I}_d$ se orienta según la dirección del eje cuadratura. En otras palabras, el flujo producido por la bobina del eje directo de la máquina, corta a los conductores fijos del estator e induce fuerza electromotriz de generación en el eje cuadratura. De forma semejante el término $X_q \mathbf{I}_q$ representa un fasor con dirección cuadratura, $jX_q \mathbf{I}_q$ rota 90° y el fasor resultante apunta en la dirección negativa del eje directo. En la figura 8.5 se representa el diagrama fasorial de la máquina sincrónica en régimen permanente.

Si el rotor de la máquina sincrónica es liso, las reactancias directa y cuadratura son iguales, en este caso se define una sola reactancia denominada reactancia sincrónica X_s . Para la máquina sincrónica de rotor liso la ecuación fasorial 8.68 se simplifica cuando se agrupan los términos de generación:

$$\mathbf{V}_e = (R_e + jX_s) \mathbf{I}_e + \mathbf{E}_f \quad (8.69)$$

Las relaciones anteriores están escritas en la convención motor. En otras palabras, las corrientes que circulan por las bobinas de la máquina entran por su punto de polaridad relativa. En la convención motor una potencia positiva indica que la máquina consume potencia eléctrica. Si

¹⁵Dirección del eje cuadratura.

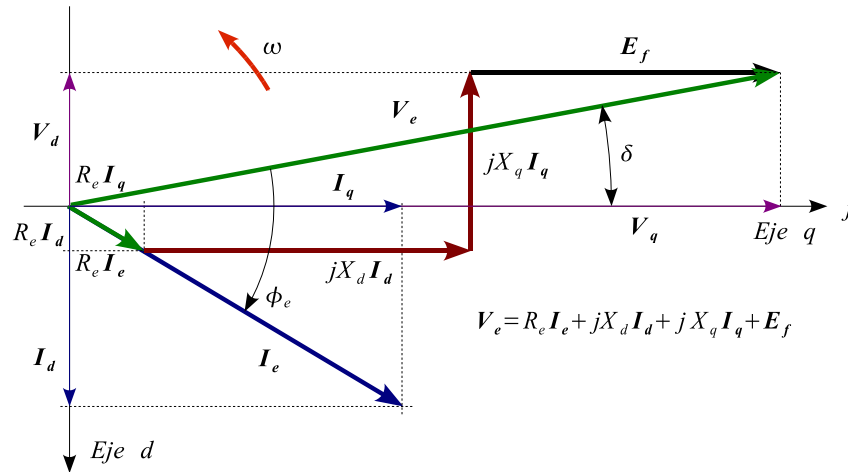


Figura 8.5 Diagrama fasorial de la máquina síncrona de polos salientes en convención motor

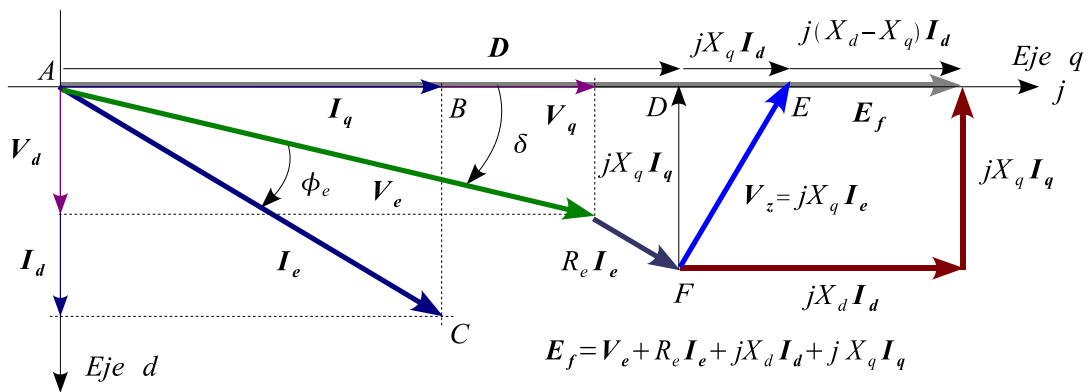


Figura 8.6 Diagrama fasorial de la máquina síncrona de polos salientes en la convención generador

la potencia es negativa, la máquina genera potencia eléctrica. Las máquinas síncronas son utilizadas con mucha frecuencia como generadores y es ventajoso en estos casos utilizar la convención generador en lugar de la convención motor para describir su comportamiento. En la convención generador las corrientes de armadura salen por el punto de polaridad de cada bobina. En ambas convenciones, la dirección de referencia de la corriente de campo se define entrando por el punto de polaridad relativa porque este eje eléctrico es pasivo y en general consume potencia eléctrica. El cambio de convención se realiza invirtiendo el sentido de circulación de las corrientes de los ejes directo y cuadratura, para este fin se cambia el signo de las corrientes I_e , I_d e I_q , en las ecuaciones 8.66, 8.67 y 8.68. La fuerza electromotriz que produce el campo no cambia de signo en la nueva convención, debido a que la corriente de campo i_f mantiene la misma referencia en las dos convenciones. De esta forma, la ecuación de la máquina síncrona de polos salientes en régimen permanente y en convención generador se puede expresar como:

$$\mathbf{E}_f = \mathbf{V}_e + R_e \mathbf{I}_e + jX_d \mathbf{I}_d + jX_q \mathbf{I}_q \quad (8.70)$$

En la figura 8.6 el triángulo $\triangle ABC$ es semejante al triángulo $\triangle DEF$, por esta razón se pueden establecer la siguiente relación:

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{\mathbf{V}_z}{\mathbf{I}_e} = \frac{jX_q \mathbf{I}_q}{\mathbf{I}_q} \Rightarrow \mathbf{V}_z = jX_q \mathbf{I}_e \quad (8.71)$$

La tensión \mathbf{V}_z , aun cuando no posee una interpretación física concreta, es una herramienta muy útil en la construcción del diagrama fasorial de la máquina sincrónica de polos salientes. Cuando se suma fasorialmente la tensión de armadura en bornes de la máquina \mathbf{V}_e , la caída resistiva $R_e \mathbf{I}_e$ en el circuito de armadura y el fasor \mathbf{V}_z , el fasor resultante está orientado en la dirección del eje cuadratura tal como se observa en la figura 8.6. Conociendo la posición del eje cuadratura de la máquina, es posible proyectar la corriente \mathbf{I}_e en sus dos componentes, \mathbf{I}_d e \mathbf{I}_q . Conocido el fasor \mathbf{I}_d se determina la fuerza electromotriz producida por el campo, sumando el término $j(X_d - X_q)\mathbf{I}_d$ al extremo del fasor que representa la tensión \mathbf{V}_z en el diagrama fasorial. Expresando matemáticamente el planteamiento anterior, se tiene:

$$\overline{AE} = D \angle \delta = \mathbf{V}_e + R_e \mathbf{I}_e + jX_q \mathbf{I}_e \quad (8.72)$$

$$\delta = \arctan \left[\frac{X_q I_e \cos \phi_e - R_e I_e \sin \phi_e}{V_e + R_e I_e \cos \phi_e + X_q I_e \sin \phi_e} \right] \quad (8.73)$$

$$D = \sqrt{(V_e + R_e I_e \cos \phi_e + X_q I_e \sin \phi_e)^2 + (X_q I_e \cos \phi_e - R_e I_e \sin \phi_e)^2} \quad (8.74)$$

$$|\mathbf{I}_d| = I_d = |\mathbf{I}_e| \sin(\phi_e + \delta) \quad (8.75)$$

$$\mathbf{E}_f = \overline{AE} + j(X_d - X_q)\mathbf{I}_d = D \angle \delta + j(X_d - X_q)\mathbf{I}_d \quad (8.76)$$

$$E_f = D + (X_d - X_q)I_e \sin(\phi_e + \delta) \quad (8.77)$$

Mediante las expresiones anteriores se determina el diagrama fasorial de la máquina sincrónica de polos salientes, conocida la resistencia del estator R_e , las reactancias directa X_d y cuadratura X_q , la tensión de armadura V_e , la corriente de armadura I_e y el ángulo del factor de potencia en el punto de operación ϕ_e .

8.8. Potencia y par eléctrico

Para calcular del par eléctrico se puede utilizar las expresiones 8.40 o 8.61. Sin embargo, las variables independientes de esta ecuación son ficticias, por esta razón es conveniente expresar el par y la potencia eléctrica mediante variables asociadas con el diagrama fasorial. Las máquinas sincrónicas tienen rendimientos muy altos, particularmente cuando son de gran potencia. En una máquina sincrónica típica, la potencia mecánica en el eje es prácticamente igual a la potencia eléctrica en bornes de la máquina. Empleando esta aproximación es posible desarrollar expresiones del par y de la potencia eléctrica dependientes de variables medibles en la práctica. Con estas condiciones se tiene:

$$P_m = T_m \cdot \omega_m \approx P_e = T_e \cdot \omega_e \quad (8.78)$$

La potencia eléctrica se determina de la siguiente forma:

$$P_e(t) = v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c = v_d i_d + v_q i_q + v_0 i_0 \quad (8.79)$$

En régimen permanente equilibrado, las corrientes y las tensiones en coordenadas transformadas son independientes del tiempo. La corriente y la tensión de secuencia cero son nulas. La potencia eléctrica se calcula como:

$$P_e(t) = v_d i_d + v_q i_q = \sqrt{3} V_d \sqrt{3} I_d + \sqrt{3} V_q \sqrt{3} I_q = 3(V_d I_d + V_q I_q) \quad (8.80)$$

Despreciando la caída de tensión en la resistencia R_e en el diagrama fasorial representado en la figura 8.6, se deducen las siguientes relaciones:

$$V_e \cos \delta + X_d I_d = E_f \Rightarrow I_d = \frac{E_f - V_e \cos \delta}{X_d} \quad (8.81)$$

$$V_e \sin \delta = X_q I_q \Rightarrow I_q = \frac{V_e \sin \delta}{X_q} \quad (8.82)$$

$$V_d = V_e \sin \delta \quad (8.83)$$

$$V_q = V_e \cos \delta \quad (8.84)$$

Reemplazando las ecuaciones 8.81 a 8.84 en la expresión 8.80 se obtiene el siguiente resultado:

$$P_e = 3 \frac{E_f V_e}{X_d} \sin \delta + 3 \frac{X_d - X_q}{2 X_d X_q} V_e^2 \sin 2\delta \quad (8.85)$$

El segundo término de la expresión anterior depende de la diferencia entre las reactancia del eje directo y cuadratura. En otras palabras, depende de la variación de reluctancia del circuito magnético. El primer término depende de la fuerza electromotriz E_f producida por la corriente de campo. En una máquina de rotor liso, este es el único término de la potencia eléctrica que interviene en el proceso de conversión de energía. El par eléctrico se calcula dividiendo la expresión 8.85 por la velocidad angular sincrónica mecánica $\omega_m = \frac{\omega_e}{p}$, donde p es el número de pares de polos de la máquina. El ángulo δ se denomina ángulo de carga de la máquina y representa la diferencia de fase entre la fuerza electromotriz producida por el flujo del campo y la tensión de armadura. El ángulo de carga define el estado o punto de operación de la máquina, es análogo a la variable deslizamiento en el caso de la máquina de inducción. En la figura 8.7(a) se presenta el gráfico potencia eléctrica con respecto al ángulo de carga para una máquina sincrónica típica, indicando las dos componentes de la potencia eléctrica y la potencia eléctrica total.

La potencia aparente en el estator de la máquina sincrónica se calcula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} S_e &= 3 \mathbf{V}_e \cdot \mathbf{I}_e^* = 3(V_d + jV_q)(I_d - jI_q) = \\ &= 3[(V_d I_d + V_q I_q) + j(V_q I_d - V_d I_q)] = P_e + jQ_e \end{aligned} \quad (8.86)$$

La ecuación anterior determina la potencia activa y reactiva de la máquina sincrónica. La potencia reactiva expresada en función de las variables del diagrama fasorial se obtiene reemplazando

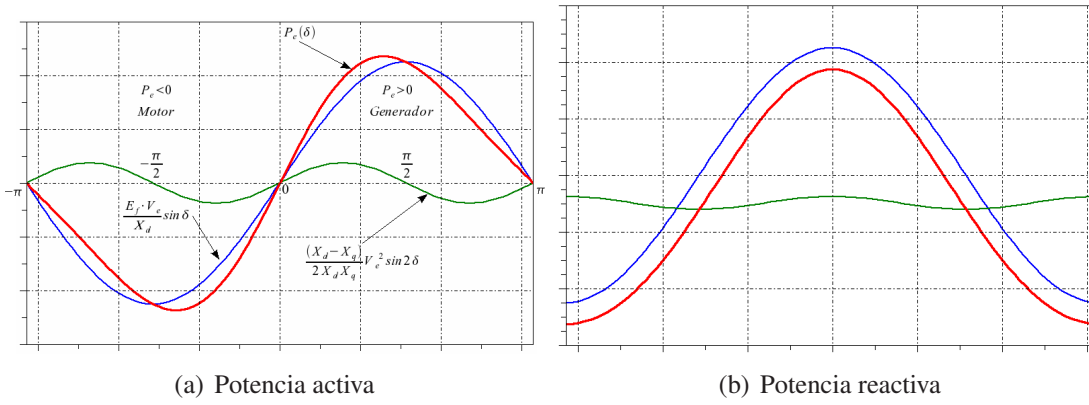


Figura 8.7 Potencia eléctrica de la máquina sincrónica de polos salientes

en la expresión 8.85, las relaciones 8.81 a 8.84:

$$Q_e = 3(V_q I_d - V_d I_q) = 3 \frac{E_f V_e}{X_d} \cos \delta - 3 \frac{V_e^2}{X_d X_q} (X_q \cos^2 \delta + X_d \sin^2 \delta) \quad (8.87)$$

En la figura 8.7(b) se representa la potencia reactiva en función del ángulo de carga para una máquina sincrónica típica de polos salientes.

El punto de operación de la máquina sincrónica queda definido al conocer el valor del ángulo de carga δ . En la figura 8.8 se observa que a medida que cuando aumenta la potencia entregada por la máquina al sistema eléctrico, se incrementa el valor del ángulo de carga. Sin embargo, la característica potencia eléctrica en función del ángulo de carga tiene un valor de potencia máxima que puede entregar la máquina. Si por el sistema mecánico se entrega una potencia mayor, no es posible realizar la conversión de toda la potencia, y el exceso o diferencia acelerará el rotor. Si el rotor de la máquina se acelera, el ángulo de carga aumentará continuamente y la máquina perderá el sincronismo con el sistema eléctrico de potencia. Cuando ocurre este fenómeno es necesario desconectar la máquina sincrónica de la red para evitar las fuertes oscilaciones de potencia y la aceleración de la máquina que es capaz de alcanzar el nivel de embalamiento del rotor.

Para determinar el ángulo de carga correspondiente a la máxima potencia que puede entregar la máquina, se deriva con respecto a este ángulo la expresión 8.85. En el valor δ_{max} la derivada de la potencia con respecto al ángulo de carga es nula:

$$\frac{\partial P_e}{\partial \delta} = \frac{E_f V_e}{X_d} \cos \delta + \frac{X_d - X_q}{X_d X_q} V_e^2 \cos 2\delta \quad (8.88)$$

$$\frac{\partial P_e}{\partial \delta}(\delta_{max}) = \frac{E_f V_e}{X_d} \cos \delta_{max} + \frac{X_d - X_q}{X_d X_q} V_e^2 \cos 2\delta_{max} = 0 \quad (8.89)$$

Recordando la identidad trigonométrica $\cos 2\alpha \equiv 2 \cos^2 \alpha - 1$, Se puede expresar la ecuación 8.89 como una ecuación cuadrática:

$$2 \frac{X_d - X_q}{X_d X_q} V_e^2 \cos^2 \delta_{max} + \frac{E_f V_e}{X_d} \cos \delta_{max} - \frac{X_d - X_q}{X_d X_q} V_e^2 = 0 \quad (8.90)$$

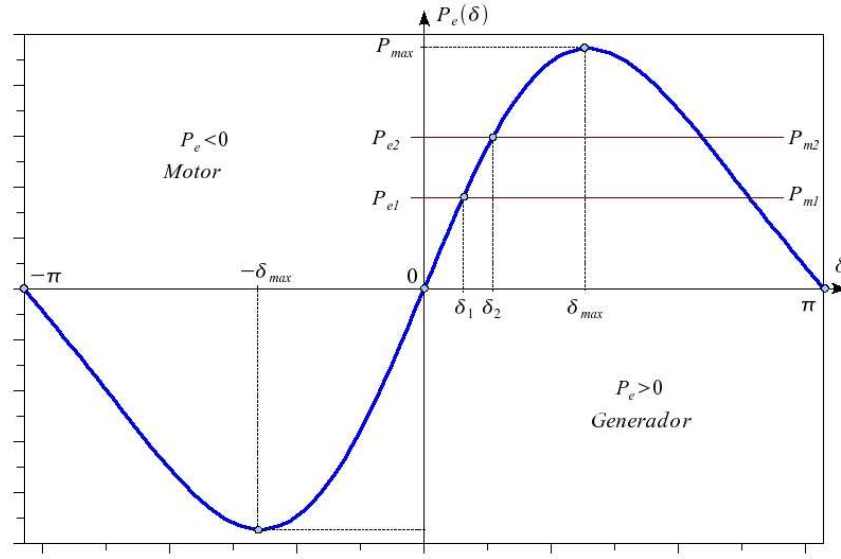


Figura 8.8 Variación de la potencia eléctrica con el ángulo de carga y punto de máxima potencia

Simplificando la expresión anterior se puede obtener:

$$\cos^2 \delta_{max} + \frac{1}{2} \frac{X_q}{X_d - X_q} \frac{E_f}{V_e} \cos \delta_{max} - \frac{1}{2} = 0 \quad (8.91)$$

Cuya solución es:

$$\delta_{max} = \arccos \left[\sqrt{\frac{X_q^2 E_f^2}{16(X_d - X_q)^2 V_e^2} + \frac{1}{2}} - \frac{X_q E_f}{4(X_d - X_q) V_e} \right] \quad (8.92)$$

Para las máquinas sincrónicas de rotor liso, las reactancias directa y cuadratura son iguales, y en este caso se obtiene a partir de la expresión 8.89:

$$\delta_{max} = \arccos(0) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow P_{e max} = \frac{E_f V_e}{X_s} \quad (8.93)$$

8.9. Convenciones de la máquina sincrónica

En la sección 8.7 se desarrolló el diagrama fasorial de la máquina sincrónica para las convenciones motor y generador respectivamente. Estas dos convenciones se diferencian tan solo en la referencia de circulación de las corrientes de armadura. En la convención generador, un valor positivo de la potencia implica flujo de energía desde el sistema mecánico hacia el sistema eléctrico de potencia. En la convención motor, los valores positivos representan absorción de potencia de la red y su entrega por el eje mecánico. En ambos casos la potencia se calcula mediante la misma expresión fasorial:

$$\mathbf{S} \equiv \mathbf{V} \cdot \mathbf{I}^* = VI (\cos \phi + j \sin \phi) \quad (8.94)$$

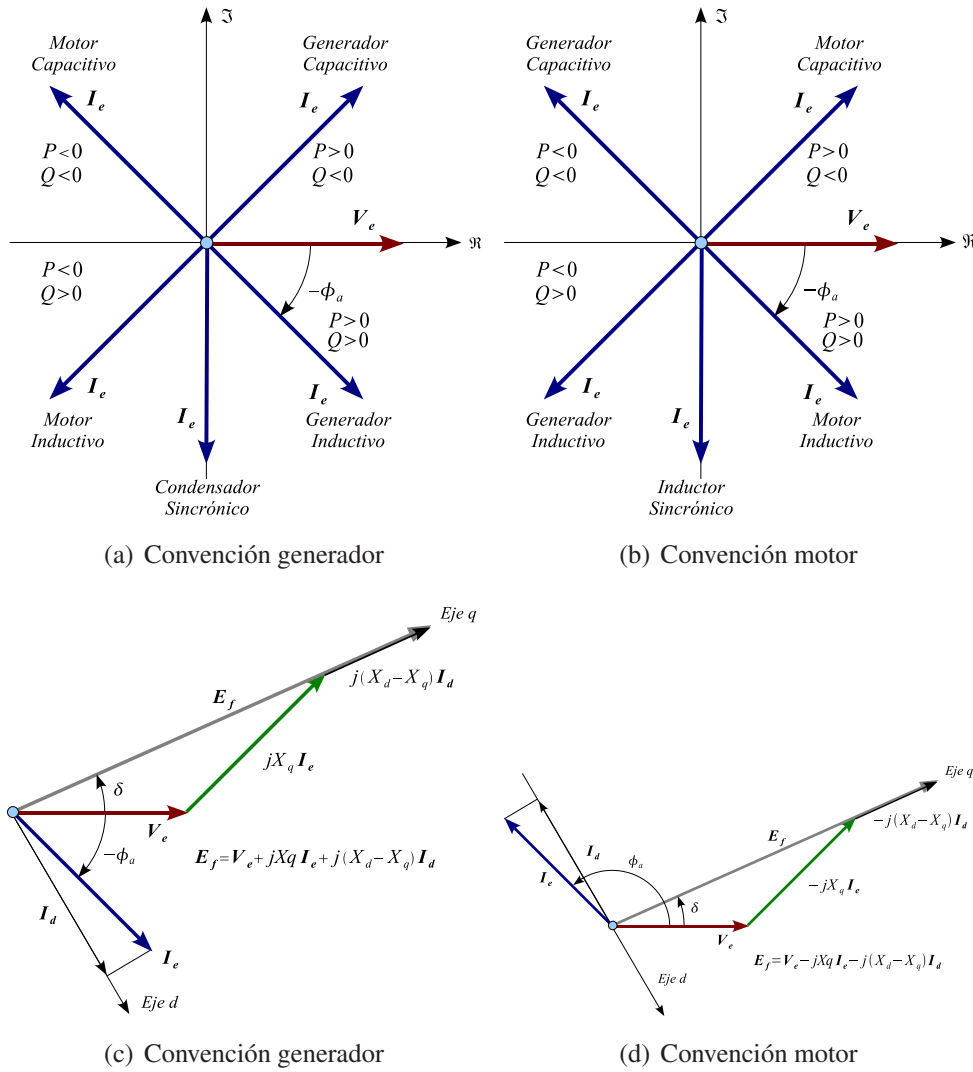


Figura 8.9 Convenciones motor y generador inductivos de la máquina síncronica

donde:

$\phi = \angle \mathbf{V} - \angle \mathbf{I}$ es el ángulo de atraso de la corriente con respecto a la tensión.

La expresión 8.94 define como referencia la potencia reactiva inductiva. Si la corriente está retrasada fasorialmente con respecto a la tensión, al ser conjugada, el término imaginario es positivo¹⁶. De esta forma quedan completamente definidos, con respecto a la potencia activa y reactiva, los cuatro cuadrantes en que puede localizarse la corriente de armadura de la máquina síncronica en las dos convenciones más utilizadas¹⁷. En la figura 8.9 (a) y (b), se resumen los aspectos y definiciones más resaltantes de estas dos convenciones.

¹⁶Aun cuando la necesidad de conjugar uno de los dos fasores es para determinar el ángulo entre ellos por diferencia de sus respectivas fases, si se conjuga la corriente la referencia es la potencia reactiva inductiva y si se conjuga la tensión la referencia es la potencia reactiva capacitiva.

¹⁷Motor o generador inductivo.

En la convención generador, un generador inductivo entrega potencia reactiva a la red y un generador capacitivo la consume. Un motor inductivo en convención motor consume potencia reactiva inductiva. La convención define el sentido de referencia del intercambio. Siempre se utiliza el concepto de potencia reactiva inductiva, para mantener la coherencia de la definición 8.94. En la figura 8.9 (c) y (d) se presentan los diagrama fasoriales de una máquina sincrónica de polos salientes, en convención generador y en convención motor, cuando se encuentra generando hacia la red potencia activa y reactiva inductiva. Se observa en estos dos diagramas, que aun cuando la corriente se invierte de sentido entre ambas convenciones, las caídas de tensión producidas por la corriente de armadura también cambian y los diagramas fasoriales en las dos convenciones reproducen los mismos resultados.

8.10. Valores nominales de la máquina sincrónica

Tanto los transformadores, las máquinas de corriente continua, las máquinas de inducción como las máquinas sincrónicas poseen un conjunto de valores nominales o datos de placa que determinan sus límites de operación en régimen permanente. Los valores nominales están definidos por los límites térmicos del convertidor. Si estos límites de temperatura son excedidos durante períodos prolongados de tiempo, se produce un rápido envejecimiento del aislamiento de la máquina y un deterioro prematuro de la misma. Los datos de placa de las máquinas sincrónicas son los siguientes:

1. La corriente nominal de armadura:

Está determinada por las pérdidas Joule de las bobinas del estator, y por las características térmicas de la máquina. Las características físicas y químicas de los materiales utilizados en el aislamiento de los devanados de armadura, definen la máxima temperatura de operación que permiten estos materiales sin que se produzca una degradación prematura de los mismos. El sistema de intercambio de calor juega un papel importante porque a medida que aumenta la capacidad de extracción de calor, es posible incrementar las pérdidas sin aumentar la temperatura máxima de las bobinas. El fabricante define durante la etapa de diseño, y posteriormente en el banco de pruebas, el valor máximo de la corriente de armadura que no excede la temperatura máxima del aislamiento con el sistema de refrigeración utilizado por la máquina. Durante la operación de la máquina este valor puede ser sobrepasado por un cierto tiempo, aun cuando exceder la corriente nominal de armadura durante periodos prolongados de tiempo o en régimen permanente, reduce la vida útil de la máquina.

2. La tensión nominal de armadura:

La tensión nominal está determinada por las pérdidas en el material magnético de la máquina. Las pérdidas por histéresis y por corrientes parásitas dependen de la densidad de flujo máximo en el hierro. La tensión aplicada a las bobinas es aproximadamente igual a la fuerza electromotriz en el devanado cuando se desprecian las pérdidas resistivas. La fuerza electromotriz en las bobinas es igual a la derivada con respecto al tiempo de los

enlaces de flujo. Para excitaciones sinusoidales de las bobinas de la máquina se obtiene a partir de la ley de Faraday la siguiente expresión:

$$V_e = E_e = \sqrt{2}\pi f \cdot N_e \cdot \phi_{max} = 4,44f \cdot N_e \cdot A \cdot B_{max} \quad (8.95)$$

Como en la expresión 8.95, la frecuencia f , el número de vueltas de la bobina N_e , y el área A de la sección transversal del enrollado son constantes, la densidad de flujo máximo depende directamente de la tensión de armadura. Por esta razón el fabricante define un valor nominal de la tensión de armadura que permite utilizar una densidad de flujo cercana al codo de saturación del material magnético, donde las pérdidas del hierro son relativamente reducidas. En la práctica las densidades de flujo de diseño se encuentran entre 1,0 y 1,4 $\frac{Wb}{m^2}$ para los materiales ferromagnéticos de grano no orientado utilizados habitualmente en la construcción de las máquinas eléctricas rotativas.

3. La potencia aparente nominal:

La potencia aparente nominal resume en un valor de mérito la corriente y tensión nominal de armadura aun cuando no representa en si mismo un límite térmico. En el sistema trifásico balanceado, la potencia aparente nominal es:

$$S_n = 3V_n^{l-n} \cdot I_n^l = \sqrt{3}V_n^{l-l} \cdot I_n^l \quad (8.96)$$

La máquina sincrónica puede operar con potencia aparente nominal en infinitos puntos, con diferentes ángulos de desfase entre la tensión y la corriente de armadura. En la figura 8.10 se representan los diagramas fasoriales de la máquina para dos factores de potencia notables: unitario y cero inductivo. En el segundo caso se observa que es necesaria una fuerza electromotriz mayor.

4. El factor de potencia nominal:

En la figura 8.11 se observa que para mantener un factor de potencia inductivo es necesaria una mayor fuerza electromotriz producida por el flujo del campo de la máquina sincrónica. La fuerza electromotriz depende directamente de la corriente i_f que circula por la bobina del campo. Aun cuando esta bobina maneja una pequeña fracción de la potencia aparente nominal de armadura, las pérdidas resistivas del conductor producen calentamiento local en la misma. Por esta razón es necesario imponer un valor de corriente de campo que garantice el funcionamiento en régimen permanente de la máquina sincrónica sin envejecer prematuramente el aislamiento de esta bobina. Como la corriente de campo está limitada a un valor máximo en régimen permanente, también queda limitada la máxima fuerza electromotriz producida por la corriente de campo. A medida que se reduce el factor de potencia de la máquina durante la operación a potencia aparente nominal, se incrementa la fuerza electromotriz necesaria para mantener el punto de operación. El factor de potencia para el cual la fuerza electromotriz producida por el campo es máxima se define como factor de potencia nominal. El fabricante en lugar de expresar el valor máximo de la corriente de campo, indica en los datos de placa el valor del factor de potencia

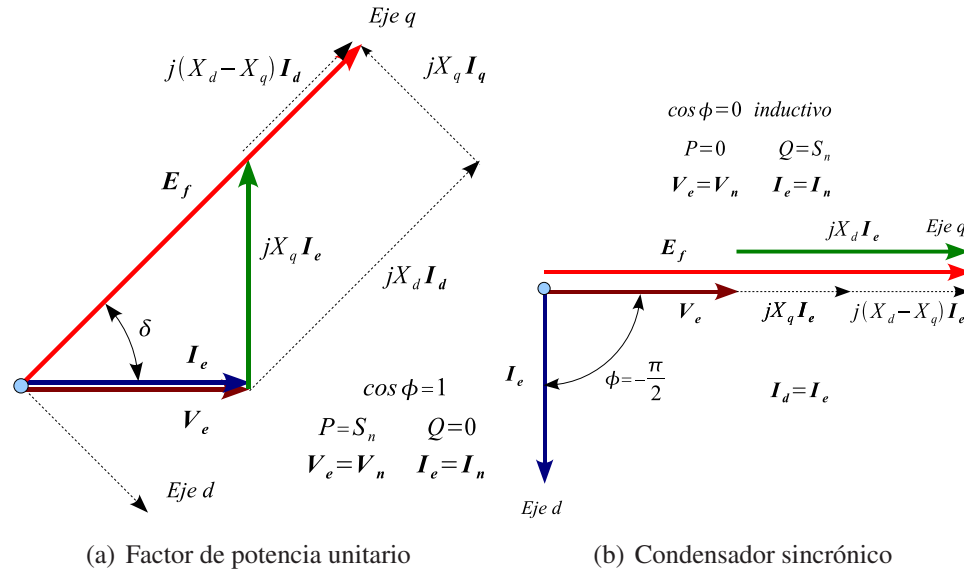


Figura 8.10 Operación de la máquina con potencia aparente nominal con $\cos \phi$ unitario y puramente inductivo

nominal, que es el mínimo factor de potencia con el cual la máquina puede operar con tensión y corriente nominal sin exceder la temperatura máxima de las bobinas del campo.

5. La corriente de campo nominal:

La corriente de campo nominal es aquella que produce la tensión nominal en la armadura de la máquina sincrónica cuando esta se encuentra en vacío y girando a la velocidad nominal. Esta corriente es inferior a la corriente máxima del campo definida por el factor de potencia nominal en las condiciones nominales de operación.

6. La velocidad nominal:

El rotor de la máquina sincrónica gira en régimen permanente a una velocidad mecánica exactamente igual a la velocidad angular del campo magnético rotatorio del estator. Esta velocidad depende de la frecuencia de la red eléctrica y del número de pares de polos p de la máquina. La velocidad nominal de la máquina sincrónica es:

$$\omega_n = \omega_{sin} = \frac{2\pi f}{p} \quad (8.97)$$

8.11. Lugares geométricos

Las posibles condiciones de operación de la máquina sincrónica circunscriben las diferentes variables que definen su comportamiento, en ciertos rangos y figuras geométricas cuando se

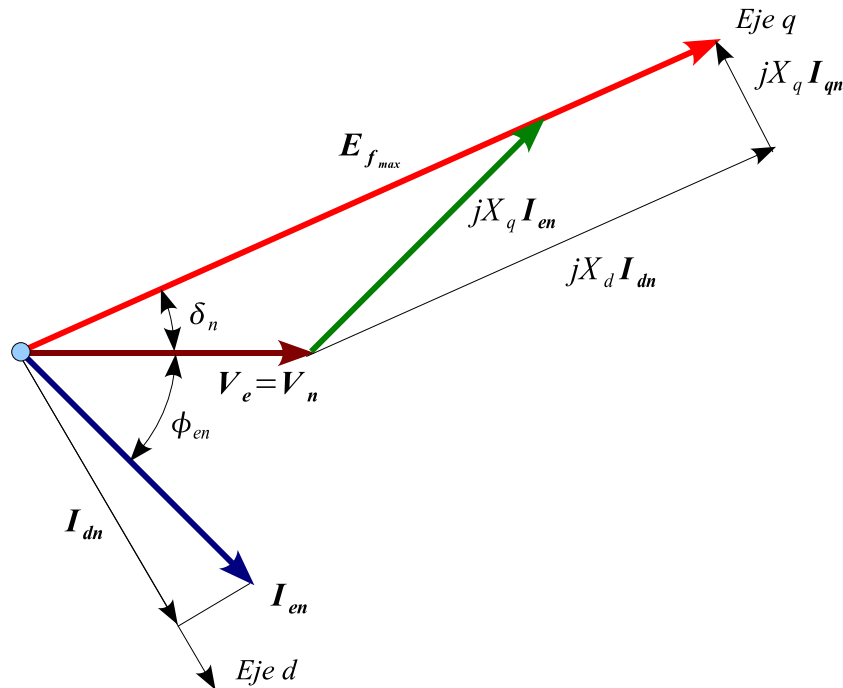


Figura 8.11 Máquina sincrónica de polos salientes en el punto nominal de operación

representan gráficamente. Un determinado punto de operación queda definido mediante un diagrama fasorial, pero la variación del factor de potencia, genera un lugar geométrico para la fuerza electromotriz producida por el campo. El análisis de estos diagramas permite evaluar las diferentes posibilidades y limitaciones en la operación de la máquina sincrónica. Algunos diagramas o lugares geométricos son suministrados por el fabricante de la máquina debido a su utilidad e importancia. En otras ocasiones es necesario construirlos a partir de la información disponible. Todos los lugares geométricos analizados en esta sección mantienen constante la tensión de armadura.

En las máquinas sincrónicas grandes, la potencia mecánica en el eje es aproximadamente igual a la potencia eléctrica. Por esta razón, si la potencia mecánica se mantiene constante, la potencia eléctrica es independiente de la intensidad de la corriente del campo. El lugar geométrico de la corriente de armadura cuando la máquina opera a potencia eléctrica y tensión de armadura constante, es una línea recta paralela al eje imaginario tal como se puede observar en la figura 8.12. Si para cada uno de los puntos del lugar geométrico de la corriente de armadura a potencia constante se realiza el diagrama fasorial de la máquina sincrónica de rotor liso, el extremo del fasor que representa la fuerza electromotriz producida por el campo es una línea recta paralela al eje real..

En la figura 8.13 se observa, durante la operación a potencia eléctrica constante, que cuando la proyección de la fuerza electromotriz producida por el campo sobre la tensión de armadura es mayor que esta, la máquina entrega potencia reactiva inductiva a la red eléctrica. Si la proyección de la fuerza electromotriz sobre la tensión de armadura es menor que la tensión de armadura, la máquina consume potencia reactiva inductiva de la red eléctrica. Cuando la proyección de la fuerza electromotriz producida por el campo iguala a la tensión de armadura, la máquina se

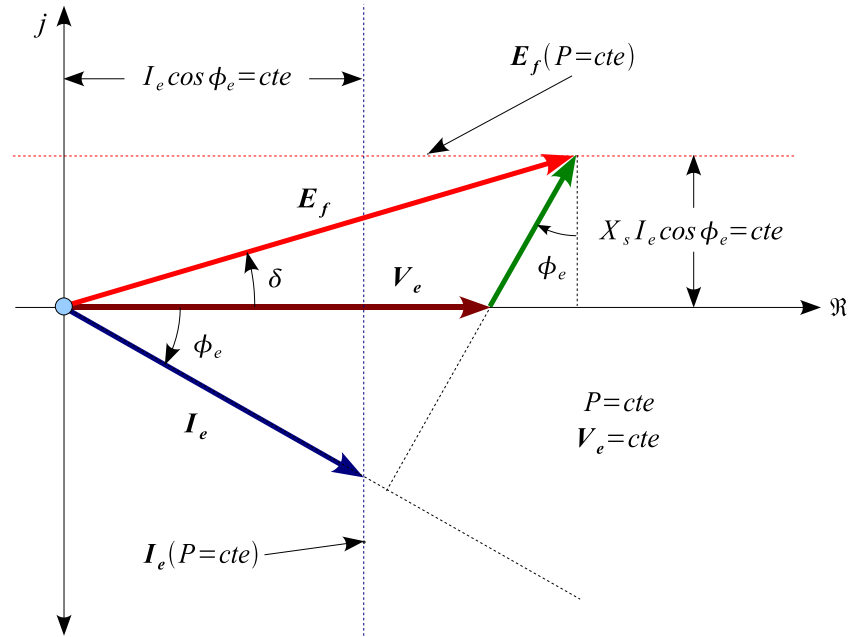


Figura 8.12 Lugar geométrico de la fuerza electromotriz producida por el campo, a potencia constante, para una máquina sincrónica de rotor liso

encuentra operando con factor de potencia unitario y no consume, ni produce, potencia reactiva inductiva. En la máquina sincrónica de polos salientes la situación es mucho más compleja, pero proyecciones grandes de la fuerza electromotriz sobre la tensión tienden a inyectar reactivos a la red, y en el caso contrario consumen reactivos del sistema eléctrico de potencia.

Cuando la tensión y el módulo de la corriente de armadura se mantienen constantes, y se permite la variación del ángulo del factor de potencia, los lugares geométricos de la fuerza electromotriz que produce el campo y de la potencia aparente de la máquina sincrónica de rotor liso son círculos. El círculo de la potencia aparente está centrado en el origen de coordenadas del diagrama fasorial, y el centro del círculo correspondiente al lugar geométrico de la fuerza electromotriz producida por la corriente de campo con corriente de armadura nominal, se encuentra en el extremo del fasor que representa la tensión de armadura. La fuerza electromotriz que produce el campo de la máquina sincrónica se encuentra limitada por la máxima corriente de campo, este valor se obtiene en la condición de operación nominal de la máquina. Por esta razón existe un círculo que representa la fuerza electromotriz máxima que intercepta al lugar geométrico de la fuerza electromotriz a corriente nominal de armadura. En la figura 8.14 se representa el círculo correspondiente a la corriente nominal de armadura, el lugar geométrico asociado con la fuerza electromotriz, y el círculo correspondiente a la fuerza electromotriz máxima. La zona de operación posible, en régimen permanente, está definido por el área de la intersección de los lugares geométricos de la fuerza electromotriz máxima y de la fuerza electromotriz a corriente nominal. Fuera de la intersección se excede la corriente nominal de armadura, la corriente máxima de campo o ambas corrientes. Como la fuerza electromotriz máxima está limitada por la corriente de campo, esto se traduce en una limitación adicional sobre la corriente de armadura. En una

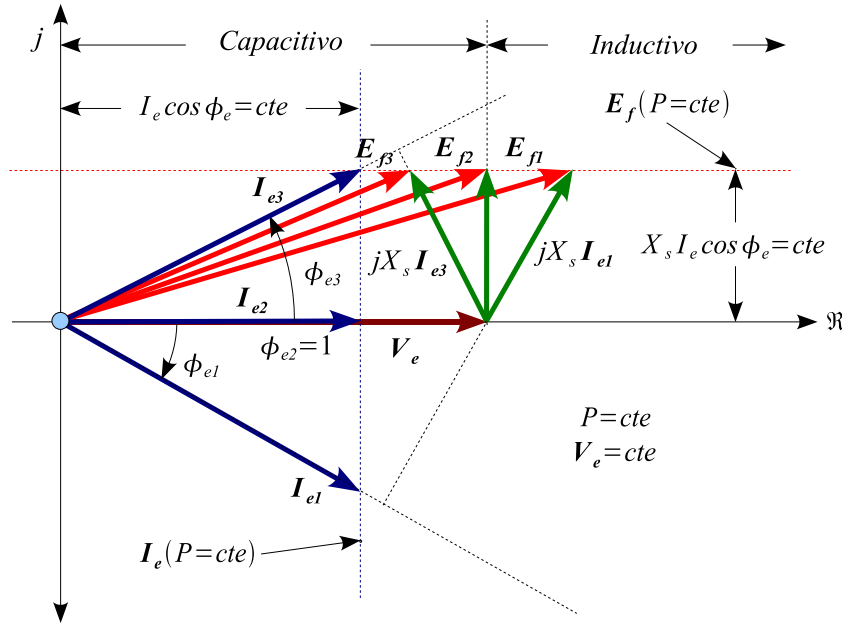


Figura 8.13 Zona inductiva y capacitiva del lugar geométrico de la fuerza electromotriz a potencia constante

máquina sincrónica de rotor liso se cumple la siguiente relación:

$$\mathbf{E}_f = \mathbf{V}_e + jX_s \mathbf{I}_e \Rightarrow \mathbf{I}_e = j \frac{\mathbf{V}_e}{X_s} - j \frac{\mathbf{E}_f}{X_s} \Rightarrow |\mathbf{I}_e| \leq \left| j \left(\frac{\mathbf{V}_e - \mathbf{E}_{f \max} \angle \delta}{X_s} \right) \right| \quad (8.98)$$

En ocasiones, al diagrama se le incorporan varios límites adicionales. Por una parte los análisis de estabilidad del sistema de potencia definen unos límites máximos a los ángulos de carga de cada una de las máquinas sincrónicas de la red, esto se traduce en una limitación sobre las fuerzas electromotrices y corrientes de la máquina. También es posible que la turbina de accionamiento o la carga mecánica estén limitadas a la potencia del punto nominal de operación. Esto también define una limitación sobre las fuerzas electromotrices y corrientes tal como se discutió anteriormente al analizar los lugares geométricos a potencia constante.

