

TEORÍA DE LAS ECUACIONES

Y SUS APLICACIONES CONCRETAS

Teoría y Problemas



ÁLGEBRA

Editorial
CUZCAN

Apoyados por la Universidad de la Cuzco y la Cultura



Amor a Sofía
Nivel: Universitario





TEORÍA DE LAS ECUACIONES

IGUALDAD MATEMÁTICA

Una igualdad matemática es una relación de comparación entre dos expresiones matemáticas, mediante el signo "=" (igual), la cual indica que éstas tienen el mismo valor numérico, o que deben adquirir el mismo valor numérico.

PARTES DE UNA IGUALDAD MATEMÁTICA :

Siendo A y B dos expresiones matemáticas, se tiene que :

$$\boxed{A = B} \quad (1.1)$$

es una igualdad matemática, donde :

= , signo que expresa la igualdad
 A , primer miembro
 B , segundo miembro



Ejemplo 1 :

$$* \quad (-2)^3 + 7 = \frac{15}{-3} - (-4)$$

es una IGUALDAD MATEMÁTICA, pues los miembros de ésta tienen el mismo valor numérico. A ésta clase de igualdad se le denomina IGUALDAD NUMÉRICA.

$$* \quad x^2 - 1 = 3(x + 3)$$

También es una igualdad matemática en la que se requiere que ambos miembros adquieran el mismo valor numérico; esto significa que, al sustituir la variable x por un cierto valor, se obtenga en aquella una igualdad numérica. En este caso, para $x = 5$ resulta :

$$5^2 - 1 = 3(5 + 3) \quad , \quad \text{es decir :} \quad 24 = 24$$

también se dice que para $x = 5$ la igualdad SE SATISFACE ó SE VERIFICA. Esta clase de igualdad recibe el nombre de IGUALDAD LITERAL.

CLASIFICACIÓN DE LAS IGUALDADES MATEMÁTICAS

IGUALDAD MATEMÁTICA	* NUMÉRICA	{	* ALGEBRAICA	
			* NO ALGEBRAICA	
	* LITERAL	{	* ALGEBRAICA	* ABSOLUTA O IDENTIDAD
				* RELATIVA O ECUACIÓN
			* NO ALGEBRAICA	* ABSOLUTA
				* RELATIVA

De éstas, nos limitaremos (en este trabajo) a la IGUALDAD MATEMÁTICA LITERAL ALGEBRAICA, que llamaremos de aquí en adelante simplemente IGUALDAD.

Cuando una expresión matemática presenta una sola variable, cualquiera sea su naturaleza, ésta es una función de dicha variable. Por ejemplo, la expresión : $\frac{1}{x} - \sqrt{4-x}$, contiene una sola variable, entonces esta es una función de " x "; que por lo general suele denotarse así :

$$\text{así :} \quad f(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{4-x}.$$

Si comparamos dos funciones algebraicas con la misma variable, mediante el signo "=" diremos que se habrá formado una IGUALDAD de una sola variable. En general, ésta se puede representar así :

$$\boxed{F(x) = G(x)} \quad (1.2)$$

CONJUNTO DE VALORES ADMISIBLES (CVA)

El conjunto de definición de la igualdad, está formado por todos los valores de la variable para los cuales los valores numéricos de ambos miembros existen simultáneamente. Para (1.2), si $Dom(f)$ es el conjunto de definición de F y $Dom(G)$ es el de G , entonces :

$$\boxed{CVA = Dom(F) \cap Dom(G)} \quad (1.3)$$



EJEMPLO 2:

En la ecuación: $\frac{x+1}{x-1} = \sqrt{4x+1}$

según (1.2), se observa que: $\text{Dom}(F) = \langle -\infty; -1 \rangle \cup \langle 1; +\infty \rangle$ y

$$\text{Dom}(G) = \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$$

Entonces:

$$\text{CVA} = \left| \langle -\infty; -1 \rangle \cup \langle 1; +\infty \rangle \right| \cap \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$$

$$\text{CVA} = \langle 1; +\infty \rangle$$

OBSERVACIONES

- * Más adelante se dan detalles para la obtención del CVA en los diferentes casos.
- * Éste CVA es simplemente un "conjunto de referencia", por lo que no es tan significativo calcularlo, si se trata de resolver la ecuación en forma sencilla.

CLASES DE IGUALDAD

- **IGUALDAD ABSOLUTA O IDENTIDAD.** es aquella que se satisface o verifica para cualquier valor del CVA asignado a la variable. Para distinguirla de otras, ésta igualdad se la denota mejor por " \equiv ".



EJEMPLO 3:

La igualdad: $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \equiv \frac{2}{x^2-1}$

cuyo $\text{CVA} = \mathbb{C} - \{-1; 1\}$, es ABSOLUTA; cualquiera sea el valor del CVA que se asigne a " x ", la igualdad siempre se verifica.

- **IGUALDAD RELATIVA O ECUACIÓN.** es aquella que se satisface sólo para determinados valores del CVA que se asigne a la variable.



EJEMPLO 4:

La igualdad: $\sqrt{x^2+5} = x+1$

cuyo: $\text{CVA} = \langle -1; +\infty \rangle$, es RELATIVA, por que se verifica solamente cuando $x=2$ ($2 \in \text{CVA}$).

Naturalmente, son esta clase de igualdades las que han mantenido el interés de muchos matemáticos, desde tiempos remotos; y por supuesto, de las que nos ocuparemos en este libro.

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN

Se denomina así al valor de la variable para el cual, luego de reemplazarla en aquella, se obtiene una igualdad numérica; es decir, la igualdad se satisface.



EJEMPLO 5 :

Para la ecuación : $\frac{x+1}{x-1} = \sqrt{4x+1}$

cuando $x = 2$ resulta que : $\frac{2+1}{2-1} = \sqrt{4 \cdot 2 + 1} \rightarrow 3 = 3$ (igualdad numérica)

entonces : $x = 2$ es una solución de aquella ecuación.

La solución de una ecuación necesariamente es un elemento de su CVA. Por otro lado, una ecuación puede tener una o más soluciones. En ciertos casos, una ecuación no tiene solución.



EJEMPLO 6 :

La ecuación : $x^3 + 6 = 7x$

tiene tres soluciones : 1 ; 2 ; -3 (valores de x que el lector puede comprobar)

y la ecuación : $(x-1)(x+5) = (x+2)^2$

no tiene solución, no existe algún valor de x que verifique la igualdad.

CONJUNTO SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN

Es aquel conjunto que reúne a todas las soluciones de una ecuación y se le denota por Ω . El conjunto solución de una ecuación siempre es subconjunto de su CVA.



EJEMPLO 7 :

Para la ecuación : $x^3 + 6 = 7x$

su conjunto solución es : $\Omega = \{-3 ; 1 ; 2\}$. Como $CVA = \mathbb{C}$, se puede notar que : $\Omega \subset CVA$.

CLASIFICACIÓN DE UNA ECUACIÓN

Existe distintos criterios para realizar la clasificación de una ecuación. éstos son :

I. SEGÚN EL NÚMERO DE SUS SOLUCIONES :

Una ecuación puede ser :

1. **COMPATIBLE**, cuando tiene solución ($\Omega \neq \emptyset$). A su vez puede ser :

1.1. **C. DETERMINADA**, si se pueden enumerar sus soluciones (Ω es un conjunto finito).

1.2. **C. INDETERMINADA**, si no es posible enumerar sus soluciones (Ω es un conjunto infinito).

- 2. INCOMPATIBLE**, cuando no admite solución ($\Omega = \emptyset$). A ésta ecuación también se le llama ABSURDA o INCONSISTENTE.

**EJEMPLO 8 :**

* La ecuación : $x^3 + 6 = 7x$

es compatible determinada pues tiene tres soluciones. (como se vió en el ejemplo 6).

* La ecuación : $\frac{2}{x-3} = 1 + \frac{5-x}{x-3}$

es compatible indeterminada, tiene infinitas soluciones; se verifica la igualdad para cualquier valor de x , excepto 3.

* La ecuación: $\frac{x}{x+1} = \frac{x+1}{x+2}$

es incompatible, no tiene solución; es decir, ningún valor de x verifica la igualdad.

II. SEGÚN LA NATURALEZA DE SUS MIEMBROS

La clasificación de una ecuación según la naturaleza de los miembros que la conforman es como sigue :

- 1. ECUACIÓN NUMÉRICA :** Se denomina así a aquella ecuación en donde la única letra que aparece es la que representa a la variable.
- 2. ECUACIÓN LITERAL :** Es aquella donde, además de la que representa a la variable, aparecen más letras. Convencionalmente en una ecuación literal, " x " es la que representa a la variable y las otras letras se deben tomar como constantes paramétricas (parámetros).

**EJEMPLO 9 :**

* La ecuación : $\frac{5x-2}{3} = \frac{x-1}{2} + \frac{7x-1}{6}$ es numérica.

* La ecuación : $\frac{a}{b} \left(1 - \frac{a}{x} \right) + \frac{b}{a} \left(1 - \frac{b}{x} \right) = 1$ es literal. Se supone que " x " es la variable de la ecuación, a y b se consideran como constantes (a no ser que se indique otra cosa).

- 3. ECUACIÓN POLINOMIAL :** es aquella donde los miembros que la forman son funciones polinomiales. El CVA de una ecuación polinomial es el conjunto de los números complejos (\mathbb{C}).
- 4. ECUACIÓN FRACCIONARIA :** o específicamente racional fraccionaria, es aquella cuyos miembros son funciones racionales, y al menos uno de ellos además es fraccionaria.

El CVA de una ecuación fraccionaria esta dado por \mathbb{C} , con excepción de aquellos valores que anulan a los denominadores.



EJEMPLO 10 :

* La ecuación : $(x+3)(x+4)(x+5) = (x+2)(x+1) + x + 1$
es polinomial, cada miembro es una función polinomial.

* La ecuación : $\frac{x-2}{x-1} + \frac{x+2}{x+1} = \frac{x-4}{x-3} + \frac{x+4}{x+3} - \frac{28}{15}$

es fraccionaria, los miembros de ésta son funciones racionales fraccionarias.

El CVA de la ecuación es : $\mathbb{C} - \{-3; -1; 1; 3\}$

5. ECUACIÓN IRRACIONAL : es aquella donde al menos uno de los miembros que la forman es una función irracional. Esta clase de ecuaciones merece especial cuidado por varias razones que expondremos más adelante. Por lo pronto diremos que su CVA es un subconjunto de \mathbb{R} , a no ser que se indique otra cosa.



EJEMPLO 11 :

La ecuación : $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x-2} = 4$ es irracional, porque la variable x está afectada por un radical. Más adelante veremos el tratamiento de este tipo de ecuaciones.

III. SEGÚN EL GRADO DE SUS MIEMBROS

Esta clasificación es válida para ecuaciones polinomiales solamente y se detalla más adelante.

ECUACIONES EQUIVALENTES

Dos ecuaciones se dice que son equivalentes si tienen exactamente las mismas soluciones (o si tienen el mismo conjunto solución). En particular dos ecuaciones son equivalentes si no tienen solución (o si sus conjuntos solución son vacíos).



EJEMPLO 12 :

Para las ecuaciones : $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{2x-1} = 1$ (1)

$$x(2x-3) = 2 \quad \text{..... (2)}$$

Se puede probar que el conjunto solución de la primera es : $\Omega_1 = \left\{ -\frac{1}{2}; 2 \right\}$

y el de la segunda : $\Omega_2 = \left\{ -\frac{1}{2}; 2 \right\}$

Como $\Omega_1 = \Omega_2$, podemos afirmar que las ecuaciones (1) y (2) son equivalentes.



EJEMPLO 13:

La ecuación: $\sqrt{-\frac{1}{x}} = x$... (3) no tiene solución, es decir $\Omega_3 = \emptyset$

y la ecuación: $\frac{x}{x+1} = \frac{x+1}{x+2}$... (4) tampoco tiene solución ($\Omega_4 = \emptyset$).

entonces podemos asegurar que las ecuaciones (3) y (4) son equivalentes.

RESOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN

Resolver una ecuación significa desarrollar un procedimiento con el propósito de calcular todas sus soluciones. En algunos casos, éste mismo procedimiento servirá para demostrar que la ecuación no tiene solución.

Aquel procedimiento está formado por una secuencia de transformaciones de la ecuación, cada una de las cuales genera una ecuación (o un conjunto de ecuaciones) más sencilla y, sobre todo, equivalente a la original.

Consideremos la ecuación:

$$F(x) = G(x)$$

(1.4)

cuyo conjunto de valores admisibles, o conjunto de definición, es: CVA_1 ,

Si, como resultado de una transformación de (1.4), se obtiene la ecuación:

$$P(x) = Q(x)$$

(1.5)

el CVA de ésta última será necesariamente un subconjunto de CVA_1 .

Este detalle es de vital importancia en la resolución de una ecuación. Luego de la transformación de una ecuación, el CVA de la ecuación resultante o es el CVA original o un subconjunto de éste (recuerde que todo conjunto es subconjunto de si mismo), pero en ningún caso puede ocurrir una ampliación del CVA . Esto se debe a que, durante todo el proceso de resolución, nuestro interés es por la ecuación original.



EJEMPLO 14:

En la resolución de la ecuación: $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{2x-1} = 1$

cuyo $CVA = \mathbb{C} - \left\{ -1; \frac{1}{2} \right\}$, luego de transformarla adecuadamente, resulta:

$$x(2x-3) = 2$$

ecuación equivalente que es más sencilla que la original y su CVA seguirá

siendo el CVA original, es decir: $\mathbb{C} - \left\{ -1; \frac{1}{2} \right\}$

TEOREMA 1

Si a cada miembro de la ecuación (1.4) se le suma una misma expresión $M(x)$, definida $\forall x \in CVA_1$, se obtiene:

$$F(x) + M(x) = G(x) + M(x) \quad (1.6)$$

cuyo conjunto de definición sigue siendo CVA_1 y es necesariamente equivalente a la ecuación (1.4).



EJEMPLO 15:

Sea la ecuación: $x^2 + \frac{x}{x-2} = 5 + \frac{2}{x-2}$

cuyo $CVA_1 = \mathbb{C} - \{2\}$. Si le sumamos a cada miembro la expresión:

$M(x) = -\frac{x}{x-2}$ (definida $\forall x \in CVA_1$) se obtiene:

$$x^2 + \frac{x}{x-2} - \frac{x}{x-2} = 5 + \frac{2}{x-2} - \frac{x}{x-2} \rightarrow x^2 = 5 + \frac{2-x}{x-2}$$

Esta última, cuyo CVA sigue siendo $\mathbb{C} - \{2\}$, es equivalente a la ecuación original.

OBSERVACION:

Este teorema se utiliza, en forma práctica, para:

- * *Trasladar términos de un miembro a otro, simplemente cambiándoles de signo.*
- * *Simplificar, cancelar o eliminar términos idénticos de ambos miembros de la ecuación.*



EJEMPLO 16:

Al resolver la ecuación: $x + \frac{1}{x} - \frac{6}{x-1} = \frac{1}{x} + 2$

cuyo CVA = $\mathbb{C} - \{0; 1\}$, usando el teorema 1 en forma práctica, se tendría que:

* eliminando $\frac{1}{x}$ de ambos miembros: $x - \frac{6}{x-1} = 2$

* trasladando la fracción $-\frac{6}{x-1}$ al segundo miembro: $x = 2 + \frac{6}{x-1}$

* trasladando 2 al primer miembro: $x - 2 = \frac{6}{x-1}$

Esta última, con CVA = $\mathbb{C} - \{0; 1\}$, es equivalente a la ecuación original.

TEOREMA 2

Si ambos miembros de la ecuación (1.4) se multiplican por una misma expresión $M(x)$, tal que: $\forall x \in CVA_1 : M(x) \neq 0$, resulta:

$$\boxed{F(x) \cdot M(x) = G(x) \cdot M(x)} \quad (1.7)$$

ésta ecuación, cuyo conjunto de definición seguirá siendo CVA_1 , necesariamente es equivalente a la ecuación (1.4).

**EJEMPLO 17:**

Tomemos la ecuación del ejemplo 14: $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{2x-1} = 1$

cuyo $CVA = \mathbb{C} - \left\{ -1; \frac{1}{2} \right\}$, y veamos cómo obtenemos la ecuación equivalente señalada.

Sea $M(x) = (x+1)(2x-1)$, la cual $\forall x \in CVA : M(x) \neq 0$, entonces por el teorema 2, se tiene:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{2x-1} \right) (x+1)(2x-1) &= 1 \cdot (x+1)(2x-1) \\ \rightarrow 2x-1 + 2(x+1) &= (x+1)(2x-1) \end{aligned}$$

Efectuando operaciones y usando el teorema 1, resulta:

$$x(2x-3) = 2$$

ecuación que es equivalente a la ecuación original.

OBSERVACIÓN:

Tenga cuidado con el uso inapropiado de éste teorema. Su aplicación es exclusivamente para una ecuación fraccionaria o en una ecuación donde la variable forma parte de algún denominador. El propósito del teorema es justamente eliminar la variable de los denominadores.

TEOREMA 3

Si la ecuación (1.4) puede expresarse así:

$$\boxed{f(x) \cdot M(x) = g(x) \cdot M(x)} \quad (1.8)$$

sin alterar su CVA_1 y donde $M(x)$ no es una constante monómica, entonces el conjunto de ecuaciones siguiente: $M(x) = 0 \vee f(x) = g(x)$

cuyo conjunto de definición sigue siendo CVA_1 , es equivalente a la ecuación original.