En algunas ocasiones es necesario definir también la fuerza electromotriz mínima $E_{f \min}$, calculada como aquella que produce la potencia eléctrica nominal con el ángulo de carga correspondiente a la máxima potencia que puede entregar la máquina en régimen permanente. Esto se representa mediante un círculo centrado en el origen de coordenadas del diagrama fasorial. En la máquina de rotor liso la fuerza electromotriz mínima es:

$$P_e = P_n = \frac{E_{f \min} \cdot V_e}{X_s} \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow E_{f \min} = \frac{P_n \cdot X_s}{V_e} \quad (8.99)$$

En la máquina sincrónica de polos salientes los lugares geométricos son más complejos. La figura 8.15 presenta el lugar geométrico de la fuerza electromotriz de una máquina sincrónica con polos salientes, el círculo correspondiente a la potencia aparente nominal, y el círculo

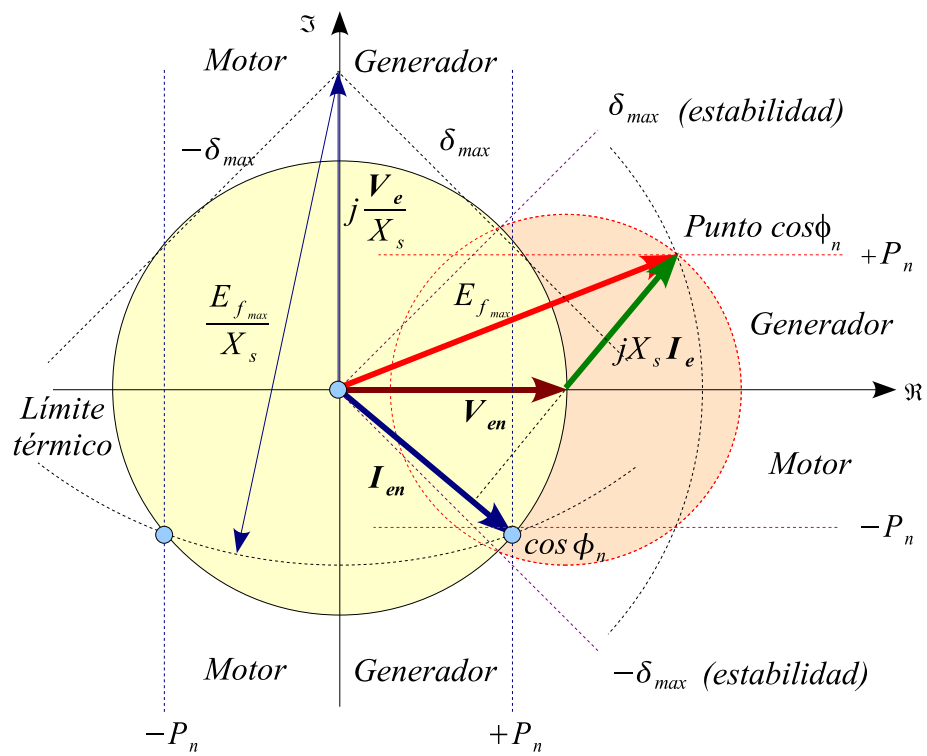


Figura 8.14 Lugares geométricos de la corriente y de la fuerza electromotriz a potencia aparente constante para la máquina sincrónica de rotor liso

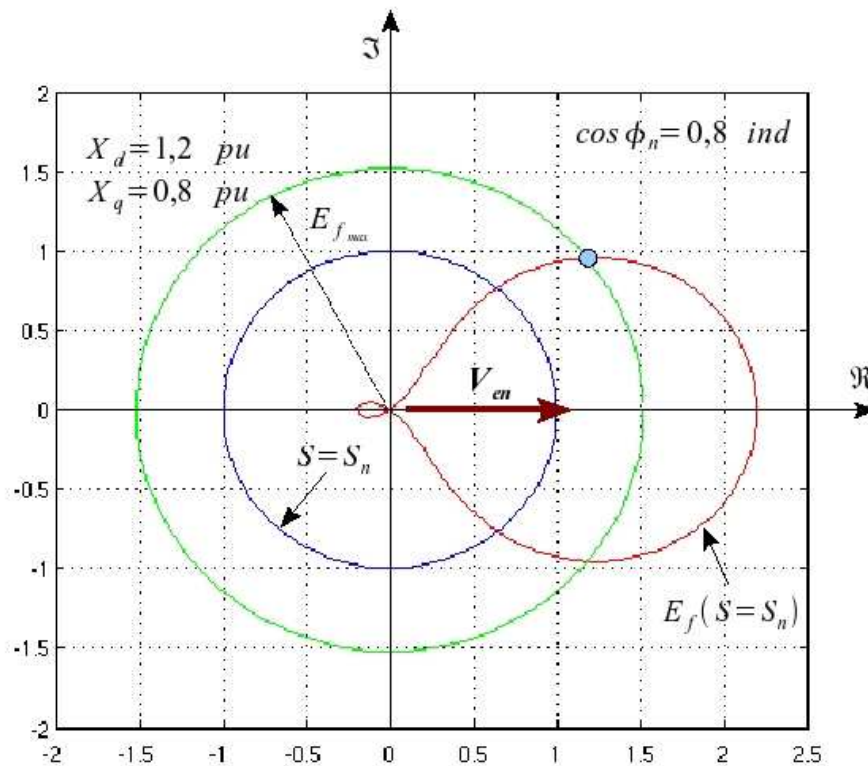


Figura 8.15 Lugares geométricos de una máquina sincrónica de polos saliente

correspondiente a la fuerza electromotriz máxima.

El gráfico de la figura anterior se obtiene mediante el programa MATLAB presentado en el código fuente 10.

8.12. Circuito equivalente de la máquina sincrónica

A partir del modelo 8.54 que define el comportamiento dinámico de las corrientes de la máquina sincrónica en convención motor, se puede modelar la máquina mediante cuatro circuitos eléctricos acoplados por términos de generación y transformación, mediante transformadores y fuentes de tensión dependientes de corriente. En la figura 8.16(a) se presenta el circuito equivalente de la máquina sincrónica de polos salientes. Durante la operación equilibrada en régimen permanente, las corrientes i_d , i_q e i_f son constantes en el tiempo, y la corriente i_0 es nula. De esta forma, el circuito desacoplado correspondiente a la secuencia cero no tiene influencia, y las inductancias del resto de los circuitos no producen caída de tensión. La corriente del campo se puede calcular evaluando el cociente entre la tensión aplicada al campo y la resistencia de esta bobina. Los dos circuitos restantes, correspondientes al eje directo y cuadratura, están configurados tan sólo mediante resistencias y fuentes de tensión dependientes de corrientes que circulan por otros circuitos. Asociando con el eje real la polaridad positiva de la corriente y tensión del circuito correspondiente al eje directo, y con el eje imaginario la del circuito cuadratura, se representa en la figura 8.16(b) el circuito equivalente fasorial de la máquina sincrónica de polos

Algoritmo 10 Lugares geométricos de la máquina síncrona de polos salientes

```
Van = 1.; Ien = 1.; San = 1.;           % Tensión, corriente y potencia nominal
CosFin = 0.8;                           % Factor de potencia nominal
Xd = 1.2; Xq = 0.8;                     % Reactancia del eje directo y cuadratura
Re = 0.0;                               % Resistencia de las bobinas de armadura
Fi = 0:-.05:-2*pi;                      % Vector de posibles fp de operación
Ie = Ien*(cos(Fi)+j*sin(Fi));            % Vector de corrientes de armadura
D = Van + (Re+j*Xq).*Ie;                 % Vector de fasores D para cada corriente
delta = atan2(imag(D),real(D));          % Vector de ángulos de carga para cada Ie
Id = Ien*sin(delta-Fi).*(sin(delta)-j*cos(delta)); % Cálculo de la corriente Id
Ef = D + j*(Xd-Xq).*Id;                  % Cálculo de la fuerza electromotriz
Fin = acos(CosFin);                      % Angulo del factor de potencia nominal
Iex = Ien*(cos(Fin)-j*sin(Fin));          % Fasor de la corriente nominal
Dx = Van + (Re+j*Xq).*Iex;               % Fasor D para la condición nominal
deltax = atan(imag(Dx)/real(Dx));         % Angulo de carga nominal
Idx = Ien*sin(deltax-Fin).*(sin(deltax)-j*cos(deltax)); % Corriente directa nominal
Efx = Dx + j*(Xd-Xq).*Idx;               % Fasor de la fuerza electromotriz máxima
Efmax = abs(Efx)*(cos(Fi)+j*sin(Fi));     % Magnitud de la fuerza electromotriz máxima
axis('square');                          % Definición de ejes cuadrados para el gráfico
plot (Ef),hold on;                       % Lugar geométrico de la fem (S=cte)
plot (Ie);                               % Lugar geométrico de la pot. aparente const.
plot(Efmax), hold off;                   % Lugar geométrico de la fem máxima
```

salientes en régimen permanente equilibrado.

Si la máquina síncrona es de rotor liso, las reactancias del eje directo y del eje cuadratura son iguales y se denomina entonces reactancia síncrona X_s . Para máquinas síncronas de rotor liso se deduce de la figura 8.16(b), y de las expresiones 8.33 y 8.34, la siguiente relación:

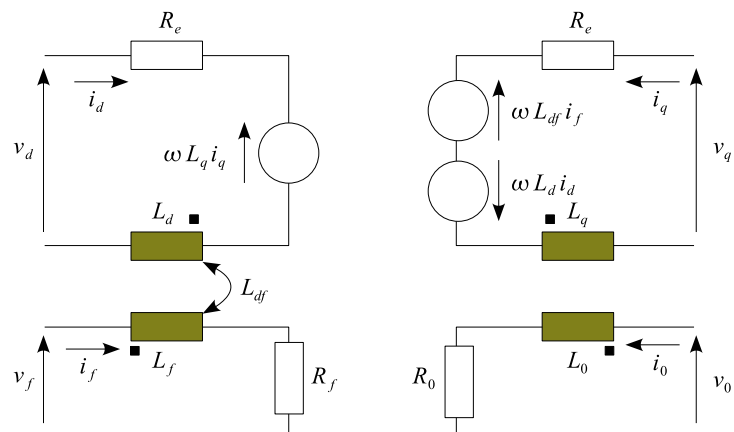
$$\mathbf{V}_e = \mathbf{V}_d + j\mathbf{V}_q = (R_e + jX_s)(I_d + jX_q) + jE_f = (R_e + jX_s)\mathbf{I}_e + \mathbf{E}_f \quad (8.100)$$

En la figura 8.16(c) se presenta el circuito equivalente en convención motor, de la máquina síncrona de rotor liso en régimen permanente equilibrado. El circuito equivalente de la máquina síncrona de rotor liso permite una interpretación simple de las ecuaciones. Esta máquina se comporta como una fuente equivalente de Thèvenin, cuya tensión de circuito abierto es la fuerza electromotriz que produce la corriente de campo sobre la armadura y la impedancia de Thèvenin está formada por la resistencia de las bobinas de armadura y por la reactancia síncrona. La caída reactiva modela la desmagnetización ocasionada por la circulación de la corriente de armadura.

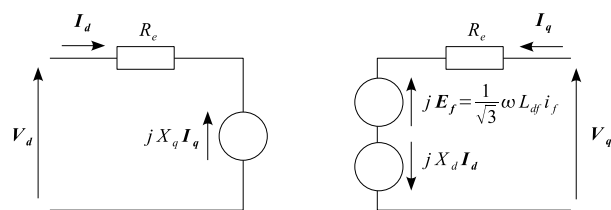
8.13. Curvas en "V"

Estas curvas están formadas por una familia de gráficos que representan la relación entre la magnitud de la corriente del estator I_e , y la corriente de campo o corriente de excitación i_f , utilizando como parámetro diferentes valores de la potencia eléctrica. Estos gráficos se realizan manteniendo la tensión de armadura en un valor constante, generalmente en su valor nominal. Mediante el diagrama fasorial de la máquina síncrona se pueden obtener directamente las curvas en "V" de la máquina síncrona.

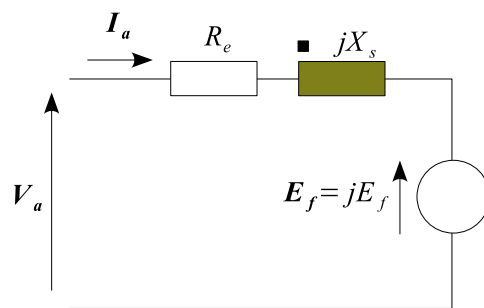
En la figura 8.17 se han representado una familia de curvas en "V" para una máquina síncrona de polos salientes. Es interesante destacar la linealidad de la curva cuando la potencia eléctrica



(a) Modelo transitorio de polos salientes



(b) Modelo permanente de polos salientes



(c) Modelo permanente de rotor liso

Figura 8.16 Circuitos equivalente de la máquina sincrónica en convención motor

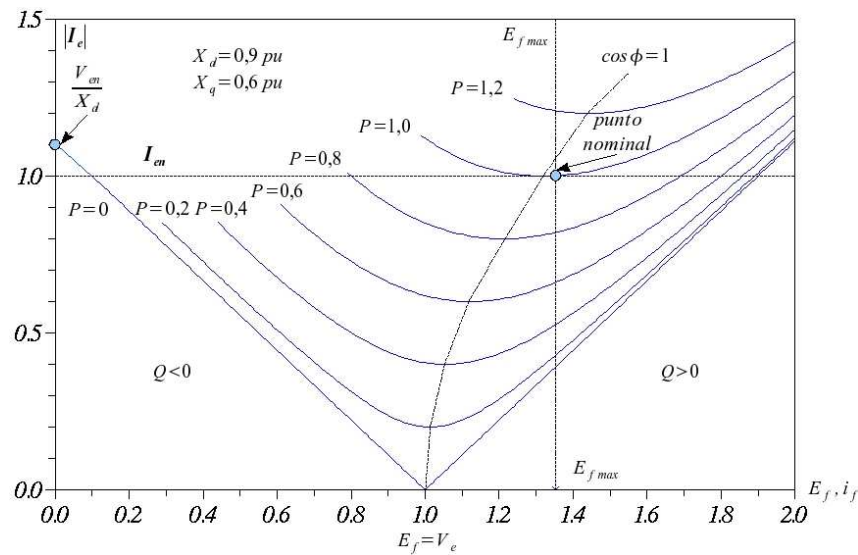


Figura 8.17 Curvas en "V" para una máquina sincrónica de polos salientes

es cero. En este caso todas las caídas de tensión y fuerzas electromotrices coinciden exactamente con el eje cuadratura, obteniéndose una relación entre la fuerza electromotriz y la corriente de armadura es lineal. La zona a la derecha del gráfico corresponde a inyección de reactivos desde la máquina hacia la red y a la izquierda de la característica de factor de potencia unitario, se consume potencia reactiva inductiva desde la red eléctrica.

Las curvas en "V" fueron utilizadas en el pasado con la finalidad de evitar los laboriosos cálculos fasoriales. Estas curvas permiten una rápida visualización de los límites operativos de la máquina. Sin embargo, actualmente no es necesario el uso de esta herramienta debido a las facilidades de cálculo disponibles. El código fuente 11 realizado en el entorno Scilab reproduce el gráfico de la figura 8.17. El algoritmo utiliza la rutina *f_solve*¹⁸ incorporada en el entorno de programación, para determinar el valor del ángulo de carga en cada punto de operación. Este código emplea varios métodos utilizados habitualmente en el análisis de máquinas sincrónicas en régimen permanente.

8.14. Medición de las reactancias permanentes

Existen diversos métodos para medir las reactancias de régimen permanente de la máquina sincrónica de rotor liso y de polos salientes. Los métodos para determinar la reactancia sincrónica de las máquinas de rotor liso y la reactancia del eje directo de la máquina de polos salientes son similares. En estos ensayos se acciona la máquina a la velocidad sincrónica, supliendo solamente las pérdidas mecánicas. En estas condiciones la máquina entrega o consume potencia reactiva inductiva dependiendo de la fuerza electromotriz que produce el campo. Como la corriente de armadura se encuentra 90° retrasada o adelantada con respecto a la tensión de armadura, la caída en la reactancia X_q es paralela a esta tensión. El eje cuadratura está ubicado en la dirección del fasor de la tensión de armadura. La corriente del eje directo es igual a la corriente de armadura

¹⁸Las rutinas *f_solve* de Scilab, Octave o Matlab determinan los ceros de funciones no lineales.

Algoritmo 11 Cálculo de las curvas en "V" de la máquina sincrónica

```
//Función de la potencia eléctrica
function p = Pdelta(delta)
global cl Ef Ven xd xq Pe;
p = Ef(cl)*Ven*sin(delta)/xd+Ven^2*(xd-xq)*sin(2*delta)/(2*xd*xq)-Pe;
endfunction
//
global cl Ef Ven xd xq Pe;
Ven = 1.; Ien = 1.; Sen = 1.; j=%i; // Tensión, corriente y pot. nom.
CosFin = 0.8; // Factor de potencia nominal
xd = 0.9; xq = 0.6; // Reactancias del eje d y q
Re = 0.0; // Resistencia de armadura
Fin = acos(CosFin); // Angulo del fp nominal
Iex = Ien*(cos(Fin)-j*sin(Fin)); // Fasor de la Corriente nominal
Dx = Van + (Re+j*xq)*Iex; // Fasor D para la condición nominal
deltax = atan(imag(Dx)/real(Dx)); // Angulo de carga nominal
Idx = Ien*sin(deltax-Fin).*(sin(deltax)-j*cos(deltax)); // Corriente dir. nom.
Efx = Dx + j*(xd-xq).*Idx; // Fasor de la fem máxima
Efmax = abs(Efx)*(cos(Fin)+j*sin(Fin)); // Magnitud de la fem máxima
Ef=0.1:0.01:2.0; // Rango de fem
kk=0;
for Pe=0:0.2:1.2; // Rango de potencias eléctricas
kk=kk+1
for l=1:length(Ef);
delta(l)=0; // Inicialización del ángulo de carga
end
for cl=1:1:length(Ef);
aaa=Pe*xd/(Ef(cl)*Van);
if abs(aaa) < 1.0,
deltac1 = asin(aaa); // Estimación inicial del ángulo de carga
deltac1 = fsolve(deltac1(1),Pdelta); // Solución de la ecuación no lineal
// Cálculo de la potencia reactiva
Q =Ef(cl)*Ven.*cos(deltac1)/xd-Ven^2*(xq*cos(deltac1).^2+...
...+xd*sin(deltac1).^2)/(xd*xq);
S=sqrt(Pe*Pe+Q.*Q); // Cálculo de la potencia aparente
Ie(cl,kk) = S/Van; //Cálculo de la corriente de armadura
else
Ie(cl,kk) = 0; // Corriente de armadura en casos no factibles
end
end
end
// Gráfico de las curvas en "v"
axis([0 2 0 1.5]); // Definición de los ejes del gráfico
plot(Ef,Ie(:,1),Ef,Ie(:,2),Ef,Ie(:,3),Ef,Ie(:,4),...
... Ef,Ie(:,5),Ef,Ie(:,6),Ef,Ie(:,7),);
plot(abs(Efmax),0.0,'x') // Fuerza electromotriz máxima.
```

y la caída de tensión que produce esta componente de la corriente también está dirigida según el eje cuadratura. En la figura 8.10(b) se muestra esta situación.

Del diagrama fasorial de la figura 8.10(b) se deduce la siguiente expresión:

$$E_f = V_e + X_d I_e, \text{ si } \cos \phi = 0 \Rightarrow X_d = \frac{E_f - V_e}{I_e} \quad (8.101)$$

Una alternativa consiste en anular la fuerza electromotriz producida por el campo reduciendo paulatinamente la corriente de campo a cero, en ese momento se obtiene a partir de la expresión 8.101 la reactancia del eje directo de la máquina como el cociente entre la tensión y la corriente de armadura. Otro de los métodos se fundamenta también en la expresión 8.101, pero determina la fuerza electromotriz E_f desconectando la armadura y midiendo la tensión en bornes, la cual coincide exactamente con la fuerza electromotriz de la máquina en vacío. Este método se puede simplificar aun más si la máquina se encuentra previamente en cortocircuito girando a velocidad sincrónica, con una corriente de campo tal que fuerce la circulación de la corriente nominal por la armadura. Si en este preciso instante, se desconecta la armadura de la máquina, la tensión en bornes es igual a la fuerza electromotriz interna durante el cortocircuito y el cociente con la corriente nominal de armadura determina la reactancia del eje directo de la máquina.

La discusión anterior es válida también para las máquinas sincrónicas de rotor liso. La reactancia del eje directo es igual a la reactancia del eje cuadratura, y si se aplican los ensayos utilizados para la determinación de la reactancia del eje directo, se puede obtener con el mismo procedimiento el valor de la reactancia sincrónica de una máquina de rotor liso.

La reactancia del eje cuadratura se puede determinar a partir de la medición de un punto de operación determinado, si se conocen todas las variables y parámetros de la máquina. Conocida la potencia, tensión de armadura, fuerza electromotriz, ángulo de carga y reactancia del eje directo, es posible obtener el valor de la reactancia cuadratura de la máquina a partir de la expresión 8.85:

$$X_q = \frac{X_d}{\frac{2(X_d P_e - E_f V_a \sin \delta)}{V_e^2 \sin 2\delta} + 1} \quad (8.102)$$

Otro método que permite determinar la reactancia del eje cuadratura de la máquina consiste en medir la variación de reluctancia cuando se gira el rotor 90° eléctricos. La reluctancia mínima corresponde a la reactancia del eje directo y la reluctancia máxima al eje cuadratura. Como las dos bobinas poseen el mismo número de vueltas se puede determinar la reactancia cuadratura a partir de esta información y del valor de la reactancia del eje directo.

Las reactancias del eje directo y cuadratura de la máquina sincrónica representan términos de generación, están asociadas con los flujos de la armadura de la máquina y por tanto se asemejan más a reactancias de magnetización que a reactancias de dispersión de una bobina. En la práctica las reactancias sincrónicas de las máquinas de rotor liso y las reactancias del eje directo de las máquinas de polos salientes se encuentran en un rango que oscila entre 0,8 y 1,2 pu de las bases propias del convertidor. Las reactancias del eje cuadratura están comprendidas normalmente entre 0,5 y 0,7 pu aproximadamente. En algunas máquinas especiales, tal como es el caso de los motores sincrónicos de reluctancia, la reactancia del eje cuadratura es mayor que la reactancia del eje directo.

8.15. Análisis de la máquina sincrónica considerando la saturación

Cuando el material magnético de la máquina se satura, la relación entre la corriente del campo i_f y el enlace de flujo que esta corriente produce λ_f , no es lineal. La característica de la fuerza electromotriz E_f producida por el flujo del campo tampoco es lineal con respecto a la corriente de campo. La función $E_f(i_f)$ se conoce como característica de excitación en vacío e indica la variación de las permeancias del material magnético con el nivel de fuerza magnetomotriz aplicada al campo de la máquina. Las máquinas sincrónicas operan normalmente en puntos ubicados por encima del codo de saturación y es necesario analizar su comportamiento en estas condiciones. El nivel de saturación de una máquina afecta las permeancias del circuito magnético y por tanto sus correspondientes reactancias. La característica de magnetización o curva de vacío suministra la información necesaria para corregir las reactancias de la máquina en cada punto de operación.

Las reactancias de la máquina sincrónica representan términos de generación pero asociada en serie con cada una existe una pequeña inductancia de dispersión de la bobina física. Las reactancias de dispersión están definidas por caminos magnéticos que se cierran en el aire y por esta razón no están sometidas a procesos de saturación. Es conveniente por este motivo, separar en dos partes cada una de las reactancias de la máquina sincrónica, una que representa el camino de fuga y la otra que representa el camino principal o de magnetización. La reactancia de fuga no sufre los efectos de la saturación del material ferromagnético, pero la reactancia de magnetización si es afectada. Por esta razón es conveniente expresar las reactancias de la máquina sincrónica de polos salientes de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} X_d &= X_{md} + X_{\sigma d} \\ X_q &= X_{mq} + X_{\sigma q} \end{aligned} \quad (8.103)$$

Separando las reactancias de fuga y magnetización indicadas en la expresión 8.103, se puede definir una nueva fuerza electromotriz detrás de las reactancias de fuga de la máquina que indican el nivel de saturación a que se encuentran sometidas las reactancias de magnetización de la máquina. Asumiendo que las reactancias de fuga de los dos ejes son prácticamente iguales, la fuerza electromotriz E_e se evalúa mediante la expresión siguiente:

$$\mathbf{E}_e = \mathbf{V}_e + jX_{\sigma}\mathbf{I}_e \quad (8.104)$$

En la figura 8.18 se presenta una característica de magnetización o curva en vacío típica, donde se han indicado las asíntotas que permiten linealizar .

Para analizar la saturación de la máquina sincrónica es necesario descomponer las fuerzas magnetomotrices producidas por cada eje. La fuerza magnetomotriz de armadura está orientada según la dirección de la corriente de armadura y se puede descomponer en dos componentes, una en la dirección del eje directo asociada con la corriente del eje directo, y otra según la dirección del eje cuadratura asociada con la corriente del eje cuadratura. La fuerza electromotriz del campo está dirigida según el eje cuadratura y debe ser producida por una fuerza magnetomotriz que está adelantada 90° con respecto a ella. De esta forma el diagrama de fuerzas magnetomotrices de la máquina sincrónica es similar al que se observa en la figura 8.19.

Las fuerzas magnetomotrices orientadas en la dirección del eje cuadratura actúan sobre reluc-

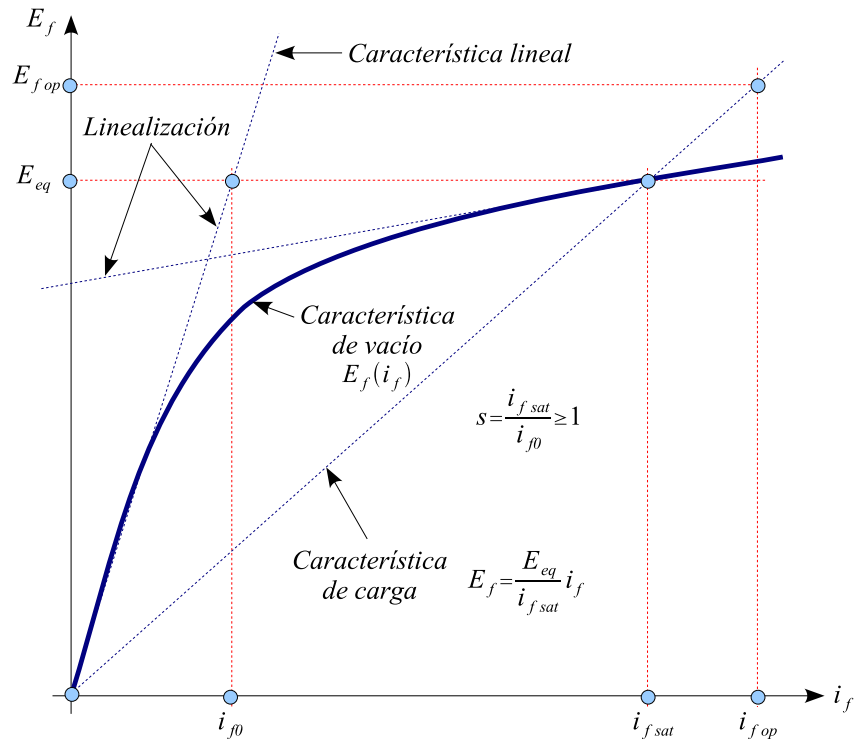


Figura 8.18 Característica de magnetización en vacío de la máquina síncrona

tancias grandes, debido a que en esta zona el entrehierro de la máquina es considerable. Por este motivo, las reactancias definidas por los flujos producidos por estas fuerzas magnetomotrices no están afectados por los fenómenos de saturación. En el eje directo la situación es diferente, los flujos del eje directo no son proporcionales a las fuerzas magnetomotrices que los producen, dependen del nivel o grado de saturación alcanzado por la máquina en su punto de operación. En la figura 8.19 se presenta un diagrama fasorial donde se muestran las fuerzas electromotrices y flujos en los diferentes ejes de la máquina síncrona de polos salientes.

Las fuerzas magnetomotrices de los ejes directo y cuadratura no se pueden sumar porque están aplicadas sobre caminos magnéticos diferentes, con reluctancias diferentes. Una pequeña fuerza magnetomotriz resultante sobre el eje directo produce un flujo de gran magnitud debido a que este eje posee una gran permeancia. Por el contrario, la fuerza magnetomotriz según el eje cuadratura produce un débil flujo en esta dirección debido a la gran reluctancia de este eje. La superposición de los flujos resultantes en cada uno de los ejes coordenados produce el flujo resultante total ϕ_T ilustrado en la figura 8.19. Este flujo induce la fuerza electromotriz E_e que está retrasada 90° con respecto a este fasor. De las dos componentes del flujo, solamente la componente resultante del eje directo ϕ_d es afectada por la saturación del material magnético. Esta componente del flujo, produce la fuerza electromotriz E_{eq} , retrasada también 90° con respecto al flujo.

La fuerza magnetomotriz E_{eq} es proporcional al flujo resultante del eje directo ϕ_d y este valor puede ser utilizado como indicador del grado de saturación del eje directo de la máquina. Las permeancias de los caminos magnéticos del eje directo y del campo son iguales, por lo tanto es posible utilizar la característica de magnetización para corregir la reactancia del eje directo de la máquina síncrona en un punto de operación determinado. La reactancia del eje cuadratura

bobina del eje directo:

$$E_{eq} = \frac{1}{\sqrt{3}} \omega N_e N_f \wp_{df\ lin} i_{f0} = \frac{1}{\sqrt{3}} \omega N_e N_f \wp_{df\ sat} i_{f\ sat} \quad (8.107)$$

De la expresión 8.107 se puede deducir el siguiente resultado:

$$\frac{\wp_{df\ lin}}{\wp_{df\ sat}} = \frac{i_{f\ sat}}{i_{f0}} = s \quad (8.108)$$

donde:

s se define como grado de saturación de la máquina sincrónica para el punto de operación dado.

Reemplazando la expresión obtenida en 8.104 en la 8.101 se obtiene la reactancia de magnetización saturada del eje directo:

$$X_{md\ sat} = \omega N_e^2 \wp_{df\ sat} = \omega N_e^2 \frac{\wp_{df\ lin}}{s} = \frac{X_{md\ lin}}{s} \quad (8.109)$$

La expresión anterior indica que la reactancia de magnetización saturada $X_{md\ sat}$ es menor que la reactancia lineal $X_{md\ lin}$. debido a que el grado de saturación s es siempre mayor o igual a la unidad según la definición 8.108. La reactancia saturada total del eje directo se calcula añadiendo a la reactancia saturada de magnetización del eje directo, la reactancia de fuga de la máquina. Esta última reactancia es independiente del grado de saturación de la máquina:

$$X_{d\ sat} = X_{md\ sat} + X_\sigma = \frac{X_{md\ lin}}{s} + X_\sigma = \frac{X_{d\ lin} - X_\sigma}{s} + X_\sigma = \frac{1}{s} X_{d\ lin} + \frac{s-1}{s} X_\sigma \quad (8.110)$$

Conocidas las reactancias de la máquina en un punto de operación determinado, se puede obtener el diagrama fasorial completo. Conocida la magnitud de la fuerza electromotriz producida por el campo es posible calcular la corriente de campo necesaria a partir de la expresión 8.106:

$$E_{f\ sat} = \frac{1}{\sqrt{3}} \omega N_e N_f \wp_{df\ sat} i_f = \frac{1}{\sqrt{3}} \omega N_e N_f \frac{\wp_{df\ lin}}{s} i_f = \frac{1}{\sqrt{3}} \omega \frac{L_{df\ lin}}{s} i_f \quad (8.111)$$

por lo tanto:

$$E_{f\ sat} = \frac{1}{\sqrt{3}} \omega L_{df\ lin} \frac{i_{f0}}{i_{f\ sat}} i_f = \frac{E_{eq}}{i_{f\ sat}} i_f \quad (8.112)$$

La ecuación 8.112 indica que para el punto de operación dado, la característica que determina la fuerza electromotriz producida por el campo en la condición de carga es una recta que pasa por el origen y por el punto de intersección entre la fuerza electromotriz E_{eq} y la corriente $i_{f\ sat}$, tal como se ilustra en la figura 8.18.

Si se conocen las magnitud de la tensión y corriente de armadura, el ángulo del factor de potencia, las reactancias lineales de la máquina y la característica de magnetización en vacío, se puede obtener el diagrama fasorial completo y la corriente de magnetización necesaria para mantener

el punto de operación. En primer lugar se procede a ubicar la posición del eje cuadratura, multiplicando la corriente de armadura por la reactancia cuadratura y sumando este término a la tensión de armadura.

El segundo paso consiste en calcular el fasor E_e sumando a la tensión de armadura la caída en la reactancia de fuga. Posteriormente se proyecta ortogonalmente este fasor con respecto al eje cuadratura para obtener la magnitud de E_{eq} . Con esta fuerza electromotriz se entra en la curva de vacío y se calcula el grado de saturación correspondiente al punto de operación de la máquina. El grado de saturación s , determinado mediante la característica de vacío se utiliza para corregir la reactancia del eje directo mediante la expresión 8.110, y con esta reactancia se calcula la fuerza electromotriz producida por el campo.

Para determinar la corriente de campo necesaria para mantener el punto de operación es necesario utilizar la ecuación 8.112. Si la máquina cambia su punto de operación, es necesario recalcular el nuevo grado de saturación y evaluar la reactancia del eje directo y la corriente del campo. Las figuras 8.18 y 8.19 muestra el procedimiento descrito anteriormente.

El análisis de la saturación de la máquina sincrónica de rotor liso presenta un inconveniente práctico. En la máquina de polos salientes, la reactancia del eje cuadratura no se satura debido a que en este eje la reluctancia es muy grande. En los rotores lisos, este hecho es diferente y la reactancia de eje cuadratura también se satura. Si esta reactancia está saturada y el grado de saturación depende del punto de operación de la máquina, no es posible evaluar directamente el valor de esta reactancia sin determinar previamente la posición del eje cuadratura. Como esta posición está indeterminada, se utiliza un proceso iterativo para localizar el eje. En principio se puede considerar que la máquina no está saturada en el eje cuadratura y calcular con esta aproximación la proyección de la fuerza electromotriz E_e sobre el eje directo. Con esta proyección se determina el grado de saturación del eje cuadratura mediante el procedimiento descrito anteriormente para el eje directo. Esta primera aproximación al grado de saturación se utiliza para corregir la reactancia del eje cuadratura y recalcular la posición de este eje. Con la nueva posición se repiten todos los pasos anteriores hasta que el grado de saturación en la iteración anterior y la actual converjan a un valor del error inferior al que se ha especificado previamente. A partir de este punto, el diagrama fasorial se determina de igual forma que en el caso de la máquina sincrónica de polos salientes, debido a que la posición de los ejes de la máquina queda completamente definida. En presencia de saturación las reactancias del eje directo y cuadratura de la máquina sincrónica de rotor liso son diferentes.

En el pasado se utilizaba con frecuencia la curva de saturación en carga para analizar los fenómenos de saturación de la máquina sincrónica. Esta característica representa la tensión en bornes de la máquina en función de la corriente de campo. Se determina para las condiciones de mayor caída de tensión en las reactancias, es decir con la corriente de armadura nominal y carga puramente inductiva. En este caso las caídas en las reactancias están en fase con la tensión de armadura. La característica de saturación en carga se obtiene a partir de la característica de excitación en vacío restando la caída en la reactancia de dispersión, e incrementando la corriente de campo lo suficiente para compensar la desmagnetización ocasionada por la corriente de armadura. Manteniendo constantes la corriente de armadura y el factor de potencia, se mantienen constantes la caída en la reactancia de dispersión y la fuerza electromotriz necesaria para magnetizar la máquina. De esta forma se obtiene el triángulo de Potier que determina la característica de saturación en carga a partir de la característica de excitación en vacío. En la figura 8.20 se muestra este diagrama y el triángulo de Potier correspondiente.

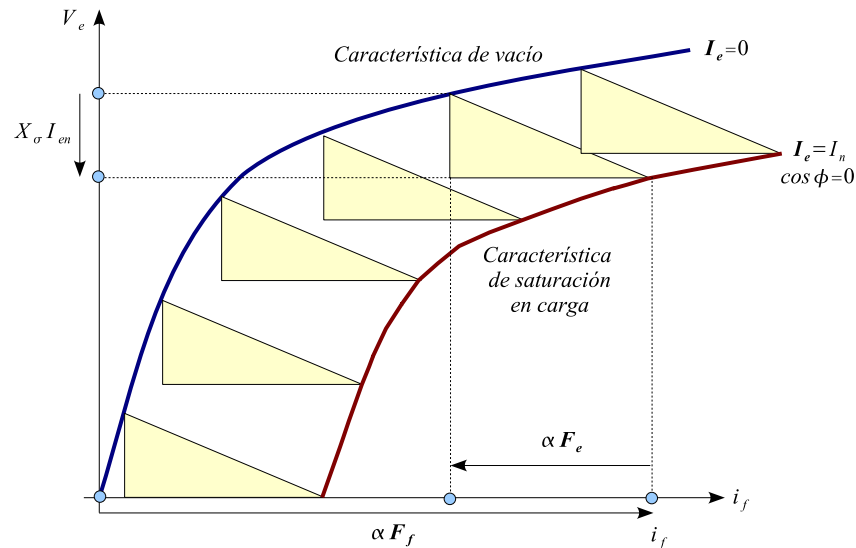


Figura 8.20 Característica de saturación en carga - triángulo de Potier

8.16. La máquina síncrona en el sistema eléctrico

La máquina síncrona se puede utilizar como generador, tanto para alimentar cargas aisladas como para entregar potencia a un sistema eléctrico de potencia. Para incrementar la cantidad de potencia es necesario aumentar el flujo de vapor, agua o gas que está circulando por la turbina de accionamiento. Al incrementar la potencia de accionamiento de un generador que alimenta a una carga aislada, las masas rotantes del sistema se aceleran y aumenta la frecuencia y la fuerza electromotriz. Estas nuevas condiciones de operación deben ser corregidas mediante un controlador de velocidad y tensión que mantengan dentro de los límites tolerables a estas variables. Este controlador debe realizar sus funciones ante otros tipos de perturbaciones como pueden ser variaciones de la carga eléctrica del sistema. El controlador de la máquina síncrona debe actuar sobre el sistema de accionamiento mecánico para regular la velocidad y sobre la excitatriz o campo para regular la tensión en bornes ante variaciones de la carga. Con estas dos acciones de control es posible garantizar un suministro de tensión y frecuencia constante a una carga aislada, independientemente del nivel de demanda de potencia eléctrica a que está siendo sometido el generador. En la figura 8.21 se ha representado el diagrama de un generador síncrono que alimenta a una carga aislada, y es controlado en velocidad y tensión.