EJEMPLO 18 :

Sea la ecuación : $x^2 - 2x - 1 + \frac{2}{x} = 3x - \frac{3}{x}$

cuyo CVA = $\mathbb{C} - \{0\}$. Ésta, sin alterar su CVA, se puede expresar así :

$$(x-2)\left(x - \frac{1}{x}\right) = 3\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

Entonces, por el teorema 3, será equivalente al conjunto de ecuaciones siguiente :

$$x - \frac{1}{x} = 0 \quad \vee \quad x - 2 = 3$$

donde, naturalmente, el CVA de éste conjunto sigue siendo $\mathbb{C} - \{0\}$.

OBSERVACIONES :

* El teorema puede demostrarse rápidamente, usando la propiedad :

$$ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \quad \vee \quad b = 0$$

* El teorema, en forma práctica, expresa que si ambos miembros de una ecuación contienen un mismo factor que depende de la variable, existe la posibilidad que éste pueda tomar el valor cero, para algún valor del CVA asignado a dicha variable, con lo cual la igualdad también se verificaría.

* Para un conjunto de ecuaciones, obtenido luego de la aplicación de éste teorema, su conjunto solución está dado por la unión de los conjuntos solución de cada ecuación.

TEOREMA 4

Si ambos miembros de la ecuación (1.4) se elevan a un mismo exponente natural, resulta la ecuación :

$$\left[F(x)\right]^n = \left[G(x)\right]^n \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2 \quad (1.9)$$

cuyo conjunto de definición es un subconjunto de CVA_1 , pero ésta no necesariamente es equivalente a la ecuación original.



EJEMPLO 19 :

Para la ecuación : $\sqrt{3x-2} = x-2$ (1)

cuyo CVA = $[2; +\infty>$, si ambos miembros los elevamos al cuadrado resulta :

$$(\sqrt{3x-2})^2 = (x-2)^2 \rightarrow 3x-2 = x^2 - 4x + 4 \quad \text{..... (2)}$$

ésta última, cuyo CVA sigue siendo $[2; +\infty>$, no es equivalente a la ecuación (1), pues se puede demostrar que $\Omega_1 = \{6\}$ y $\Omega_2 = \{1; 6\}$; es decir, sus conjuntos solución no son iguales.



EJEMPLO 20 :

Para la ecuación : $x - 1 = \sqrt{x^2 - x - 6}$... (3)

donde su CVA = $[3; +\infty>$, al elevar al cuadrado ambos miembros se obtiene :

$$(x - 1)^2 = (\sqrt{x^2 - x - 6})^2 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = x^2 - x - 6 \quad \dots (4)$$

La ecuación (4), cuyo CVA es el mismo que el de la ecuación (3), si es equivalente a la ecuación original. Observe que $\Omega_3 = \{7\}$ y que $\Omega_4 = \{7\}$ o sea, sus conjuntos solución son iguales.

OBSERVACIONES :

* Recuerde que la transformación de una ecuación, mediante la aplicación de uno de los teoremas anteriores, debe generar una ecuación más simple que la original y no al revés (*hacer más complicada la ecuación*). No tiene ningún sentido aplicar el teorema 4 a una ecuación polinomial o a una ecuación fraccionaria; como lo hacen algunos autores para justificar el teorema. Su uso es única y exclusivamente para transformar una ecuación irracional.

* Habíamos señalado que una ecuación irracional tiene un trato especial. Pues bien, si nos pidieran resolver, por ejemplo, la ecuación :

$$\sqrt[4]{3x+1} + 1 = \sqrt[3]{5x+2}$$

y lo hiciéramos considerando como CVA = \mathbb{C} , entonces al intentar una comprobación luego de obtener un valor para x , no sabríamos cuál de las cuatro raíces de $\sqrt[4]{3x+1}$ y cuál de las tres de $\sqrt[3]{5x+2}$ se deberán tomar para que la igualdad se satisfaga (o en todo caso se tendría que probar uno a uno y ya puede imaginarse lo laborioso que resultaría esto).

* Debido a ésta situación, una ecuación irracional se resuelve solamente dentro del conjunto de los números reales (a no ser que se indique otra cosa) y esto significa que: su CVA es un subconjunto de \mathbb{R} y que al realizar la comprobación, las operaciones de radicación que hubiesen se deben efectuar en \mathbb{R} (cada operación de radicación tiene solo una raíz en \mathbb{R}).

* Calcular el CVA de una ecuación irracional puede resultar mucho más complicado que resolver la misma ecuación, pues en la mayoría de los casos éste cálculo implica resolver desigualdades. Quizás el CVA de ésta ecuación puede ayudarnos a tener una idea acerca de sus posibles soluciones.

* La forma de evitar el cálculo del CVA es resolviendo directamente la ecuación irracional, aplicando los teoremas ya señalados, y luego realizar una comprobación de las "soluciones" obtenidas en la ecuación original. Lógicamente, son soluciones de ésta solamente aquellas que logren satisfacerla.



EJEMPLO 18 :

Sea la ecuación : $x^2 - 2x - 1 + \frac{2}{x} = 3x - \frac{3}{x}$

cuyo CVA = $\mathbb{C} - \{0\}$. Ésta, sin alterar su CVA, se puede expresar así :

$$(x-2)\left(x - \frac{1}{x}\right) = 3\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

Entonces, por el teorema 3, será equivalente al conjunto de ecuaciones siguiente :

$$x - \frac{1}{x} = 0 \quad \vee \quad x - 2 = 3$$

donde, naturalmente, el CVA de éste conjunto sigue siendo $\mathbb{C} - \{0\}$.

OBSERVACIONES :

- * El teorema puede demostrarse rápidamente, usando la propiedad :
 $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \quad \vee \quad b = 0$
- * El teorema, en forma práctica, expresa que si ambos miembros de una ecuación contienen un mismo factor que depende de la variable, existe la posibilidad que éste pueda tomar el valor cero, para algún valor del CVA asignado a dicha variable, con lo cual la igualdad también se verificaría.
- * Para un conjunto de ecuaciones, obtenido luego de la aplicación de éste teorema, su conjunto solución está dado por la unión de los conjuntos solución de cada ecuación.

TEOREMA 4

Si ambos miembros de la ecuación (1.4) se elevan a un mismo exponente natural, resulta la ecuación :

$$\boxed{|F(x)|^n = |G(x)|^n} ; \quad n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2 \quad (1.9)$$

cuyo conjunto de definición es un subconjunto de CVA_1 , pero ésta no necesariamente es equivalente a la ecuación original.



EJEMPLO 19 :

Para la ecuación : $\sqrt{3x-2} = x-2$ (1)

cuyo CVA = $[2; +\infty >$, si ambos miembros los elevamos al cuadrado resulta :

$$(\sqrt{3x-2})^2 = (x-2)^2 \rightarrow 3x-2 = x^2 - 4x + 4 \quad \text{..... (2)}$$

ésta última, cuyo CVA sigue siendo $[2; +\infty >$, no es equivalente a la ecuación (1), pues se puede demostrar que $\Omega_1 = \{6\}$ y $\Omega_2 = \{1; 6\}$; es decir, sus conjuntos solución no son iguales.



EJEMPLO 20 :

Para la ecuación : $x - 1 = \sqrt{x^2 - x - 6}$... (3)

donde su CVA = $[3 ; +\infty>$, al elevar al cuadrado ambos miembros se obtiene :

$$(x - 1)^2 = (\sqrt{x^2 - x - 6})^2 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = x^2 - x - 6 \quad \dots (4)$$

La ecuación (4), cuyo CVA es el mismo que el de la ecuación (3) , si es equivalente a la ecuación original. Observe que $\Omega_3 = \{7\}$ y que $\Omega_4 = \{7\}$ osea, sus conjuntos solución son iguales.

OBSERVACIONES

- * Recuerde que la transformación de una ecuación, mediante la aplicación de uno de los teoremas anteriores, debe generar una ecuación más simple que la original y no al revés (*hacer más complicada la ecuación*). No tiene ningún sentido aplicar el teorema 4 a una ecuación polinomial o a una ecuación fraccionaria; como lo hacen algunos autores para justificar el teorema. Su uso es única y exclusivamente para transformar una ecuación irracional.

- * Habíamos señalado que una ecuación irracional tiene un trato especial. Pues bien si nos pidieran resolver, por ejemplo, la ecuación :

$$\sqrt[4]{3x+1} + 1 = \sqrt[3]{5x+2}$$

y lo hiciéramos considerando como CVA = \mathbb{C} , entonces al intentar una comprobación luego de obtener un valor para x , no sabríamos cuál de las cuatro raíces de $\sqrt[4]{3x+1}$ y cuál de las tres de $\sqrt[3]{5x+2}$ se deberán tomar para que la igualdad se satisfaga (o en todo caso se tendría que probar uno a uno y ya puede imaginarse lo laborioso que resultaría esto).