Cuando la máquina síncrona inyecta potencia a un sistema eléctrico de potencia, no es indispensable regular la tensión y velocidad porque estas funciones son realizadas por el acoplamiento máquina-sistema. Al aumentar el caudal de fluido energético que circula por la máquina motriz, se incrementa el par de accionamiento y la potencia mecánica inyectada por el eje mecánico. La velocidad mecánica permanece prácticamente constante durante este proceso, incrementándose la potencia eléctrica entregada a la red para mantener la condición de equilibrio existente. Aun cuando la velocidad permanece prácticamente constante, el ángulo de carga aumenta para permitir una mayor entrega de potencia al sistema eléctrico. Esta situación se puede mantener mientras que la máquina no alcance el punto crítico correspondiente a la potencia eléctrica máxima. Si por el eje mecánico del rotor se entrega aun más potencia que la máxima potencia eléctrica que puede generar la máquina síncrona, el ángulo de carga continúa incrementándose

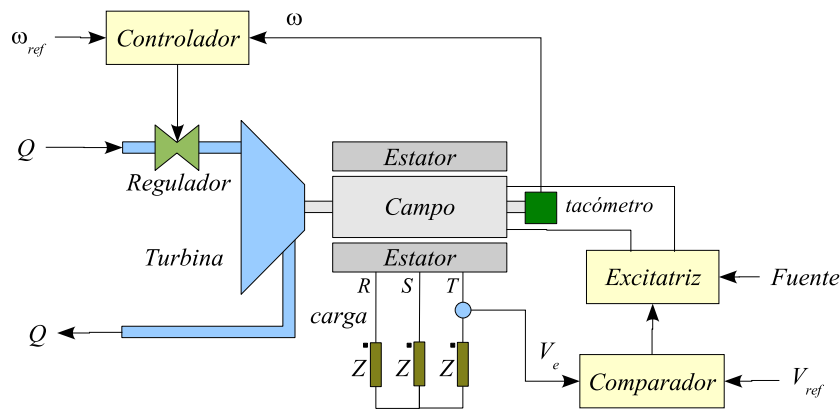


Figura 8.21 Generador síncrono alimentando una carga aislada

por encima del valor crítico, esto ocasiona una reducción de la potencia eléctrica generada por la máquina, y se produce una aceleración mantenida del rotor que hace perder el sincronismo con la red.

Durante el funcionamiento sincronizado de la máquina con el sistema se puede controlar el nivel de potencia reactiva entregada o consumida por la máquina síncrona ajustando su corriente de campo. También es posible controlar mediante la corriente de campo el nivel de tensión en bornes de la máquina. Cuando se controla el nivel de reactivos de la máquina síncrona, se dispone de una barra PQ en lo que se refiere al flujo de carga del sistema. Si se controla la tensión en bornes del generador, el comportamiento de la barra es del tipo PV . En ambos casos el sistema de control de la planta mantiene la potencia dentro de unos límites cercanos a una referencia y el controlador de la excitación mantiene los reactivos o la tensión de referencia. Una de las máquinas del sistema eléctrico de potencia se utiliza para controlar la velocidad síncrona, se realimentan en frecuencia y se define una referencia de frecuencia y tensión. En los estudios de flujo de carga a esta máquina se le denomina barra de referencia o barra *slack*. En la figura 8.22 se presenta un diagrama simplificado que muestra el comportamiento de la máquina síncrona en equilibrio con un sistema eléctrico de potencia.

Para conectar una máquina síncrona a la red, se hace girar el rotor a la velocidad síncrona mediante la máquina motriz. Como la máquina se encuentra desconectada de la red, es necesario menos del 1 % de la potencia nominal mecánica para suplir las pérdidas durante la operación en vacío. El siguiente paso consiste en alimentar la excitatriz de la máquina y ajustar el nivel de tensión de armadura al nivel de tensión de la red eléctrica. Una vez verificado que las tensiones de la máquina y del sistema poseen la misma magnitud, fase y secuencia se cierra el interruptor que conecta la máquina con el sistema. Si la sincronización ha sido realizada exitosamente, la corriente que circula por la conexión es prácticamente despreciable. Si alguna de las condiciones necesarias para una sincronización adecuada no es satisfecha, las corrientes de armadura pueden ser tan grandes como para activar las protecciones de la planta de generación. La detección de las condiciones de sincronización se realizan mediante un equipo denominado sincronizador. El sincronizador mide las tensiones, frecuencias y diferencias de fase entre la máquina y la red. Los sincronizadores modernos utilizan microprocesadores para realizar las operaciones de supervisión y mando de los controladores que ajustan la velocidad de la máquina, la tensión de armadura y la fase relativa. Una vez que el sincronizador automático detecta las condiciones fa-

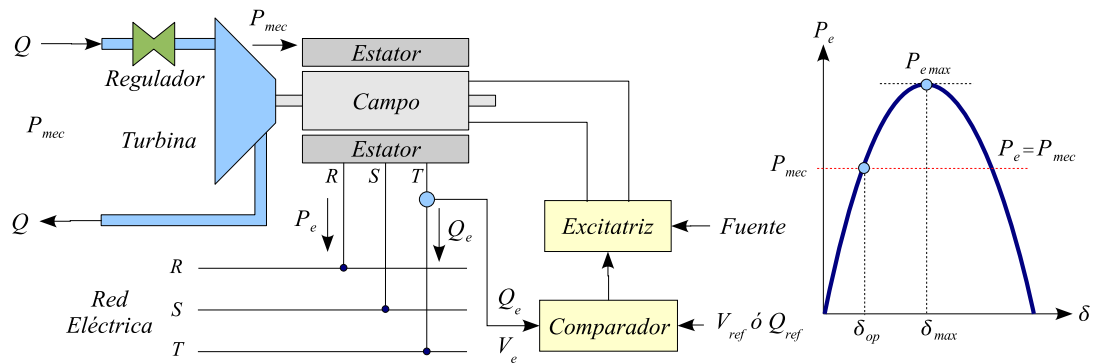


Figura 8.22 Operación de la máquina síncrona acoplada al sistema eléctrico de potencia

variables envía una orden de cierre al interruptor principal, logrando de esta forma una conexión rápida y segura de la máquina síncrona a la red eléctrica de potencia.

Una vez que la máquina ha sido sincronizada al sistema eléctrico, es suficiente con aumentar la potencia mecánica de accionamiento para entregar potencia eléctrica a la red. Incrementando la corriente de campo se aumenta el nivel de reactivos entregados por la máquina. Como las corrientes de armadura de la máquina consumen potencia reactiva inductiva al circular por sus reactancias es necesario incrementar la corriente del campo si se desea entregar potencia reactiva neta desde la máquina hacia la red. Si posteriormente a la sincronización se incrementa la potencia de accionamiento, la máquina entregará a la red una potencia eléctrica equivalente. Sin embargo, si la corriente de excitación no se incrementa, el aumento de la corriente de armadura para permitir la inyección de potencia activa a la red, repercutirá en un consumo de reactivos desde la red hacia la máquina. En ciertos casos esta situación es conveniente, debido al exceso de potencia reactiva que producen algunas líneas largas de alta tensión. En cualquier caso la excitación permite controlar esta inyección.

Una de las ventajas que se obtiene cuando se acciona cargas mecánicas grandes, mediante motores síncronos, a parte del elevado rendimiento que es posible obtener, consiste en la posibilidad de controlar el consumo de reactivos y los niveles de tensión en las barras de la planta industrial. En la práctica esto puede reducir considerablemente la facturación de energía y los cargos por bajo factor de potencia.

8.17. Sumario

1. La máquina síncrona es el convertidor electromecánico más utilizado en las *centrales de generación*, debido al gran *rendimiento* que pueden alcanzar y a la posibilidad de controlar el *flujo de reactivos*. En algunas aplicaciones industriales pueden ser utilizadas como motores y con el desarrollo de la electrónica de potencia están reemplazando a la máquina de continua al ser comercializadas como *máquinas de corriente continua sin escobillas*.
2. Los grandes alternadores de las plantas térmicas suelen utilizar máquinas síncronas de *rotor liso* debido a los altos requerimientos de velocidad de estas centrales. Las plantas de generación hidráulicas utilizan generalmente máquinas síncronas de *polos salientes*,

las cuales permiten incrementar la conversión de potencia por el efecto de la *reluctancia variable*, reducir la velocidad por el incremento del número de polos.

3. El modelo de la máquina síncrona en *coordenadas primitivas* depende de la posición angular del rotor. La *transformación a vectores espaciales* permite reducir las tres ecuaciones correspondientes a las bobinas del estator a una sola ecuación cuyas variables son complejas. La transformación de estas variables espaciales a la *referencia rotórica* elimina la dependencia del ángulo θ del modelo y permite que las variables espaciales en régimen permanente sean constantes. La *transformación de Park* reproduce el modelo en vectores espaciales referidos al rotor de la máquina síncrona e introduce un eje adicional ortogonal que permite analizar los posibles desequilibrios.
4. En régimen permanente las ecuaciones de la máquina síncrona pueden ser representadas mediante el *diagrama fasorial* o con un *circuito equivalente*. El diagrama fasorial es una herramienta muy útil porque permite analizar cuantitativamente y con gran simplicidad el comportamiento de estos convertidores electromecánicos en condiciones de equilibrio dinámico. Cuando se conocen la tensión, la corriente, el factor de potencia y los parámetros de la máquina, este diagrama permite determinar el *ángulo de carga*, la *fuerza electromotriz del campo* y la *corriente de campo*.
5. Cuando se especifica el *flujo de potencias activas o reactivas* de la máquina síncrona es necesario emplear las expresiones de par o potencia eléctrica en función de los parámetros, del ángulo de carga, de la fuerza electromotriz del campo y la tensión del sistema eléctrico de potencia para determinar la condición de operación. Estas expresiones son una herramienta muy importante para analizar el comportamiento de la máquina cuando se conoce la tensión de la red, la corriente de campo, el flujo de potencia y los parámetros.
6. Las ecuaciones de la máquina síncrona se pueden expresar tanto en *convención motor* como generador, en ambos casos es habitual utilizar la *convención de potencia reactiva inductiva*. La diferencia de ambas convenciones reside en la dirección seleccionada de las corrientes del estator. En el caso del motor se supone que las corrientes entran desde el sistema de potencia hacia la máquina, mientras que en la convención generador las corrientes de la armadura se dirigen desde la máquina hacia la red. En ambas convenciones se considera que la corriente del campo entra hacia el punto de polaridad de la bobina.
7. La máquina síncrona define como *punto nominal* varias magnitudes que determinan un punto de operación en régimen permanente que elevan la temperatura hasta el punto donde el fabricante puede garantizar el cumplimiento de la *vida media del equipo*. Tensión, corriente, potencia, velocidad, frecuencia y factor de potencia nominal son los datos principales. Los puntos nominales establecen *límites térmicos* y operativos que pueden ser representados como lugares geométricos que definen zonas donde la operación de la máquina es factible.

8. La *característica de vacío* de la máquina síncrona permite representar el efecto de la *saturación* del circuito magnético. Para un punto de operación determinado se obtiene el *grado de saturación* comparando la corriente de campo requerida para mantener el enlace de flujo en condiciones de linealidad y de saturación. Con el grado de saturación obtenido se corrigen las reactancias del eje directo y se prosigue con el análisis utilizando bien sea el diagrama fasorial o las ecuaciones de potencia.
9. Los controles de potencia activa y reactiva que son posibles con las máquinas síncronas definen tres tipos de barras diferentes en los estudios de flujo de carga: *PQ*, *PV* y *slack*. Cuando la turbina controla la potencia activa y la corriente de campo la potencia reactiva, la barra se define como *PQ*. Si en lugar de controlar el flujo de reactivos se controla la tensión de la barra se tiene una *PV* y cuando se entrega la potencia necesaria para mantener la frecuencia de la red estamos en presencia de una barra *slack*. La selección apropiada de estas barras en los puntos de generación determinan el *flujo de potencia activa y reactiva* por la red.

8.18. Ejemplos resueltos

Ejemplo 1: Análisis de la máquina sin saturación

Una máquina síncrona de polos salientes posee los siguientes datos de placa:

S_n	V_n	$\cos \phi_n$	i_{fn}	i_{fmax}	f
10 kVA	230 V	$0,7$	5 A	$8,33 \text{ A}$	60 Hz

Como condensador síncrono la máquina entrega a la red $8,319 \text{ kVAR}$ cuando es excitada con la corriente de campo máxima. Determine:

1. Las reactancias X_d y X_q de la máquina.
2. Los reactivos que aporta la máquina al sistema cuando la máquina inyecta a la red 5 kW , con las corrientes de campo nominal y máxima.
3. La corriente de campo necesaria para mantener a 240 V , la potencia activa nominal como motor con el factor de potencia nominal y con factor de potencia unitario.

Solución:

1. Las reactancias X_d y X_q de la máquina:

La reactancia del eje directo X_d se puede determinar directamente de los datos de operación como condensador síncrono:

$$X_d = \frac{E_{fmax} - V_{en}}{I_e} = \frac{\frac{i_{fmax}}{i_{fn}} - V_{en}}{\left| \frac{0 - jQ_{cond}}{V_{en}} \right|} = \frac{1,666 - 1}{0,8319} = 0,8 \text{ pu}$$

La determinación de la reactancia cuadratura se puede obtener mediante la operación en el punto nominal. Debido a la naturaleza no lineal de las ecuaciones involucradas es más simple realizar una tabla donde se calcule el valor de la fuerza electromotriz del campo E_f en función del posible valor de esta reactancia. El resultado buscado se obtiene cuando para un determinado valor de X_q coincide E_f con $E_{f_{max}}$ para las condiciones correspondientes al punto nominal. El algoritmo propuesto requiere los siguientes cálculos:

$$\mathbf{I}_{en} = \frac{P_{en} - Q_{en}}{\mathbf{V}_{en}} = \frac{P_{en} - \sqrt{S_{en}^2 - P_{en}^2}}{\mathbf{V}_{en}} = 1 \angle -45,57^\circ$$

$$\mathbf{D}_n = \mathbf{V}_{en} + jX_q \mathbf{I}_{en}$$

$$\sin \delta_n = \frac{\Im m(\mathbf{D}_n)}{|\mathbf{D}_n|} \Rightarrow \delta_n = \arcsin(\sin \delta_n)$$

$$\cos \phi_n = 0,7 \Rightarrow \phi_n = \arccos(\cos \phi_n) = -45,57^\circ$$

$$I_d = |\mathbf{I}_{en}| \sin(\delta_n - \phi_n)$$

$$E_f = |\mathbf{D}_n| + (X_d - X_q) \cdot I_d$$

En la siguiente tabla se presentan las fuerzas electromotrices obtenidas para un barrido de la reactancia cuadratura entre 0,4 y 0,8 pu:

X_q	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
E_f	1,655	1,662	1,666	1,668	1,669

En la tabla anterior se observa que para un valor de la reactancia $X_q = 0,6 \text{ pu}$, la fuerza electromotriz del campo coincide con la generada por la corriente de campo máxima $i_{f_{max}} = 1,666 \text{ pu}$ correspondiente al valor esperado para la operación en el punto nominal.

2. Los reactivos que aporta la máquina al sistema cuando la máquina inyecta a la red 5 kW , con las corrientes de campo nominal y máxima:

Para calcular estos reactivos se puede utilizar la expresión 8.85¹⁹:

$$P_e = \frac{E_f V_e}{X_d} \sin \delta + \frac{V_e^2}{2} \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) \sin 2\delta$$

Cuando por el campo circula la corriente nominal i_{fn} :

$$0,5 = 1,25 \sin \delta + 0,2083 \sin 2\delta \Rightarrow \delta(i_{fn}) = 0,3085 \text{ rad} = 17,67^\circ$$

¹⁹En esta expresión el término 3 desaparece cuando se utiliza una base trifásica de potencia en el sistema adimensional de unidades.

$$0,5 = 2,0825 \sin \delta + 0,2083 \sin 2\delta \Rightarrow \delta(i_{f_{max}}) = 0,2022 \text{ rad} = 11,58^\circ$$
$$Q_e = \frac{E_f V_e}{X_d} \cos \delta - \frac{V_e^2}{X_d X_q} (X_q \cos^2 \delta + X_d \sin^2 \delta)$$

$$Q_e(i_{fn}) = 1,25 \cos 17,67^\circ - 2,0818 \times (0,6 \cos^2 17,67^\circ + 0,8 \sin^2 17,67^\circ) = -0,0974 pu$$

$$Q_e(i_{f_{max}}) = 2,0825 \cos 11,58^\circ - 2,0818 \times (0,6 \cos^2 11,58^\circ + 0,8 \sin^2 11,58^\circ) = 0,7727 \text{ pu}$$

(a) Corriente de campo nominal

(b) Corriente de campo máxima

- En este caso, el diagrama fasorial es la herramienta más apropiada para determinar las corrientes de campo necesarias para mantener los puntos de operación señalados. La tensión que es necesario mantener en la barra es $1,0435 \text{ pu}$. Las corrientes necesarias para mantener la potencia activa nominal con factor de potencia nominal y unitario son:

$$\mathbf{I}_e(P_n, \cos \phi_n) = \frac{P_n - jP_n \tan \phi_n}{\mathbf{V}_e} = \frac{-0,7 - j0,71}{1,0435} = 0,9583 \angle -134,43^\circ pu$$

$$\mathbf{I}_e(P_n, \cos \phi = 1) = \frac{P_n - j0}{\mathbf{V}_e} = \frac{-0,7 - j0}{1,0435} = 0,6708 \angle 180^\circ \text{ pu}$$

$$\mathbf{D}(\cos \phi_n) = \mathbf{V}_e + jX_g \mathbf{I}_e(P_n, \cos \phi_n) = 1,4106 - j0,4025 \text{ pu} = 1,4669 \angle -15,93^\circ$$

$$\mathbf{D}(\cos \phi = 1) = \mathbf{V}_e + jX_q \mathbf{I}_e(P_n, \cos \phi = 1) = 1,0000 - j0,4025 \text{ pu} = 1,0780 \angle -21,92^\circ$$

Las corrientes I_d para cada una de estas condiciones de operación son:

$$I_d(\cos \phi_n) = |\mathbf{I}_e(P_n, \cos \phi_n)| \sin(\delta - \phi_n) = 0,9583 \times \sin(-15,93^\circ + 134,43^\circ) = 0,8422 \text{ pu}$$

$$I_d(\cos \phi = 1) = |\mathbf{I}_e(P_n, \cos \phi = 1)| \sin(\delta - \phi) = 0,6708 \times \sin(-21,09^\circ + 180^\circ) = 0,2414 \text{ pu}$$

Las fuerzas electromotrices son:

$$E_f(\cos \phi_n) = |\mathbf{D}(\cos \phi_n)| + (X_d - X_q) \cdot I_d(\cos \phi_n) = 1,6353 \text{ pu}$$

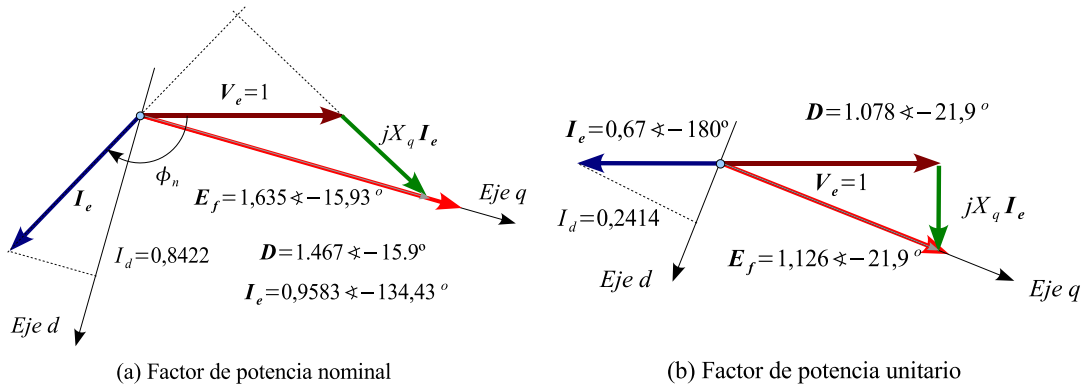
$$E_f(\cos \phi = 1) = |\mathbf{D}(\cos \phi = 1)| + (X_d - X_q) \cdot I_d(\cos \phi = 1) = 1,1263 \text{ pu}$$

Las corrientes de campo requeridas para mantener los puntos de operación solicitados son:

$$i_f(P_n, \cos \phi_n) = 1,6353 \text{ pu} = 8,1765 \text{ A}$$

$$i_f(P_n, \cos \phi = 1) = 1,1263 \text{ pu} = 5,6314 \text{ A}$$

En las figuras siguientes se presentan los diagramas fasoriales de los dos puntos de operación calculados:



Ejemplo 2: Análisis de la máquina con saturación

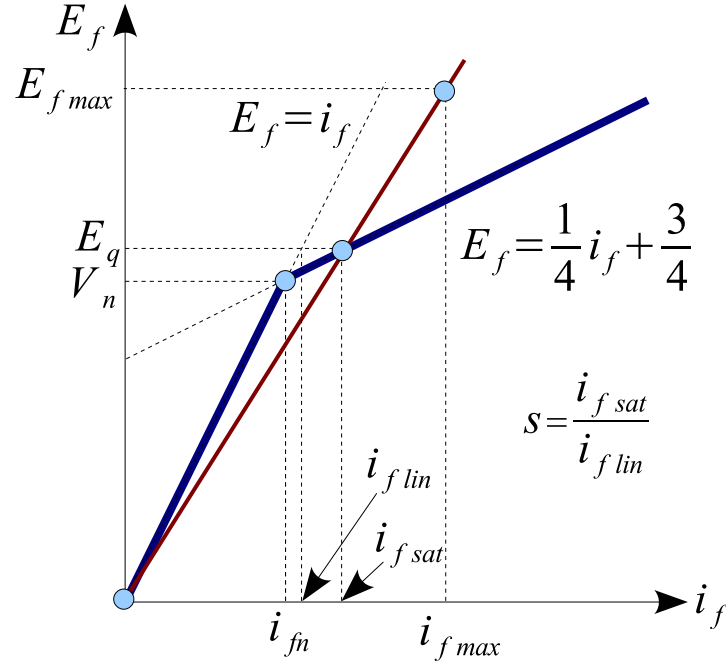
De una máquina sincrónica de polos salientes de 100 MVA, 10 kV, 60 Hz, 6 pares de polos, $i_{fn} = 200 \text{ A}$, $\cos \phi_n = 0,85$, se han determinado que las reactancias lineales de eje directo y cuadratura son 1,0 pu y 0,7 pu respectivamente y la reactancia de dispersión es 0,2 pu. La fuerza electromotriz en vacío es lineal hasta el valor de la corriente de campo nominal, y la pendiente de esta función decae a la cuarta parte para corrientes superiores al valor nominal. Determine:

1. La corriente de campo máxima y el grado de saturación del punto nominal.
2. El factor de potencia y el ángulo de carga cuando la máquina consume de la red 50 MW con la corriente máxima en el campo.

Solución:

1. La corriente de campo máxima y el grado de saturación del punto nominal:

En la siguiente figura se muestra el gráfico de la característica de vacío correspondiente a la máquina en cuestión:



De acuerdo con los datos del problema la característica de vacío en por unidad se puede expresar de la siguiente forma:

$$E_f(i_f) = \begin{cases} i_f, & \text{si } i_f \leq 1 \\ \frac{1}{4}i_f + \frac{3}{4}, & \text{si } i_f > 1 \end{cases} \quad (8.113)$$

Como la reactancia del eje cuadratura no se satura debido a que su entrehierro es mucho más grande que el correspondiente al eje directo, es posible obtener la posición de estos ejes directamente:

$$\mathbf{D} = \mathbf{V}_e + jX_q\mathbf{I}_e = 1 + j0,7 \times 1 \angle -\arccos(0,85) = 1,4925 \angle 23,5^\circ$$

También la posición de la fuerza electromotriz detrás de la reactancia de dispersión \mathbf{E}_e es necesaria para la determinación del valor de E_q que define el grado de saturación a través de la característica de vacío de la máquina:

$$\mathbf{E}_e = \mathbf{V}_e + jX_\sigma\mathbf{I}_e = 1 + j0,2 \times 1 \angle -\arccos(0,85) = 1,1184 \angle 8,74^\circ$$

La fuerza electromotriz E_q se determina de la siguiente forma:

$$E_q = |\mathbf{E}_e| \cos(\angle \mathbf{D} - \angle \mathbf{E}_e) = 1,1184 \times \cos(23,5^\circ - 8,74^\circ) = 1,0815$$

Utilizando las expresiones 8.113 que han linealizado la característica de vacío es posible obtener el grado de saturación correspondiente al punto nominal:

$$\frac{1}{4}i_{f\,sat} + \frac{3}{4} = E_q = 1,0815 \Rightarrow i_{f\,sat} = 1,3260$$

$$i_{f\,lin} = E_q = 1,0815$$

$$s = \frac{i_{f\,sat}}{i_{f\,lin}} = \frac{1,3260}{1,0815} = 1,2261$$

Conocido el grado de saturación de la máquina en el punto nominal de operación es posible corregir la reactancia del eje directo:

$$X_{d\,sat} = \frac{1}{s}X_d + \frac{s-1}{s}X_\sigma = \frac{1}{1,2261}1 + \frac{0,2261}{1,2261}0,2 = 0,8525$$

Para obtener la fuerza electromotriz del campo se siguen los siguientes pasos:

$$I_{dn} = I_{en} \cdot \sin(\delta_n - \phi_n) = 1 \times \sin(23,5^\circ + 31,79^\circ) = 0,8220$$

$$E_{f\,max} = D_n + (X_{d\,sat} - X_q) \cdot I_{dn} = 1,4925 + (0,8525 - 0,7) \times 0,8220 = 1,6179$$

La corriente de campo máxima se determina de la característica linealizada del campo para el punto nominal:

$$E_{f\,max} = \frac{1}{s}i_{f\,max} \Rightarrow i_{f\,max} = sE_{f\,max} = 1,2261 \times 1,6179 = 1,9837 = 396,7 \text{ A}$$

2. El factor de potencia y el ángulo de carga cuando la máquina consume de la red 50 MW con la corriente máxima en el campo:

En este caso es necesario utilizar la ecuación de potencia activa en función del ángulo de carga, pero es desconocida la reactancia saturada del eje directo y la fuerza electromotriz correspondiente a la corriente de campo máxima en esta condición de saturación. Una técnica que permite resolver este problema consiste en asumir una condición inicial de saturación s^{20} , con este dato se ajusta el valor de la reactancia saturada del eje directo $X_{d\,sat}$ y se calcula la fuerza electromotriz $E_{f\,sat}$ correspondiente a la corriente de campo máxima $i_{f\,max}$. De la expresión de la potencia eléctrica $P_e(\delta)$ se obtiene el ángulo de carga δ y con este la potencia reactiva $Q_e(\delta)$. Conocidas las potencias activas y reactivas se determina la corriente de armadura \mathbf{I}_e . Esta corriente permite obtener los vectores \mathbf{D} y \mathbf{E}_e de los cuales

²⁰Puede ser el mismo grado de saturación del punto nominal o asumir una condición de operación lineal $s = 1$ como valor de arranque del proceso iterativo.

se calcula la fuerza electromotriz E_q producida por el flujo resultante del eje directo. La fuerza electromotriz E_q se utiliza para corregir el valor del grado de saturación asumido inicialmente. Con el nuevo grado de saturación se reinicia todo el cálculo anterior y se repite hasta que dicha variable converja a un valor de error establecido previamente. Asumiendo que la máquina inicialmente no se encuentra saturada en el punto de operación especificado se tendría:

Valores iniciales:

$$s = 1 ; E_f = \frac{1}{s} i_f = 1,9837 ; P_e = -0,5 ; X_d = 1,0$$

Cálculo del ángulo de carga:

$$-0,5 = 1,9873 \sin \delta + 0,2143 \sin 2\delta \Rightarrow \delta = -12,01^\circ$$

Cálculo de la potencia reactiva:

$$Q_e = 1,9873 \cos(-12,01^\circ) - 1,4286 \times (0,7 \cos^2(-12,01^\circ) + 1,0 \sin^2(-12,01^\circ)) = 0,9217 \text{ pu}$$

Cálculo de la corriente de armadura:

$$\mathbf{I}_e = -0,5 - j0,9217 = 1,0486 \angle -118,5^\circ$$

Determinación del grado de saturación:

$$\mathbf{D} = \mathbf{V}_e + jX_q \mathbf{I}_e = 1,6820 \angle -12,01^\circ ; \mathbf{E}_e = \mathbf{V}_e + jX_\sigma \mathbf{I}_e = 1,1886 \angle -4,83^\circ$$

$$E_q = 1,1886 \times \cos(-12,01^\circ + 4,83^\circ) = 1,1793$$

$$\frac{1}{4} i_{f \text{ sat}} + \frac{3}{4} = E_q = 1,1793 \Rightarrow i_{f \text{ sat}} = 1,7172 ; i_{f \text{ lin}} = E_q = 1,1793$$

$$s = \frac{i_{f \text{ sat}}}{i_{f \text{ lin}}} = \frac{1,7172}{1,1793} = 1,4318$$

Como el grado de saturación es diferente al asumido inicialmente, es necesario realizar el siguiente proceso iterativo:

Primera iteración ($s = 1,4318$):

$$\delta = -14,99^\circ \Rightarrow Q_e = 0,4385$$

$$\mathbf{I}_e = 0,6650 \angle -138,75^\circ$$

$$\mathbf{D} = 1,3530 \angle -14,99^\circ ; \mathbf{E}_e = 1,0923 \angle -5,25^\circ$$

$$E_q = 1,0923 \times \cos(-14,99^\circ + 5,25^\circ) = 1,0766$$

$$s = \frac{i_{f\ sat}}{i_{f\ lin}} = \frac{1,3064}{1,0766} = 1,2135$$

Segunda iteración ($s = 1,2135$):

$$\delta = -13,38^\circ \Rightarrow Q_e = 0,6728$$

$$\mathbf{I}_e = 0,8383 \angle -126,62^\circ$$

$$\mathbf{D} = 1,5120 \angle -13,38^\circ ; \quad \mathbf{E}_e = 1,1390 \angle -5,03^\circ$$

$$E_q = 1,1390 \times \cos(-13,38^\circ + 5,03^\circ) = 1,1269$$

$$s = \frac{i_{f\ sat}}{i_{f\ lin}} = \frac{1,5077}{1,1269} = 1,3379$$

Tercera iteración ($s = 1,3379$):

$$\delta = -14,27^\circ \Rightarrow Q_e = 0,5369$$

$$\mathbf{I}_e = 0,7337 \angle -132,96^\circ$$

$$\mathbf{D} = 1,4197 \angle -14,27^\circ ; \quad \mathbf{E}_e = 1,1119 \angle -5,16^\circ$$

$$E_q = 1,1119 \times \cos(-14,27^\circ + 5,16^\circ) = 1,0979$$

$$s = \frac{i_{f\ sat}}{i_{f\ lin}} = \frac{1,3915}{1,0979} = 1,2674$$

Cuarta iteración ($s = 1,2674$):

$$\delta = -13,76^\circ \Rightarrow Q_e = 0,6131$$

$$\mathbf{I}_e = 0,7911 \angle -129,19^\circ$$

$$\mathbf{D} = 1,4714 \angle -13,76^\circ ; \quad \mathbf{E}_e = 1,1271 \angle -5,09^\circ$$

$$E_q = 1,1271 \times \cos(-13,76^\circ + 5,09^\circ) = 1,1142$$

$$s = \frac{i_{f\ sat}}{i_{f\ lin}} = \frac{1,4568}{1,1142} = 1,3070$$

Quinta iteración ($s = 1,3070$):

$$\delta = -14,05^\circ \Rightarrow Q_e = 0,5701$$

$$\mathbf{I}_e = 0,7583 \angle -131,25^\circ$$

$$\mathbf{D} = 1,4422 \angle -14,05^\circ ; \quad \mathbf{E}_e = 1,1185 \angle -5,13^\circ$$

$$E_q = 1,1185 \times \cos(-14,05^\circ + 5,13^\circ) = 1,1050$$

$$s = \frac{i_{f\ sat}}{i_{f\ lin}} = \frac{1,4149}{1,1050} = 1,2850$$

Sexta iteración ($s = 1,2850$):

$$\delta = -13,88^\circ \Rightarrow Q_e = 0,5939$$

$$\mathbf{I}_e = 0,7763 \angle -130,09^\circ$$

$$\mathbf{D} = 1,4584 \angle -13,87^\circ ; \mathbf{E}_e = 1,1185 \angle -5,13^\circ$$

$$E_q = 1,1232 \times \cos(-13,89^\circ + 5,11^\circ) = 1,1100$$

$$s = \frac{i_{f\,sat}}{i_{f\,lin}} = \frac{1,4402}{1,1100} = 1,2974$$

Séptima iteración ($s = 1,2974$):

$$\delta = -13,98^\circ \Rightarrow Q_e = 0,5805$$

$$\mathbf{I}_e = 0,7662 \angle -130,73^\circ$$

$$\mathbf{D} = 1,4493 \angle -13,98^\circ ; \mathbf{E}_e = 1,1206 \angle -5,12^\circ$$

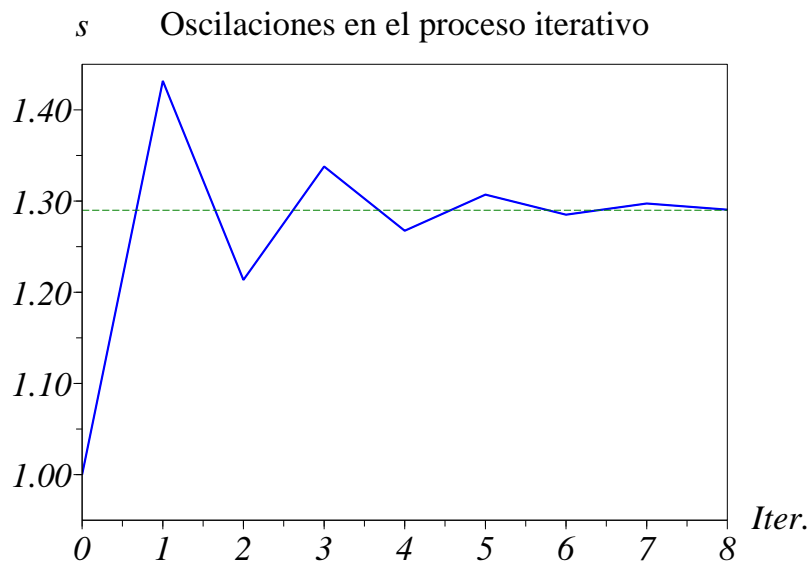
$$E_q = 1,1206 \times \cos(-13,98^\circ + 5,12^\circ) = 1,1072$$

$$s = \frac{i_{f\,sat}}{i_{f\,lin}} = \frac{1,4289}{1,1072} = 1,2906$$

Entre los dos últimos valores obtenidos del grado de saturación, el error relativo es inferior al 0,53 % con lo cual queda determinado el factor de potencia del punto de operación como 0,6478 y el ángulo de carga $-13,92^\circ$. En la siguiente tabla se resumen los principales resultados de cálculo iterativo:

iteración	s	δ	$Q_e(\delta)$	$ \mathbf{I}_e $	ϕ_e	E_q
0	1,0000	$-12,01^\circ$	0,9217	1,0486	$-118,5^\circ$	1,1793
1	1,4318	$-14,99^\circ$	0,4385	0,6650	$-138,75^\circ$	1,0766
2	1,2135	$-13,38^\circ$	0,6728	0,8383	$-126,62^\circ$	1,1269
3	1,3379	$-14,27^\circ$	0,5369	0,7337	$-132,96^\circ$	1,0979
4	1,2674	$-13,76^\circ$	0,6131	0,7911	$-129,19^\circ$	1,1142
5	1,3070	$-14,05^\circ$	0,5701	0,7583	$-131,25^\circ$	1,1050
6	1,2850	$-13,88^\circ$	0,5939	0,7763	$-130,09^\circ$	1,1100
7	1,2974	$-13,98^\circ$	0,5805	0,7762	$-130,73^\circ$	1,1072
8	1,2906	$-13,92^\circ$	0,5878	0,7717	$-130,38^\circ$	-

Si se utiliza como grado de saturación el promedio de los valores obtenidos en iteraciones consecutivas, el proceso de convergencia puede ser acelerado. Esto se debe fundamentalmente a que el sistema oscila amortiguadamente sobre el valor de la solución tal como se observa en el siguiente gráfico:



8.19. Ejercicios propuestos

1. Una máquina síncrona de polos salientes de 800 MVA , $13,8 \text{ kV}$, factor de potencia nominal $0,87$ y $3,0 \text{ kA}$ de corriente nominal de campo, tiene impedancias de $1,0 \text{ pu}$ y $0,7 \text{ pu}$ en los ejes directo y cuadratura respectivamente. Si el comportamiento de la máquina es completamente lineal:
 - a) Determine la máxima potencia reactiva que esta máquina puede entregar a una barra infinita con $1,05 \text{ pu}$ de tensión cuando genera 650 MW .
 - b) La corriente de excitación necesaria para motorizar 500 MW , con factor de potencia unitario y $0,97$ de la tensión nominal.

2. Una máquina síncrona de polos salientes de 100 MVA , 10 kV , 60 Hz , 6 pares de polos, $i_{fn} = 200 \text{ A}$, $\cos \phi_n = 0,85$, cuando está operando en el punto nominal y se desconecta de la red se obtiene $17,39 \text{ kV}$ de tensión línea-línea. Cuando entrega $56,5 \text{ MW}$ a una bomba alimentada de un sistema de $10,5 \text{ kV}$, con un factor de potencia $0,707$ inductivo, requiere 342 A en la bobina de campo. Determine:
 - a) Las reactancias del eje directo y cuadratura de esta máquina.
 - b) La corriente de campo necesaria para generar 90 MW , con una tensión de $9,5 \text{ kV}$, con factor de potencia mínimo y máximo.
 - c) La potencia reactiva consumida o generada por la máquina si consume 70 MW a tensión nominal, cuando se inyecta en el campo la corriente nominal y la corriente

máxima.

3. Una máquina sincrónica de polos salientes, 60 Hz , posee los siguientes datos de placa:

$$\begin{array}{ccccc} S_n & V_n & \cos \phi_n & i_{fn} & i_{fmax} \\ 150\text{ MVA} & 23\text{ kV} & 0,8192 & 500\text{ A} & 794\text{ A} \end{array}$$

Con la corriente de campo máxima y sin potencia en el eje mecánico, por el estator de la máquina circulan $2,772\text{ kA}$. Determine:

- Las reactancias X_d y X_q de la máquina y compruebe mediante el diagrama fasorial que el punto nominal coincide con los datos de placa.
 - Repita la determinación de reactancias X_d y X_q del punto anterior utilizando las ecuaciones de potencia.
 - La corriente de campo necesaria para mantener a 24 kV la potencia activa nominal como motor con el factor de potencia nominal y con factor de potencia unitario.
 - El diagrama fasorial completo²¹ cuando la máquina consume de la red 120 MW con la corriente de campo máxima.
4. Determine las expresiones de la potencia activa y reactiva en función del ángulo de carga, para una máquina sincrónica de polos salientes, incluyendo el efecto de la resistencia de armadura.