- * Debido a ésta situación, una ecuación irracional se resuelve solamente dentro del conjunto de los números reales (*a no ser que se indique otra cosa*) y esto significa que: su CVA es un subconjunto de \mathbb{R} y que al realizar la comprobación, las operaciones de radicación que hubiesen se deben efectuar en \mathbb{R} (*cada operación de radicación tiene solo una raíz en \mathbb{R}*)
- * Calcular el CVA de una ecuación irracional puede resultar mucho más complicado que resolver la misma ecuación, pues en la mayoría de los casos éste cálculo implica resolver desigualdades. Quizás el CVA de ésta ecuación puede ayudarnos a tener una idea acerca de sus posibles soluciones.
- * La forma de evitar el cálculo del CVA es resolviendo directamente la ecuación irracional, aplicando los teoremas ya señalados, y luego realizar una comprobación de las "soluciones" obtenidas en la ecuación original. Lógicamente, son soluciones de ésta solamente aquellas que logren satisfacerla.



EJEMPLO 21 :

Resolver la ecuación : $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x-2} = 4$

Enumeremos cada paso de la resolución de ésta ecuación :

1º) Pasando $\sqrt{x-2}$ al 2º miembro : $\sqrt{2x+3} = 4 - \sqrt{x-2}$

2º) Elevando al cuadrado : $(\sqrt{2x+3})^2 = (4 - \sqrt{x-2})^2$
 $\rightarrow 2x+3 = 16 - 8\sqrt{x-2} + x-2$

3º) Trasponiendo términos : $8\sqrt{x-2} = 11 - x$

4º) Nuevamente, elevando al cuadrado : $(8\sqrt{x-2})^2 = (11 - x)^2$
 $\rightarrow 64x - 128 = 121 - 22x + x^2$

5º) Transponiendo términos : $x^2 - 86x + 249 = 0$

Esta última ecuación, cuyo conjunto solución es $\Omega = \{3; 83\}$, no necesariamente es equivalente a la ecuación original.

Comprobando cada solución en la ecuación inicial, se tiene :

Para $x = 3$:

$$\sqrt{2 \cdot 3 + 3} + \sqrt{3 - 2} = 4 \rightarrow 3 + 1 = 4 \quad (\text{correcto})$$

entonces $x = 3$ es una solución de aquella ecuación inicial.

Para $x = 83$:

$$\sqrt{2 \cdot 83 + 3} + \sqrt{83 - 2} = 4 \rightarrow 13 + 9 = 4 \quad (\text{incorrecto})$$

entonces $x = 83$ no es una solución de la ecuación inicial.

Si fuéramos estrictos en la resolución de ésta ecuación diríamos en principio que su CVA = $[2; +\infty)$. Recuerde que \sqrt{A} existe o se puede efectuar en \mathbb{R} solo si $A \geq 0$. En virtud de esto, $2x+3 \geq 0 \wedge x-2 \geq 0$, de donde $x \geq 2$. También recuerde que siendo $A \geq 0$ se tiene que $\sqrt{A} \geq 0$ y además : $\sqrt{A^2} = A$. Entonces, en el 1º paso como $\sqrt{2x+3} \geq 0$, se debe cumplir que : $4 - \sqrt{x-2} \geq 0$ y de aquí $x \leq 18$.

En el 3º paso, algo similar, como $8\sqrt{x-2} \geq 0$, entonces $11 - x \geq 0$ de donde $x \leq 11$. Con lo cual, de plano, descartaríamos a $x = 83$ como solución de la ecuación original.



ECUACIÓN POLINOMIAL DE GRADO “n”

Anteriormente, ya hemos señalado que una ecuación polinomial es aquella cuyos miembros son funciones polinomiales y con esto su conjunto de definición (CVA) es \mathbb{C} (conjunto de los números complejos). Haciendo uso de los teoremas de transformación de una ecuación, los polinomios pueden ser reducidos en un sólo miembro.

FORMA GENERAL :

Toda ecuación polinomial puede llevarse a la siguiente forma general :

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad \dots (2.1)$$

donde : x , es la variable o incógnita de la ecuación

n , grado de la ecuación polinomial ($n \in \mathbb{N}$)

$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$, son los coeficientes de la ecuación

a_0 , se denomina coeficiente principal ($a_0 \neq 0$)

a_n , término independiente

Debido a su uso frecuente, la ecuación (2.1) se puede representar abreviadamente así :

$$P_n(x) = 0 \quad (2.2)$$

A partir de (2.1) asignándole un cierto valor a n , se pueden obtener algunas de las ecuaciones polinomiales, que quizás son familiares para el lector :

para $n = 1$: $P(x) = a_0 x + a_1 = 0$

Ec. Lineal

para $n = 2$: $P(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = 0$

Ec. Cuadrática (2.3)

para $n = 3$: $P(x) = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$

Ec. Cúbica

para $n = 4$: $P(x) = a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0$

Ec. Cuártica

Tal vez los coeficientes más adecuados, para cada caso, sean los siguientes :

$$P(x) = ax + b = 0$$

$$P(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

(2.4)

donde el coeficiente principal $a \neq 0$. Estas son las ecuaciones polinomiales que serán estudiadas en detalle, más adelante.

RAÍZ DE UNA ECUACIÓN POLINOMIAL

Si $x = r$ es una RAÍZ del polinomio $P_n(x)$, o el polinomio se anula para $x = r$ ($P_n(r) = 0$), entonces también se dice que $x = r$ es una RAÍZ de la ecuación polinomial $P_n(x) = 0$.



EJEMPLO 22:

Dado el polinomio: $P(x) = x^3 - 7x + 6$

se puede observar que $x = 2$ es una raíz, pues: $P(2) = 2^3 - 7 \cdot 2 + 6 = 0$ entonces podemos afirmar que $x = 2$ es a su vez una RAÍZ de la ecuación polinomial:

$$P(x) = x^3 - 7x + 6 = 0$$

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

TEOREMA 5

Toda ecuación polinomial, de la forma:

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 ; \quad a_0 \neq 0$$

donde los coeficientes son números arbitrarios, en general complejos, tiene por lo menos una raíz compleja.

El teorema, originalmente, fue enunciado por D'ALEMBERT (1717 - 1789). La primera demostración satisfactoria de éste teorema fue dada por KARL F. GAUSS en su disertación: DEMONSTRATIO NOVA THEOREMATIS OMNEM FUNCTIONEM ALGEBRAICAM UNIUS VARIABILIS IN FACTORES REALES, PRIMI VEL SECUNDI GRADUS RESOLVI POSSE (HELMSTED, 1799). GAUSS criticó las primeras demostraciones defectuosas desarrolladas por D'ALEMBERT, EULER y LAGRANGE. GAUSS dió otras dos demostraciones en 1815 y 1816. Cauchy dió una nueva demostración en su COURS D'ANALYSE ALGEBRIQUE (1821) y más tarde STURN dió otra en su JOURN DE MATHEMATIQUE (1836).

El teorema tiene una importancia capital dentro del álgebra, pero su demostración forma parte de la teoría de las funciones analíticas que es una rama del análisis, y por ende escapa a los límites de este texto.

TEOREMA DEL FACTOR**TEOREMA 6**

Si $x = r$ es una raíz de la ecuación polinomial $P_n(x) = 0$, entonces $(x - r)$ es un factor de $P_n(x)$, es decir :

$$P_n(x) \equiv (x - r) \cdot Q_{n-1}(x) \quad \dots (2.5)$$

PRUEBA :

Si $x = r$ es una raíz de $P_n(x) = 0 \rightarrow P_n(r) = 0$

Efectuemos la división de $P_n(x)$ entre $(x - r)$; entonces, por el algoritmo de la división, se tiene que :

$$P_n(x) \equiv (x - r) \cdot Q(x) + R(x)$$

donde, según las propiedades de la división, $Q(x)$ es un polinomio de grado $n - 1$ y $R(x)$ es el resto que debe ser una constante o cero.

Suponiendo que $R(x)$ es igual a c , la identidad anterior se puede colocar así :

$$P_n(x) \equiv (x - r) \cdot Q_{n-1}(x) + c$$

Haciendo $x = r$, resulta : $P_n(r) = (r - r) \cdot Q_{n-1}(r) + c$

de donde : $P_n(r) = c$ y como $P_n(r) = 0 \rightarrow c = 0$

Por lo tanto : $P_n(x) \equiv (x - r) \cdot Q_{n-1}(x)$

**EJEMPLO 23 :**

En el ejemplo 22, vimos que $x = 2$ era una raíz de la ecuación polinomial :

$$P(x) = x^3 - 7x + 6 = 0$$

Entonces, por el teorema del factor, $(x - 2)$ es un factor de $P(x)$; es decir :

$$x^3 - 7x + 6 \equiv (x - 2) \cdot Q(x)$$

TEOREMA 7

Toda ecuación polinomial $P_n(x) = 0$, con coeficientes arbitrarios (en general complejos), tiene exactamente " n " raíces complejas.