5. De una máquina sincrónica de polos salientes se conocen los siguientes datos de placa:

$$\begin{array}{llll} S_n = 80\text{ MVA} & V_n = 10\text{ kV} & \cos \phi_n = 0,8\text{ ind.} & i_{fn} = 550\text{ A} \\ X_\sigma = 0,15\text{ pu} & X_d = 1,05\text{ pu} & X_q = 0,85\text{ pu} & f = 60\text{ Hz} \end{array}$$

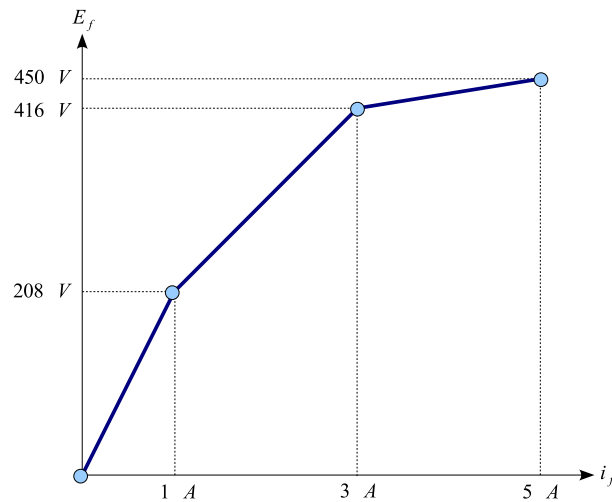
La característica de vacío se puede aproximar mediante las siguientes rectas: la zona lineal definida para corrientes inferiores a la nominal y la pendiente de la zona saturada es la mitad de la pendiente lineal.

- La máquina entrega 48 MW a la red con un factor de potencia $0,64$ inductivo. Determine en esta condición de operación la corriente de campo necesaria para mantener el punto. ¿Es posible mantener esta condición de operación?
 - Si se mantiene la corriente de campo máxima, y la potencia activa de la pregunta anterior, determine el factor de potencia y la corriente de operación de la máquina.
6. De una máquina sincrónica de polos salientes se conocen los siguientes datos de placa:

²¹Esquemático pero con la indicación de los valores exactos calculados analíticamente.

$$\begin{array}{llll} S_n = 10 \text{ kVA} & V_n = 416 \text{ V} & \cos \phi_n = 0,8 \text{ ind.} & i_{fn} = 3 \text{ A} \\ X_\sigma = 0,2 \text{ pu} & X_q = 0,7 \text{ pu} & f = 60 \text{ Hz} & i_{f \max} = 6 \text{ A} \end{array}$$

La característica de vacío se muestra en la figura:



- Determine la reactancia saturada del eje directo en las condiciones nominales de operación.
- Determine el ángulo de carga y el factor de potencia de la máquina cuando se excita con la corriente nominal de campo y mantiene la potencia activa en condición motor.
- Calcule el punto de operación si la máquina genera 8 kW y consume 3 kVA reactivos.
- Determine si la máquina puede motorizar una carga de 8 kW , y entregar 5 kVAR a la red en régimen permanente.

7. De una máquina sincrónica de polos salientes se conocen los siguientes datos de placa:

$$\begin{array}{llllll} S_n = 5 \text{ kVA} & V_n = 416 \text{ V} & \cos \phi_n = 0,85 \text{ ind.} & i_{fn} = 5 \text{ A} & X_\sigma = 5,5 \Omega & \\ X_d = 0,5 \text{ pu} & n = 1800 \text{ rpm} & f = 60 \text{ Hz} & i_{f \max} = 9 \text{ A} & p = 2 & \end{array}$$

La característica de vacío se puede expresar en el sistema adimensional de unidades como:

$$E_{f0} = (1 - e^{-i_f}) + \left(\frac{3 + e^{-0,5i_f}}{10} \right) \cdot i_f$$

- Determine las reactancias del eje directo y del eje cuadratura de la máquina en cuestión.
- Calcule la potencia reactiva entregada o consumida por el convertidor si motoriza un molino de 4 kW , con la corriente de excitación nominal.
- Calcule la corriente de campo mínima que permite la operación de la máquina en régimen permanente.

d) Recalcule los puntos a , b y c considerando que la máquina no se satura.

8. Una máquina sincrónica de polos salientes de 100 MVA de potencia nominal y 10 kV de tensión de línea a línea, tiene un factor de potencia nominal de $0,85$ inductivo. La corriente nominal de campo es de 100 A y la corriente de campo máxima es de 154 A . Inyectando corrientes de secuencia cero en la armadura de la máquina se determinó que la reactancia de fuga es de $0,1\ \Omega$. En el ensayo de cortocircuito se obtuvieron $8,248\text{ A}$ circulando por la armadura cuando se aplicaba corriente nominal en el campo. De un ensayo de deslizamiento se pudo determinar que la reactancia del eje cuadratura de la máquina era aproximadamente un 70% de la reactancia no saturada del eje directo. La característica de vacío se puede representar experimentalmente de la siguiente forma:

$$E_{f0} = 1,876(1 - e^{-0,7615i_f})\text{ pu}$$

donde la fuerza electromotriz E_{f0} está en por unidad de la tensión nominal de armadura y la corriente de campo i_f en por unidad de la corriente nominal de campo. Con todos estos antecedentes, determine:

- La reactancia del eje directo no saturada y el grado de saturación del punto nominal.
- La corriente de campo necesaria para generar 50 MW y consumir 25 MVAR de la red, cuando la tensión es un 4% mayor que su valor nominal.
- La máxima potencia reactiva que puede entregar la máquina como condensador sincrónico cuando la tensión en bornes de la máquina está en su valor nominal.
- Los reactivos generados por la máquina si motoriza una carga de 80 MW con una corriente de 120 A en el campo.

9. Una máquina sincrónica de polos salientes, posee los siguientes datos de placa:

S_n	V_n	$\cos \phi_n$	i_{fn}	i_{fmax}
10 kVA	230 V	$0,8$	5 A	$9,147\text{ A}$

Operando como condensador sincrónico la máquina entrega a la red 5 kVAR cuando es excitada con una corriente de campo de $8,718\text{ A}$. La reactancia de fuga se determina de una prueba de secuencia cero y tiene un valor de $0,7935\ \Omega$. La característica de excitación de la máquina en vacío se puede ajustar mediante la siguiente expresión:

$$E_f = 3,3014(1 - e^{-0,3029i_f})\text{ pu}$$

En estas condiciones, determine:

- Las reactancias no saturadas X_d y X_q de la máquina.
- Los reactivos que entrega la máquina al sistema cuando la máquina motoriza un molino de piedras de 4 kW , con la corriente de campo máxima y con la corriente de campo mínima.

- c) La corriente de campo necesaria para que circule corriente nominal en la armadura cuando la máquina está en cortocircuito.
- d) La potencia activa que entrega esta máquina al sistema cuando recibe 2 kVAR de la red, si opera con tensión corriente de armadura nominal.

10. Una máquina sincrónica de polos salientes, posee los siguientes datos de placa:

$$\begin{array}{cccc} S_n & V_n & \cos \phi_n & i_{fn} \\ 10 \text{ MVA} & 10 \text{ kV} & 0,85 & 1,5 \text{ kA} \end{array}$$

Operando como inductor sincrónico la máquina consume de la red 5 MVAR cuando es excitada con una corriente de campo de 771 A . La prueba de deslizamiento determina una relación de 1,2857 entre las reactancias no saturadas de eje directo y cuadratura. La reactancia de fuga se determina de una prueba de secuencia cero y tiene un valor de $0,2 \text{ pu}$. La característica de excitación de la máquina en vacío se puede ajustar mediante la siguiente expresión:

$$E_f = 3,3014 (1 - e^{-0,3029 i_f}) \text{ pu}$$

En estas condiciones, determine:

- a) El grado de saturación, el ángulo de carga y la corriente del campo en el punto nominal.
- b) La corriente de campo mínima a potencia activa nominal y tensión nominal.
- c) Los reactivos que la máquina entrega al sistema cuando se alimenta el campo con la corriente nominal, si la máquina consume 6 MW de la red y la tensión es de $9,5 \text{ kV}$.

11. Una máquina sincrónica de polos salientes, 60 Hz , posee los siguientes datos de placa:

$$\begin{array}{cccc} S_n & V_n & \cos \phi_n & i_{fn} \\ 400 \text{ MVA} & 20 \text{ kV} & 0,8 & 500 \text{ A} \end{array}$$

La característica de vacío de la máquina se puede expresar en cantidades físicas como:

$$E_f = 40 (1 - e^{-1,3862 \times 10^{-3} i_f}) \text{ kV}$$

El ensayo de secuencia cero determinó que la reactancia de dispersión es de $0,1 \Omega$. En la prueba de cortocircuito con corriente de campo nominal circuló por la armadura una corriente de 12 kA . La prueba de deslizamiento determinó que la relación entre la reactancia directa y cuadratura es de 160% . Determine:

- a) La corriente máxima de campo, el grado de saturación y el ángulo de carga en el punto nominal.
- b) La corriente de armadura cuando la máquina opera con la potencia activa nominal como motor y la corriente nominal en el circuito de campo.

- c) Las máximas potencias reactivas que puede entregar o absorber la máquina operando en las condiciones de condensador o inductor sincrónico.
12. Desarrolle un procedimiento que permita considerar la saturación del material magnético en las máquinas de rotor liso. Recuerde que en este caso ambos ejes pueden saturarse a diferencia de las máquinas de polos salientes que no pueden saturarse en el eje cuadratura. Una vez desarrollado este procedimiento, determine:
- a) La corriente de campo requerida para mantener una potencia activa y reactiva determinada en una barra infinita.
- b) La potencia reactiva inyectada a una barra infinita cuando se acciona la máquina de rotor liso a una potencia mecánica y la corriente de campo a valores constantes.

12. Desarrolle un procedimiento que permita considerar la saturación del material magnético en las máquinas de rotor liso. Recuerde que en este caso ambos ejes pueden saturarse a diferencia de las máquinas de polos salientes que no pueden saturarse en el eje cuadratura. Una vez desarrollado este procedimiento, determine:

- La corriente de campo requerida para mantener una potencia activa y reactiva determinada en una barra infinita.
- La potencia reactiva inyectada a una barra infinita cuando se acciona la máquina de rotor liso a una potencia mecánica y la corriente de campo a valores constantes.

Bibliografía

- [1] B. Adkins & R. G. Harley; "The General Theory of Alternating Current Machines," Chapman and Hall, London 1975.
- [2] C. Concordia, "Synchronous Machines: Theory and Performance," General Electric Company, 1951.
- [3] M.P. Kostenko & L.M. Piotrovski, "Máquinas Eléctricas," Vol. II, Editorial Mir, Second edition, Moscu 1979.
- [4] A. S. Langsdorf, "Theory of Alternating Current Machinery," Tata McGraw-Hill, Second Edition, 1974.
- [5] G. McPherson & R. D. Laramore, "An Introduction to Electrical Machines and Transformers," John Wiley & Sons, 1990.
- [6] R. H. Park, "Two Reaction Theory of Synchronous machines, Pt. 1," AIEE Transactions, Vol. 48, pp. 716-730, 1929.
- [7] R. H. Park, "Two Reaction Theory of Synchronous machines, Pt. 2," AIEE Transactions, Vol. 52, pp. 352-355, 1933.
- [8] O. I. Elgerd, "Electric Energy System Theory: An Introduction." Tata McGraw-Hill, 1971.

Régimen Transitorio de la Máquina Síncrona

Durante los cambios en la condición de operación de una máquina síncrona existe energía atrapada tanto en los campos magnéticos como en la masa rotante. El convertidor debe adaptar esta energía desde el punto de operación inicial a las nuevas condiciones. El cambio desde un estado energético a otro se denomina transitorio de la máquina. El análisis de los procesos transitorios de la máquina síncrona se puede dividir en dos tipos principales: Los *transitorios electromagnéticos* y los *transitorios electromecánicos*. Aun cuando el proceso transitorio es continuo, la existencia de constantes de tiempo bien diferenciadas permite realizar estas divisiones. Las constantes de tiempo mecánicas son generalmente muy lentas en máquinas de grandes dimensiones, cuando se comparan con las constantes de tiempo electromagnéticas. El análisis de transitorio electromagnético estudia el comportamiento de los flujos, enlaces de flujo, fuerzas electromotrices y tensiones de la máquina durante perturbaciones rápidas, considerando que la velocidad mecánica es prácticamente constante en todo el proceso. En los estudios transitorios electromecánicos se determina el comportamiento dinámico del sistema mecánico, utilizando valores medios de la potencia. Estos procesos están estrechamente interrelacionados, la separación es un tanto artificial, pero tiene el propósito de simplificar el análisis y la solución del problema. El desarrollo actual de las herramientas de cómputo posibilita la solución global del problema. Esto es de gran utilidad cuando el transitorio tiene constantes de tiempo electromagnéticas y electromecánicas del mismo orden de magnitud.

Mediante el análisis transitorio electromagnético se evalúan las solicitaciones físicas que las diferentes perturbaciones pueden ocasionar sobre la máquina. Con los resultados obtenidos en estos estudios se ajustan los reguladores de la excitatriz y el sistema de protección. El análisis transitorios electromecánico determina los límites de estabilidad dinámica de las diferentes máquinas acopladas a la red eléctrica de potencia. Los estudios de estabilidad se utilizan para planificar la expansión de la red y con la finalidad de ajustar los reguladores de velocidad de la máquina motriz.

Para analizar los transitorios de las máquinas síncronas se utilizan las ecuaciones diferenciales en coordenadas $dq0 - f$ desarrolladas en el capítulo 8. Las condiciones impuestas en las fases

se transforman a este sistema de coordenadas, se resuelven las ecuaciones diferenciales y finalmente se antitransforman estas soluciones para determinar el comportamiento de la máquina en el sistema de coordenadas primitivas.

El sistema de ecuaciones 8.54 define el comportamiento electromecánico y electromagnético completo de una máquina sincrónica de polos salientes en coordenadas $dq0 - f$. En estas ecuaciones, las corrientes $[i]$ y la velocidad mecánica del eje ω_m , constituyen las variables de estado del sistema. Las tensiones $[v]$ y el par mecánico T_m , representan las variables de control del proceso. Por otra parte, el sistema de ecuaciones diferenciales 8.41 expresa el modelo de la máquina sincrónica en función de los enlaces de flujo de los ejes $dq0 - f$.

Para resolver las ecuaciones diferenciales que modelan la máquina sincrónica es necesario transformar las condiciones de contorno de las variables de control y las condiciones iniciales de las variables de estado al sistema de coordenadas $dq0 - f$. Las condiciones de contorno pueden ser: *cortocircuitos*, cambios súbitos en la *carga* o en el *par de accionamiento*, *apertura de interruptores*, o *fallas* del sistema eléctrico de potencia.

Las constantes de tiempo del sistema mecánico son generalmente mucho mayores que las constantes de tiempo del sistema electromecánico. Por esta razón se puede aproximar durante el análisis de los transitorios electromagnéticos, que la velocidad de la máquina permanece prácticamente constante. Con esta aproximación, el sistema de ecuaciones diferenciales 8.54 es lineal y puede ser resuelto analíticamente. El transitorio mecánico se resuelve mediante la ecuación dinámica¹, evaluando en forma más o menos aproximada la potencia eléctrica media durante el proceso dinámico electromecánico. Una vez que se ha evaluado la velocidad para un determinado instante de tiempo, se determina un nuevo transitorio electromagnético. Desacoplando estos dos procesos, es posible realizar una integración rápida de las ecuaciones diferenciales.

9.1. Transitorios electromagnéticos

Las ecuaciones diferenciales de la máquina sincrónica son lineales si se considera que la velocidad del rotor es constante. Los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes constantes se resuelven mediante técnicas analíticas bien conocidas: autovalores-autovectores o mediante la transformada de Laplace. La técnica de autovalores-autovectores obtiene respuestas temporales directas. La transformada de Laplace, determina la respuesta en el dominio de la frecuencia, posteriormente es necesario antitransformar para obtener las soluciones temporales.

¹Ecuación de Newton.

9.1.1. Solución mediante autovalores-autovectores

El sistema de ecuaciones 8.54 se puede descomponer de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \\ v_0 \\ v_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \\ i_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_d & 0 & 0 & L_{df} \\ 0 & L_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_0 & 0 \\ L_{df} & 0 & 0 & L_f \end{bmatrix} p \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \\ i_f \end{bmatrix} + \dots$$

$$\dots + \begin{bmatrix} 0 & -\omega L_q & 0 & 0 \\ \omega L_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \\ i_f \end{bmatrix} \quad (9.1)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales 9.1, se puede expresar en forma compacta como:

$$[v] = [[R] + \omega [G]] [i] + [L] p [i] \quad (9.2)$$

Despejando de la expresión 9.2 el vector de derivadas de las variables de estado $p [i]$, se obtiene:

$$p [i] = [L]^{-1} \{ [v] - [[R] + \omega [G]] [i] \} \quad (9.3)$$

Los autovalores de la matriz característica de la ecuación anterior determinan los modos naturales de la respuesta homogénea de la máquina sincrónica en coordenadas $dq0 - f$. Para obtener la matriz característica es necesario invertir la matriz de inductancias $[L]$:

$$[L]^{-1} = \begin{bmatrix} L_d & 0 & 0 & L_{df} \\ 0 & L_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_0 & 0 \\ L_{df} & 0 & 0 & L_f \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L'_d} & 0 & 0 & \frac{1}{L'_{df}} \\ 0 & \frac{1}{L_q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_0} & 0 \\ \frac{1}{L'_{df}} & 0 & 0 & \frac{1}{L'_f} \end{bmatrix} \quad (9.4)$$

donde:

$$L'_d \equiv L_d - \frac{L_{df}^2}{L_f} ; \quad L'_f \equiv L_f - \frac{L_{df}^2}{L_d} ; \quad L'_{df} \equiv L_{df} - \frac{L_d L_f}{L_{df}} \quad (9.5)$$

La matriz característica $[A]$ es:

$$[A] = -[L]^{-1} [[R] + \omega [G]] = - \begin{bmatrix} \frac{R_e}{L'_d} & -\frac{\omega L_q}{L'_d} & 0 & \frac{R_f}{L'_{df}} \\ \frac{\omega L_d}{L_q} & \frac{R_e}{L_q} & 0 & \frac{\omega L_{df}}{L_q} \\ 0 & 0 & \frac{R_0}{L_0} & 0 \\ \frac{R_e}{L'_{df}} & -\frac{\omega L_q}{L'_{df}} & 0 & \frac{R_f}{L'_f} \end{bmatrix} \quad (9.6)$$

Los autovalores γ_i de la matriz característica 9.6 se obtienen al resolver la siguiente ecuación algebraica:

$$\det [[A] - \gamma_i [I]] = 0 \quad (9.7)$$

Como el eje 0 se encuentra desacoplado del resto del sistema, es posible reducir en uno el grado

del polinomio característico definido por la expresión 9.7. Las resistencias de las bobinas son muy pequeñas al compararse con las reactancias de la máquina. Despreciando el efecto de las resistencias del estator y rotor de la máquina, se obtiene de las expresiones 9.6 y 9.7 el polinomio característico del sistema:

$$\left(\gamma + \frac{R_0}{L_0}\right) (\gamma^3 + \omega^2 \gamma) = 0 \quad (9.8)$$

El autovalor correspondiente al eje 0 es:

$$\gamma_0 = -\frac{R_0}{L_0} \quad (9.9)$$

y los otros tres autovalores son:

$$\gamma_1 = 0 ; \quad \gamma_{2,3} = \pm j\omega \quad (9.10)$$

Al despreciar la resistencia de las bobinas de la máquina sincrónica, se obtienen dos autovalores complejos conjugados γ_2 y γ_3 , cuya magnitud es igual a la velocidad sincrónica de la máquina. Estos dos autovalores se deben a las realimentaciones de fuerza electromotriz de generación existentes entre los ejes directo y cuadratura del convertidor. El autovalor en el origen γ_1 se debe fundamentalmente a la bobina de campo. Si no se desprecia la resistencia de las bobinas, el polo del origen y los autovalores complejos conjugados se desplazan ligeramente hacia el semiplano izquierdo y se reduce la frecuencia natural de oscilación.

Para obtener la solución homogénea del sistema de ecuaciones diferenciales 9.3 es necesario determinar la matriz de autovectores correspondiente a los cuatro autovalores determinados del polinomio característico 9.8. Cada uno de los autovalores se calcula obteniendo las soluciones no triviales del siguiente sistema de ecuaciones:

$$[A] - \gamma_i [I] [V_i] = [0] \quad (9.11)$$

La matriz de autovectores queda formada de la siguiente forma:

$$[V] = [[V_0] \quad [V_1] \quad [V_2] \quad [V_3]] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{L_{df}}{L_d} & \frac{L'_{df}}{L'_q} & \frac{L'_{df}}{L'_d} \\ 0 & 0 & j\frac{L_{df}}{L_q} & -j\frac{L'_{df}}{L_q} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.12)$$

La solución homogénea del sistema de ecuaciones diferenciales es:

$$[i_h(t)] = \begin{bmatrix} i_{dh}(t) \\ i_{qh}(t) \\ i_{0h}(t) \\ i_{fh}(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^3 k_i [V_i] e^{\gamma_i t} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{L_{df}}{L_d} & \frac{L'_{df}}{L'_q} & \frac{L'_{df}}{L'_d} \\ 0 & 0 & j\frac{L_{df}}{L_q} & -j\frac{L'_{df}}{L_q} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_0 e^{\gamma_0 t} \\ k_1 e^{\gamma_1 t} \\ k_2 e^{\gamma_2 t} \\ k_3 e^{\gamma_3 t} \end{bmatrix} \quad (9.13)$$

Al superponer la solución homogénea y la solución particular, correspondiente a la condición final de régimen permanente, se determinan los coeficientes k_i , que satisfacen las condiciones

iniciales de las variables de estado:

$$[i(t=0)] = [i_h(0)] + [i_p(0)] = [V][k] + [i_p(0)] \Rightarrow [k] = [V]^{-1} [[i(0)] - [i_p(0)]] \quad (9.14)$$

La solución particular del problema está forzada por las variables de control, tensiones en bornes de las bobinas de la máquina y par mecánico en el eje del rotor. En el capítulo 8 se analizó el comportamiento de la máquina sincrónica en régimen permanente, la técnica del diagrama fasorial permite evaluar las condiciones forzantes de las fuentes en las coordenadas primitivas y transformadas. Los fasores deben ser transformados a valores instantáneos para obtener las soluciones particulares en el dominio del tiempo. Representar magnitudes trifásicas sinusoidales mediante fasores y proyectar estos según los ejes d y q , es equivalente a realizar la transformación de Park.

9.1.2. Solución mediante la transformada de Laplace

Aplicando la transformada de Laplace al sistema de ecuaciones diferenciales 9.1, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas:

$$\begin{bmatrix} V_d(s) \\ V_q(s) \\ V_0(s) \\ V_f(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_e + L_d s & -\omega L_q & 0 & L_{df} s \\ \omega L_d & R_e + L_q s & 0 & L_{df} \omega \\ 0 & 0 & R_0 + L_0 s & 0 \\ L_{df} s & 0 & 0 & R_f + L_f s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_d(s) \\ I_q(s) \\ I_0(s) \\ I_f(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_d(0^+) \\ \lambda_q(0^+) \\ \lambda_0(0^+) \\ \lambda_f(0^+) \end{bmatrix} \quad (9.15)$$

donde:

$$\begin{bmatrix} \lambda_d(0^+) \\ \lambda_q(0^+) \\ \lambda_0(0^+) \\ \lambda_f(0^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_d & 0 & 0 & L_{df} \\ 0 & L_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_0 & 0 \\ L_{df} & 0 & 0 & L_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d(0^+) \\ i_q(0^+) \\ i_0(0^+) \\ i_f(0^+) \end{bmatrix} \quad (9.16)$$

En forma compacta, el sistema anterior se expresa como:

$$[Z(s)][I(s)] = [V(s)] + [L_{dq0f}][i_{dq0f}(0^+)] \quad (9.17)$$

donde:

$[Z(s)]$ es la matriz de impedancia operacional de la máquina sincrónica.

El determinante de esta matriz define los polos de la respuesta transitoria. Se observa que cada uno de los miembros de las ecuaciones 9.15 y 9.17 tienen dimensiones físicas de flujo magnético $[Wb]$. La transformada de Laplace convierte un balance de tensiones en el dominio del tiempo, en un equilibrio de flujos en el dominio de la frecuencia. El determinante de la matriz de impedancia operacional de la máquina sincrónica $[Z(s)]$, en coordenadas $dq0-f$ es:

$$\begin{aligned} D &= (R_0 + L_0 s) \times \cdots \\ &\cdots [(R_e + L_d s)(R_e + L_q s)(R_f + L_f s) + \cdots \\ &\cdots -\omega^2 L_{df}^2 L_q s - L_{df}^2 s^2 (R_e + L_q s) + \omega^2 L_d L_q (R_f + L_f s)] \end{aligned} \quad (9.18)$$

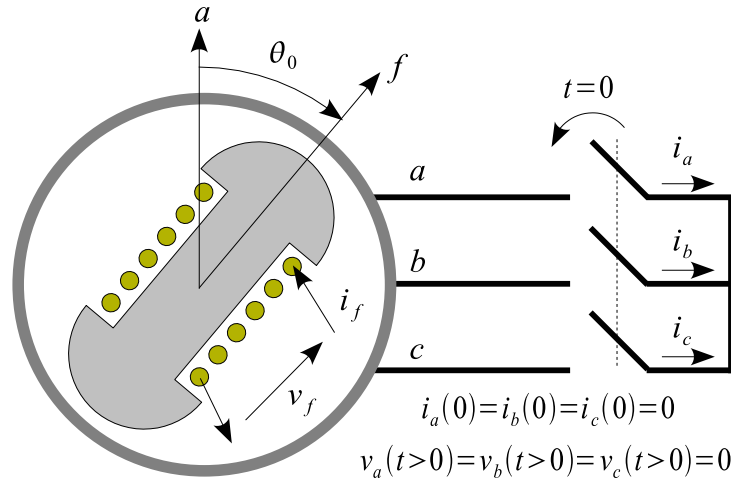


Figura 9.1 Cortocircuito brusco de la máquina síncrona

Cuando se desprecian las resistencias del estator y del campo, la expresión 9.18 se simplifica a:

$$D = L_d' L_q L_0 L_f s (s^2 + \omega^2) \left(s + \frac{R_0}{L_0} \right) \quad (9.19)$$

Los polos de este polinomio son:

$$s_0 = -\frac{R_0}{L_0} ; \quad s_1 = 0 ; \quad s_{2,3} = \pm j\omega \quad (9.20)$$

que corresponden exactamente con los autovalores de la matriz característica $[A]$, obtenidos en la sección 9.1.1.

Multiplicando la expresión 9.17 por la inversa de la matriz operacional se determinan las corrientes transformadas. Una vez definidas las fuentes independientes y las condiciones iniciales, se obtiene la solución del problema. Resolviendo las ecuaciones diferenciales mediante la técnica de autovalores y autovectores es necesario obtener una solución particular y ajustar los coeficientes indeterminados con las condiciones iniciales. Aplicando la transformada de Laplace, la solución completa se obtiene directamente debido a que las funciones de transferencia contienen toda la información necesaria. Antitransformando cada una de las funciones, se obtiene directamente la respuesta temporal del problema.

9.2. Cortocircuito brusco de la máquina síncrona

Uno de los análisis transitorio de mayor interés en el estudio de la máquina síncrona es el cortocircuito trifásico brusco y franco en bornes de las bobinas de armadura. En la figura 9.1 se muestra un diagrama esquemático de las condiciones previas y posteriores al cortocircuito.

Las corrientes de fase son cero durante el tiempo anterior al cortocircuito. Aplicando la transformación de Park 8.42 a estas condiciones, se obtiene que las corrientes en coordenadas $dq0$ en la condición previa al cortocircuito también son nulas. La corriente del campo antes del corto-

circuito es:

$$i_f(0^-) = \frac{v_f}{R_f} \quad (9.21)$$

Las condiciones iniciales en el instante de tiempo inmediatamente posterior al cierre del interruptor ($t = 0^+$), se determinan considerando que los enlaces de flujo en las bobinas de la máquina se conservan entre el instante inmediatamente anterior y posterior al cortocircuito. De esta forma, las variables transformadas satisfacen la siguiente condición:

$$\begin{bmatrix} \lambda_d(0^+) \\ \lambda_q(0^+) \\ \lambda_0(0^+) \\ \lambda_f(0^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_d(0^-) \\ \lambda_q(0^-) \\ \lambda_0(0^-) \\ \lambda_f(0^-) \end{bmatrix} \quad (9.22)$$

$$\begin{bmatrix} L_d & 0 & 0 & L_{df} \\ 0 & L_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_0 & 0 \\ L_{df} & 0 & 0 & L_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d(0^+) \\ i_q(0^+) \\ i_0(0^+) \\ i_f(0^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_d & 0 & 0 & L_{df} \\ 0 & L_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_0 & 0 \\ L_{df} & 0 & 0 & L_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d(0^-) \\ i_q(0^-) \\ i_0(0^-) \\ i_f(0^-) \end{bmatrix} \quad (9.23)$$

y por tanto:

$$\begin{bmatrix} i_d(0^+) \\ i_q(0^+) \\ i_0(0^+) \\ i_f(0^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_d(0^-) \\ i_q(0^-) \\ i_0(0^-) \\ i_f(0^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{v_f}{R_f} \end{bmatrix} \quad (9.24)$$

Durante la condición de cortocircuito, las tensiones en bornes de la armadura de la máquina son cero, y las tensiones en coordenadas $dq0$ también son nulas. La tensión en el devanado de campo permanece constante en el valor v_f . La solución particular se obtiene al considerar el comportamiento en régimen permanente de la máquina en un tiempo muy largo posterior al cortocircuito. Al despreciar la resistencia del estator, el fasor que representa la corriente de cortocircuito en régimen permanente, se retrasa 90° con respecto a la dirección del eje cuadratura. La corriente de armadura está orientada según la dirección del eje directo, con lo cual se obtiene de las ecuaciones fasoriales de la máquina sincrónica en la convención motor el siguiente resultado:

$$\mathbf{V}_e = \mathbf{E}_f + jX_d \mathbf{I}_d + jX_q \mathbf{I}_q = \mathbf{E}_f + jX_d \mathbf{I}_d = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$i_d = -\frac{L_{df}}{L_d} \frac{v_f}{R_f} ; \quad i_q = 0 \quad (9.25)$$

De la expresión 9.14 se determinan los coeficientes k_i de la solución homogénea del problema:

$$\begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{L_{df}}{L_d} & \frac{L'_{df}}{L'_q} & \frac{L'_{df}}{L'_d} \\ 0 & 0 & j\frac{L_{df}}{L_q} & -j\frac{L_{df}}{L_d} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{v_f}{R_f} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{L_{df}}{L_d} \frac{v_f}{R_f} \\ 0 \\ \frac{v_f}{R_f} \\ 0 \end{bmatrix} \right] = \frac{L_{df}}{L_d} \frac{v_f}{R_f} \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (9.26)$$

Las corrientes instantáneas se obtiene superponiendo la solución homogénea 9.13 y la solución

particular 9.25:

$$i_d(t) = \frac{L_{df}}{L_d} \frac{v_f}{R_f} (\cos \omega t - 1) \quad (9.27)$$

$$i_q(t) = -\frac{L_{df}}{L_q} \frac{v_f}{R_f} \sin \omega t \quad (9.28)$$

$$i_f(t) = \left[1 + \frac{L_{df}}{L'_{df}} (1 - \cos \omega t) \right] \frac{v_f}{R_f} \quad (9.29)$$

$$i_0(t) = 0 \quad (9.30)$$

Para obtener las corrientes en coordenadas primitivas, se realiza la transformación inversa de Park; la corriente instantánea de la fase a queda:

$$\begin{aligned} i_a(t) &= \sqrt{\frac{2}{3}} (i_d \cos \theta - i_q \sin \theta + \frac{1}{\sqrt{2}} i_0) = \sqrt{\frac{2}{3}} [i_d \cos(\omega t + \theta_0) - i_q \sin(\omega t + \theta_0)] = \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{v_f}{R_f} L_{df} \left[-\frac{1}{L'_d} \cos(\omega t + \theta_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{L'_d} - \frac{1}{L_q} \right) \cos(2\omega t + \theta_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{L'_d} + \frac{1}{L_q} \right) \cos \theta_0 \right] \end{aligned} \quad (9.31)$$

La expresión 9.31 puede ser mejor interpretada si se multiplica y divide por la velocidad sincrónica ω , y se incorpora la definición de la fuerza electromotriz que produce el campo E_f :

$$i_a(t) = \sqrt{2} E_f \left[-\frac{1}{X'_d} \cos(\omega t + \theta_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{X'_d} - \frac{1}{X_q} \right) \cos(2\omega t + \theta_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{X'_d} + \frac{1}{X_q} \right) \cos \theta_0 \right] \quad (9.32)$$

Utilizando el método de la transformada de Laplace se obtienen exactamente los mismos resultados. En este caso es necesario determinar las corrientes transformadas de la expresión 9.15:

$$[\mathbf{I}(s)] = [\mathbf{Z}(s)]^{-1} ([L_{dq0f}] [i(0^+)] + [\mathbf{V}(s)]) \quad (9.33)$$

Cuando se desprecian las resistencias de los devanados, la matriz de impedancia inversa es:

$$\begin{aligned} [\mathbf{Z}(s)]^{-1} &= \begin{bmatrix} L_d s & -\omega L_q & 0 & L_{df} s \\ \omega L_d & L_q s & 0 & L_{df} \omega \\ 0 & 0 & L_0 s & 0 \\ L_{df} s & 0 & 0 & L_f s \end{bmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s}{L'_d(s^2 + \omega^2)} & \frac{\omega}{L'_d(s^2 + \omega^2)} & 0 & -\frac{L_{df}}{L'_d L_f s} \\ -\frac{\omega}{L_q(s^2 + \omega^2)} & \frac{s}{L_q(s^2 + \omega^2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_0 s} & 0 \\ -\frac{L_{df} s}{L'_d L_f(s^2 + \omega^2)} & -\frac{L_{df} \omega}{L'_d L_f(s^2 + \omega^2)} & 0 & \frac{1}{L_f s} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9.34)$$

Como las tres fuentes de tensión de las fases son nulas durante la aplicación del cortocircuito,

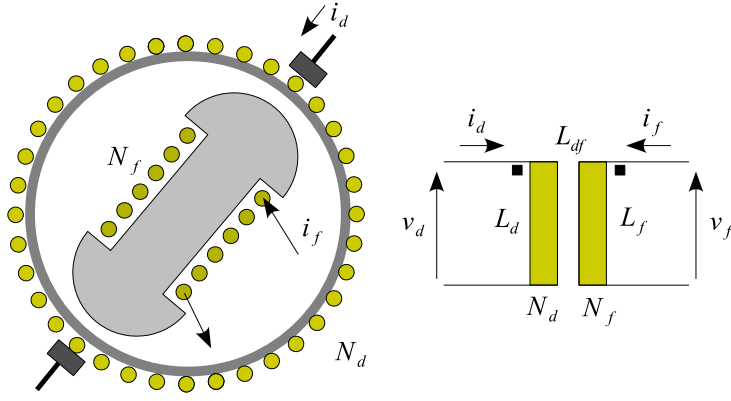


Figura 9.2 Acoplamiento magnético entre las bobinas del eje directo y del campo

en el dominio de la frecuencia se obtienen las siguientes corrientes transformadas:

$$I_d(s) = -\frac{L_{df}\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)L'_d} \frac{v_f}{R_f} \quad (9.35)$$

$$I_q(s) = -\frac{L_{df}\omega}{(s^2 + \omega^2)L_q} \frac{v_f}{R_f} \quad (9.36)$$

$$I_0(s) = 0 \quad (9.37)$$

$$I_f(s) = \left[\frac{s}{s^2 + \omega^2} + \frac{\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)} \frac{L_d}{L'_d} \right] \frac{v_f}{R_f} \quad (9.38)$$

Transformando las expresiones anteriores al dominio del tiempo se obtienen las mismas corrientes instantáneas 9.27 a 9.30, calculadas mediante el método de los autovalores y autovectores.

Las corrientes por la armadura y por el campo dependen de la velocidad angular mecánica de la máquina, porque durante el transitorio electromagnético la velocidad permanece prácticamente constante. Las oscilaciones de las corrientes son automantenidas y no amortiguadas debido a que se han despreciado las resistencias de las bobinas. El ángulo θ_0 determina la posición del rotor con respecto al eje magnético de la fase a del estator en el instante de tiempo inicial del cortocircuito. La expresión 9.32 se utiliza frecuentemente en el ajuste de las protecciones contra cortocircuito de las máquinas síncronas.

9.3. Interpretación física de las inductancias transitorias

En la expresión 9.5 se han definido las inductancias L'_d , L'_f y L'_{df} para simplificar el análisis de los transitorios electromagnéticos de la máquina síncrona. Las inductancias L'_d y L'_f tienen una interpretación física concreta y representan parámetros equivalentes vistos desde el eje d y f respectivamente. En la figura 9.2 se representa la configuración esquemática de las bobinas del eje directo y del campo. Estas bobinas se encuentran perfectamente alineadas por la definición de la transformación y constituyen un circuito acoplado magnéticamente, semejante a un transformador de dos devanados, d y f .

El modelo matemático que define el comportamiento del circuito magnético representado en la

figura 9.2 es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_d p & L_{df} p \\ L_{df} p & L_f p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_f \end{bmatrix} \quad (9.39)$$

Cuando el circuito de campo se excita mediante una fuente de tensión, se puede referir este circuito al eje directo mediante la reducción de Krön:

$$v_d = (L_d - \frac{L_{df}^2}{L_f}) p i_d + \frac{L_{df}}{L_f} v_f = L'_d p i_d + \frac{L_{df}}{L_f} v_f \quad (9.40)$$

Alimentando el eje directo con una fuente de tensión y reflejando este devanado sobre el campo de la máquina mediante la reducción de Krön, se obtiene:

$$v_f = (L_f - \frac{L_{df}^2}{L_d}) p i_f + \frac{L_{df}}{L_d} v_d = L'_f p i_f + \frac{L_{df}}{L_d} v_d \quad (9.41)$$

El reflejo de las bobinas del campo sobre el eje directo y de la bobina del eje directo sobre el campo define las inductancias transitorias L'_d y L'_f , respectivamente. El acoplamiento entre estos dos circuitos implica una reducción efectiva de la inductancia equivalente que se observa desde cada una de las bobinas cuando la otra se excita mediante una fuente de tensión. La tensión de excitación aparece reflejada en la bobina del eje directo en la proporción $\frac{L_{df}}{L_f}$ que es prácticamente igual² a la relación de vueltas entre las dos bobinas $\frac{N_d}{N_f}$. En el circuito de campo, la situación es similar y aparece el reflejo de la tensión del eje directo v_d a través de la relación de transformación del número de vueltas $\frac{N_f}{N_d}$.

Si un circuito acoplado magnéticamente con la bobina se encuentra abierto, o se excita mediante una fuente de corriente, la inductancia propia de la bobina permanece constante. Como el eje cuadratura no está acoplado magnéticamente con ninguna otra bobina, la inductancia propia de este eje es independiente de los fenómenos transitorios en el resto de las bobinas. En estos casos, las constantes de tiempo de las bobinas están determinadas por el cociente entre la inductancia propia y la resistencia de cada enrollado. Cuando la máquina se conecta a fuentes de tensión, en la armadura o en el campo, las constantes de tiempo se reducen debido al acoplamiento magnético existente entre estas bobinas.

9.4. Tensión de armadura en circuito abierto

Cuando la armadura de la máquina sincrónica se encuentra en circuito abierto, aparecen en estas bobinas fuerzas electromotrices, pero no existe acoplamiento electromagnético entre estos circuitos y el campo. La ecuación del circuito de campo es:

$$v_f = R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt} \quad (9.42)$$

²Despreciando los caminos de dispersión del campo.

Esta ecuación diferencial define la constante de tiempo del circuito de campo cuando los devanados de armadura se encuentran en circuito abierto:

$$\tau_{f0} = \frac{L_f}{R_f} \quad (9.43)$$

En la práctica, la constante de tiempo del campo con las bobinas del estator en circuito abierto, está comprendida entre 1 y 20 segundos debido a que la resistencia R_f de este enrollado se diseña lo más pequeña posible para reducir las pérdidas óhmicas.

Las fuerzas electromotrices que aparecen sobre las bobinas de los ejes directo y cuadratura, con las bobinas de armadura en circuito abierto son:

$$v_d = L_{df} \frac{di_f}{dt} \quad (9.44)$$

$$v_q = \omega L_{df} i_f \quad (9.45)$$

Determinando la solución de la ecuación diferencial 9.42 y sustituyendo esta corriente en las expresiones anteriores, se obtienen los siguientes resultados:

$$i_f(t) = \frac{v_f}{R_f} (1 - e^{-\frac{t}{\tau_{f0}}}) \quad (9.46)$$

$$v_d(t) = \frac{L_{df}}{\tau_{f0}} \frac{v_f}{R_f} e^{-\frac{t}{\tau_{f0}}} \quad (9.47)$$

$$v_q(t) = \frac{L_{df}}{\tau_{f0}} \frac{v_f}{R_f} (1 - e^{-\frac{t}{\tau_{f0}}}) \quad (9.48)$$

La fuerza electromotriz en la fase a de la máquina se obtiene mediante la transformación inversa de Park 8.46:

$$v_a(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} [v_d(t) \cos(\omega t + \theta_0) - v_q(t) \sin(\omega t + \theta_0)] \quad (9.49)$$

Al comparar las expresiones 9.44 y 9.45 se observa que la fuerza electromotriz inducida sobre la bobina del eje cuadratura v_q , es mucho mayor que la inducida sobre el eje directo v_d , debido a que generalmente la velocidad sincrónica de la máquina es mucho mayor que el inverso de la constante de tiempo τ_{f0} . Despreciando la fuerza electromotriz del eje directo se obtiene la siguiente tensión sobre la bobina de la máquina:

$$v_a(t) = -\sqrt{\frac{2}{3}} \omega L_{df} \frac{v_f}{R_f} (1 - e^{-\frac{t}{\tau_{f0}}}) \sin(\omega t + \theta_0) \quad (9.50)$$

En la figura 9.3 se presenta un gráfico de la fuerza electromotriz en bornes de la máquina, durante la energización del campo, cuando la armadura se encuentra en circuito abierto.

9.5. Sistema adimensional de unidades

Al igual que en las otras máquinas eléctricas y en el sistema eléctrico de potencia es conveniente utilizar el sistema adimensional de unidades, también conocido como sistema en por unidad,

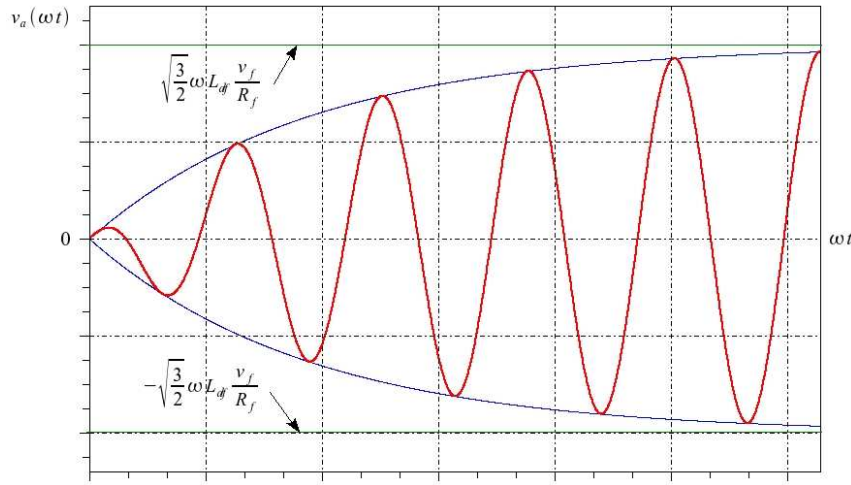


Figura 9.3 Tensión de armadura en circuito abierto ante una energización del campo

para cuantificar las diferentes variables que definen el comportamiento de la máquina síncrona. Como sucede en los transformadores, la máquina síncrona posee un rendimiento elevado en el rango de operación industrial y es conveniente definir la potencia eléctrica aparente de la máquina como potencia base del sistema adimensional de unidades. En muchas ocasiones es aconsejable utilizar como base de potencia la potencia aparente monofásica de la armadura de la máquina, especialmente cuando se definen las bases del rotor, con la finalidad de centrar las magnitudes en por unidad de las variables y parámetros asociados con el rotor. Estas variables pueden obtener valores extremos, porque el circuito de campo consume una potencia que es varios órdenes de magnitud inferior a la de armadura.

Además de fijar las bases de potencia, tensión y corriente en los convertidores electromecánicos es necesario definir las bases de par, velocidad, tiempo, impedancia e inductancia. El par base se define como el cociente entre la potencia base y la velocidad base de la máquina:

$$T_B = \frac{S_B}{\omega_B} \quad (9.51)$$

La velocidad base de la máquina en general se escoge igual a la velocidad síncrona:

$$\omega_B = \omega_s = \frac{\omega_e}{p} = 2\pi \frac{f}{p} \quad (9.52)$$

donde p es el número de pares de polos del convertidor y f es la frecuencia de las corrientes de armadura. Al definir la velocidad base de la máquina, el tiempo base y el ángulo base se encuentran relacionados; al escoger uno, el otro queda automáticamente definido:

$$\omega_B = \frac{\alpha_B}{t_B} \Rightarrow t_B = \frac{\alpha_B}{\omega_B} = \frac{1 \text{ rad}}{\omega_s} \quad (9.53)$$

Para convertir las inductancias al sistema adimensional de unidades es necesario definir la im-

pedancia e inductancia base del circuito, de acuerdo con las expresiones 9.52 y 9.53 se tiene:

$$L_B = \frac{Z_B}{\omega_B} = \frac{\frac{V_B}{I_B}}{\omega_B} = \frac{V_B^2}{\omega_B S_B} \quad (9.54)$$

Con las bases definidas anteriormente, la inductancia e impedancia adimensional es:

$$L_{pu} = \frac{L}{L_B} = \frac{\omega_B L}{\omega_B L_B} = \frac{Z}{Z_B} = Z_{pu} \quad (9.55)$$

Las inductancias propias de las bobinas de la máquina sincrónica están constituidas por una componente de magnetización y otra de dispersión:

$$L_d = L_{md} + L_{\sigma d} = L_{md}(1 + \sigma_d) \quad (9.56)$$

$$L_q = L_{mq} + L_{\sigma q} = L_{mq}(1 + \sigma_q) \quad (9.57)$$

$$L_f = L_{mf} + L_{\sigma f} = L_{mf}(1 + \sigma_f) \quad (9.58)$$

donde:

$$\sigma_d = \frac{L_{\sigma d}}{L_{md}} ; \quad \sigma_q = \frac{L_{\sigma q}}{L_{mq}} ; \quad \sigma_f = \frac{L_{\sigma f}}{L_{mf}} \quad (9.59)$$

Las inductancias de magnetización del eje directo y del campo, están relacionadas con la inductancia mutua entre el eje directo y el campo porque poseen el mismo camino magnético. Los valores físicos de estas inductancias se diferencian debido a que cada una de ellas está definida por diferentes números de vueltas:

$$L_{md} = N_d^2 \wp_{md} ; \quad L_{mf} = N_f^2 \wp_{mf} ; \quad L_{df} = N_d N_f \wp_{df} \quad (9.60)$$

donde:

$$\wp_{md} = \wp_{mf} = \wp_{df} \quad (9.61)$$

Si los números de vueltas de las bobinas del campo y del eje directo son iguales, las tres inductancias de la expresión 9.60 tienen el mismo valor. Definiendo las bases del sistema adimensional de unidades, es posible obtener esta simplificación. Cuando se define la potencia base de la máquina para el circuito de armadura y la tensión base de cada bobina como su tensión nominal, en el estator la corriente bases es igual a la corriente nominal. En el rotor esta situación es diferente, la tensión nominal de la bobina de campo y la potencia aparente de armadura no producen una corriente base del mismo orden de magnitud que la corriente nominal del campo. Los valores en por unidad son extremadamente grandes o pequeños, y se pierden las ventajas del sistema adimensional de unidades. Una solución posible para este problema consiste en definir los enlaces de flujo base de cada bobina:

$$\lambda_{Bmd} = L_{md} I_B = L_{df} I_{BF} \quad (9.62)$$

$$\lambda_{BFm} = L_{df} I_B = L_{mf} I_{BF} \quad (9.63)$$

Multiplicando las expresiones anteriores se obtiene la siguiente relación entre las corrientes base

en la armadura y el campo:

$$L_{md}I_B^2 = L_{mf}I_{BF}^2 \Rightarrow \frac{I_{BF}}{I_B} = \sqrt{\frac{L_{md}}{L_{mf}}} = \frac{N_d}{N_f} \quad (9.64)$$

Utilizando la base monofásica de potencia aparente de armadura en ambos circuitos, se obtiene la relación entre las bases de tensión de armadura y campo:

$$S_B = V_B I_B = V_{BF} I_{BF} \Rightarrow \frac{V_{BF}}{V_B} = \frac{I_B}{I_{BF}} = \frac{N_f}{N_d} \quad (9.65)$$

La expresión 9.65 define un sistema de tensiones y corrientes base en armadura y campo. Este sistema de bases simplifica notablemente la matriz de inductancias propias y mutuas de la máquina síncrona cuando esta se expresa en por unidad de las bases de enlace de flujo. Las impedancias base propias y mutuas, en el sistema adimensional de unidades son:

$$Z_B = \frac{V_B}{I_B} = \frac{V_B^2}{S_B} \quad (9.66)$$

$$Z_{BF} = \frac{V_{BF}}{I_{BF}} = \frac{N_f^2}{N_d^2} \frac{V_B}{I_B} = \left(\frac{N_f}{N_d} \right)^2 Z_B \quad (9.67)$$

$$Z_{B-DF} = \frac{V_B}{I_{BF}} = \frac{N_f}{N_d} \frac{V_B}{I_B} = \frac{N_f}{N_d} Z_B = \frac{V_{BF}}{I_B} = Z_{B-FD} \quad (9.68)$$

donde:

$$V_B = V_n^{ln} \text{ y } S_B = S_{n_{1\phi}} = \frac{1}{3} S_n$$

Las inductancias adimensionales de la máquina síncrona, expresadas en el sistema de bases de enlaces de flujo y potencia aparente monofásica son:

$$L_{md}(pu) = \frac{N_d^2 \wp_{df}}{L_B} = \frac{\omega_B}{Z_B} N_d^2 \wp_{df} \quad (9.69)$$

$$L_{mf}(pu) = \frac{N_f^2 \wp_{df}}{L_{BF}} = \frac{\omega_B}{Z_B} N_d^2 \wp_{df} \quad (9.70)$$

$$L_{df}(pu) = \frac{N_d N_f \wp_{df}}{L_{B-DF}} = \frac{\omega_B}{Z_B} N_d^2 \wp_{df} \quad (9.71)$$

En el sistema adimensional que utiliza las bases de enlace de flujo y potencia aparente monofásica, las tres inductancias calculadas en las expresiones 9.69, 9.70 y 9.71 son iguales. El valor en por unidad de estas inductancias depende de la permeanza del camino magnético mutuo estator-rotor \wp_{df} . Valores típicos adimensionales de las inductancias propias, mutuas y de dispersión en las máquinas síncronas convencionales se presentan en la tabla 9.1.

Utilizando valores numéricos medios de las inductancias estimadas anteriormente es posible evaluar cuantitativamente la corriente instantánea de la fase a , para todo tiempo posterior al cortocircuito brusco de la máquina síncrona tal como se obtuvo en la ecuación 9.32. Si la fuerza

Tabla 9.1 Rango típico de los valores de las inductancias de la máquina sincrónica de polos salientes

Inductancia	Rango en pu
$L_{df} = L_{md} = L_{mf}$	$0,7 \sim 1,1$
L_{mq}	$0,5 \sim 0,7$
$L_{\sigma d} \approx L_{\sigma q} = \sigma_d L_{df}$	$(0,1 \sim 0,2) L_{df}$
$L_{\sigma f} = \sigma_f L_{df}$	$(0,2 \sim 0,3) L_{df}$
$L_d = (1 + \sigma_d) L_{df}$	$(1,1 \sim 1,2) L_{df}$
$L_f = (1 + \sigma_f) L_{df}$	$(1,2 \sim 1,3) L_{df}$
$L_q = (1 + \sigma_q) L_{mq}$	$(1,1 \sim 1,2) L_{mq}$
$L'_d = L_d - \frac{L_{df}^2}{L_f}$	$(0,27 \sim 0,43) L_{df}$
$L'_f = L_f - \frac{L_{df}^2}{L_d}$	$(0,29 \sim 0,47) L_{df}$

electromotriz E_f es 1,0 en por unidad, debido a que en la condición previa al cortocircuito la máquina se encontraba en vacío a tensión nominal, la corriente instantánea resulta ser:

$$i_a(t) = -4,29 \cos(\omega t + \theta_0) + 1,18 \cos(2\omega t + \theta_0) + 3,10 \cos \theta_0 \quad (9.72)$$

La corriente de cortocircuito posee una componente de frecuencia fundamental cuyo valor efectivo es superior a 3,0 en por unidad de la corriente nominal. Evaluando la corriente de cortocircuito mediante el diagrama fasorial de la máquina sincrónica, se obtiene que el valor efectivo de la corriente es aproximadamente 0,95 en por unidad. Un cortocircuito mantenido durante un tiempo suficiente largo como para alcanzar el régimen permanente, producirá el decaimiento de las corrientes instantáneas hasta alcanzar la solución obtenida mediante el diagrama fasorial. Durante los primeros instantes de tiempo, el acoplamiento magnético entre el campo y el eje directo reflejan una reactancia transitoria del eje directo mucho más pequeña que la reactancia de régimen permanente y por esta razón se incrementa el nivel de cortocircuito de la máquina sincrónica. En la figura 9.4 se representa la corriente de la expresión 9.72, cuando el cortocircuito se inicia en el momento en el cual el eje magnético del campo coincide con el eje magnético de la fase a del estator ($\theta_0 = 0$).

9.6. Análisis transitorio con resistencias

En las secciones anteriores se han despreciado las resistencias de las bobinas para simplificar la solución analítica del problema. Además se considera en todo el desarrollo que las tensiones en las bobinas son las variables independientes, y las corrientes son las variables de estado del sistema. Si el campo se excita mediante una fuente de corriente, el problema tiene un planteamiento y solución diferente. Las ecuaciones dinámicas de la máquina sincrónica se pueden representar de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} v_e \\ v_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{ee} & Z_{er} \\ Z_{re} & Z_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_e \\ i_r \end{bmatrix} =$$

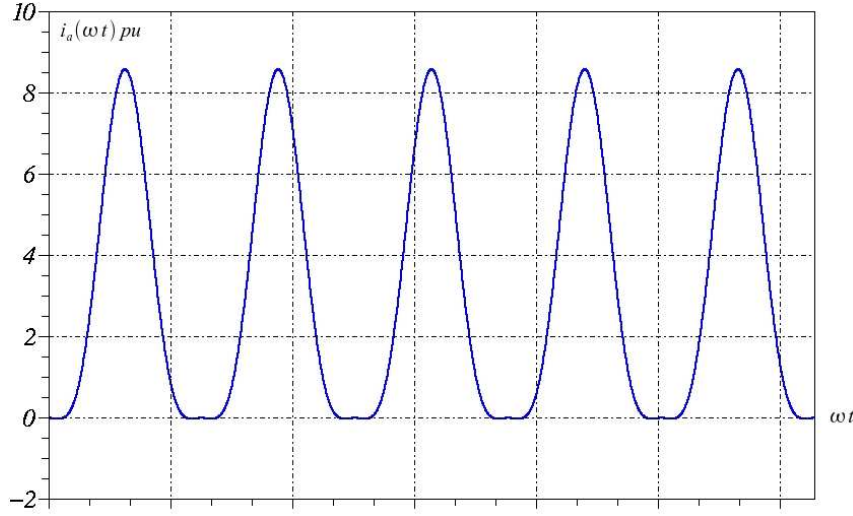


Figura 9.4 Cortocircuito brusco de la máquina sincrónica ($\theta_0 = 0$), sin resistencia en los devanados

$$= \begin{bmatrix} v_d \\ v_q \\ v_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_e + L_d p & -\omega L_q \\ \omega L_d & R_e + L_q p \\ L_{df} p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{df} p \\ \omega L_{df} \\ R_f + L_f p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_f \end{bmatrix} \quad (9.73)$$

Como las condiciones forzantes son híbridas; tensiones del estator y corrientes en el rotor, la expresión 9.73 se puede descomponer y reordenar de la forma siguiente:

$$[v_e] = [Z_{ee}] [i_e] + [Z_{er}] [i_r] \quad (9.74)$$

$$[v_r] = [Z_{re}] [i_e] + [Z_{rr}] [i_r] \quad (9.75)$$

Despejando el vector $[i_r]$ de la expresión 9.75, y reemplazando el resultado en la 9.74 se obtiene:

$$[i_r] = -[Z_{rr}]^{-1} [Z_{re}] [i_e] + [Z_{rr}]^{-1} [v_r] \quad (9.76)$$

$$[v_e] = [[Z_{ee}] - [Z_{er}] [Z_{rr}]^{-1} [Z_{re}]] [i_e] + [Z_{er}] [Z_{rr}]^{-1} [v_r] \quad (9.77)$$

Estas dos ecuaciones se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} [v_e] \\ [i_r] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [[Z_{ee}] - [Z_{er}] [Z_{rr}]^{-1} [Z_{re}]] & [[Z_{er}] [Z_{rr}]^{-1}] \\ [-[Z_{rr}]^{-1} [Z_{re}]] & [Z_{rr}]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [i_e] \\ [v_r] \end{bmatrix} \quad (9.78)$$

Realizando las operaciones matriciales indicadas en el sistema de ecuaciones anterior se obtiene:

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \\ i_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_e + \left(L_d - \frac{L_{df}^2 p}{R_f + L_f p} \right) p & -\omega L_q & \frac{L_{df} p}{R_f + L_f p} \\ \omega \left(L_d - \frac{L_{df}^2 p}{R_f + L_f p} \right) & R_e + L_q p & \frac{\omega L_{df}}{R_f + L_f p} \\ -\frac{L_{df} p}{R_f + L_f p} & 0 & \frac{1}{R_f + L_f p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ v_f \end{bmatrix} \quad (9.79)$$

De la expresión 9.79 se puede obtener después de realizar la transformación de Laplace la impedancia operacional propia del eje directo en el dominio de la frecuencia ($p \rightarrow s$):

$$Z_{dd}(s) = R_e + \left(L_d - \frac{L_{df}^2 s}{R_f + L_f s} \right) s \quad (9.80)$$

Si se aplica un escalón de corriente en el eje directo de la máquina con el devanado de campo en cortocircuito se obtiene la siguiente tensión en la bobina del eje directo:

$$V_d(s) = Z_{dd}(s) \cdot \frac{I}{s} = \left(\frac{R_e}{s} + L_d - \frac{L_{df}^2 s}{R_f + L_f s} \right) I \quad (9.81)$$

La tensión en el instante inmediatamente posterior al cortocircuito ($t = 0^+$), se obtiene aplicando el teorema del valor inicial:

$$v_d(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot V_d(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(R_e + sL_d - \frac{L_{df}^2 s^2}{R_f + L_f s} \right) I \rightarrow sL_d' I \quad (9.82)$$

En el instante inicial, el eje directo se comporta como un circuito abierto con una impedancia infinita. Si se intercambia en la ecuación 9.80, el operador de Laplace s , por el operador de régimen permanente $j\omega$, se obtiene la respuesta en frecuencia para la impedancia del eje directo:

$$Z_{dd}(j\omega) = \left(R_e + \frac{R_f L_{df}^2 \omega^2}{R_f^2 + \omega^2 L_f^2} \right) + j\omega \left(L_d - \frac{\omega^2 L_{df}^2 L_f}{R_f^2 + \omega^2 L_f^2} \right) \quad (9.83)$$

Cuando la frecuencia $j\omega$ es reducida pero diferente de cero, la bobina tiende a comportarse de acuerdo con sus parámetros de régimen permanente, R_e y L_d . A medida que aumenta la frecuencia, el acoplamiento entre el campo y el eje directo incrementa la resistencia equivalente de la bobina y reduce la inductancia. En el límite, cuando la frecuencia tiende a infinito, la resistencia del rotor queda reflejada en el eje directo según la relación cuadrática del número de vueltas, y la inductancia de la bobina tiende al valor transitorio L_d' :

$$Z_{dd}(\omega \rightarrow 0) = R_e + j\omega L_d \quad (9.84)$$

$$Z_{dd}(\omega \rightarrow \infty) = R_e + \frac{N_d^2}{N_f^2} R_f + j\omega L_d' \quad (9.85)$$

En la figura 9.5 se representa el lugar geométrico de la impedancia propia de la bobina del eje directo con la frecuencia como parámetro. En este diagrama se puede observar que la máquina sincrónica varía durante el transitorio su impedancia de entrada. En los primeros instantes, la reactancia transitoria se manifiesta plenamente y a medida que transcurre el tiempo la impedancia se estabiliza en el valor de régimen permanente.

En el listado 12 se reproduce un procedimiento de cálculo en el entorno de programación SCILAB® que permite evaluar las corrientes en coordenadas primitivas y transformadas durante un cortocircuito brusco de la máquina sincrónica, considerando las atenuaciones debidas a las resistencias de las bobinas. En la figura 9.6(a) se muestra en un gráfico los resultados obtenidos para las variables en el sistema de coordenadas dqf , mientras que en la figura 9.6(b) se

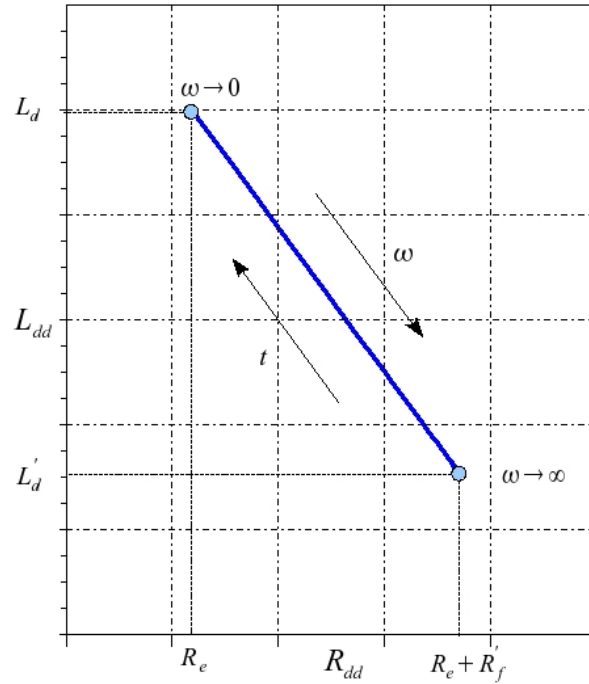


Figura 9.5 Lugar geométrico de la resistencia e inductancia propia del eje directo al variar la frecuencia ω

representan las corrientes en coordenadas primitivas a y f .

9.7. Constantes de tiempo en circuitos acoplados magnéticamente

En la máquina síncrona, el eje directo y la bobina del campo se encuentran acoplados magnéticamente tal como se muestra en la figura 9.2. Las ecuaciones que representan el comportamiento dinámico de los ejes directo y cuadratura son:

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_d + L_d p & L_{df} p \\ L_{df} p & R_f + L_f p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_f \end{bmatrix} \quad (9.86)$$

En el dominio de la transformada de Laplace se obtiene:

$$\begin{bmatrix} V_d(s) \\ V_f(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_d + L_d s & L_{df} s \\ L_{df} s & R_f + L_f s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_d(s) \\ I_f(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_d & L_{df} \\ L_{df} & L_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d(0^+) \\ i_f(0^+) \end{bmatrix} \quad (9.87)$$

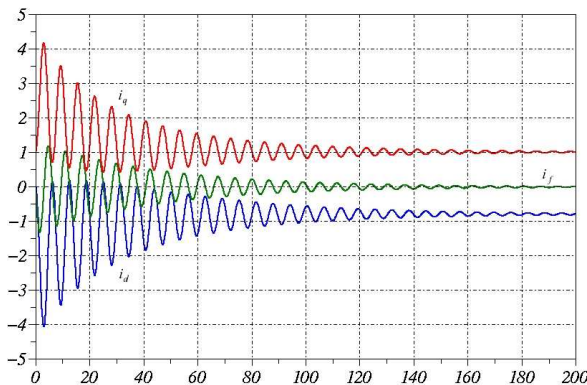
Si en el instante inicial se cortocircuitan simultáneamente ambos terminales del transformador, en presencia de flujo atrapado en las bobinas, las corrientes en el dominio de la frecuencia resultan ser:

$$\begin{bmatrix} I_d(s) \\ I_f(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} L_d(R_f + L_f s) - L_{df}^2 s & L_{df}(R_f + L_f s) - L_f L_{df} s \\ -L_{df} L_d s + L_{df}(R_d + L_d s) & -L_{df}^2 s + L_f(R_d + L_d s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d(0^+) \\ i_f(0^+) \end{bmatrix} \quad (9.88)$$

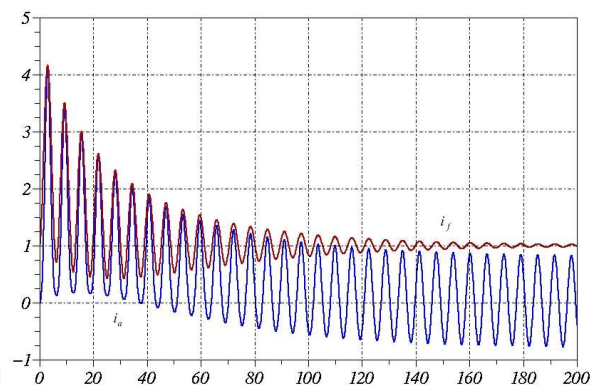
Algoritmo 12 Cálculo de las corrientes de la máquina sincrónica de polos saliente durante un cortocircuito brusco

```
// ANALISIS TRANSITORIO DE MAQUINAS SINCRONICAS
// p[i]=-[L]^-1*([R]+w*[G])+[L]^-1*[v]
// [A] =-[L]^-1*([R]+w*[G])
w = 1.0; // velocidad sincrónica
re = 0.01;rf = 0.02; // resistencia del estator y del campo
Ld = 1.0;Lq = 0.6;Lf = 1.0;Ldf= 0.8; // inductancia del eje d, q, f y mutua df
R = diag([re re rf],0); // matriz de resistencias
L = [Ld 0 Ldf;0 Lq 0;Ldf 0 Lf]; // matriz de inductancias
G = w*[0,-Lq,0;Ld,0,Ldf;0,0,0]; // matriz de generación
Lin = inv(L); // inversa de L
A =-Lin*(R+G);Ain = inv(A); // matriz de transición de estado y su inversa
[V,g] = eig(A); // autovectores y autovalores de A
io = [0;0;1]; // condiciones iniciales prefalla
t = 0:.1:160; // tiempo de la solución en pu
e1=exp(g(1,1)*t); // decaimiento del 1er autovalor
e2=exp(g(2,2)*t); // decaimiento del 2do autovalor
e3=exp(g(3,3)*t); // decaimiento del 3er autovalor
ip =-Ain*Lin*[0;0;rf*1]; // solución particular p[i]=0
ih = io-ip; // corrientes homogéneas en t=0+
k=inv(V)*ih; // coeficientes homogéneos
ke = diag(k,0)*[e1;e2;e3]; i = V*ke; // solución homogénea
for m=1:length(t); // solución total
    i(1,m)=i(1,m)+ip(1); // id
    i(2,m)=i(2,m)+ip(2); // iq
    i(3,m)=i(3,m)+ip(3); // if
end;
scf(0)
plot(t,i(1,:),t,i(2,:),t,i(3,:)) // gráfico de las corrientes id,iq e if
// transformación inversa de Park

scf(1)
ia=(i(1,:).*cos(w*t)-i(2,:).*sin(w*t)); // gráfico de las corrientes ia e if
plot(t,ia,t,i(3,:))
```



(a) Corrientes directa, cuadratura y de campo



(b) Corrientes de armadura y de campo

Figura 9.6 Corrientes de corto circuito de la máquina sincrónica

donde:

$$D = (R_d + L_d s)(R_f + L_f s) - L_{df}^2 s^2 \quad (9.89)$$

Considerando que en la bobina d del transformador no circulaba corriente en el instante inicial, la corriente por este circuito después del cortocircuito es:

$$I_d(s) = \frac{L_{df} R_f i_f(0^+)}{(R_d + L_d s)(R_f + L_f s) - L_{df}^2 s^2} \quad (9.90)$$

Las constantes de tiempo del circuito están determinadas por el denominador de la ecuación 9.90. Este denominador se puede expresar de la siguiente forma:

$$D = L_{df}^2 \left[(1 + \sigma_d)(1 + \sigma_f) \left(\frac{1}{\tau_{d0}} + s \right) \left(\frac{1}{\tau_{f0}} + s \right) - s^2 \right] \quad (9.91)$$

donde:

$$\tau_{d0} = \frac{L_d}{R_e} ; \quad \tau_{f0} = \frac{L_f}{R_f} ; \quad \sigma_d = \frac{L_{\sigma d}}{L_{df}} ; \quad \sigma_f = \frac{L_{\sigma f}}{L_{df}} \quad (9.92)$$

Cuando el acoplamiento es perfecto, los coeficientes de dispersión σ_d y σ_f son cero, en este caso el denominador 9.91 se reduce a:

$$D = L_{df}^2 \left[\left(\frac{1}{\tau_{d0}} + \frac{1}{\tau_{f0}} \right) s + \frac{1}{\tau_{d0} \tau_{f0}} \right] = L_{df}^2 \left(\frac{1}{\tau_{d0}} + \frac{1}{\tau_{f0}} \right) \left(s + \frac{1}{\tau_{d0} + \tau_{f0}} \right) \quad (9.93)$$

Si el acoplamiento es perfecto, el sistema tiene una sola constante de tiempo que es igual a la suma de las constantes de tiempo de cada una de las bobinas. En cambio, cuando el acoplamiento es muy débil, los coeficientes de dispersión son muy grandes y el denominador 9.90 se reduce aproximadamente a:

$$D = L_{df}^2 (1 + \sigma_d)(1 + \sigma_f) \left(s + \frac{1}{\tau_{d0}} \right) \left(s + \frac{1}{\tau_{f0}} \right) \quad (9.94)$$

Las constantes de tiempo son idénticas en este caso a cada una de las constantes de tiempo de los circuitos propios en vacío. Cuando el circuito magnético está fuertemente desacoplado, las bobinas actúan independientemente una de la otra.

En un circuito magnético ideal, el acoplamiento es perfecto. Aun cuando físicamente esto no es posible, en la práctica el acoplamiento puede llegar a ser prácticamente perfecto. Los enlaces de flujo no pueden cambiar en un tiempo cero sin un consumo infinito de potencia, por esta razón se cumple siempre en cualquier caso:

$$\begin{bmatrix} \lambda_d(0^-) \\ \lambda_f(0^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_d & L_{df} \\ L_{df} & L_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d(0^-) \\ i_f(0^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_d & L_{df} \\ L_{df} & L_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d(0^+) \\ i_f(0^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_d(0^+) \\ \lambda_f(0^+) \end{bmatrix} \quad (9.95)$$

En la condición ideal de acoplamiento perfecto, el determinante de la matriz de inductancias es cero:

$$L_d L_f - L_{df}^2 = L_{df}^2 (1 + \sigma_d)(1 + \sigma_f) - L_{df}^2 \approx 0, \quad \text{si } \sigma_d \approx \sigma_f \approx 0 \quad (9.96)$$

Una de las dos ecuaciones del sistema 9.95 es linealmente dependiente de la otra. En presencia

de acoplamiento perfecto, las corrientes entre el instante $t = 0^-$ y $t = 0^+$ no se mantienen necesariamente constantes. En cambio, los enlaces de flujo sí tienen que permanecer constantes entre estos dos instantes. Por esta razón, siempre se cumple que:

$$L_d i_d(0^-) + L_{df} i_f(0^-) = L_d i_d(0^+) + L_{df} i_f(0^+) \quad (9.97)$$

Con cualquier otro acoplamiento, se mantienen constantes las corrientes entre los instantes anterior y posterior al cortocircuito:

$$i_d(0^-) = i_d(0^+) \quad (9.98)$$

$$i_f(0^-) = i_f(0^+) \quad (9.99)$$

9.8. Análisis transitorio aproximado

Los términos de transformación en el modelo en coordenadas dqf de la máquina sincrónica son despreciables en comparación con los términos de generación³. En el campo todas las fuerzas electromotrices son de transformación, y por esta razón no es posible despreciar ningún término en la ecuación correspondiente a esta bobina. Las ecuaciones de la máquina sincrónica, al despreciar los términos de transformación asociados con el eje directo y cuadratura, se pueden representar de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \\ v_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_e & -X_q & 0 \\ X_d & R_e & \omega L_{df} \\ L_{df} p & 0 & R_f + L_f p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_f \end{bmatrix} \quad (9.100)$$

Durante los primeros instantes del período transitorio, el enlace de flujo de la bobina de campo λ_f se mantiene prácticamente constante. Las corrientes i_d e i_f deben variar para mantener constante este enlace de flujo. Si se considera que el enlace de flujo se mantiene mediante una corriente equivalente que circula por la bobina de campo, se puede evaluar la fuerza electromotriz que este enlace produce sobre el eje cuadratura:

$$e'_f = \omega L_{df} i_{f \text{ equi}} = \omega L_{df} \frac{\lambda_f}{L_f} = \omega L_{df} \frac{L_f i_f + L_{df} i_d}{L_f} = \omega L_{df} i_f + \omega \frac{L_{df}^2}{L_f} i_d = e_f + (X_d - X'_d) i_d \quad (9.101)$$

La fuerza electromotriz transitoria e'_f permanece constante mientras que no varíe el enlace de flujo del campo λ_f . La ecuación 9.101 determina el valor de esta fuerza electromotriz. En convención generador y en representación fasorial, la fuerza electromotriz transitoria \mathbf{E}'_f es:

$$\mathbf{E}'_f = \mathbf{E}_f - j(X_d - X'_d) \mathbf{I}_d = \mathbf{V}_e + jX'_d \mathbf{I}_d + jX_q \mathbf{I}_q \quad (9.102)$$

La expresión 9.102 determina la fuerza electromotriz transitoria, que permanece prácticamente constante mientras no decae el enlace de flujo del campo. Para evaluar la fuerza electromotriz transitoria es necesario determinar las corrientes \mathbf{I}_d e \mathbf{I}_q de régimen permanente, antes de que ocurra la perturbación. Con las corrientes de régimen permanente se construye el diagrama

³Recuerde que en el sistema de coordenadas dqf las corrientes y tensiones de régimen permanente son constantes.

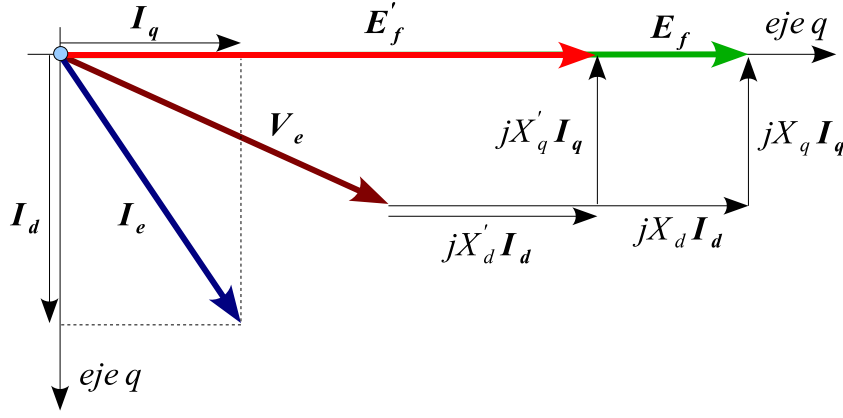


Figura 9.7 Diagrama fasorial aproximado de la fuerza electromotriz transitoria

fasorial utilizando como parámetro la reactancia transitoria del eje directo X'_d , en lugar de la reactancia de régimen permanente X_d . En el eje cuadratura no existe acoplamiento magnético con la bobina de campo, y la reactancia de régimen permanente de este eje continúa siendo X_q . En la figura 9.7 se representa el diagrama fasorial del procedimiento descrito.

El diagrama fasorial de la figura 9.7 representa la fuerza electromotriz transitoria que se mantiene constante durante los primeros instantes posteriores a la perturbación, evaluada a partir de las condiciones de operación previas. El decaimiento de estas condiciones está determinado por la constante de tiempo transitoria del campo:

$$\tau'_f = \frac{L'_f}{R_f} = \frac{L_f - \frac{L_{df}^2}{L_d}}{R_f} = \tau_{d0} - \frac{L_{df}^2}{R_f L_d} \quad (9.103)$$

Si la condición de operación una vez ocurrida la perturbación es una variación súbita de la tensión de armadura, tal como sucede en el caso del cortocircuito brusco, se puede recalculer el diagrama fasorial transitorio aproximado utilizando la nueva tensión de armadura, la fuerza electromotriz transitoria, la reactancia transitoria del eje directo y la reactancia del eje cuadratura. Las corrientes resultantes de este análisis son aproximadamente las que se obtienen en los primeros instantes del transitorio para la componente de frecuencia fundamental de la solución. Durante el período de validez de esta aproximación, la potencia eléctrica media suministrada por la máquina a la red se determina aproximadamente mediante la siguiente expresión:

$$P_e = \frac{V_e E'_f}{X'_d} \sin \delta + \frac{V_e^2}{2} \left[\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X'_d} \right] \sin 2\delta \quad (9.104)$$

Utilizando este método para evaluar las corrientes de cortocircuito franco de la máquina sincrónica, se determina en primer lugar la fuerza electromotriz transitoria con las condiciones de operación previas a la perturbación:

$$\mathbf{E}'_f = \mathbf{V}_e + jX_q \mathbf{I}_e + j(X_d - X'_d) \mathbf{I}_d \quad (9.105)$$

Posteriormente se resuelve el diagrama fasorial con las nuevas condiciones impuestas por la

perturbación:

$$\mathbf{E}'_f = \mathbf{V}'_e + jX'_d \mathbf{I}'_d + jX_q \mathbf{I}'_q = \mathbf{V}'_e + jX_q \mathbf{I}'_e + j(X_d - X_q) \mathbf{I}'_q \quad (9.106)$$

Durante el cortocircuito, la tensión de armadura \mathbf{V}'_e es cero. La corriente se encuentra retrasada 90° con respecto a la fuerza electromotriz \mathbf{E}'_f , cuando se considera que la impedancia interna de la máquina es completamente inductiva, al despreciar las resistencias de los devanados. La corriente transitoria de cortocircuito se calcula de la siguiente forma:

$$\mathbf{E}'_f = \mathbf{V}'_e + jX_q \mathbf{I}'_d + j(X'_d - X_q) \mathbf{I}'_q = jX'_d \mathbf{I}'_d \Rightarrow \mathbf{I}'_d = \frac{\mathbf{E}'_f}{jX'_d} \quad (9.107)$$

9.9. Pequeñas oscilaciones de la máquina sincrónica

En los análisis transitorios electromagnéticos realizados en las secciones precedentes se considera que la velocidad mecánica del rotor de la máquina permanece prácticamente constante durante todo el tiempo que dura el proceso. Esta aproximación se justifica por la diferencia existente entre las constantes de tiempo del circuito electromagnético y del sistema mecánico. Cuando se considera que la velocidad de la máquina permanece constante, se simplifica notablemente el problema porque el conjunto de ecuaciones diferenciales que definen su comportamiento es lineal y puede ser resuelto mediante técnicas analíticas. Sin embargo, la velocidad de la máquina depende del equilibrio existente entre el par eléctrico y el par mecánico. Este equilibrio se rompe frecuentemente durante la operación normal de la máquina, por variaciones del par mecánico de accionamiento, perturbaciones de la red o cambios en la excitatriz de la máquina. Muchas de estas perturbaciones o variaciones son de pequeña magnitud y aun cuando el modelo que representa el comportamiento de la máquina es no lineal y de gran complejidad, es posible simplificar el problema, linealizando las ecuaciones en el entorno de un determinado punto de operación. De esta forma se analizan las oscilaciones naturales de la máquina sincrónica sometida a pequeñas perturbaciones de sus condiciones de operación.