PRUEBA :

Sea la ecuación polinomial :

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0, \text{ con } a_0 \neq 0 \wedge n \in \mathbb{N}$$

Según el teorema fundamental del álgebra, ésta ecuación tiene por lo menos una raíz, pues sea $x = r_1$ dicha raíz. Entonces, por el teorema del factor, se tiene que :

$$P_n(x) = (x - r_1) \cdot Q_{n-1}(x)$$

Si realizamos la división, veremos que $Q_{n-1}(x)$ tiene como primer término a $a_0 x^{n-1}$, por lo que :

$$P_n(x) = (x - r_1)(a_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + b_2 x^{n-3} + \dots + b_{n-1}) \quad ; \quad a_0 \neq 0$$

donde : $b_1 = a_0 r_1 + a_1$; $b_2 = a_0 r_1^2 + a_1 r_1 + a_2$, etc.

De igual modo, por los mismos teoremas, $Q_{n-1}(x) = 0$ debe tener también al menos una raíz $x = r_2$ tal que $(x - r_2)$ es un factor de $Q_{n-1}(x)$.

Entonces :

$$P_n(x) = (x - r_1)(x - r_2)(a_0 x^{n-2} + c_1 x^{n-3} + c_2 x^{n-4} + \dots + c_{n-2}) \quad ; \quad a_0 \neq 0$$

Continuando con el mismo procedimiento con cada uno de los cocientes, hasta llegar a un cociente final, el cual será constante e igual a a_0 , se tendrá que :

$$P_n(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_n) \cdot a_0 \quad ; \quad a_0 \neq 0$$

donde : $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ son las n raíces de la ecuación $P_n(x) = 0$

RAÍCES IGUALES O RAÍCES CON MULTIPLICIDAD

Hemos señalado en la parte anterior que $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ son las n raíces de la ecuación: $P_n(x) = 0$. Pero, cabe la posibilidad que algunas de ellas sean iguales. Si existen α raíces todas iguales a r_1 , entonces se dice que r_1 es una raíz de MULTIPLICIDAD " α " ó raíz repetida α veces y en ese caso $(x - r_1)^\alpha$ es un factor de $P_n(x)$, es decir :

$$P_n(x) = (x - r_1)^\alpha \cdot Q_{n-\alpha}(x) \quad (2.6)$$

En general, supongamos que : $r_1, r_2, r_3, \dots, r_i$ ($i \leq n$) son las raíces distintas de la ecuación $P_n(x) = 0$ con multiplicidades : $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ respectivamente, tal que :

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda = n$$

entonces la ecuación polinomial $P_n(x) = 0$ se podrá expresar, según el teorema del factor, de la siguiente manera :

$$P_n(x) = a_0 (x - r_1)^\alpha (x - r_2)^\beta (x - r_3)^\gamma \dots (x - r_i)^\lambda \quad ; \quad i \leq n \wedge a_0 \neq 0$$

**EJEMPLO 24 :**

Sea la ecuación polinomial : $P(x) = x^6 + x^5 - 15x^4 - 5x^3 + 70x^2 - 12x - 72 = 0$

Luego de factorizar $P(x)$, ésta se expresa así :

$$P(x) = (x-2)^3 (x+3)^2 (x+1) = 0$$

Observe que los factores primos obtenidos en éste caso son todos lineales (recuerde que en \mathbb{C} todos los factores primos deben ser lineales). Más adelante veremos que no siempre es posible hacer ésto, porque no siempre podemos precisar el valor de una raíz que permita tal factorización.

De la ecuación polinomial diremos que :

* $x = 2$ es una raíz de multiplicidad 3 o raíz triple

* $x = -3$ es una raíz de multiplicidad 2 o raíz doble

* $x = 1$ es una raíz de multiplicidad 1 o raíz simple

En total, la ecuación polinomial dada tiene 6 raíces

OBSERVACIONES :

- 1ª) El término **RAÍZ** (para algunos **CERO**) se usa exclusivamente para valores de la variable que anulan a un polinomio y por ende que satisfacen una ecuación polinomial. Carece de sentido hablar de raíz en una ecuación fraccionaria o en una ecuación irracional.
- 2ª) Una **RAÍZ** de la ecuación polinomial $P_n(x) = 0$ (sin tomar en cuenta su multiplicidad), es también una solución de dicha ecuación. Lo que ocurre es que una **SOLUCIÓN** es un valor individual o único (no admite multiplicidad). Esto significa que si : $r_1, r_2, r_3, \dots, r_i$ son todas las raíces distintas de la ecuación polinomial ($i \leq n$), entonces éstas son las soluciones de la misma.
- 3ª) De la observación anterior, se concluye que en toda ecuación polinomial $P_n(x) = 0$ se tiene que :

$N^{\circ} \text{ SOLUCIONES} \leq N^{\circ} \text{ RAÍCES}$

**EJEMPLO 25**

La ecuación polinomial : $P(x) = (x-3)^2 (x+1)^3 = 0$

tiene 5 raíces : "3" de multiplicidad 2 y "-1" de multiplicidad 3, pero sólo tiene 2 soluciones (raíces distintas, sin considerar su multiplicidad) : 3 ; -1.

- 4ª) Nótese que el teorema del factor sugiere que para resolver la ecuación polinomial $P_n(x) = 0$, se debe factorizar $P_n(x)$; para luego igualar a cero cada uno de los factores obtenidos.

TEOREMA 8

Si una raíz de la ecuación polinomial $P_n(x) = 0$, con coeficientes reales, es el número imaginario $a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R} \wedge b \neq 0$), entonces necesariamente otra raíz de dicha ecuación será el imaginario conjugado: $a - bi$.

PRUEBA:

Sea $Z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R} \wedge b \neq 0$) una raíz de la ecuación:

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0$$

entonces: $P_n(Z) = a_0 Z^n + a_1 Z^{n-1} + a_2 Z^{n-2} + \dots + a_{n-1} Z + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0$

Recordando las propiedades de los números complejos: $Z_1 = Z_2 \rightarrow \overline{Z_1} = \overline{Z_2}$

$$\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}, \quad \overline{Z_1 - Z_2} = \overline{Z_1} - \overline{Z_2} \quad \text{y} \quad \overline{Z^n} = \overline{Z}^n, \quad \text{se tiene que:}$$

$$\overline{P_n(Z)} = \overline{a_0 Z^n + a_1 Z^{n-1} + a_2 Z^{n-2} + \dots + a_{n-1} Z + a_n} = \overline{0}, \quad a_0 \neq 0$$

$$\overline{P_n(Z)} = \overline{a_0 Z^n + a_1 Z^{n-1} + a_2 Z^{n-2} + \dots + a_{n-1} Z + a_n} = \overline{0}$$

$$\overline{P_n(Z)} = \overline{a_0 \cdot Z^n + a_1 \cdot Z^{n-1} + a_2 \cdot Z^{n-2} + \dots + a_{n-1} \cdot Z + a_n} = \overline{0}$$

y como $a_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 0, 1, 2, \dots, n \rightarrow \overline{a_i} = a_i$ e incluso: $\overline{0} = 0$, resulta:

$$\overline{P_n(Z)} = a_0 \overline{Z}^n + a_1 \overline{Z}^{n-1} + a_2 \overline{Z}^{n-2} + \dots + a_{n-1} \overline{Z} + a_n = 0$$

es decir: $\overline{P_n(Z)} = P_n(\overline{Z}) = 0 \rightarrow \overline{Z} = a - bi$ es también una raíz de la ecuación.

Nótese que el teorema 8 establece que las raíces imaginarias de una ecuación polinomial con coeficientes reales siempre se presentan por pares. Si $Z = a + bi$ es la raíz imaginaria de la ecuación polinomial $P_n(x) = 0$ con coeficientes reales, entonces por el teorema del factor se tiene que:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= (x - Z)(x - \overline{Z}) \cdot Q_{n-2}(x) = 0 \rightarrow P_n(x) = [x^2 - (Z + \overline{Z})x + Z \cdot \overline{Z}] \cdot Q_{n-2}(x) = 0 \\ &\rightarrow P_n(x) = (x^2 - 2\operatorname{Re}(Z) \cdot x + |Z|^2) \cdot Q_{n-2}(x) = 0, \quad \text{donde: } \operatorname{Re}(Z) = a \wedge |Z|^2 = a^2 + b^2 \\ &\rightarrow P_n(x) = (x^2 - 2ax + a^2 + b^2) \cdot Q_{n-2}(x) = 0 \end{aligned}$$

donde el factor cuadrático: $x^2 - 2ax + a^2 + b^2$ es de coeficientes reales y es PRIMO en \mathbb{R} (no admite factorización en \mathbb{R} , pero sí en \mathbb{C}).

Un resultado importante de este teorema se menciona en el siguiente corolario, cuya prueba es inmediata con los detalles que acabamos de dar.

COROLARIO

Toda ecuación polinomial, con coeficientes reales y de grado impar, tiene por lo menos una raíz real.

**EJEMPLO 26**

En la ecuación : $x^3 - 6x + 4 = 0$

una raíz es : $1 + i$, entonces por el teorema 8, otra raíz necesariamente es : $1 - i$. Y como la ecuación tiene 3 raíces, la tercera de ninguna manera puede ser imaginaria (*pues aparecería una raíz más y esto no es posible*), la única posibilidad es que ésta tercera raíz sea real.

TEOREMA 9

Si una raíz de la ecuación polinomial $P_n(x) = 0$, con coeficientes racionales, es el número irracional : $a + \sqrt{b}$ ($a, b \in \mathbb{Q} \wedge b > 0 \wedge \sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$) , entonces necesariamente otra raíz de la ecuación será el irracional conjugado : $a - \sqrt{b}$

La prueba de este teorema es análoga a la del teorema 8, así que la dejamos para el lector.

**EJEMPLO 27**

Una raíz de la ecuación : $x^3 - 8x^2 + 16x - 8 = 0$ es $3 + \sqrt{5}$, entonces por el teorema 9, debido a que la ecuación tiene coeficientes racionales, otra raíz deberá ser : $3 - \sqrt{5}$.

TEOREMA 10

Si una raíz de la ecuación polinomial $P_n(x) = 0$, con coeficientes racionales y grado n mayor o igual que 4, es el número irracional $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ($a, b \in \mathbb{Q}^+ \wedge \sqrt{a} \notin \mathbb{Q} \wedge \sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$) entonces necesariamente otras raíces de la ecuación serán : el conjugado $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, el opuesto $-\sqrt{a} - \sqrt{b}$ y el conjugado del opuesto $-\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

**EJEMPLO 28**

Para la ecuación : $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.

una raíz es : $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, y como sus coeficientes son racionales y su grado es 4, entonces de acuerdo al teorema 10, otras raíces de la ecuación son : $\sqrt{2} - \sqrt{3}$; $-\sqrt{2} - \sqrt{3}$ y $-\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

TEOREMA 11

Si una raíz de la ecuación polinomial :

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

con coeficientes enteros y $a_0 \neq 0$, es el número entero p , entonces necesariamente p es un divisor de a_n .

PRUEBA :

$p \in \mathbb{Z}$ es una raíz de la ecuación polinomial entonces se cumple que :

$$P(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0$$

$$\rightarrow p(a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + a_2 p^{n-3} + \dots + a_{n-1}) = -a_n$$

Recuerde que si : $ab = c \rightarrow a$ es un divisor de c y b también. Por lo que, en la igualdad anterior se nota que p es un divisor de a_n .

TEOREMA 12

Si una raíz de la ecuación : $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$, con coeficientes enteros y $a_0 \neq 0$, es el número racional $\frac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0 \wedge p$ y q son primos entre si) entonces se cumple que p es un divisor de a_n y q un divisor a_0 .

PRUEBA :

$\frac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0 \wedge p$ y q son primos entre si) es una raíz de la ecuación, entonces se cumple que :

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = a_0 \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_1 \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + a_2 \left(\frac{p}{q}\right)^{n-2} + \dots + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right) + a_n = 0 \quad ; \quad a_0 \neq 0$$

$$\rightarrow a_0 p^n + a_1 p^{n-1} \cdot q + a_2 p^{n-2} \cdot q^2 + \dots + a_{n-1} p \cdot q^{n-1} + a_n \cdot q^n = 0 \quad (1)$$

$$\rightarrow p(a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} q + a_2 p^{n-3} \cdot q^2 + \dots + a_{n-1} \cdot q^{n-1}) = -a_n \cdot q^n$$

Como p y q son primos entre sí, entonces p divide necesariamente a a_n , es decir p es un divisor de a_n .

También de la relación (1), se obtiene :

$$q(a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} \cdot q + \dots + a_{n-1} p \cdot q^{n-2} + a_n \cdot q^{n-1}) = -a_0 p^n$$

de igual modo, se nota que q debe ser un divisor de a_0 .

TEOREMA 13

Sea la ecuación polinomial :

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad ; \quad a_0 \neq 0,$$

con coeficientes enteros. Si $P(1)$ y $P(0)$ son números enteros impares, entonces la ecuación no tiene raíces enteras.

PRUEBA :

Supongamos que la ecuación polinomial tiene una raíz m ($m \in \mathbb{Z}$), entonces según el teorema del factor :

$$P(x) = (x - m) Q(x)$$

y sea $P(1) = 2p + 1$, $P(0) = 2q + 1$, donde $p, q \in \mathbb{Z}$, luego :

$$P(1) = (1 - m) Q(1) \rightarrow 2p + 1 = (1 - m) \cdot Q(1) \quad \dots (\alpha)$$

$$P(0) = (-m) \cdot Q(0) \rightarrow 2q + 1 = (-m) \cdot Q(0) \quad \dots (\beta)$$

Tenga en cuenta que el producto de dos factores es impar cuando ambos factores son impares. De acuerdo a esto, de (α) se observa que m debe ser par y de (β) m debe ser impar; lo cual es una contradicción y esto prueba que no existe tal $m \in \mathbb{Z}$.

**EJEMPLO :**

En la ecuación polinomial : $x^5 + 7x^2 - 3 = 0$

considerando que $P(x)$ es el primer miembro, se observa que $P(1) = 5$ ($P(1)$ es la suma de coeficientes de $P(x)$) y $P(0) = -3$ (término independiente de $P(x)$). Como estos son impares, de acuerdo al teorema 13, la ecuación propuesta no tiene raíces enteras. A parte de esto el lector notará que la ecuación tampoco tiene raíces fraccionarias.

TEOREMA DE CARDANO - VIETE

El siguiente teorema nos muestra la forma en que las raíces de una ecuación polinomial se encuentran relacionadas con los coeficientes de la misma.

TEOREMA 14

Si $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ son las " n " raíces de la ecuación polinomial :

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 ; a_0 \neq 0$$

entonces se cumple :

* **SUMA DE RAÍCES :**

$$r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n = -\frac{a_1}{a_0} \quad \text{ó} \quad \sum r_i = -\frac{a_1}{a_0}$$

* **SUMA DE PRODUCTOS BINARIOS DE LAS RAÍCES**

$$r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_1 r_4 + \dots + r_{n-1} r_n = +\frac{a_2}{a_0} \quad \text{ó} \quad \sum_{i < j} r_i r_j = +\frac{a_2}{a_0}$$

* **SUMA DE PRODUCTOS TERNARIOS DE LAS RAÍCES**

$$r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + r_1 r_2 r_5 + \dots + r_{n-2} r_{n-1} r_n = -\frac{a_3}{a_0} \quad \text{ó} \quad \sum_{i < j < k} r_i r_j r_k = -\frac{a_3}{a_0}$$

* **SUMA DE PRODUCTOS CUATERNARIOS DE LAS RAÍCES**

$$r_1 r_2 r_3 r_4 + r_1 r_2 r_3 r_5 + \dots + r_{n-3} r_{n-2} r_{n-1} r_n = +\frac{a_4}{a_0} \quad \text{ó} \quad \sum_{i < j < k < l} r_i r_j r_k r_l = +\frac{a_4}{a_0}$$

* **PRODUCTO DE LAS "n" RAÍCES:**

$$r_1 r_2 r_3 \dots r_n = (-1)^n \cdot \frac{a_n}{a_0}$$

PRUEBA :

Si $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ son las "n" raíces de la ecuación polinomial :

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0; a_0 \neq 0 \quad (1)$$

entonces por el teorema del factor, ésta ecuación se puede expresar así :

$$P(x) = a_0 (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_n) = 0$$

En nuestro libro POTENCIACIÓN vimos el desarrollo de la siguiente multiplicación :

$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = x^4 + (a+b+c+d)x^3 + (ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2 + (abc+abd+acd+bcd)x + abcd$
 esto para el caso de cuatro factores, pero podemos extender el desarrollo para el caso de n factores. Usando esta generalización para efectuar la operación en la ecuación anterior, resulta :

$$\begin{aligned} P(x) = & a_0 x^n - a_0 (r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n) x^{n-1} + a_0 (r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_1 r_4 + \dots + \\ & + r_{n-1} r_n) x^{n-2} - a_0 (r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \dots + r_{n-2} r_{n-1} r_n) x^{n-3} + a_0 (r_1 r_2 r_3 r_4 + \\ & + r_1 r_2 r_3 r_5 + \dots + r_{n-3} r_{n-2} r_{n-4} r_n) x^{n-4} - \dots + (-1)^n a_0 (r_1 r_2 r_3 \dots r_n) = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Como las ecuaciones (1) y (2) son exactamente las mismas, igualando coeficientes de los términos semejantes, se obtiene :

$$-a_0 (r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n) = a_1$$

$$+a_0 (r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_1 r_4 + \dots + r_{n-1} r_n) = a_2$$

$$-a_0 (r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \dots + r_{n-2} r_{n-1} r_n) = a_3$$

$$+ a_0 (r_1 r_2 r_3 r_4 + r_1 r_2 r_3 r_4 + \dots + r_{n-3} r_{n-2} r_{n-1} r_n) = a_4$$

$$(-1)^n a_0 (r_1 r_2 r_3 \dots r_n) = a_n$$

y de cada una de ellas pueden obtenerse cada una de las relaciones del teorema.