La ecuación diferencial que representa matemáticamente la dinámica del sistema mecánico es la siguiente:

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + \alpha \frac{d\theta}{dt} = J \frac{d\omega_m}{dt} + \alpha\omega_m = T_m - T_e \quad (9.108)$$

donde:

J es la constante de inercia de las masas rotantes, y
 α es el coeficiente de fricción.

Multiplicando la expresión anterior por la velocidad mecánica y dividiendo por la potencia aparente base de la máquina, se obtiene el balance de potencias en el sistema adimensional de unidades:

$$\frac{J\omega_m}{S_B} \frac{d\omega_m}{dt} + \frac{\alpha\omega_m}{S_B} \omega_m = P_m(pu) - P_e(pu) \quad (9.109)$$

Multiplicando y dividiendo el primer miembro de la ecuación 9.109 por la velocidad base ω_B , se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{J\omega_m\omega_B}{S_B} \frac{d\omega_m(pu)}{dt} + \frac{\alpha\omega_m\omega_B}{S_B} \omega_m(pu) = P_m(pu) - P_e(pu) \quad (9.110)$$

La velocidad mecánica del rotor permanece en todo momento cercana a la velocidad sincrónica $\omega_m \approx \omega_B$, que es la base de velocidad del sistema adimensional de unidades utilizado. Por esta razón, la ecuación 9.110 se puede expresar en forma aproximada como:

$$\frac{J\omega_B^2}{S_B} \frac{d\omega_m(pu)}{dt} + \frac{\alpha\omega_B^2}{S_B} \omega_m(pu) = P_m(pu) - P_e(pu) \quad (9.111)$$

Definiendo la constante de inercia H en el sistema adimensional de unidades como el cociente entre la energía cinética W_k acumulada en la masa rotante de la máquina girando a la velocidad sincrónica ω_B y la potencia base S_B :

$$H = \frac{W_k(\omega_B)}{S_B} = \frac{\frac{1}{2}J\omega_B^2}{S_B} \quad (9.112)$$

la ecuación 9.111 se expresa como:

$$2H \frac{d\omega_m(pu)}{dt} + P_p(pu)\omega_m(pu) = P_m(pu) - P_e(pu) \quad (9.113)$$

donde:

$P_p(pu)$ representa las pérdidas mecánicas a la velocidad sincrónica en por unidad de la potencia base.

El ángulo de carga δ está definido por las posiciones respectivas del eje magnético de la pieza polar y de la amplitud del campo magnético rotatorio producido por las bobinas del estator. El primero gira a la velocidad mecánica y el segundo a la velocidad sincrónica. La variación del ángulo de carga δ está determinado por la diferencia entre estas dos velocidades:

$$\frac{d\delta}{dt} = \omega_m - \omega_s = \omega_B \left[\frac{\omega_m}{\omega_B} - \frac{\omega_s}{\omega_B} \right] = \omega_B [\omega_m(pu) - 1] \quad (9.114)$$

$$\omega_m(pu) = \frac{1}{\omega_B} \frac{d\delta}{dt} + 1 \quad (9.115)$$

$$\frac{d\omega_m}{dt} = \frac{1}{\omega_B} \frac{d^2\delta}{dt^2} \quad (9.116)$$

Reemplazando las expresiones 9.115 y 9.116 en la ecuación 9.113, se obtiene:

$$\frac{2H}{\omega_B} \frac{d^2\delta}{dt^2} + \frac{P_p}{\omega_B} \frac{d\delta}{dt} = P_m - P_e - P_p \quad (9.117)$$

En régimen permanente la velocidad es constante, por tanto las derivadas primera y segunda del ángulo de carga con respecto al tiempo son nulas y por tanto la expresión 9.117 es:

$$P_m - P_e - P_p = 0 \quad (9.118)$$

La expresión 9.118 determina el punto de equilibrio en régimen permanente y la ecuación diferencial 9.117 representa la dinámica del sistema mecánico. Esta ecuación diferencial no es lineal debido a que la potencia eléctrica entregada por la máquina sincrónica tiene una dependencia no lineal con el ángulo de carga. Sin embargo, cuando la variación del ángulo de carga es pequeña, se puede linealizar la ecuación diferencial en el entorno del punto de equilibrio, obteniéndose las siguientes relaciones:

$$\delta = \delta_0 + \Delta\delta \quad (9.119)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{d\delta_0}{dt} + \frac{d\Delta\delta}{dt} = \frac{d\Delta\delta}{dt} \quad (9.120)$$

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left[\frac{d\Delta\delta}{dt} \right] = \frac{d^2\Delta\delta}{dt^2} \quad (9.121)$$

La ecuación de la potencia eléctrica, linealiza en el entorno del punto de equilibrio es:

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{V_e E'_f}{X'_d} \sin(\delta_0 + \Delta\delta) + \frac{V_e^2}{2} \left[\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X'_d} \right] \sin 2(\delta_0 + \Delta\delta) \approx \\ &\approx \left[\frac{V_e E'_f}{X'_d} \sin \delta_0 + \frac{V_e^2}{2} \left[\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X'_d} \right] \sin 2\delta_0 \right] + \left[\frac{V_e E'_f}{X'_d} \cos \delta_0 + V_e^2 \left[\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X'_d} \right] \cos 2\delta_0 \right] \Delta\delta \approx \\ &\approx P_e(\delta_0) + \frac{\partial P_e(\delta_0)}{\partial \delta} \Delta\delta \approx P_e(\delta_0 + \Delta\delta) \approx P_e(\delta) \end{aligned} \quad (9.122)$$

La expresión anterior aproxima la potencia eléctrica mediante una expansión en series de Taylor centrada en el punto de equilibrio de potencias y truncada a partir de los términos de segundo orden. El primer término de la ecuación 9.122 representa la potencia eléctrica en el punto de equilibrio, y el segundo término se define como el incremento de la potencia eléctrica con el ángulo de carga en el entorno del punto de equilibrio, conocido como potencia sincronizante de la máquina sincrónica.

Reemplazando la expresiones 9.118, 9.120, 9.121 y 9.122 en la ecuación 9.117, se obtiene el siguiente resultado:

$$\frac{2H}{\omega_B} \frac{d^2\Delta\delta}{dt^2} + \frac{P_p}{\omega_B} \frac{d\Delta\delta}{dt} + \frac{\partial P_e(\delta_0)}{\partial \delta} \Delta\delta = P_m - P_e - P_p = 0 \quad (9.123)$$

Esta expresión es una ecuación diferencial lineal y homogénea de segundo grado. Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación anterior, se obtiene:

$$\left[\frac{2H}{\omega_B} s^2 + \frac{P_p}{\omega_B} s + \frac{\partial P_e(\delta_0)}{\partial \delta} \right] \Delta\delta(s) = \frac{2H}{\omega_B} \frac{d\Delta\delta(0^+)}{dt} + \frac{P_p}{\omega_B} \Delta\delta(0^+) \quad (9.124)$$

Considerando que la variación del incremento del ángulo con respecto al tiempo es desprecia-

ble en el instante inmediatamente posterior a la perturbación, se obtiene la siguiente ecuación algebraica:

$$\Delta\delta(s) = \frac{\frac{P_p}{2H} \Delta\delta(0^+)}{\omega_B s^2 + \frac{P_p}{\omega_B} s + \frac{\partial P_e(\delta_0)}{\partial \delta}} \quad (9.125)$$

Los polos del polinomio del denominador de la expresión anterior determinan las frecuencias naturales y los respectivos amortiguamientos de las oscilaciones de la máquina sincrónica sometida a pequeñas perturbaciones:

$$s_{1,2} = \frac{-P_p \pm \sqrt{P_p^2 - 8H\omega_B \frac{\partial P_e(\delta_0)}{\partial \delta}}}{4H} \quad (9.126)$$

Como las pérdidas mecánicas son muy pequeñas, pueden ser despreciadas en esta última expresión, obteniéndose de esta forma la frecuencia natural de oscilación de la máquina sincrónica en el entorno de un determinado punto de equilibrio:

$$s_{1,2} = \pm j \sqrt{\frac{\omega_B \frac{\partial P_e(\delta_0)}{\partial \delta}}{2H}} = \pm j \omega_{nat} \quad (9.127)$$

Debido a que las pérdidas de la máquina son despreciables, la máquina sincrónica oscila alrededor del punto de equilibrio permanentemente o con un decaimiento exponencial muy lento, tal como ocurre en las oscilaciones de un péndulo físico alrededor de su punto de equilibrio. Para estabilizar el punto de operación de la máquina es necesario incrementar el amortiguamiento del sistema, evitando aumentar las pérdidas mecánicas en el punto de operación. Esto se puede lograr incluyendo un enrollado amortiguador en el rotor de la máquina sincrónica semejante al devanado de jaula de ardilla de la máquina de inducción. Cuando la máquina se encuentra operando a la velocidad sincrónica, no circula corriente por el devanado amortiguador. Si varía la velocidad mecánica de la máquina, el deslizamiento entre el campo y el rotor, fuerza la circulación de corrientes por las barras del devanado amortiguador y se produce un par eléctrico contrario a la dirección de la diferencia de velocidades.

Si las perturbaciones en el ángulo de carga son pequeñas, el deslizamiento también tiene una magnitud reducida. El par de inducción de un devanado amortiguador de jaula de ardilla es lineal con respecto al deslizamiento cuando el deslizamiento es pequeño. Como la velocidad es prácticamente constante en estas condiciones, la potencia de inducción se puede expresar aproximadamente de la siguiente forma:

$$P_{ind} = T_{ind} \cdot \omega_m \approx \frac{s}{s_n} T_n \omega_B = \frac{s}{s_n} P_{n_{ind}} = Ds = D \left[1 - \frac{\omega_m}{\omega_B} \right] = -D \frac{d\Delta\delta}{dt} \quad (9.128)$$

Incluyendo la potencia de inducción en la ecuación diferencial 9.123, se obtiene:

$$\frac{2H}{\omega_B} \frac{d^2 \Delta\delta}{dt^2} + \frac{P_p + D}{\omega_B} \frac{d\Delta\delta}{dt} + \frac{\partial P_e(\delta_0)}{\partial \delta} \Delta\delta = 0 \quad (9.129)$$

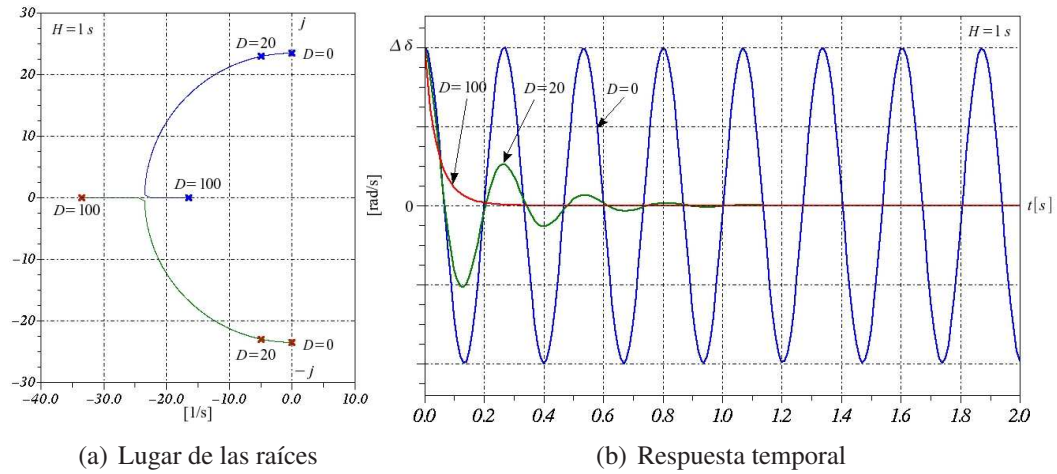


Figura 9.8 Lugar de las raíces y respuesta temporal de las pequeñas oscilaciones

La incorporación del devanado amortiguador modifica los modos de oscilación de la máquina:

$$s_{1,2} = \frac{-(P_p + D) \pm \sqrt{(P_p + D)^2 - 8H\omega_B \frac{\partial P_e(\delta_0)}{\partial \delta}}}{4H} \quad (9.130)$$

Cuando se diseña el devanado amortiguador de la máquina síncrona es posible obtener una característica de la jaula de ardilla que produzca un par de inducción lo suficientemente elevado como para permitir la anulación del término radical de la expresión 9.130. En estas condiciones el amortiguamiento es crítico y la respuesta dinámica de la máquina ante pequeñas perturbaciones no es oscilatoria. Aun cuando no sea posible obtener una respuesta crítica amortiguada, un amortiguamiento típico de 20 en por unidad reduce rápidamente las oscilaciones, tal como se observa en la figura 9.8.

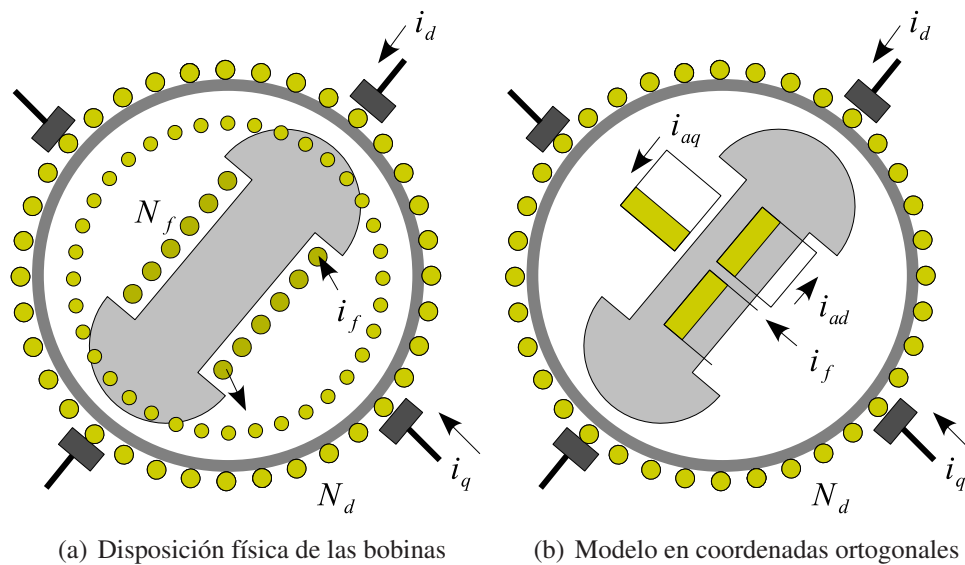


Figura 9.9 Representación de los devanados amortiguadores de la máquina síncrona

9.10. Efecto del devanado amortiguador

Al incluir un devanado amortiguador en el rotor de la máquina síncrona, aumenta la reluctancia del camino principal y se reduce la reactancia del eje directo. La fuerza electromotriz del campo se debilita por la misma razón. El devanado amortiguado obliga a incrementar las corrientes de campo para compensar la disminución de la permeancia del circuito magnético. Por otra parte, este devanado evita en cierta medida que los campos producidos en el estator corten a los conductores del campo cuando la velocidad del rotor es diferente a la velocidad síncrona. Si el flujo principal corta a los conductores de la bobina de campo, pueden inducirse fuerzas electromotrices tan intensas como para alcanzar la ruptura dieléctrica del aislamiento. La jaula de ardilla o devanado amortiguador, además de mejorar la respuesta dinámica propia de la máquina, protege la integridad del aislamiento de la bobina de excitación, blindando el corte de estos conductores por el flujo principal.

El devanado amortiguador de la máquina síncrona puede modelarse mediante dos bobinas ortogonales cortocircuitadas, una en la dirección del eje directo y la otra en la dirección del eje cuadratura. De esta forma aparecen nuevos acoplamientos entre las bobinas de la máquina y los devanados amortiguadores. En la figura 9.9 se presenta un diagrama esquemático de esta situación.

En la dirección del eje directo existe acoplamiento magnético entre el campo, la bobina de la armadura y el devanado amortiguador ad . En el eje cuadratura, existe acoplamiento entre la bobina q de armadura y el devanado amortiguador aq . En el eje directo las bobinas se pueden representar como un transformador de tres devanados y en el eje cuadratura como un transformador de dos enrollados. En la figura 9.11 se representa el circuito equivalente de los cinco devanados y sus respectivos acoplamientos de transformación y generación.

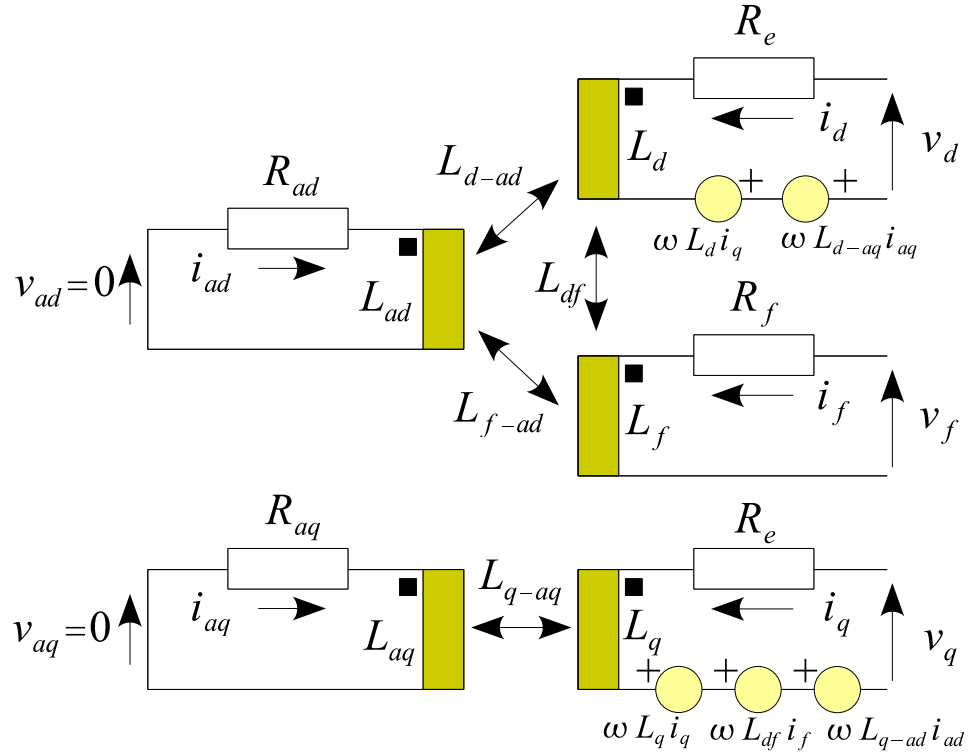


Figura 9.10 Circuito equivalente de la máquina síncrona con devanado amortiguador

Las ecuaciones diferenciales de la máquina síncrona con devanados amortiguadores son:

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \\ v_f \\ v_{ad} \\ v_{aq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_e + L_d p & -\omega L_q & L_{df} p & L_{d-ad} p & -\omega L_{d-aq} \\ \omega L_d & R_e + L_q p & \omega L_{df} & \omega L_{q-ad} & L_{q-aq} p \\ L_{df} p & 0 & R_f + L_f p & L_{f-ad} p & 0 \\ L_{d-ad} p & 0 & L_{ad-f} p & R_a + L_{ad} p & 0 \\ 0 & L_{aq-q} p & 0 & 0 & R_a + L_{aq} p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_f \\ i_{ad} \\ i_{aq} \end{bmatrix} \quad (9.131)$$

Los devanados amortiguadores se encuentran muy cerca de las bobinas del estator, el acoplamiento entre estos circuitos es muy alto. Durante los primeros instantes de la perturbación, los amortiguadores mantienen los enlaces de flujo previos y se reflejan sobre la armadura produciendo las reactancias subtransitorias del eje directo y del eje cuadratura:

$$L_d'' = L_d - \frac{L_{d-ad}^2}{L_{ad}} \quad (9.132)$$

$$L_q'' = L_q - \frac{L_{q-aq}^2}{L_{aq}} \quad (9.133)$$

Las inductancias subtransitorias del eje directo y cuadratura se obtienen con una metodología similar a la utilizada para determinar la inductancia transitoria del eje directo. La inductancia transitoria se define cuando el campo se refleja sobre el eje directo, en las reactancias subtransitorias los devanados amortiguadores se reflejan sobre sus respectivos ejes de acoplamiento magnético. Como el acoplamiento mutuo entre los amortiguadores y la armadura es muy alto,

Tabla 9.2 Rango de los valores de las reactancias subtransitorias

X_d''	X_q''
0, 12 ~ 0, 18 pu	0, 10 ~ 0, 15 pu

las inductancias subtransitorias L_d'' y L_q'' , son menores que la inductancia transitoria L_d' . En el sistema adimensional de unidades estas reactancias se encuentran normalmente en el rango que se muestra en la tabla 9.2.

En el código 13 se reproduce el listado y los resultados intermedios de un algoritmo desarrollado en el entorno de programación SCILAB®, que permite evaluar el comportamiento de las corrientes en coordenadas transformadas y primitivas de una máquina sincrónica con devanados amortiguadores, sometida a un cortocircuito brusco.

9.11. Análisis subtransitorio aproximado

En la sección 9.8 se desarrolló un método aproximado para la evaluación de la corriente transitoria de la máquina sincrónica de polos salientes sin devanados amortiguadores. Esta aproximación utilizada consiste en suponer que los enlaces de flujo del devanado de campo se mantienen prácticamente constantes durante un cierto tiempo y que los términos de transformación asociados a las bobinas de armadura son despreciables. Si la máquina posee devanados amortiguadores, es posible considerar una hipótesis similar con respecto a los enlaces de flujo existentes en estas bobinas. Conservándose prácticamente constantes los enlaces de flujo en los devanados amortiguadores, las fuerzas electromotrices generadas por estos enlaces de flujos también se mantienen constantes. Con esta hipótesis se pueden definir dos fuerzas electromotrices subtransitorias, e_d'' y e_q'' :

$$\begin{aligned} e_d'' &= -\omega L_{d-aq} i_{aq_{equ}} = -\omega L_{d-aq} \frac{\lambda_{aq}}{L_{aq}} = -\omega L_{d-aq} \frac{L_{aq} i_{aq} + L_{q-aq} i_q}{L_{aq}} = \\ &= -\omega L_{aq} i_{aq} - \omega \frac{L_{d-aq} L_{q-aq}}{L_{aq}} i_q = -\omega \frac{L_{q-aq}^2}{L_{aq}} i_q = -\omega (L_q - L_q'') i_q \end{aligned} \quad (9.134)$$

$$\begin{aligned} e_q'' &= \omega L_{q-ad} i_{ad_{equ}} = \omega L_{q-ad} \frac{\lambda_{ad}}{L_{ad}} = \omega L_{q-ad} \frac{L_{ad} i_{ad} + L_{d-ad} i_d + L_{f-ad} i_f}{L_{ad}} = \\ &= \omega \frac{L_{q-ad} L_{d-ad}}{L_{ad}} i_d + \omega \frac{L_{q-ad} L_{f-ad}}{L_{ad}} i_f = \omega \frac{L_{d-ad}^2}{L_{ad}} i_d + \omega L_{df} i_f = -\omega (L_d - L_d'') i_d + e_f \end{aligned} \quad (9.135)$$

Representando fasorialmente las relaciones 9.134 y 9.135 en la convención generador se obtiene:

$$\mathbf{E}_d'' = E_d'' = -j(X_q - X_q'') \mathbf{I}_q \quad (9.136)$$

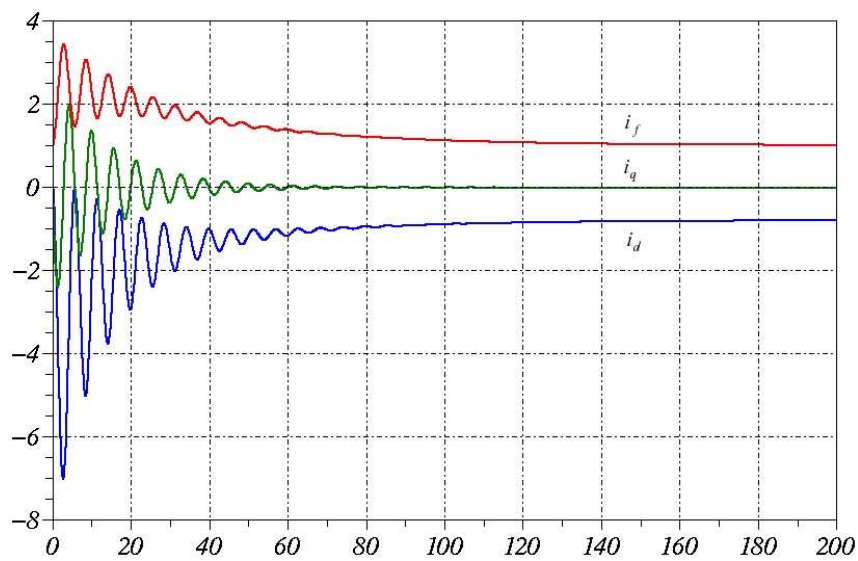
$$\mathbf{E}_q'' = jE_q'' = -j(X_d - X_q'') \mathbf{I}_d + \mathbf{E}_f = -j(X_d - X_q'') \mathbf{I}_d + \mathbf{V}_e + jX_d \mathbf{I}_d + jX_q \mathbf{I}_q \quad (9.137)$$

$$\mathbf{E}_f'' = \mathbf{E}_d'' + \mathbf{E}_q'' = \mathbf{V}_e + jX_d'' \mathbf{I}_d + jX_q'' \mathbf{I}_q \quad (9.138)$$

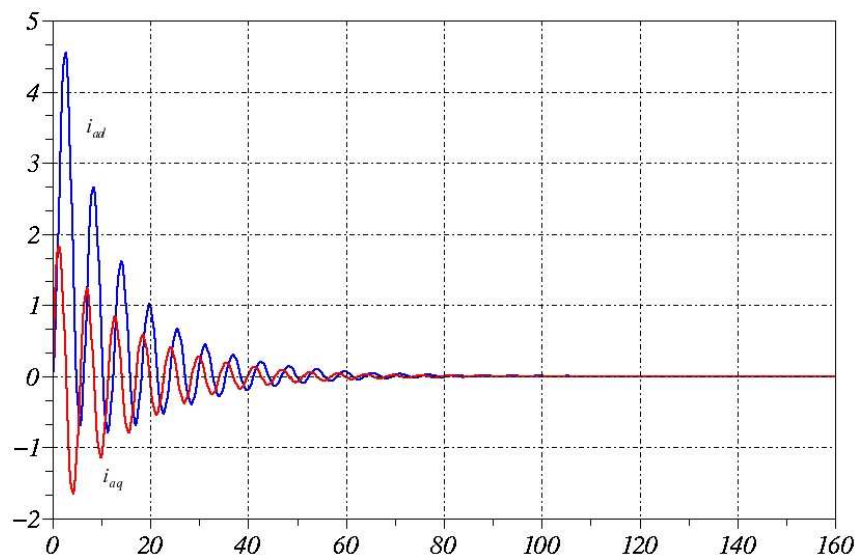
La fuerza electromotriz subtransitoria \mathbf{E}_f'' , se mantiene prácticamente constante durante una perturbación, mientras que los enlaces de flujo de las bobinas amortiguadoras no decaen. La fuerza

Algoritmo 13 Análisis transitorio de la máquina síncrona con devanados amortiguadores

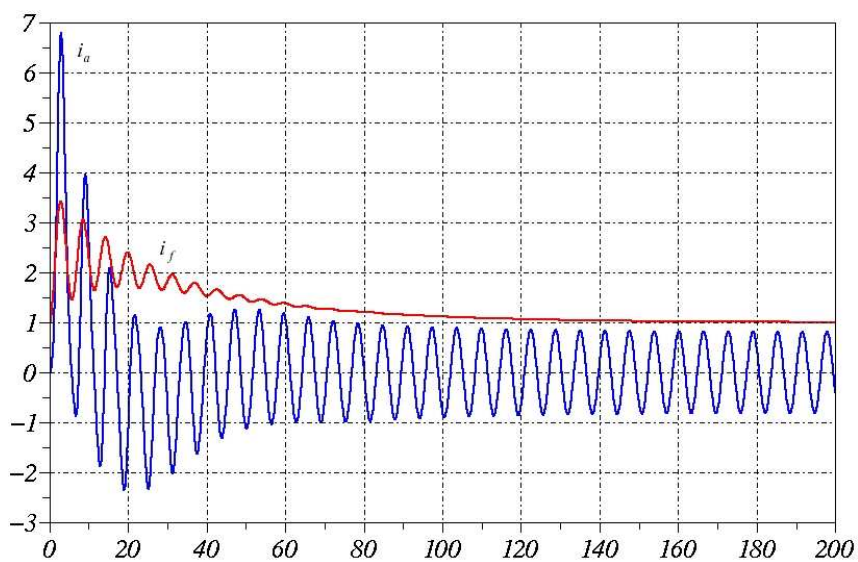
```
// ANALISIS TRANSITORIO DE MAQUINAS SINCRONICAS CON DEVANADOS AMORTIGUADORES
// p[i]=-[L]^-1*([R]+w*[G])+[L]^-1*[v]
// [A] =-[L]^-1*([R]+w*[G])
w = 1.0 // velocidad síncrona w = 1
rd=0.01;rq=0.01;rad=0.03;raq=0.03;rf=0.01;
R = diag([rd rq rad raq rf],0); // matriz de resistencias
Ld =1.0;Lq =0.6;Lad=0.90;Laq=0.50;Lf=1.0;
Ldad=0.85;Ldaq=0.40;Ldaq=0.40;Lqad=0.80;Lfad=0.70;Ldf= 0.8;
// matriz de inductancias
L = [Ld,0,Ldad,0,Ldf;0,Lq,0,Ldaq,0;Ldad,0,Lad,0,Lfad;0,Ldaq,0,Laq,0,Ldf,0,Lfad,0,Lf];
// matriz de generación
G = w*[0,-Lq,0,-Ldaq,0;Ld,0,Lqad,0,Ldf;0,0,0,0,0;0,0,0,0,0;0,0,0,0,0];
Lin = inv(L);A =-Lin*(R+G);Ain = inv(A); // matriz de transición de estado
[V,g] = spec(A); // autovalores y autovectores
io = [0;0;0;0;1]; // condiciones iniciales
t = 0:.25:160; // tiempo (tbase 1/377 s)
e1=exp(g(1,1)*t);e2=exp(g(2,2)*t);e3=exp(g(3,3)*t);e4=exp(g(4,4)*t);e5=exp(g(5,5)*t);
ip =-Ain*Lin*[0;0;0;0;rf*1]; // solución particular p[i]=0
ih = io-ip; // condiciones homogéneas
k= inv(V)*ih; // coeficientes homogéneos
ke = diag(k,0)*[e1;e2;e3;e4;e5]; i = V*ke; // solución homogénea
for m=1:length(t); // solución completa
    i(1,m)=i(1,m)+ip(1); // id(t)
    i(2,m)=i(2,m)+ip(2); // iq(t)
    i(3,m)=i(3,m)+ip(3); // ida(t)
    i(4,m)=i(4,m)+ip(4); // iqa(t)
    i(5,m)=i(5,m)+ip(5); // if(t)
end;
scf(0)
plot(t,i(1,:),t,i(2,:),t,i(5,:)) // Figura 9.11(a)
xgrid
scf(1)
plot(t,i(3,:),t,i(4,:)) // Figura 9.11(b)
xgrid
scf(2)
ia = (i(1,:).*cos(w*t)-i(2,:).*sin(w*t)); // Transformación de Park
plot(t,ia,t,i(5,:)) // Figura 9.11(c)
xgrid
```



(a) Corrientes directa, cuadratura y de campo



(b) Corrientes de los devanados amortiguadores d y q



(c) Corrientes de campo y de armadura

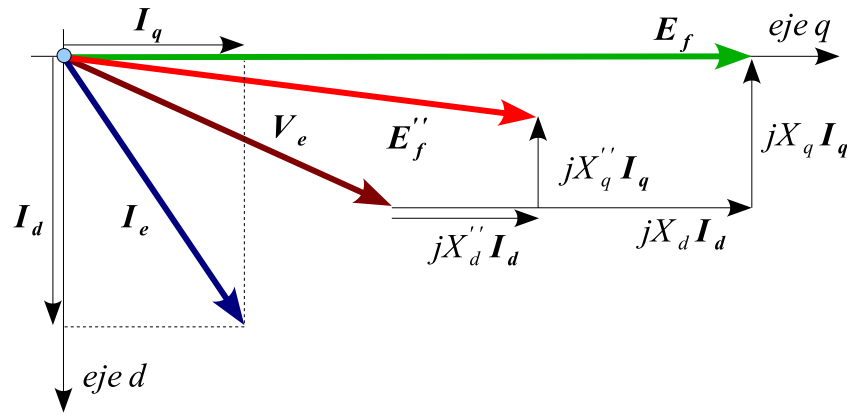


Figura 9.12 Fuerza electromotriz subtransitoria E''_f en el diagrama fasorial

electromotriz E''_f se determina a partir de la condición de régimen permanente previa a la perturbación, construyendo un diagrama fasorial con las impedancias subtransitorias, tal como se observa en la figura 9.12. A diferencia del caso transitorio, la fuerza electromotriz subtransitoria no está orientada según el eje cuadratura. Esto se debe a que el enlace de flujo atrapado en el devanado amortiguador del eje cuadratura induce fuerza electromotriz en el eje directo durante el subtransitorio. Durante el período transitorio o en máquinas sincrónicas sin devanados amortiguadores, el único enlace atrapado es el de la bobina de campo y sólo se induce fuerza electromotriz en el eje cuadratura tal como se muestra en el diagrama fasorial de mostrado en la figura 9.7.

La relación entre la inductancia de los devanados de armadura y su respectiva resistencia es menor que en el caso de la bobina de campo. Por este motivo, los enlaces de flujo de los devanados amortiguadores decaen más rápidamente que el enlace de flujo de la bobina de campo. El proceso subtransitorio desaparece durante los primeros ciclos de la perturbación. El proceso transitorio se mantiene por un tiempo más largo.

El análisis transitorio aproximado permite diseñar el sistema de protecciones térmicas de los devanados y simplificar los análisis de estabilidad de la máquina sincrónica. Mediante los análisis subtransitorios aproximados se pueden evaluar los esfuerzos mecánicos originados por las corrientes en las barras y definir los fusibles limitadores de corriente adecuados para reducir el nivel de cortocircuito en bornes de la máquina. El período subtransitorio decae muy rápidamente como para tener influencia en las variaciones de velocidad de la máquina sincrónica, por esta razón en los estudios de estabilidad es una práctica habitual utilizar las fuerzas electromotrices e inductancias transitorias para evaluar los intercambios de potencia eléctrica media entre la masa rotante y el sistema de potencia.

9.12. Determinación de las inductancias transitorias y subtransitorias

Durante el cortocircuito brusco de la máquina sincrónica, los enlaces de flujo atrapados en las bobinas son mantenidos inicialmente por los devanados amortiguadores y por el enrollado de campo de la máquina, cuando decae el enlace de los devanados amortiguadores el campo continúa manteniendo parte de los enlaces de flujo. En la figura 9.13 se ha representado el oscilograma

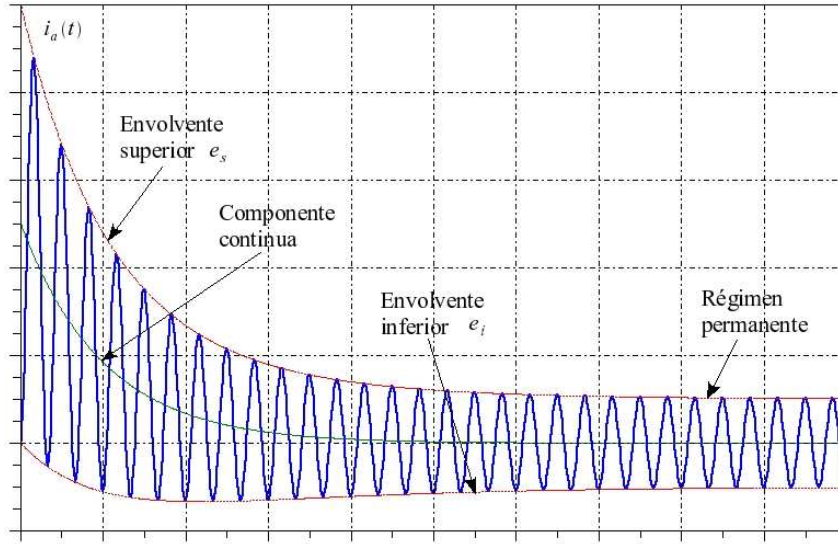


Figura 9.13 Oscilograma del cortocircuito brusco de la máquina síncrona

de la corriente de armadura durante un cortocircuito brusco de la máquina síncrona en función del tiempo. Dependiendo de la posición angular θ_0 del rotor en el instante cuando se inicia el cortocircuito, aparece una componente de corriente continua que decae exponencialmente a medida que la máquina disipa la energía acumulada en los enlaces de flujo atrapados en el instante inicial de la perturbación. En el oscilograma se han indicado la envolvente superior, la inferior y la componente de corriente continua que produce la forma asimétrica del registro.

Para determinar la inductancias y constantes de tiempo transitorias y subtransitorias de la máquina se elimina la componente continua transitoria del oscilograma anterior, restando de la corriente de armadura total, la semisuma de las envolventes superior e inferior. En la figura 9.14 se presenta el resultado obtenido al realizar esta operación. Con el gráfico simétrico o con el oscilograma original, se obtiene directamente el valor de la corriente de régimen permanente que permite evaluar la reactancia del eje directo X_d .

Al eliminar el término de régimen permanente y la componente de corriente continua, en las envolventes del oscilograma se encuentra toda la información necesaria sobre las componentes transitorias y subtransitorias de la corriente de armadura. Como las dos constantes de tiempo transitorias y subtransitorias son diferentes es posible la separación de estas dos componentes. La envolvente resultante después de eliminar las componentes de corriente continua y de régimen permanente tiene la siguiente representación funcional:

$$i'' + i' = k_1 e^{-\frac{t}{\tau''}} + k_2 e^{-\frac{t}{\tau'}} \quad (9.139)$$

El proceso subtransitorio decae muy rápidamente, por esta razón para un tiempo superior a varias constantes de tiempo subtransitorio τ'' , la envolvente tiende asintóticamente a una función exponencial que decae con la constante de tiempo transitoria τ' . Si se representa la envolvente en papel semilogarítmico, o se calcula el logaritmo de la expresión 9.139, se obtiene una función cuya asíntota es una línea recta con una pendiente igual al inverso de la constante de tiempo

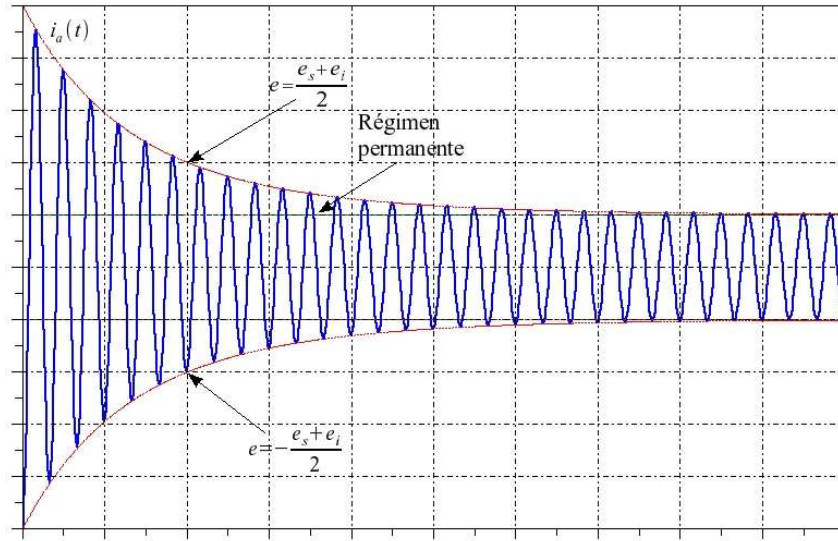


Figura 9.14 Representación simétrica de la corriente de armadura

transitoria τ' :

$$\ln(i'' + i') \rightarrow \ln k_2 - \frac{t}{\tau'} ; \text{ si } t \gg \tau'' \quad (9.140)$$

La expresión anterior permite identificar de las envolventes del oscilograma, la constante de tiempo transitoria τ' y la constante k_2 . Restando de la envolvente, la contribución transitoria, se obtiene una nueva función que depende exclusivamente de la constante de tiempo subtransitoria τ'' . Calculando el logaritmo neperiano de esta última función se determina el valor de la constante de tiempo subtransitoria:

$$\ln \left[(i'' + i') - k_2 e^{-\frac{t}{\tau'}} \right] = \ln \left[k_1 e^{-\frac{t}{\tau''}} \right] = \ln k_1 - \frac{t}{\tau''} \quad (9.141)$$

En la figura 9.15 se representa en papel semilogarítmico la envolvente $(i'' + i')$ de donde se determina la constante k_2 y la constante de tiempo τ' de la asíntota lineal de esta curva. Restando esta componente transitoria de la envolvente se obtiene la función i'' , cuya representación logarítmica es la recta punteada del diagrama. La pendiente de esta recta determina la constante de tiempo subtransitoria τ'' . Una vez obtenidas las constantes de tiempo transitorias y subtransitorias se determinan las respectivas inductancias transitorias y subtransitorias:

$$\tau' = \frac{L'_d}{R_e} \Rightarrow L'_d = \tau' R_e \quad (9.142)$$

$$\tau'' = \frac{L''_d}{R_e} \Rightarrow L''_d = \tau'' R_e \quad (9.143)$$

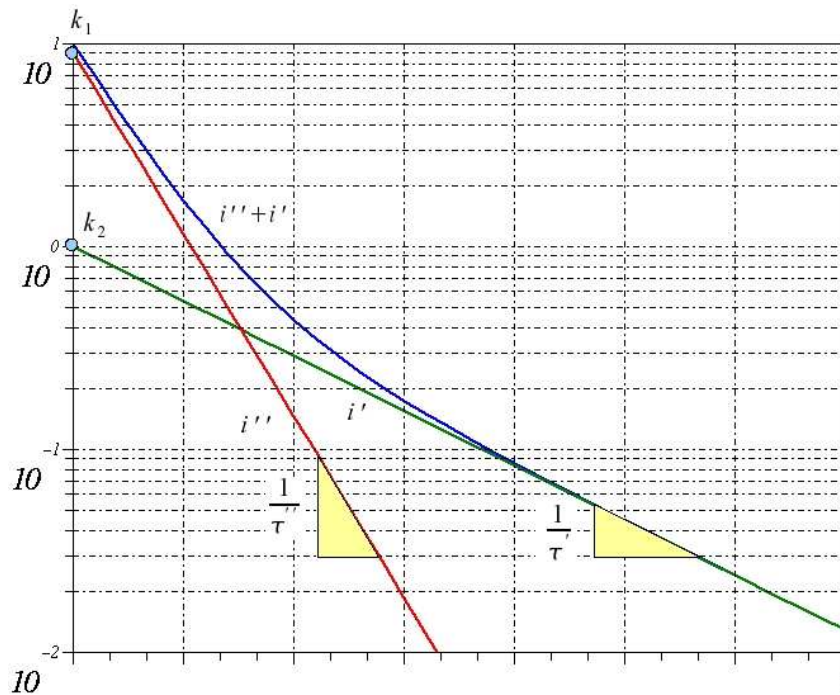


Figura 9.15 Separación de las constantes de tiempo transitoria τ' y subtransitoria τ''

9.13. Régimen desequilibrado de la máquina síncrona

Los desequilibrios de los sistemas eléctricos de potencia y de las máquinas eléctricas se pueden analizar mediante la transformación a componentes simétricas. Para este fin es necesario determinar los modelos de la máquina síncrona de polos salientes en secuencia positiva, negativa y cero.

El modelo de régimen permanente de la máquina síncrona, analizado en el capítulo 8, se obtiene al excitar la armadura de la máquina mediante un sistema balanceado de corrientes de secuencia positiva. Por tanto, el diagrama fasorial y sus ecuaciones asociadas, modelan la red de secuencia positiva de la máquina síncrona de polos salientes. En análisis aproximados, se pueden despreciar las diferencias existentes entre la reluctancia del eje directo y cuadratura del convertidor, simplificando el modelo de secuencia positiva de la máquina, a una fuerza electromotriz E_f conectada en serie con la reactancia del eje directo X_d .

El circuito equivalente de secuencia cero está constituido por la reactancia de dispersión de los devanados del estator $X_{\sigma e}$. Si se alimenta la armadura con un sistema de corrientes de secuencia cero, la fuerza magnetomotriz resultante en el entrehierro de una máquina simétrica es nula. Por este motivo, el modelo de secuencia cero de la máquina no tiene fuentes de fuerza electromotriz.

El modelo de secuencia negativa se obtiene excitando los devanados de armadura de la máquina

con un sistema balanceado de corrientes de secuencia negativa:

$$\begin{aligned} i_a(t) &= \sqrt{2}I_e \cos \omega t \\ i_b(t) &= \sqrt{2}I_e \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \\ i_c(t) &= \sqrt{2}I_e \cos(\omega t - \frac{4\pi}{3}) \end{aligned} \quad (9.144)$$

Aplicando la transformación de Park 8.46 a estas corrientes, se obtiene el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \omega t & \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\omega t - \frac{4\pi}{3}) \\ -\sin \omega t & -\sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\omega t - \frac{4\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \\ &= \sqrt{3}I_e \begin{bmatrix} \cos 2\omega t \\ -\sin 2\omega t \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9.145)$$

Despreciando las resistencias de las bobinas y reemplazando el resultado anteriores en las ecuaciones diferenciales de la máquina sincrónica 8.54, se obtiene:

$$v_d = L_d \frac{di_d}{dt} - \omega L_q i_q + L_{df} \frac{di_f}{dt} = \sqrt{3}I_e \omega (-2L_d - L_q) \sin 2\omega t + L_{df} \frac{di_f}{dt} \quad (9.146)$$

$$v_q = \omega L_d i_d + L_q \frac{di_q}{dt} + \omega L_{df} i_f = \sqrt{3}I_e \omega (L_d - 2L_q) \cos 2\omega t + \omega L_{df} i_f \quad (9.147)$$

$$v_f = L_f \frac{di_f}{dt} + L_{df} \frac{di_d}{dt} = \frac{d}{dt} (L_f i_f + L_{df} i_d) \quad (9.148)$$

Determinando de la ecuación 9.148, la corriente de campo i_f en función de la corriente del eje directo i_d , e introduciendo este resultado en las expresiones 9.146 y 9.147, se obtiene:

$$i_f = -\frac{L_{df}}{L_f} i_d + \frac{v_f}{L_f} t = -\frac{L_{df}}{L_f} (\sqrt{3}I_e \cos 2\omega t) + \frac{v_f}{L_f} t \quad (9.149)$$

$$v_d = -\sqrt{3}I_e (2X'_d - X_q) \sin 2\omega t + \frac{L_{df}}{L_f} v_f \quad (9.150)$$

$$v_q = \sqrt{3}I_e (-2X_q + X'_d) \cos 2\omega t + \frac{L_{df}}{L_f} v_f \omega t \quad (9.151)$$

Aplicando la transformación inversa de Park a las tensiones v_d y v_q determinadas en las expresiones 9.150 y 9.151:

$$\begin{aligned} v_a(t) &= \sqrt{\frac{2}{3}} (v_d \cos \omega t - v_q \sin \omega t) = \\ &= -\frac{X'_d + X_q}{2} \sqrt{2}I_e \sin \omega t + \frac{3}{2} (X_q - X'_d) \sqrt{2}I_e \sin 3\omega t + \frac{L_{df}}{L_f} v_f (\cos \omega t - \omega t \sin \omega t) \end{aligned} \quad (9.152)$$

Despreciando el término de triple frecuencia en la expresión 9.152, se obtiene la impedancia de

secuencia negativa:

$$X_- = \frac{X'_d + X_q}{2} \quad (9.153)$$

En la expresión 9.153, el término dependiente de la tensión del campo v_f , no aparece en la red de secuencia negativa porque produce una fuerza electromotriz de secuencia positiva que se ha representado previamente en su respectiva red de secuencia. Esto es equivalente a considerar que el rotor de la máquina se encuentra en cortocircuito cuando se excita el estator con un sistema trifásico balanceado de corrientes de secuencia negativa.

Las corrientes de secuencia negativa producen un campo magnético rotatorio que gira a velocidad sincrónica en sentido contrario a la referencia de giro del sistema rotórico. Alternativamente, y con una frecuencia doble de la sincrónica, el campo magnético rotatorio de secuencia negativa cruza la reluctancia del eje directo y la del eje cuadratura. Por este motivo, la impedancia de secuencia negativa es el promedio de las impedancias ofrecidas por estos dos ejes. Como las bobinas del eje directo y del campo están acopladas magnéticamente, cuando la amplitud de la fuerza magnetomotriz de armadura está alineada con el eje magnético del rotor, se refleja en bornes de la armadura, la reactancia transitoria del eje directo X'_d . Si la máquina posee devanados amortiguadores, en el eje directo y en el eje cuadratura se reflejan alternativamente las reactancias subtransitorias X''_d y X''_q , en este caso la impedancia de secuencia negativa es:

$$X_- = \frac{X''_d + X''_q}{2} \quad (9.154)$$

La componente de triple frecuencia obtenida en la expresión 9.154 se debe a que el campo magnético rotatorio de secuencia negativa corta a los conductores del rotor con dos veces la velocidad sincrónica, originando fuerzas electromotrices y corrientes de doble frecuencia en las bobinas del rotor. Estas corrientes variando al doble de la frecuencia sincrónica, producen un campo magnético rotatorio, que visto desde el estator gira a tres veces la velocidad sincrónica. Esta componente es débil y no se considera normalmente en los estudios de cortocircuitos desequilibrados clásicos o convencionales. Si es necesaria una precisión mayor en el análisis, se utiliza el modelo transitorio completo de la máquina sincrónica en coordenadas $dq0 - f$, transformando las condiciones del desequilibrio en coordenadas primitivas a coordenadas $dq0 - f$ mediante la transformación de Park y se resuelve posteriormente el sistema de ecuaciones diferenciales con estas condiciones de contorno impuestas.

9.14. Estabilidad de la máquina sincrónica

$k = \text{inv}(V) * ih$; // coeficientes homogéneos

En las secciones precedentes se analizó el comportamiento transitorio electromagnético de la máquina sincrónica considerando que la velocidad mecánica del rotor es prácticamente constante durante un cierto tiempo. También se planteó el problema de las oscilaciones mecánicas originadas por pequeñas perturbaciones eléctricas o mecánicas en los ejes del convertidor. En estos casos, las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento del sistema son lineales y se puede obtener una solución analítica mediante autovalores y autovectores, la transformada de Laplace o mediante linealizaciones realizadas en el entorno de un punto de operación. Sin

embargo, cuando se analiza el comportamiento del sistema electromecánico sometido a grandes perturbaciones y desequilibrios, es necesario recurrir a técnicas no lineales para la solución de estos problemas. La técnica más utilizada consiste en integrar las ecuaciones diferenciales no lineales mediante métodos numéricos tales como Euler, Runge Kuta o Predictor Corrector. En algunas ocasiones resulta conveniente el empleo de métodos analíticos directos tales como los criterios de energía o los métodos de estabilidad de Liapunov, que aun cuando no predicen la trayectoria temporal de las variables de estado del sistema, si predicen la estabilidad o inestabilidad de la solución del sistema de ecuaciones diferenciales. El conocimiento preciso de los límites de estabilidad de un sistema es generalmente más importante que la determinación de la trayectoria temporal de las variables de estado. Los métodos directos o analíticos simplifican notablemente este problema.

En los análisis simplificados de estabilidad de la máquina sincrónica, se considera que el convertidor se encuentra acoplado a una barra infinita. Esto significa que la barra mantiene constante la tensión y la frecuencia independientemente de la potencia que se inyecta o se extrae de la misma. En el análisis electromecánico se puede contemplar la dinámica del sistema mecánico de regulación de velocidad asociado con el eje del rotor y la dinámica de la excitatriz del campo de la máquina. En los análisis más simplificados, se supone que la excitatriz es una fuente de tensión o corriente constante, y que el gobernador de velocidad no es capaz de variar el caudal del fluido energético durante el proceso dinámico para el caso de los generadores, o que la carga se mantiene prácticamente constante si el convertidor motoriza a un sistema mecánico. Los análisis electrodinámicos más precisos integran simultáneamente el conjunto completo de ecuaciones diferenciales no lineales, incluyendo todos los ejes eléctricos y mecánicos, así como las ecuaciones adicionales introducidas por el gobernador, la excitatriz, el sistema de medidas y los controladores asociados con la operación de la máquina.

Cuando se sincroniza la máquina a la red, la fuerza electromotriz producida por el campo se ajusta a un valor cercano a la tensión de la red, tanto en magnitud como en fase, con la finalidad de obtener una corriente prácticamente nula cuando se cierra el interruptor. Una vez que la máquina ha sido sincronizada, es necesario incrementar la potencia en el eje para que el estator entregue potencia a la red. Si esto ocurre, manteniendo constante la corriente de campo, la máquina se desmagnetiza, consumiendo potencia reactiva desde el sistema. En la figura 9.16 se presentan los diagramas fasoriales y la característica potencia eléctrica-ángulo de carga, de una máquina sincrónica de rotor liso después de su acoplamiento en vacío a la red, para dos valores de potencia mecánica entregada en el eje. Si se aumenta bruscamente la potencia desde P_{m1} a P_{m2} , el escalón de potencia se traduce en un escalón de par mecánico que acelera las masas rotantes acopladas al eje de la máquina. El ángulo de carga crece desde el valor δ_1 hasta el valor δ_2 , correspondiente a la nueva condición de equilibrio entre la potencia eléctrica inyectada a la red y la potencia mecánica absorbida por el eje. Cuando la máquina alcanza el ángulo de carga δ_2 , la velocidad del rotor es mayor que la velocidad sincrónica, el ángulo de carga continua creciendo, la máquina entrega más potencia a la red que la recibida en su eje, por tanto el rotor se frena. En este proceso la máquina alcanza la velocidad sincrónica y el ángulo de carga máximo, pero la potencia eléctrica entregada a la red es mayor que la potencia mecánica inyectada en el eje mecánico, por tanto la máquina continua frenándose hasta alcanzar nuevamente el punto de equilibrio de potencias. En este punto, la velocidad es menor que la velocidad sincrónica y el ángulo de carga sigue disminuyendo hasta que la velocidad del eje alcance nuevamente el valor de sincronismo. En este momento el ángulo de carga se encuentra en su valor mínimo, la potencia

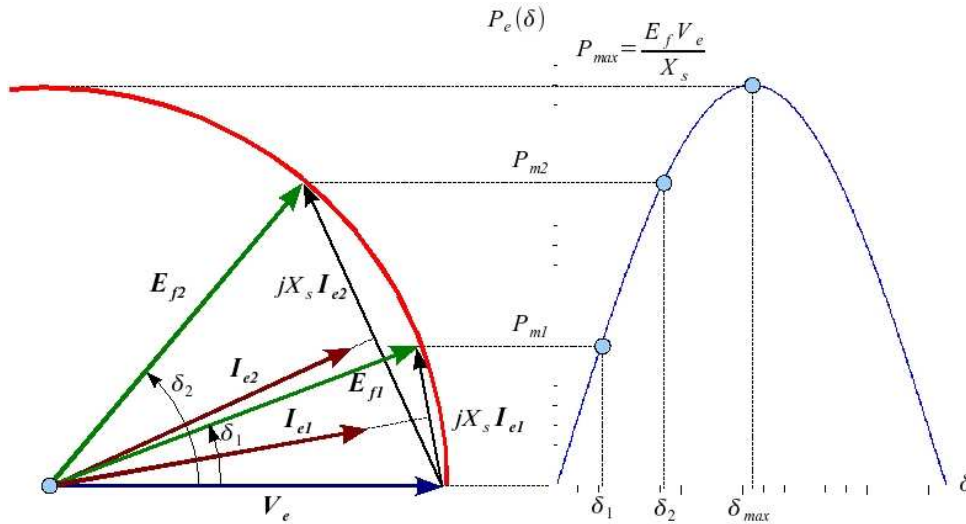


Figura 9.16 Carga de una máquina síncrona acoplada a la red en condición de vacío

eléctrica es menor que la potencia mecánica y la máquina se acelera nuevamente, repitiéndose todo el proceso indefinidamente o hasta que las pérdidas produzcan un efecto amortiguador, tal como se mostró en la sección 9.9.

La oscilación descrita anteriormente se representa analíticamente mediante la ecuación diferencial correspondiente al balance de par en el eje de la máquina:

$$T_a = J \frac{d\omega_m}{dt} = J \frac{d^2\delta}{dt^2} = T_m - T_e = T_m - \frac{E'_f V_e}{\omega_m X'_d} \sin \delta - \frac{V_e^2}{2} \left[\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X'_d} \right] \sin 2\delta \quad (9.155)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \omega_m - \omega_e \quad (9.156)$$

En la figura 9.17 se presentan las respuestas temporales de la velocidad del rotor y del ángulo de carga ante un escalón en el par mecánico de accionamiento. Se observa que las oscilaciones se mantienen indefinidamente, tal como ocurre en un péndulo sin pérdidas. Las oscilaciones de la velocidad mecánica están centradas en la velocidad síncrona y las oscilaciones del ángulo de carga están centradas sobre el valor de ángulo δ_2 correspondiente a la nueva condición de equilibrio.

El ángulo de carga δ en el instante $t = 0^+$ se conserva porque la inercia de la máquina acumula energía cinética y la energía no puede variar instantáneamente, a menos que se disponga de una fuente de potencia infinita. La energía cinética de una masa rotante se evalúa a partir de la siguiente expresión:

$$W_k = \frac{1}{2} J \omega_m^2 \quad (9.157)$$

Debido a que la energía cinética W_k no puede variar instantáneamente sin consumir potencia infinita, la velocidad ω_m no cambia en el primer instante. El ángulo de carga tampoco puede variar instantáneamente porque se obtiene al integrar la diferencia entre la velocidad mecánica

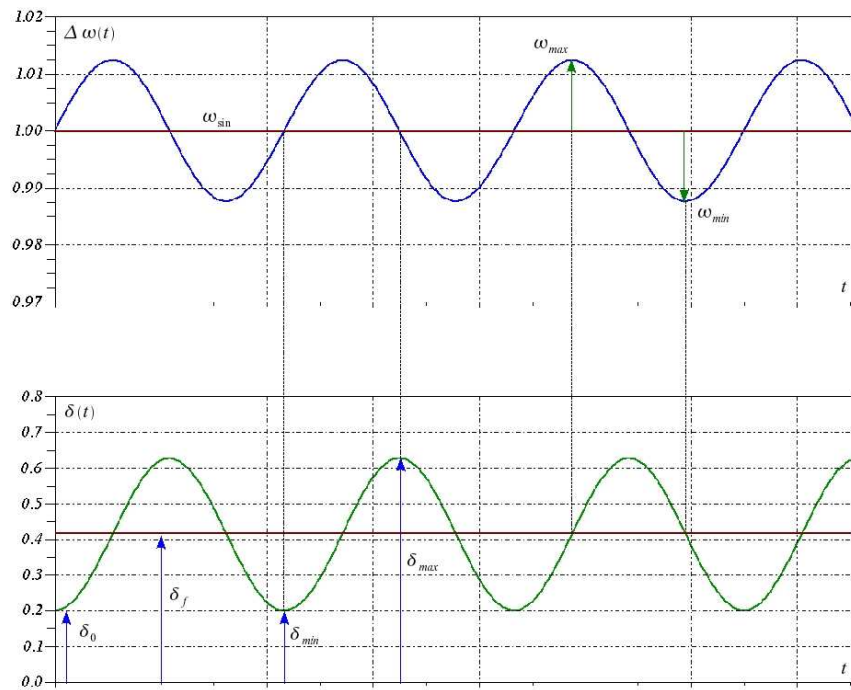


Figura 9.17 Respuesta temporal de la máquina síncrona sometida a un escalón de potencia en el eje

ω_m y síncronica ω_e :

$$\delta(t) = \int_0^t (\omega_m - \omega_e) d\tau \quad (9.158)$$

Las oscilaciones mecánicas de la máquina síncrona representadas mediante las ecuaciones diferenciales 9.155 y 9.156 se mantienen indefinidamente sin la presencia de pares amortiguadores. El sistema es conservativo y todas las oscilaciones se deben al traspaso de energía entre la inercia de la máquina y el sistema eléctrico de potencia. El campo magnético rotatorio continúa girando a la velocidad síncronica forzado por la barra infinita, pero las oscilaciones mecánicas son mucho más lentas⁴.

Si se produce un escalón de par mecánico en un punto de operación más cercano al par máximo, la energía cinética acumulada en el rotor de la máquina durante la aceleración, ocasiona un aumento del ángulo de carga superior al punto de equilibrio. Al sobrepasarse el punto de equilibrio, el par eléctrico es mayor que el par mecánico y la máquina comienza a frenarse. Pero si la máquina no se frena suficientemente rápido, el ángulo de carga aumenta y puede pasar el segundo punto de equilibrio, la potencia eléctrica es menor que la potencia mecánica y el rotor continúa acelerándose. Cuando se alcanza este punto crítico, se ha perdido el sincronismo entre la máquina y el sistema eléctrico de potencia. Al perder el sincronismo, no es posible entregar potencia media diferente de cero al sistema y toda la energía entregada en el eje mecánico se acumula como energía cinética en las masa rotantes. El rotor de la máquina se acelera y si no se realizan las acciones correctivas necesarias, se produce el fenómeno denominado embalamiento. Para evitar la pérdida de sincronismo es posible incrementar rápidamente la fuerza electromotriz

⁴Del orden del segundo o más por oscilación.

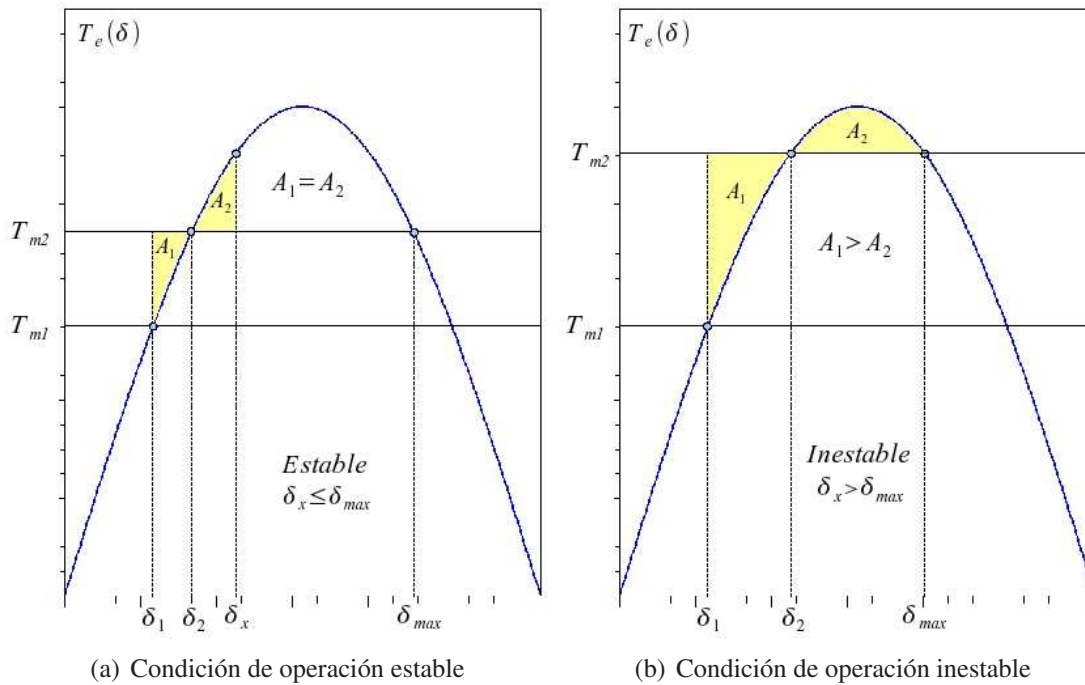


Figura 9.18 Respuesta estable e inestable de la máquina síncrona sometida a un escalón de par mecánico

producida por el devanado de campo, inyectando mediante la excitatriz una corriente impulsiva en este enrollado.

Las áreas del gráfico par eléctrico en función del ángulo de carga, representan energía. La diferencia entre el par eléctrico y el par mecánico es el par acelerante sobre la máquina. La integral del par acelerante sobre la máquina síncrona en el intervalo comprendido entre dos ángulos de carga diferentes, es igual a la variación de energía cinética en el rotor:

$$\Delta W_k = \int_0^t P_a(\tau) d\tau = \int_0^t T_a \Delta \omega_m d\tau = \int_0^t T_a \frac{d\delta}{d\tau} d\tau = \int_{\delta(0)}^{\delta(t)} T_a(\delta) d\delta \quad (9.159)$$

Para que la velocidad de la máquina regrese al valor inicial, es necesario que la evaluación de la expresión anterior resulte nula. En este caso no hay variación neta de energía cinética y la velocidad final de la máquina es igual a la velocidad inicial. Este método se conoce como criterio de áreas iguales. La energía absorbida por el rotor para alcanzar el punto de equilibrio, debe ser regresada a la red eléctrica para reducir la velocidad hasta su valor de sincronismo. Si no es posible frenar la máquina hasta la velocidad síncrona, el sistema es inestable y pierde su capacidad de transmitir potencia. En la figura 9.18 se muestra el comportamiento estable e inestable de la máquina síncrona sometida a un escalón de par en el eje mecánico.

Las limitaciones operativas de los sistemas mecánicos impiden la aparición repentina de escalones de par en el eje de la máquina. Es más frecuente la ocurrencia de perturbaciones de la red eléctrica, tales como cambios súbitos de la tensión en la barra debidos a cortocircuitos bruscos, conexión o desconexión de nuevas cargas a la red, y pérdidas o reenganche de las líneas de transmisión. Estas perturbaciones alteran la característica par eléctrico en función del ángulo

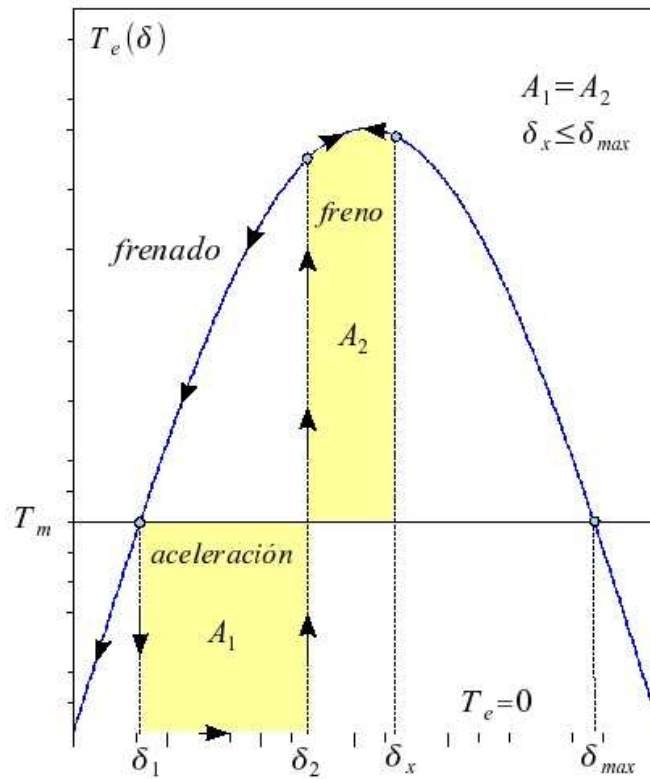


Figura 9.19 Trayectoria del ángulo de carga durante el cortocircuito y después del despeje de la falla

de la carga de la máquina síncrona, y mantienen constante la potencia mecánica en el eje del rotor. El cortocircuito trifásico brusco en bornes de la máquina es una de las perturbaciones más severas que pueden aparecer sobre la máquina. Durante el período de duración del cortocircuito, toda la potencia inyectada en el eje mecánico se convierte en energía cinética, debido a que la armadura no es capaz de transmitir potencia al sistema eléctrico. Cuando desaparece la perturbación y la máquina comienza a transmitir potencia a la red, el rotor se frena, pero si el ángulo alcanza el valor máximo δ_{max} , la velocidad se incrementa nuevamente, perdiendo el sincronismo. El tiempo máximo que es posible mantener el cortocircuito en bornes de la máquina, sin la pérdida del sincronismo una vez recuperada la capacidad de transmisión de potencia al sistema, se conoce como tiempo crítico de despeje y define los tiempos de actuación de las protecciones e interruptores del sistema. En la figura 9.19 se presenta el diagrama par eléctrico en función del ángulo de carga de la máquina síncrona durante el cortocircuito y en el tiempo posterior al despeje de la falla, considerando que se restituye la capacidad de transmisión inicial.

El criterio de áreas iguales permite la determinación directa de los límites de estabilidad de la máquina síncrona. Este método se puede obtener a partir de una concepción más general, utilizando los teoremas de estabilidad demostrados por Liapunov en el siglo XIX. El teorema de Liapunov predice que si en un sistema de ecuaciones diferenciales del tipo:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) ; \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (9.160)$$

existe una función derivable $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, denominada función de Liapunov, que satisface en un entorno del origen de coordenadas, las siguientes condiciones:

1. $V(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$, y $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, solamente cuando $x_i = 0$; $\forall i = 1, \dots, n$, es decir, cuando la función de Liapunov $V(\mathbf{x})$, tiene un mínimo estricto en el origen de coordenadas;
2. y además, $\frac{dV}{dt} \leq 0$, cuando $t \geq t_0$, entonces el punto de equilibrio $x_i = 0$, $\forall i = 1, \dots, n$, es estable.

Para interpretar este teorema se puede observar que la función de Liapunov, encierra a las variables de estado del sistema de ecuaciones diferenciales dentro de una *hipersuperficie*, si esta superficie decrece con el transcurso del tiempo, las variables de estado convergen al punto de equilibrio. Si la hipersuperficie se mantienen constante a medida que transcurre el tiempo, el sistema converge a un ciclo límite donde las oscilaciones se mantienen indefinidamente.

Las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento electromecánico de la máquina síncrona cuando se desprecian los amortiguamientos y las pérdidas, son:

$$J \frac{d\Delta\omega}{dt} = J \frac{d\omega_m}{dt} = T_m - T_e = T_m - k_1 \sin \delta - k_2 \sin 2\delta \quad (9.161)$$

$$\frac{d\Delta\delta}{dt} = \frac{d(\delta - \delta_0)}{dt} = \omega_m - \omega_0 = \Delta\omega \quad (9.162)$$

Para encontrar una función de Liapunov que cumpla con las condiciones impuestas por el teorema, se multiplica la expresión 9.161 por la velocidad mecánica, y se integran en el tiempo cada uno de los términos de potencia obtenidos, agrupándolos en un sólo miembro:

$$\begin{aligned} V(\Delta\omega, \Delta\delta) &= \int_0^t J \Delta\omega \frac{d\Delta\omega}{d\tau} d\tau - \int_0^t T_m \Delta\omega d\tau + \int_0^t (k_1 \sin \delta + k_2 \sin 2\delta) \Delta\omega d\tau = \\ &= \frac{1}{2} J \Delta\omega^2 - T_m \Delta\delta - k_1 (\cos \delta - \cos \delta_0) - \frac{1}{2} k_2 (\cos 2\delta - \cos 2\delta_0) = \Delta W_k - \Delta W_m + \Delta W_e \quad (9.163) \end{aligned}$$

En el intervalo de las variables de estado $\Delta\omega$ y $\Delta\delta$ en que la función 9.163, es definida positiva $V(\Delta\omega, \Delta\delta) \geq 0$, la derivada con respecto al tiempo de la función de Liapunov es:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d\Delta V}{d\Delta\omega} \frac{d\Delta\omega}{dt} + \frac{d\Delta V}{d\Delta\delta} \frac{d\Delta\delta}{dt} = J \Delta\omega \left[\frac{T_m - T_e}{J} \right] - T_m \Delta\omega + T_e \Delta\omega = 0 \leq 0 \quad (9.164)$$

Como la hipersuperficie $V(\Delta\omega, \Delta\delta)$ que encierra la trayectoria de las variables de estado de este sistema, se mantiene constante a medida que transcurre el tiempo, la respuesta de la máquina es oscilatoria no amortiguada. El sistema es estable en un ciclo límite si se cumple que la función de Liapunov 9.163 es definida positiva. La función de Liapunov escogida coincide con el criterio de áreas iguales, porque fue determinada realizando el balance de energía del sistema. Si se incluye en las ecuaciones diferenciales los términos disipativos y se utiliza la misma función de Liapunov determinada anteriormente, se obtiene que la función decrece con el tiempo $\frac{dV}{dt} \leq 0$; y la máquina alcanza asintóticamente el punto de equilibrio $\Delta\omega = 0$, $\Delta\delta = 0$.

Aun cuando los balances totales de energía, determinan generalmente buenas funciones de Liapunov, el método no está restringido en modo alguno a este tipo de funciones. Cualquier función derivable, definida positiva, que se anule en el punto de equilibrio, es una posible función de Liapunov. Si una función con estas características no satisface la condición $\frac{dV}{dt} \leq 0$, no se puede afirmar que el sistema es inestable, es necesario comprobar otras funciones. Si alguna función cumple con esta propiedad, se garantiza que el sistema es estable o asintóticamente estable.

9.15. Diagrama de bloques de la máquina sincrónica

Desarrollando explícitamente los términos de la ecuación 9.3 se obtiene la siguiente representación de la máquina sincrónica en variables de estado:

$$p \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \\ i_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_e}{L'_d} & \frac{\omega L_q}{L'_d} & 0 & -\frac{R_f}{L'_{df}} \\ -\frac{\omega L_d}{L_q} & -\frac{R_e}{L_q} & 0 & -\frac{\omega L_{df}}{L_q} \\ 0 & 0 & -\frac{R_0}{L_0} & 0 \\ -\frac{R_e}{L'_{df}} & \frac{\omega L_q}{L'_{df}} & 0 & -\frac{R_f}{L'_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \\ i_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L'_d} & 0 & 0 & \frac{1}{L'_{df}} \\ 0 & \frac{1}{L_q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_0} & 0 \\ \frac{1}{L'_{df}} & 0 & 0 & \frac{1}{L'_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_d \\ v_q \\ v_0 \\ v_f \end{bmatrix} \quad (9.165)$$

De la representación canónica anterior se puede obtener directamente cuatro funciones de transferencia de primer orden correspondientes a las variables de estado del sistema:

$$i_d = \frac{\frac{1}{R_e}}{\frac{L'_d}{R_e}p + 1} \left[\omega L_q i_q + R_f \frac{L_{df}}{L_f} i_f + v_d - \frac{L_{df}}{L_f} v_f \right] \quad (9.166)$$

$$i_q = \frac{\frac{1}{R_e}}{\frac{L_q}{R_e}p + 1} [-\omega L_d i_d + \omega L_{df} i_f + v_q] \quad (9.167)$$

$$i_0 = \frac{\frac{1}{R_0}}{\frac{L_0}{R_0}p + 1} v_0 \quad (9.168)$$

$$i_f = \frac{\frac{1}{R_f}}{\frac{L_f}{R_f}p + 1} \left[-R_e \frac{L_f}{L'_{df}} i_d + \omega \frac{L_q L_f}{L'_{df}} i_q + \frac{L_f}{L'_{df}} v_d + v_f \right] \quad (9.169)$$

En la figura 9.20 se presenta el diagrama de bloques construido a partir de las cuatro funciones de transferencia anteriores. En este diagrama las tensiones son las variables de control y las corrientes son las variables de estado. Simulink® del entorno Matlab® o Scicos® del entorno Scilab® son herramientas gráficas que permiten la representación de estos modelos en diagramas de bloques. La ventaja de estas herramientas reside en la capacidad de realizar modelos complejos de sistemas sin requerir habilidades de programación.

9.16. Sumario

1. Durante su operación, la máquina sincrónica es sometida a diversas condiciones transitorias que afectan su comportamiento y el del sistema de potencia. La evaluación de estos

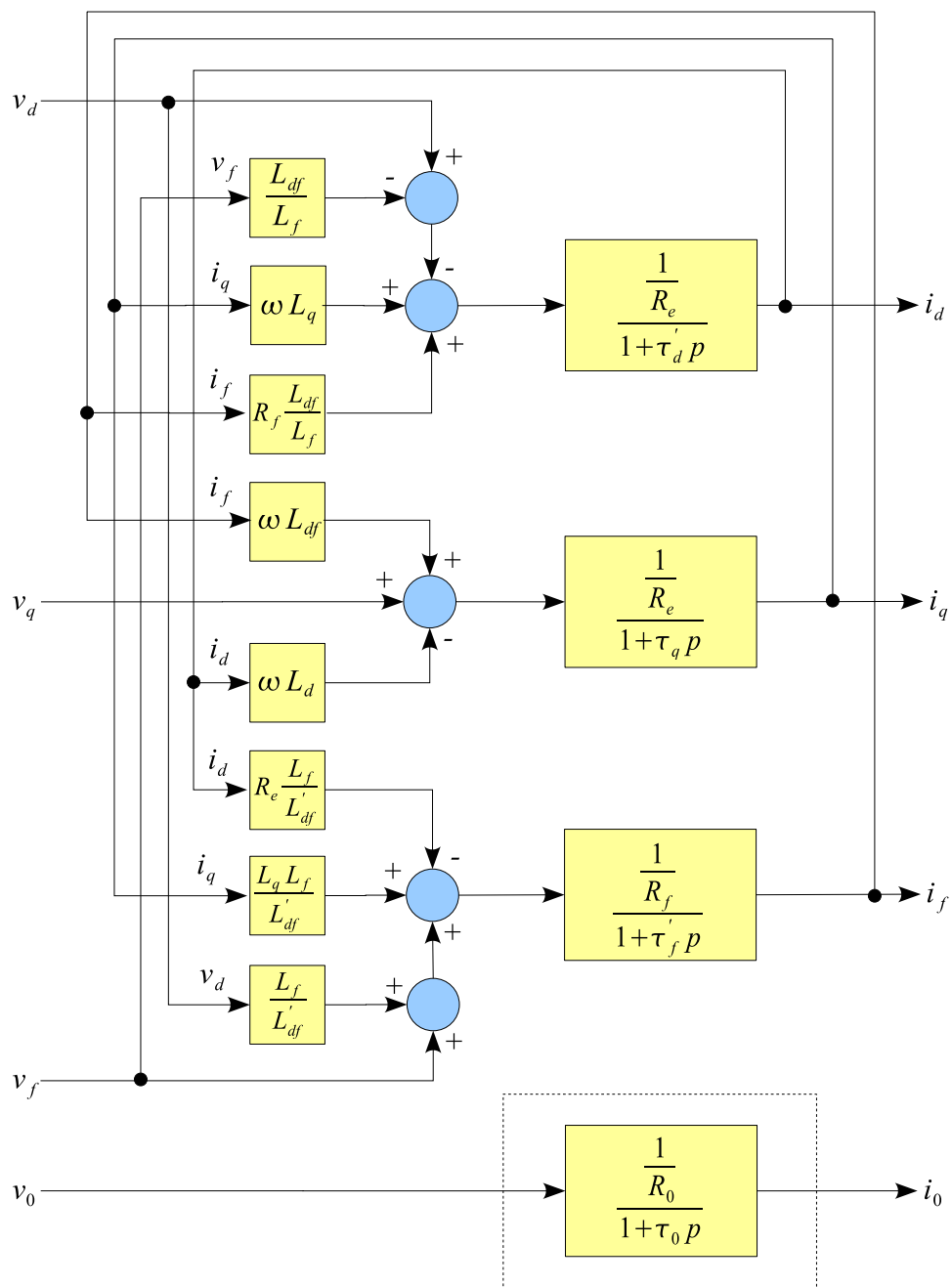


Figura 9.20 Diagrama de bloques de la máquina síncrona de polos salientes sin devanados amortiguadores

procesos dinámicos y transitorios puede en muchos casos ser desacoplada para simplificar el problema y obtener una solución satisfactoria. Las constantes de tiempo mecánicas y eléctricas pueden ser diferentes y esto permite estudiar en algunos casos el *problema electromagnético* considerando que la velocidad del rotor es prácticamente constante, o determinar las variaciones de la velocidad y del ángulo de carga suponiendo que los enlaces de flujo se mantienen congelados entre dos instantes de tiempo, obteniendo de esta forma la solución del *problema dinámico*.