OBSERVACIONES

- * El número total de relaciones que menciona el teorema es igual a "n". Estas por sí solas no deben tomarse como un "sistema de n ecuaciones con n incógnitas" (las raíces) pues al intentar resolverlo se retornará a la ecuación polinomial.
- * En cada relación, la cantidad de sumandos del primer miembro es igual a C_k^n , donde n es el grado de la ecuación polinomial y k el número de factores tomados en cada sumando. Así, por ejemplo, para la ecuación polinomial de grado 3, la suma de productos unarios (es decir, la suma de raíces) tiene: $C_1^3 = 3$ sumandos, la suma de productos binarios tiene $C_2^3 = 3$ y la suma de productos ternarios tiene $C_3^3 = 1$ sumando y éste no es otro que el producto de raíces.
- * Nótese además que la aplicación del teorema debe hacerse cuando $P(x)$ es un polinomio completo y ordenado. Si fuese el caso, tendrá que completar con ceros los términos que faltaran.



EJEMPLO 30:

La ecuación: $2x^3 - 5x^2 + 8x + 7 = 0$ tiene tres raíces: r_1 , r_2 y r_3 .

Según el teorema de CARDANO-VIETE, se cumple:

$$* \quad r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{(-5)}{2} = \frac{5}{2}$$

$$* \quad r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = +\frac{8}{2} = 4$$

$$* \quad r_1 r_2 r_3 = (-1)^3 \cdot \frac{7}{2} = -\frac{7}{2}$$



EJEMPLO 31:

La ecuación: $x^4 + 9x^2 + 4x + 3 = 0$ tiene cuatro raíces: a , b , c y d .

Completando con $0x^3$ el término faltante y aplicando el teorema de CARDANO-VIETE se tiene:

$$* \quad a + b + c + d = -\frac{0}{1} = 0$$

$$* \quad ab + ac + ad + bc + bd + cd = +\frac{9}{1} = 9, \quad (C_2^4 = 6 \text{ sumandos})$$

$$* \quad abc + abd + acd + bcd = -\frac{4}{1} = -4, \quad (C_3^4 = 4 \text{ sumandos})$$

$$* \quad abcd = (-1)^4 \cdot \frac{3}{1} = 3, \quad (C_4^4 = 1 \text{ sumando})$$



EJEMPLO 32

Si a, b y c son las raíces de la ecuación: $3x^3 - 7x + 13 = 0$, calcular el valor de: $a^3 + b^3 + c^3$.

Completando con $0x^2$ el término que falta y usando el teorema de CARDANO-VIETE se obtiene que: $a + b + c = 0$

Pero, si $a + b + c = 0$, entonces se cumple que: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

También por el teorema de CARDANO-VIETE: $abc = (-1) \cdot \frac{13}{3} = -\frac{13}{3}$

Luego: $a^3 + b^3 + c^3 = 3 \left(-\frac{13}{3} \right) \rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = -13$



EJEMPLO 33

Si una raíz de la ecuación: $x^3 - 4x^2 + mx + n = 0$, $m, n \in \mathbb{R}$ es: $1 + 3i$, calcular los valores de m y n .

Una raíz es: $x_1 = 1 + 3i$, entonces por el teorema 8 otra raíz debe ser: $x_2 = 1 - 3i$.

Sea x_3 la tercera raíz de la ecuación (tenga en cuenta que ésta necesariamente debe ser real) entonces por el teorema de CARDANO-VIETE:

$$* \quad x_1 + x_2 + x_3 = 4 \rightarrow (1 + 3i) + (1 - 3i) + x_3 = 4 \rightarrow x_3 = 2$$

$$* \quad x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = +m \rightarrow x_1 x_2 + (x_1 + x_2) x_3 = +m, \text{ reemplazando}$$

$$(1 + 3i)(1 - 3i) + (1 + 3i + 1 - 3i)(2) = m \rightarrow 10 + 4 = m \rightarrow m = 14$$

$$* \quad x_1 x_2 x_3 = -n \rightarrow (1 + 3i)(1 - 3i)(2) = -n \rightarrow n = -20$$



ECUACIÓN LINEAL Y ECUACIÓN CUADRÁTICA

LA ECUACIÓN DE PRIMER GRADO O ECUACIÓN LINEAL

FORMA GENERAL : $P(x) = ax + b = 0$; $a \neq 0$ (3.1)

RAÍZ DE LA ECUACIÓN : $x = -\frac{b}{a}$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA RAÍZ DE UNA ECUACIÓN LINEAL

Consideremos la función lineal : $y = P(x) = ax + b$, cuya gráfica se muestra en la figura 1. La ecuación (3.1) se genera cuando hacemos : $y = 0$. Pero geoméricamente, un punto del plano con $y = 0$ es un punto ubicado sobre el eje X .

En consecuencia, la raíz de la ecuación (3.1) :

$$x = -\frac{b}{a}$$

se interpreta geoméricamente como la abscisa del punto de intersección de la recta que representa a la función $y = P(x)$ con el eje "x".

Si desean más detalles acerca de las funciones lineales, le sugerimos revisar nuestro libro :

RELACIONES Y FUNCIONES.

Tenga en cuenta que esta interpretación en \mathbb{R}^2 sólo es posible si $a, b \in \mathbb{R}$.

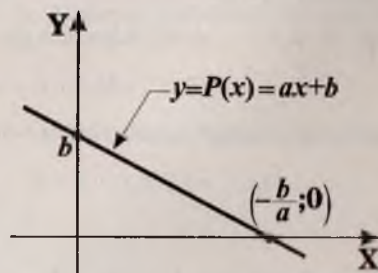


Figura 1

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LA ECUACIÓN : $ax + b = 0$

Dependiendo de los valores que puedan tomar los parámetros a y b , en la ecuación , considerándola en el caso general, se tiene :

1. Si $a \neq 0$, entonces de la ecuación : $ax + b = 0$ es posible despejar "x" como lo hicimos líneas arriba. Esto significa que la ecuación admite SOLUCIÓN ÚNICA o que es lo mismo la ecuación es COMPATIBLE DETERMINADA.

2. Si $a = 0 \wedge b = 0$, la ecuación quedará así: $0x + 0 = 0$, de donde se puede observar que cualquier valor de "x" la satisface; es decir la ecuación tiene INFINITAS SOLUCIONES ó es COMPATIBLE INDETERMINADA.
3. Si $a = 0 \wedge b \neq 0$, la ecuación queda así: $0x + b = 0$ y se puede notar que ningún valor de x logra satisfacerla; lo que quiere decir que la ecuación, en este caso, NO TIENE SOLUCIÓN o que es INCOMPATIBLE.



EJEMPLO 34

Hallar el valor de n para que la ecuación: $n^2x + 3n + 2 = x + 2n + 3$ no tenga solución.

Coloquemos la ecuación en la forma general: $(n^2 - 1)x + n - 1 = 0$

Para que ésta no admita solución se debe cumplir que:

$$n^2 - 1 = 0 \wedge n - 1 \neq 0 \rightarrow (n = 1 \vee n = -1) \wedge n \neq 1 \rightarrow n = -1$$

LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO O ECUACIÓN CUADRÁTICA

$$\text{FORMA GENERAL: } P(x) = ax^2 + bx + c = 0 ; a \neq 0 \quad (3.2)$$

RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA (CASO GENERAL)

Siendo $a \neq 0$, multipliquemos por $4a$ ambos miembros de la ecuación (3.2)

$$4a(ax^2 + bx + c) = 4a \cdot 0 \rightarrow 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

Acomodando y completando cuadrados en el primer miembro, resulta:

$$\begin{aligned} (2ax)^2 + 2(2ax) \cdot b + b^2 - b^2 + 4ac = 0 &\rightarrow (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \\ &\rightarrow 2ax + b = \sqrt{b^2 - 4ac} \end{aligned}$$

Tenga en cuenta que el CVA = \mathbb{C} , por lo que la operación del segundo miembro tiene dos raíces cuadradas, las que en forma práctica se pueden colocar así:

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \rightarrow 2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

de donde:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (3.3)$$

A ésta se le denomina FÓRMULA que resuelve la ecuación cuadrática en cualquier caso, incluso cuando los coeficientes son números complejos. En esta fórmula hay dos valores para "x"; separándolas, son:

$$\boxed{x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} ; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \quad (3.4)$$

**EJEMPLO 35**

Resolver la ecuación : $(x+3)(x+2) = x+1$

Llevándola a la forma general, se obtiene : $x^2 + 4x + 5 = 0$

Identificando los coeficientes : $a = 1$, $b = 4$, $c = 5$

Reemplazando en la fórmula (3.3)

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(5)}}{2(1)} \rightarrow x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{4-5}}{2} \rightarrow x = -2 \pm \sqrt{-1}$$

El resultado de $\sqrt{-1}$ es igual a i (*unidad imaginaria*) y no $\pm i$, puesto que las dos posibles raíces cuadradas ya fueron consideradas al colocar el \pm en la fórmula. Por lo tanto, las raíces de la ecuación son :

$$x_1 = -2 + i \quad ; \quad x_2 = -2 - i$$

RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA (CASOS PARTICULARES)

En algunas ocasiones resulta cómodo resolver una ecuación cuadrática usando uno de los distintos criterios de la factorización en \mathbb{Q} (*campo de los números racionales*), en este caso el *aspa simple*; pero sólo cuando sea posible hacerlo.