2. La técnica de los *autovalores* y los *autovalores* o la *Transformada de Laplace* son herramientas capaces de resolver el problema de los *transitorios electromagnéticos*, porque al considerar que la velocidad mecánica es prácticamente constante $0,98 < \omega_m < 1,02$, el modelo resultante de la máquina sincrónica es lineal.
3. Cuando la máquina sincrónica es sometida a un cortocircuito brusco, las corrientes que circulan por los devanados son varias veces mayores a las calculadas en esta condición pero en régimen permanente. Esto se debe fundamentalmente a que los enlaces de flujo no pueden variar instantáneamente debido a que están almacenando energía. Las corrientes por las bobinas del estator, del campo y de los devanados amortiguadores si existen, deben adaptarse para mantener los enlaces de flujo previos a la perturbación que estaban siendo forzados por las tensiones aplicadas. En estas condiciones las inductancias se ven reflejadas en aquellos devanados que están acoplados y sus valores resultantes se reducen definiendo las *inductancias transitorias* L'_d y L'_f o las *subtransitorias* L''_d , L''_q y L''_f , cuando están presentes los *devanados amortiguadores*.
4. Debido a la gran diferencia entre la potencia que fluye en la armadura de la máquina y en su devanado de campo, la selección de una base que permita una *representación adimensional* útil es más compleja que en otros modelos del sistema. Una solución conveniente consiste en utilizar el flujo común que acopla el campo con el eje directo como *base de flujo*. De esta forma las tensiones base del estator y del campo quedan relacionadas a través de la relación entre el número de vueltas de estas bobinas. Por otra parte seleccionar como base de potencia la potencia aparente monofásica de la máquina sincrónica reduce parcialmente el impacto de la gran diferencia de potencias que fluyen por ambos devanados.
5. Al considerar que los enlaces de flujo en el entrehierro de la máquina se mantienen constantes durante un tiempo determinado conduce a la posibilidad de analizar los transitorios electromagnéticos mediante *métodos aproximados* que representan las variables eléctricas mediante fasores. Estos *fasores transitorios* o *subtransitorios* se mantienen durante un tiempo que depende de las *constantes de tiempo* transitorias o subtransitorias de las bobinas que mantienen los flujos atrapados.
6. Los procesos transitorios aceleran y frenan la máquina sincrónica, produciendo variaciones de la velocidad mecánica alrededor de la velocidad sincrónica y del ángulo de carga

en torno a su punto de equilibrio. Cuando estas *oscilaciones* son de pequeña magnitud es posible linealizar la ecuación dinámica que rige su comportamiento. Al linealizar este modelo es posible utilizar la técnica de polos y ceros para estudiar la *estabilidad* de la máquina sincrónica ante *pequeñas oscilaciones*. Ajustando redes compensadoras en el circuito de campo y diseñando apropiadamente los devanados amortiguadores es posible controlar la frecuencia de estas oscilaciones y reducirlas a cero más rápidamente.

7. Los *devanados amortiguadores* de la máquina sincrónica cumplen varias funciones de gran importancia en la operación, protección y control de la máquina sincrónica. Por una parte permiten la amortiguación de las oscilaciones mecánicas produciendo pares de inducción que se oponen a las variaciones de la velocidad mecánica con respecto a la velocidad sincrónica. Tienen la propiedad de ofrecer una protección⁵ al circuito de campo durante los procesos subtransitorios, evitando que los flujos atrapados en el entrehierro puedan inducir fuerzas electromotrices destructivas en esta bobina que posee un número de vueltas importante. También permiten el arranque de la máquina sincrónica como motor de inducción al comportarse como un rotor de jaula de ardilla mientras que la máquina no alcanza la velocidad sincrónica. El costo asociado a estas importantes ventajas consiste en un incremento sustancial de las corrientes durante los procesos subtransitorios, mientras que los flujos atrapados entre este devanado y las bobinas del estator no son disipados. La presencia de los devanados amortiguadores también reduce la permeanza de magnetización e incrementa por tanto los requerimientos de corriente de campo para compensar la caída de la fuerza magnetomotriz.
8. La *estimación de los parámetros* transitorios y subtransitorios de las máquinas sincrónicas es un tema importante y su solución requiere la aplicación de métodos matemáticos de *procesamiento de señales* transitorias entre los cuales se destacan la respuesta en frecuencia, la descomposición de la señal en el tiempo y la *Transformada rápida de Fourier*⁶ entre otros.
9. El análisis de los desequilibrios a que son sometidas las máquinas sincrónicas es un problema cuya solución detallada requiere modelos de gran complejidad pero que puede ser parcialmente simplificado utilizando la transformación a *componentes simétricas*. Aun cuando la simetría de las ecuaciones de la máquina sincrónica no satisfacen las condiciones requeridas por esta transformación⁷ y los modelos de secuencia no están desacoplados su aplicación aproximada ofrece una herramienta útil para establecer órdenes de magnitud de las corrientes transitorias o subtransitorias durante los desequilibrios.
10. Los análisis de estabilidad de la máquina sincrónica requieren modelos dinámicos que permitan evaluar las fluctuaciones de la velocidad y del ángulo de carga en grandes mag-

⁵Esta protección se debe a que durante los procesos subtransitorios los devanados amortiguados se comportan como una jaula de Faraday, aislando parcialmente su interior de los campos electromagnéticos externos.

⁶Con mayor precisión el método *Short Fast Fourier Transform* (SFFT) que permite aplicar la Transformada de Fourier a una señal cuyas frecuencias varían en el tiempo.

⁷Las componentes simétricas desacoplan los sistemas cíclicos o simétricos.

nitudes. Actualmente la no linealidad de los modelos de la máquina sincrónica y su interrelación con el sistema eléctrico puede ser resuelta por la *integración numérica directa* de las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento de la máquina⁸ o las condiciones de estabilidad pueden ser obtenidas aplicando el *método de Liapunov*, el cual es independiente de la solución directa del problema.

9.17. Ejemplo resuelto

Ejemplo: Análisis transitorio de la máquina sincrónica

Una máquina sincrónica de polos salientes de 5 MVA , 3 kV , 60 Hz , $i_{fn} = 100\text{ A}$, se encuentra acoplada a una barra infinita consumiendo 3 MW con factor de potencia $0,7$ inductivo. La reactancia de dispersión de la máquina es de $0,15$ en p.u. La reactancia de dispersión de la bobina de campo es $0,25$ en p.u. La reactancia del eje directo y cuadratura son $1,0$ y $0,7$ en pu respectivamente. La constante de inercia de la máquina en por unidad es de $0,5\text{ s}$. La máquina posee un devanado amortiguador que produce el par nominal cuando el deslizamiento alcanza el 1% . La dispersión de los devanados amortiguadores es del 7% . Las pérdidas óhmicas en el estator alcanzan el $0,1\%$ y en el rotor el $0,15\%$. Determine:

1. Las ecuaciones completas de la máquina, expresando todos los parámetros en un sistema coherente en por unidad.
2. La corriente instantánea de cortocircuito brusco sin considerar los efectos de los devanados amortiguadores y las resistencias.
3. El valor de la corriente transitoria y subtransitoria de cortocircuito brusco utilizando el método aproximado.
4. El valor de la corriente subtransitoria si la tensión de la barra infinita se deprime un 15% , manteniéndose la posición angular previa.
5. La frecuencia, amplitud y duración de la oscilación si la máquina se encuentra en el punto de operación definido en el enunciado y se incrementa instantáneamente el par mecánico en un 3% ⁹.

Solución:

1. Las ecuaciones completas de la máquina, expresando todos los parámetros en un sistema coherente en por unidad.

Para expresar las ecuaciones de la máquina en un sistema adimensional de unidades es necesario determinar las inductancias del eje directo y del campo en valores físicos. En el

⁸Determinación de la trayectoria de las variables de estado para una perturbación dada.

⁹Considere la presencia de los devanados amortiguadores.

estator se definen como bases la potencia aparente monofásica $S_B = V_B \cdot I_B$, la tensión base línea-neutro V_B y la velocidad angular base ω_B :

$$S_B = \frac{5}{3} MVA ; V_B = \frac{3}{\sqrt{3}} kV ; \omega_B = 2\pi 60 = 377 \frac{rad}{s}$$

Se obtienen directamente la corriente base I_B , así como la impedancia e inductancia base del estator Z_B y L_B respectivamente:

$$I_B = \frac{S_B}{V_B} = 962,25 A ; Z_B = \frac{V_B}{I_B} = 1,8\Omega ; L_B = \frac{Z_B}{\omega_B} = 4,775 mH$$

Las inductancias L_d y L_{md} en unidades físicas se obtienen directamente de los datos del problema:

$$L_d = X_d(pu) \cdot L_B = 4,775 mH ; L_{md} = (X_d - X_{\sigma e}) \cdot L_B = 4,058 mH$$

La inductancia L_{df} se obtiene de la expresión de la fuerza electromotriz del campo en la condición de vacío:

$$E_f = V_n = \frac{\omega_m}{\sqrt{3}} L_{df} i_f \Rightarrow L_{df} = \frac{V_n}{\frac{\omega_m}{\sqrt{3}} i_f} = 79,576 mH$$

La relación entre la inductancia mutua L_{df} y las inductancias de magnetización L_{md} y L_{mf} , permite determinar el valor físico de la inductancia de magnetización del campo:

$$L_{mf} = \frac{L_{df}^2}{L_{md}} = 1,5603 H$$

La corriente base y la tensión base del campo se obtienen de la siguiente forma:

$$I_{BF} = I_B \sqrt{\frac{L_{md}}{L_{mf}}} = 49,074 kA ; V_{BF} = \frac{V_B \cdot I_B}{I_{BF}} = 33,962 kV$$

Las impedancias e inductancias base propias y mutuas son las siguientes:

$$Z_{BF} = \frac{V_{BF}}{I_{BF}} = 692,04 \Omega ; Z_{BF-E} = \frac{V_B}{I_{BF}} = \frac{V_{BF}}{I_B} = 35,29 \Omega$$

$$L_{BF} = \frac{Z_{BF}}{\omega_B} = 1,8356 H ; L_{BF-E} = L_{BE-F} = 93,6 mH$$

Los parámetros de la máquina en el sistema adimensional de unidades son:

$$L_d(pu) = \frac{L_d}{L_B} = 1,0 ; L_q(pu) = X_q(pu) = 0,7$$

$$L_f(pu) = \frac{L_{mf}}{L_{BF}} + X_{\sigma f}(pu) = 1,1 ; L_{df}(pu) = \frac{L_{df}}{L_{BE-F}} = 0,85$$

$$L_{ad}(pu) = \frac{L_{df}}{L_{BF-E}} + X_{\sigma a} = X_d - X_{\sigma e} + X_{\sigma a} = 0,92 ; \quad L_{aq}(pu) = X_q - X_{\sigma e} + X_{\sigma a} = 0,62$$

$$L_{d-ad} = X_d - X_{\sigma e} = 0,85 ; \quad L_{q-aq} = X_q - X_{\sigma q} = 0,55 ; \quad L_{f-ad} = L_{mf} =$$

Como las pérdidas ómicas del estator son del 0,1 % de la potencia aparente nominal son 0,3 % de la potencia base monofásica. De igual forma las pérdidas en el circuito de campo son 0,45 % en la base monofásica de potencia. La resistencia de los devanados amortiguadores se puede determinar del par de inducción al deslizamiento 0,01 con la aproximación siguiente:

$$T_n \approx \frac{V_{th}^2 s}{R_r} \Rightarrow R_r \approx \frac{s \cdot V_{th}^2}{T_n} = \frac{0,01}{3,0} = 0,00333$$

Las resistencias en por unidad, expresadas en la base seleccionada son:

$$R_e = 0,003 pu ; \quad R_f = 0,0045 pu ; \quad R_a = 0,00333 pu$$

El modelo completo de la máquina es:

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \\ v_f \\ v_{ad} \\ v_{aq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_e + L_d p & -\omega L_q & L_{df} p & L_{d-ad} p & -\omega L_{d-aq} \\ \omega L_d & R_e + L_q p & \omega L_{df} & \omega L_{q-ad} & L_{q-aq} p \\ L_{df} p & 0 & R_f + L_f p & L_{f-ad} p & 0 \\ L_{d-ad} p & 0 & L_{ad-f} p & R_a + L_{ad} p & 0 \\ 0 & L_{aq-q} p & 0 & 0 & R_a + L_{aq} p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_f \\ i_{ad} \\ i_{aq} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \\ v_f \\ v_{ad} \\ v_{aq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,003 + 1,0p & -0,7\omega & 0,85p & \dots & \dots \\ 1,0\omega & 0,003 + 0,7p & 0,85\omega & \dots & \dots \\ 0,85p & 0 & 0,0045 + 1,1p & \dots & \dots \\ 0,85p & 0 & 0,85p & \dots & \dots \\ 0 & 0,55p & 0 & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_f \\ i_{ad} \\ i_{aq} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dots & 0,85p & -0,85\omega & \dots & \dots \\ \dots & 0,55\omega & 0,55p & \dots & \dots \\ \dots & 0,85p & 0 & \dots & \dots \\ \dots & 0,0033 + 0,92p & 0 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0,0033 + 0,62p & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_f \\ i_{ad} \\ i_{aq} \end{bmatrix}$$

$$T_e - T_m = 2H \frac{d\omega_m}{dt} = L_{df} i_f i_q + (L_d - L_q) i_d i_q + L_{q-aq} i_{ad} i_q - L_{d-ad} i_{aq} i_d - T_m = 1,0 \frac{d\omega_m}{dt}$$

2. La corriente instantánea de cortocircuito brusco sin considerar los efectos de los devanados amortiguadores y las resistencias.

La expresión 9.32 determina la corriente instantánea de una máquina sincrónica de polos saliente sometida a un cortocircuito brusco. Para obtener esta corriente se requiere calcular la fuerza electromotriz del campo E_f en las condiciones previas a la perturbación y la reactancia transitoria del eje directo X'_d :

$$S = \frac{P}{\cos \phi} = \frac{-0,6}{0,7} = -0,8571 ; \quad Q = +\sqrt{S^2 - P^2} = 0,6121$$

$$\mathbf{I}_e = \frac{P - jQ}{V_e} = -0,6 - j0,6121 = 0,8571 \angle -134,4^\circ$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{V}_e + jX_q \mathbf{I}_e = 1,4282 - j0,42 = 1,4890 \angle -16,38^\circ$$

$$I_d = |\mathbf{I}_e| \sin(\delta - \phi) = 0,8571 \cdot \sin(\phi - \delta) = 0,7565$$

$$E_f = D + (X_d - X_q) \cdot I_d = 1,4890 + 0,3 \times 0,7565 = 1,7159$$

$$X'_d(pu) = L'_d(pu) = L_d - \frac{L_{df}^2}{L_f} = 1,0 - \frac{0,85^2}{1,1} = 0,3432$$

$$i_a(t) = \sqrt{2}E_f \left[-\frac{1}{X'_d} \cos(\omega t + \theta_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{X'_d} - \frac{1}{X_q} \right) \cos(2\omega t + \theta_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{X'_d} + \frac{1}{X_q} \right) \cos \theta_0 \right]$$

$$i_a(t) = -7,071 \cos(377t + \theta_0) + 0,817 \cos(754 + \theta_0) + 0,279 \cos \theta_0$$

3. El valor de la corriente transitoria y subtransitoria de cortocircuito brusco utilizando el método aproximado.

Las condiciones previas al cortocircuito en la aproximación transitoria y subtransitoria son:

$$\mathbf{I}_d = I_e \sin(\delta - \phi) \angle -\frac{\pi}{2} + \delta = 0,7565 \angle -106,38^\circ$$

$$\mathbf{I}_q = I_e \cos(\phi - \delta) \angle \delta - \pi = 0,4030 \angle -163,62^\circ$$

$$\mathbf{E}'_f = \mathbf{V}_e + jX'_d \mathbf{I}_d + jX_q \mathbf{I}_q = 1,2190 \angle -16,38^\circ$$

$$X''_d = L_d - \frac{L_{d-ad}^2}{L_{ad}} = 1,0 - \frac{0,85^2}{0,92} = 0,2147$$

$$X''_q = L_q - \frac{L_{q-aq}^2}{L_{aq}} = 0,7 - \frac{0,55^2}{0,62} = 0,2120$$

$$\mathbf{E}''_f = \mathbf{V}_e + jX''_d \mathbf{I}_d + jX''_q \mathbf{I}_q = 1,1389 \angle -6,44^\circ$$

Durante el cortocircuito la tensión de armadura \mathbf{V}_e es cero, las fuerzas electromotrices transitoria \mathbf{E}'_f y subtransitoria \mathbf{E}''_f se mantienen durante los procesos transitorio y subtransitorios respectivamente y se puede plantear los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\mathbf{E}'_f = jX'_d \mathbf{I}'_d + jX_q \mathbf{I}'_q = 1,2190 \angle -16,38^\circ \Rightarrow$$

$$\mathbf{I}'_d = \frac{\mathbf{E}'_{fq}}{jX'_d} = \frac{1,2190 \angle -16,38^\circ}{j0,3432} = 3,5521 \angle -106,38^\circ ; \mathbf{I}'_q = \frac{\mathbf{E}'_{fd}}{jX_q} = 0$$

$$|\mathbf{I}'_e| = \sqrt{|\mathbf{I}'_d|^2 + |\mathbf{I}'_q|^2} = 3,5521$$

$$\mathbf{E}''_f = jX''_d \mathbf{I}''_d + jX''_q \mathbf{I}''_q = 1,1389 \angle -6,44^\circ \Rightarrow$$

$$\mathbf{I}''_d = \frac{\mathbf{E}''_{fq}}{jX''_d} = \frac{1,121 \angle -16,38^\circ}{j0,2147} = 5,2250 \angle -106,38^\circ$$

$$\mathbf{I}_q'' = \frac{\mathbf{E}_{fd}''}{jX_q''} = \frac{0,1966 \angle -106,38^\circ}{j0,2120} = 0,9273 \angle -196,38^\circ$$

$$|\mathbf{I}_e''| = \sqrt{|\mathbf{I}_d''|^2 + |\mathbf{I}_q''|^2} = 5,3067$$

4. El valor de la corriente subtransitoria si la tensión de la barra infinita se deprime un 15 %, manteniéndose la posición angular previa.

En este caso, las condiciones previas a la perturbación son las mismas, pero ahora la perturbación es una reducción del 15 % de la tensión de armadura. De esta forma se tiene:

$$\mathbf{E}_f'' = \mathbf{V}_e'' + jX_d''\mathbf{I}_d'' + jX_q''\mathbf{I}_q'' = 1,1389 \angle -6,44^\circ \Rightarrow$$

$$0,85 \angle 0^\circ + j0,2147 \cdot I_d'' \angle -106,38^\circ + j0,2120 \cdot I_q'' \angle -196,38^\circ = 1,1389 \angle -6,44^\circ \Rightarrow$$

$$\mathbf{I}_d'' = I_d'' \angle -106,38^\circ = 2,4272 \angle -106,38^\circ$$

$$\mathbf{I}_q'' = I_q'' \angle -196,38^\circ = -1,7858 \angle -196,38^\circ = 1,7858 \angle -16,38^\circ$$

$$|\mathbf{I}_e''| = \sqrt{|\mathbf{I}_d''|^2 + |\mathbf{I}_q''|^2} = 3,0134$$

5. La frecuencia, amplitud y duración de la oscilación si la máquina se encuentra en el punto de operación definido en el enunciado y se incrementa instantáneamente el par mecánico en un 3 %.

La expresión 9.125 define el comportamiento dinámico de la oscilación:

$$\Delta\delta(s) = \frac{\Delta T_m(0^+)}{\frac{2H}{\omega_B}s^2 + \frac{D}{\omega_B}s + \frac{\partial P_e(\delta_0)}{\partial \delta}}$$

El coeficiente de amortiguamiento se obtiene del par de inducción nominal del devanado amortiguador al deslizamiento $s = 0,01$:

$$D = \frac{T_n}{s_n} = 100$$

La potencia sincronizante se obtiene derivando parcialmente la potencia con respecto al ángulo de carga en el punto de operación previo a la oscilación:

$$\frac{\partial P(\delta_0)}{\partial \delta} = \frac{V_e E_f'}{X_d'} \cos \delta_0 + V_e^2 \left[\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d'} \right] \cos 2\delta_0 = 2,158$$

Los polos del polinomio del denominador de la expresión anterior determinan las frecuencias naturales y los respectivos amortiguamientos de las oscilaciones de la máquina síncrona sometida a pequeñas perturbaciones:

$$s_{1,2} = \frac{-D \pm \sqrt{D^2 - 8H\omega_B \frac{\partial P_e(\delta_0)}{\partial \delta}}}{4H} = \left\{ \begin{array}{l} -8,9378 \frac{rad}{s} \\ -91,06 \frac{rad}{s} \end{array} \right|$$

Por lo tanto:

$$\Delta\delta(s) = \frac{\frac{1}{\omega_B} \Delta T_m(0^+)}{\frac{2H}{\omega_B} s^2 + \frac{D}{\omega_B} s + \frac{\partial P_e(\delta_0)}{\partial \delta}} = \frac{0,03}{(s + 8,9378)(s + 91,06)}$$

9.18. Ejercicios propuestos

1. Una máquina sincrónica de polos salientes de 5 kVA , 416 V , 60 Hz , $i_{fn} = 3 \text{ A}$, se encuentra acoplada a una barra infinita entregando $3,5 \text{ kW}$ con factor de potencia $0,9$ capacitivo. La reactancia de dispersión de la máquina es de $0,1$ en p.u. La reactancia de dispersión del rotor es un 50% mayor. Además se conoce que:

$$X_d = 1,0 \text{ pu} \quad y \quad X_q = 0,7 \text{ pu}$$

La constante de inercia de la máquina en por unidad es de 1 s . La máquina posee un devanado amortiguador que produce el par nominal cuándo el deslizamiento alcanza el 1% . El acoplamiento entre las bobinas del estator y los devanados amortiguadores es del 95% .

- a) Determine la máxima corriente de cortocircuito brusco, considerando que inicialmente la máquina se encuentra en el punto de operación definido en el enunciado.
 - b) Compare el resultado anterior con las corrientes transitorias y subtransitorias que se obtendrían por el método aproximado.
 - c) Determine la frecuencia, amplitud y duración de la oscilación si la máquina se encuentra en el punto de operación definido en el enunciado y se incrementa instantáneamente el par mecánico en un 5% . Considere la presencia de los devanados amortiguadores.
2. Una máquina sincrónica de polos salientes de 100 MVA , 13 kV , 60 Hz , $i_{fn} = 500 \text{ A}$, se encuentra acoplada a una barra infinita de tensión $0,95$ en p.u. consumiendo 70 MW y entregando 70 MVAR a la red, para lo cual se requieren 849 A de corriente de campo. La reactancia del eje cuadratura es $0,7 \text{ pu}$. Determine:

- a) La corriente instantánea de cortocircuito brusco a partir de las ecuaciones diferenciales que definen el comportamiento de la máquina, si en el instante inicial el rotor se encuentra a 90° de la posición del eje magnético de la fase.
- b) El comportamiento de la máquina sincrónica si en el mismo punto de operación inicial se le desconecta el devanado de campo de forma instantánea.

- c) La corriente transitoria aproximada de la máquina si la tensión de la barra se incrementa instantáneamente hasta 1,05 en pu.

3. Una máquina sincrónica de polos salientes posee las siguientes características y parámetros:

S_n	V_n	fp	f	v_{fn}	i_{fn}
100 MVA	10 kV	0,8 ind	60 Hz	500 V	1000 A
X_d	X_q	$X_{\sigma e}$	$X_{\sigma f}$	D	H
1,2 pu	0,8 pu	0,2 pu	0,4 pu	30 pu	1,5 s

- a) Calcule la frecuencia y amplitud de las oscilación de esta máquina conectada a una barra infinita si se incrementa un 5 % el par mecánico de accionamiento.
- b) Si la tensión de la barra infinita se deprime un 5 % y la máquina se encontraba previamente en su punto nominal, ¿Cuál es la corriente transitoria y subtransitoria aproximada?
- c) Determine el tiempo crítico que puede permanecer la máquina en cortocircuito si antes de la perturbación se encontraba en condiciones nominales, y las mismas se restablecen posteriormente.
- d) Represente el diagrama de bloques completo de la máquina sincrónica.
4. Una máquina sincrónica de polos salientes de 200 MVA, 15 kV, factor de potencia nominal 0,707 y 1,0 kA de corriente nominal de campo, tiene impedancias de 1,0 y 0,6 pu en los ejes directo y cuadratura respectivamente. La máquina se encuentra motorizando una carga de 150 MW con la corriente de campo máxima. Repentinamente el devanado de campo se cortocircuita en sus bornes. Determine:
- a) La corriente en la bobina del campo y en la fase a del estator.
- b) La tensión instantánea que aparece en bornes de la bobina de campo, si se abre repentinamente el circuito.
5. Una máquina sincrónica de polos salientes de 100 MVA, 10 kV, 60 Hz, $i_{fn} = 1$ kA, se encuentra acoplada a una barra infinita entregando 80 MW con factor de potencia 0,9 inductivo. La reactancia de dispersión de la máquina es de 0,2 en p.u. La reactancia de dispersión de la bobina de campo es 0,3 en p.u. La reactancia del eje directo y cuadratura son 0,9 y 0,6 pu respectivamente. La constante de inercia de la máquina en por unidad es de 0,75 s. La máquina posee un devanado amortiguador que produce el par nominal

cuándo el deslizamiento alcanza el 2 %. El acoplamiento entre las bobinas del estator y los devanados amortiguadores es del 95 %. Determine:

- La corriente de armadura transitoria y subtransitoria por el método aproximado, si la tensión de la barra se deprime instantáneamente un 10 %.
- La corriente instantánea después de la perturbación definida en la pregunta anterior sin considerar el efecto de los devanados amortiguadores.
- La frecuencia, amplitud y duración de la oscilación si la máquina se encuentra en el punto de operación definido en el enunciado y se incrementa instantáneamente el par mecánico en un 5 %. Considere la presencia de los devanados amortiguadores.

6. Una máquina sincrónica de 5 kVA , 416 V , 60 Hz , 1800 rpm , $f_{p_n} = 0,8\text{ ind}$, 2 A de corriente nominal de campo, posee los siguientes parámetros:

X_d	X_q	$X_{\sigma e}$	$X_{\sigma f}$	R_e	R_f
0,9	0,5	0,18	0,24	0,01	$60\ \Omega$

Determine:

- la corriente instantánea en el campo y en la fase a después de un cortocircuito brusco, considerando que previo a la perturbación la máquina estaba entregando la potencia activa nominal a la red con una corriente de campo de 3 A .
- La corriente transitoria después de una caída del 10 % de la tensión nominal si la máquina se encuentra en el punto nominal de operación, considerando la presencia de un devanado amortiguador cuyo acoplamiento con la armadura es de 90.
- La corriente subtransitoria después de una caída del 10 % de la tensión nominal, considerando para las condiciones iniciales el punto de operación definido inicialmente.
- Las frecuencias de oscilación mecánica ante pequeñas perturbaciones, considerando que el devanado amortiguador produce el par nominal con un deslizamiento del 5 % y que la constante de inercia H es de $1,0\text{ s}$.

Bibliografía

- [1] B. Adkins & R. G. Harley, "The General Theory of Alternating Current Machines," Chapman and Hall, London 1975.
- [2] P. Anderson & A. Fouad, "Power System Control and Stability," The Iowa State University Press, US 1977.
- [3] C. Concordia, "Synchronous Machines: Theory and Performance," General Electric Company, 1951.
- [4] E.W. Kimbark, "Power System Stability: Synchronous Machines," Vol. III, Ed. Dover Publications, Inc, 1956.
- [5] M.P. Kostenko & L.M. Piotrovski, "Máquinas Eléctricas," Vol. II, Editorial Mir, Second edition, Moscu 1979.
- [6] A. S. Langsdorf, "Theory of Alternating Current Machinery," Tata McGraw-Hill, Second Edition, 1974.
- [7] R. H. Park, "Two Reaction Theory of Synchronous machines, Pt. 1," AIEE Transactions, Vol. 48, pp. 716-730, 1929.
- [8] R. H. Park, "Two Reaction Theory of Synchronous machines, Pt. 2," AIEE Transactions, Vol. 52, pp. 352-355, 1933.
- [9] G. McPherson & R. D. Laramore, "An Introduction to Electrical Machines and Transformers," John Wiley & Sons, 1990.
- [10] M.G. Say, "Introduction to the Unifield Theory of Electromagnetic Machines," Pitman Press, Great Britain, 1971.
- [11] D. C. White & H. H. Woodson, "Electromechanical Energy Conversion," John Wiley & Sons, New York 1959.

Índice alfabético

- ángulo base, 408
- ángulo de carga, 353, 354, 420
- ángulos eléctricos, 102
- ángulos mecánicos, 102
- acoplamiento máquina-sistema, 375
- acoplamiento perfecto, 417
- acortamiento de paso, 287
- Adams, 338
- amortiguamiento, 422
- amortiguamiento crítico, 423
- amplidina, 172
- amplificador rotativo, 172
- anillos deslizantes, 195
- apertura de interruptores, 398
- arco de fuego, 164
- arco eléctrico, 164
- armónicas temporales, 278
- armadura, 110, 135, 335
- autovalores, 198, 398
- autovectores, 198, 398
- balance de energía, 43
- balance de par, 436
- balance de potencia, 20
- balance de potencias, 26
- balance del par, 339
- base de flujo, 443
- bases, 215
- bobinas reales, 338
- campo, 14, 335
- campo eléctrico, 14
- campo elíptico, 336
- campo magnético, 14
- campo magnético rotatorio, 115
- característica par-deslizamiento, 209
- Características normalizadas, 227
- carbones, 135
- carga aislada, 375
- cargas eléctricas, 14
- centrales eólicas, 195
- choppers, 169, 308
- ciclo de carga, 214
- ciclo límite, 440
- circuito equivalente, 364
- circuito magnético ideal, 416
- circuitos acoplados, 414
- clase de aislamiento, 212
- coeficiente de fricción, 339, 419
- coeficiente de generación, 146
- coeficientes de dispersión, 416
- coenergía, 43
- coenergía en el campo, 60
- colector, 110, 135
- componente continua, 430
- componentes simétricas, 198, 270, 432, 444
- condiciones de contorno, 398
- condiciones iniciales, 398
- conexión compuesta, 147
- conexión derivación, 147
- conexión independiente, 147
- conexión paralelo, 147
- conexión serie, 147
- conmutador, 135

conmutador mecánico, 110
 conservativa en potencia, 118
 conservativo, 46
 constante de inercia, 419, 420
 constante de tiempo del campo, 407
 constante de tiempo transitoria, 418
 constantes de tiempo, 398, 443
 control par-velocidad, 157
 controlador de tensión, 375
 controlador de velocidad, 375
 convención generador, 351
 convención motor, 350
 conversión, 14
 convertidor de frecuencia, 195
 convertidor electromagnético elemental, 19
 convertidor electromecánico, 43
 convertidores magnetohidrodinámicos, 63
 coordenadas primitivas, 338, 404, 413
 corriente alterna, 335
 corriente circulatoria, 144
 corriente continua, 63
 corriente de campo nominal, 359
 corriente de magnetización modificada, 300
 corriente nominal, 212, 213, 357
 corrientes de desplazamiento, 16
 corrientes de Foucault, 166
 corrientes homopolares, 270
 corrientes instantáneas, 403
 cortocircuito brusco, 402
 cortocircuitos, 398
 criterio de áreas iguales, 439
 criterios de energía, 435
 curva característica, 23

 datos de placa, 357
 delga, 136
 densidad de corriente, 16
 densidades de energía, 13
 desequilibrios, 432
 deslizamiento, 204, 205, 422
 deslizamiento nominal, 213
 despeje de la falla, 439
 desplazamiento virtual, 68
 devanado amortiguador, 422
 devanado auxiliar, 333
 devanado de compensación, 158

 devanado imbricado, 140
 devanado ondulado, 140
 devanados amortiguadores, 443, 444
 diagrama de bloques, 155
 diagrama de círculo, 230
 diagrama fasorial, 349, 401
 dipolos magnéticos, 14
 dominio de la frecuencia, 398
 $dq0$, 345
 $dq0-f$, 345

 ecuaciones de borde, 23
 ecuaciones de contorno, 23
 ecuaciones de frontera, 23
 ecuaciones de ligazón, 23
 ecuaciones de Maxwell, 15
 ecuaciones internas, 23
 Edison, 97, 193
 educción de Krön, 406
 efecto pelicular, 167
 Eje 0, 345
 Eje d, 344
 eje de la potencia mecánica, 235
 eje del par eléctrico, 235
 Eje f, 345
 eje mecánico, 97, 104
 Eje q, 344
 ejes, 44
 ejes eléctricos, 44
 ejes mecánicos, 44
 eltransitorios electromagnéticos, 397
 embalamiento, 26
 energía, 13
 energía cinética, 420, 436
 enrollado amortiguador, 422
 Ensayo de rotor bloqueado, 217
 ensayo de vacío, 217
 entrehierro, 97
 envejecimiento, 212, 357
 envolvente, 430
 equilibrio de fuerzas, 20
 Equivalente de Thèvenin, 207
 escobilla, 136
 escobillas, 135, 347
 esfuerzos mecánicos, 429
 estabilidad, 444

estabilidad de Liapunov, 435
 estabilidad dinámica, 397
 estator, 97
 estimación de los parámetros, 444
 estimación paramétrica, 220
 Euler, 338, 435
 excitatriz, 172, 397

 factor de potencia nominal, 358
 fallas, 398
 fasores transitorios, 443
 ferrocarriles, 169
 flujo de remanencia, 152
 flujo remanente, 151
 flujos de dispersión, 346
 frecuencia, 335
 frecuencia natural, 422
 frecuencias naturales, 422
 frenado regenerativo, 152, 171, 195
 frenado reostático, 171
 Freno, 226
 freno, 27
 fuentes de corriente, 169
 fuerza, 14
 fuerza electromotriz transitoria, 417
 fuerzas electromotrices subtransitorias, 426
 función de estado, 47
 función de Liapunov, 440
 función definida positiva, 440

 Generador, 226
 generador, 19, 27, 144
 grado de saturación, 371

 H, 420
 hermítica, 118
 hermitiana, 118, 121
 hipersuperficie, 440

 identidad, 200
 impedancia de secuencia negativa, 434
 impedancia operacional propia, 413
 inductancia base, 409
 inductancia de alisamiento, 170
 inductancia del rotor, 340
 inductancia transitoria, 425
 inductancias subtransitorias, 425, 443

 inductancias transitorias, 405, 443
 integración numérica directa, 445
 interacción, 348
 interacciones, 14
 inversor mecánico, 145

 jaula de ardilla, 422

 límites adicionales, 362
 límites de estabilidad, 435, 439
 límites de operación, 357
 límites térmicos, 357
 línea neutra, 137, 140
 leyes de Maxwell, 16
 Liapunov, 439
 Lugar geométrico, 414
 lugares geométricos, 230, 359

 máquina bifásica, 289
 máquina de corriente continua, 110
 máquina de inducción, 109
 máquina eléctrica, 44
 máquina generalizada, 104, 347
 máquina sincrónica, 109
 máquina tetrafásica, 289
 máquina trifásica, 115
 máquinas homopolares, 63
 método de Liapunov, 445
 método Gauss-Newton, 221
 métodos aproximados, 443
 mínimo estricto, 440
 mínimos cuadrados, 220
 matriz cíclica, 201
 matriz característica, 399, 402
 matriz de impedancia, 404
 matriz de inductancia, 339
 matriz de inductancias, 105
 matriz de par, 105, 339
 matriz de resistencias, 105
 matriz hermitiana, 345
 matriz Hessiana, 222
 matriz Jacobiana, 221
 matriz simétrica, 201
 metadina transformador, 172
 metadinamos, 172
 metadinas, 172
 metros, 169

modelos en secuencia, 432
 momento de inercia, 339
 Motor, 226
 motor, 19, 27, 144

 neutro, 346
 no-holonómicos, 119
 norte, 102

 oscilaciones, 444
 oscilaciones automantenidas, 405
 oscilaciones mecánicas, 434
 oscilograma, 429

 péndulo físico, 422
 pérdidas, 165
 pérdidas Joule, 164
 pérdidas mecánicas, 167, 420
 par acelerante, 339
 par base, 216
 par de inducción, 422
 par eléctrico nominal, 213
 par generatriz, 144
 par máximo, 209
 par motriz, 144
 par resistente, 339
 par-velocidad, 152
 parámetros, 197
 pares de polos, 102
 paso polar, 102
 pequeñas oscilaciones, 419, 444
 período subtransitorio, 429
 permeanza, 348
 polinomio característico, 400
 polos auxiliares, 164
 polos salientes, 333
 por unidad, 214, 407
 potencia, 118
 potencia aparente nominal, 358
 potencia base, 157, 215
 potencia de inducción, 422
 potencia nominal, 213
 potencia reactiva, 353
 potencia sincronizante, 421
 Predictor Corrector, 435
 principio de conservación de la energía, 46
 principio de los trabajos virtuales, 43, 56, 58

problema dinámico, 443
 problema electromagnético, 443
 procesamiento de señales, 444
 puente rectificador, 169
 puertos, 44
 punto de equilibrio, 421
 punto de equilibrio estable, 440
 punto de operación, 211
 punto de operación estable, 212
 punto de operación inestable, 212

 régimen continuo, 62
 régimen permanente, 349, 401
 razón de conducción, 171
 reactancia transitoria, 418
 receptividad, 171
 recta del deslizamiento, 235
 reguladores, 397
 relación de Lorenz, 15, 19
 relaciones constitutivas, 16
 reluctancia, 47, 348
 rendimientos, 352
 representación adimensional, 443
 respuesta homogénea, 399
 rotor, 97
 rotor cilíndrico, 348
 rotor liso, 333
 rueda de Faraday, 36
 Runge Kutta, 435
 Runge-Kutta, 338

 saturación, 159
 secuencia cero, 199, 270, 346
 secuencia negativa, 199, 270
 secuencia positiva, 199, 270
 segunda ley de Newton, 22, 59
 separatriz, 143
 series de Taylor, 421
 sincronizador, 376
 sincronizar, 335
 sistema adimensional, 407
 sistema de referencia, 18
 sistema eléctrico, 376
 sistema electromecánico, 398
 sistema equilibrado, 349
 sistema mecánico, 398

solución homogénea, 403
solución particular, 400
soluciones no triviales, 400
soluciones temporales, 398
subtransitorio aproximado, 426
sur, 102

término de generación, 61
término de transformación, 61
temperatura máxima, 213
tensión base, 215
tensión nominal, 213, 357
teorema del valor inicial, 413
Tesla, 97, 193
tiempo base, 408
tiempo crítico, 439
tiempo de conmutación, 162
trabajos virtuales, 68
transductores, 172
transformación de Clark, 345
transformación de Park, 344, 401
Transformada de Laplace, 401
transformada de Laplace, 398
Transformada rápida de Fourier, 444
transitorio aproximado, 417
transitorios electromagnéticos, 443
transitorios electromecánicos, 397
tranvías, 169
triángulo de Potier, 374
triple frecuencia, 434
troceadores de tensión, 169
trolebuses, 169

valores nominales, 357
vectores espaciales, 199, 341
velocidad base, 408
velocidad de operación, 24, 25
velocidad de sincronismo, 148
velocidad nominal, 359
velocidad sincrónica, 23, 148
vida útil, 213
vida media, 213

Ward-Leonar, 306
Whestinghouse, 193

yugo, 47