**EJEMPLO 36**

Resolver : $2(x+1)^2 = 5x+8$

Llevándola a la forma general, resulta : $2x^2 - x - 6 = 0$

Factorizando por aspa simple el primer miembro :

$$2x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow (2x+3)(x-2) = 0$$

$$\begin{array}{cc} 2x & 3 \\ x & -2 \end{array}$$

Iguando a cero cada factor : $2x+3 = 0 \quad \vee \quad x-2 = 0$

$$\rightarrow x = -\frac{3}{2} \quad \vee \quad x = 2$$

También, en determinados casos, es posible usar la comparación de elementos de ambos miembros de la ecuación. Se pueden comparar factores o sumandos.



EJEMPLO 37

Resolver : $(x + 2)(x + 4) = 35$

El primer miembro esta formado por dos factores que se diferencian en 2 unidades : el menor $x + 2$ y el otro es 2 unidades más : $x + 4$ (el mayor).

Si el segundo miembro es posible descomponerlo también en dos factores que se diferencien en 2, entonces se puede realizar la comparación. Hay dos únicas maneras de descomponer 35 de la forma requerida : $5 \cdot 7$ ó $(-7)(-5)$.

Con la primera : $(x + 2)(x + 4) = 5 \cdot 7 \rightarrow x + 2 = 5 \rightarrow x_1 = 3$

Con la segunda : $(x + 2)(x + 4) = (-7)(-5) \rightarrow x + 2 = -7 \rightarrow x_2 = -9$

Observe que en cada caso, se han comparado los factores de menor valor; lógicamente los otros necesariamente tendrán que ser iguales, como se puede verificar de inmediato. Si prefiere, también pueden compararse los factores de mayor valor.



EJEMPLO 38

Resolver la ecuación : $x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$

Ésta no es una ecuación cuadrática, pero su transformación en forma equivalente nos conduce a una ecuación de ese tipo. Por lo que podemos asegurar que la ecuación propuesta tiene a lo más dos soluciones.

Observando el primer miembro, se ve que tiene la forma de un cierto número sumado con su inverso multiplicativo o recíproco. Si el segundo miembro se puede descomponer como un número más su recíproco entonces se pueden comparar sumandos. Hay dos únicas maneras de descomponer $\frac{10}{3}$ con

esas condiciones : $3 + \frac{1}{3}$ ó $\frac{1}{3} + 3$ (en ambos casos, el segundo es el recíproco del primero). En realidad es una misma descomposición, salvo el orden de los sumandos.

Con la primera : $x + \frac{1}{x} = 3 + \frac{1}{3} \rightarrow x_1 = 3$

Con la segunda : $x + \frac{1}{x} = \frac{1}{3} + 3 \rightarrow x_2 = \frac{1}{3}$

PROPIEDAD

Toda ecuación de la forma : $x + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{a}$, $a \neq 0$

(3.5)

Tiene dos soluciones : $x = a \quad \vee \quad x = \frac{1}{a}$

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LAS RAÍCES DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA

Siendo $a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$, en la fórmula (3.3) se puede observar que la naturaleza de los valores de "x" depende de los valores que pueda tomar : $b^2 - 4ac$. Este parámetro se denomina **DISCRIMINANTE** de la ecuación cuadrática y se le denota por Δ , así :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

(3.6)

Con lo cual, de (3.4), las raíces se pueden colocar así :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \vee \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

(1) Si $\Delta = 0 \rightarrow x_1 = -\frac{b}{2a} = x_2$, es decir las raíces son **REALES E IGUALES**.

(2) Si $\Delta > 0 \rightarrow \sqrt{\Delta} \in \mathbb{R}$ y además $\sqrt{\Delta} > 0$

con esto : $x_1 \neq x_2$, es decir las raíces son **REALES** pero **DIFERENTES**

(3) Si $\Delta < 0 \rightarrow \sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$, en \mathbb{C} resulta que : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{-\Delta} \cdot i$

con lo cual : $x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}i$, $x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}i$

es decir, las raíces son **IMAGINARIAS** y **CONJUGADAS**.

El significado geométrico de cada uno de éstos casos puede verse en el capítulo de la función cuadrática de nuestro libro : **RELACIONES Y FUNCIONES**.

PROPIEDADES DE LAS RAÍCES DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA**TEOREMA DE VIETE****TEOREMA 4.5**

Si x_1, x_2 son las raíces de la ecuación : $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ entonces se cumple que :

* **SUMA DE RAÍCES** : $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

* **PRODUCTO DE RAÍCES** : $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

La prueba del teorema puede realizarse en forma directa reemplazando (3.4) y efectuando las operaciones correspondientes. Nótese que éste es un caso particular del teorema 14.

Podemos agregar dos propiedades adicionales cuya demostración también es directa.

* **SUMA DE LAS INVERSAS DE LAS RAÍCES :** $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c}$

* **DIFERENCIA (POSITIVA) DE LAS RAÍCES :**

Siendo $\Delta > 0 \wedge x_1 > x_2$: $x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$

SUMA DE LAS POTENCIAS ENÉSIMAS DE LAS RAÍCES DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA

Sean x_1 y x_2 las raíces de la ecuación : $ax^2 + bx + c = 0$; $a \neq 0$, y sea :

$$S_n = x_1^n + x_2^n \quad ; \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (3.7)$$

la suma de las potencias enésimas de las raíces. Del teorema anterior, sabemos que :

$$S_1 = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{y} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Si convenimos en que : $S_0 = x_1^0 + x_2^0 = 2$, entonces se tiene que :

$$* \quad x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 + x_2) - 2x_1 x_2 \rightarrow S_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)S_1 - \left(\frac{c}{a}\right)S_0$$

$$\rightarrow S_2 + \frac{b}{a}S_1 + \frac{c}{a}S_0 = 0 \rightarrow aS_2 + bS_1 + cS_0 = 0$$

$$* \quad x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2) - x_1 x_2 (x_1 + x_2) \rightarrow S_3 = \left(-\frac{b}{a}\right)S_2 - \left(\frac{c}{a}\right)S_1$$

$$\rightarrow S_3 + \frac{b}{a}S_2 + \frac{c}{a}S_1 = 0 \rightarrow aS_3 + bS_2 + cS_1 = 0$$

$$* \quad x_1^4 + x_2^4 = (x_1 + x_2)(x_1^3 + x_2^3) - x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2) \rightarrow S_4 = \left(-\frac{b}{a}\right)S_3 - \left(\frac{c}{a}\right)S_2$$

$$\rightarrow S_4 + \frac{b}{a}S_3 + \frac{c}{a}S_2 = 0 \rightarrow aS_4 + bS_3 + cS_2 = 0$$

$$* \quad x_1^5 + x_2^5 = (x_1 + x_2)(x_1^4 + x_2^4) - x_1 x_2 (x_1^3 + x_2^3) \rightarrow S_5 = \left(-\frac{b}{a}\right)S_4 - \left(\frac{c}{a}\right)S_3$$

$$\rightarrow S_5 + \frac{b}{a}S_4 + \frac{c}{a}S_3 = 0 \rightarrow aS_5 + bS_4 + cS_3 = 0$$

En general :

$$x_1^n + x_2^n = (x_1 + x_2)(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) - x_1 x_2 (x_1^{n-2} + x_2^{n-2})$$

$$\rightarrow S_n = \left(-\frac{b}{a}\right)S_{n-1} - \left(\frac{c}{a}\right)S_{n-2}$$

$$\rightarrow S_n + \frac{b}{a} S_{n-1} + \frac{c}{a} S_{n-2} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{a S_n + b S_{n-1} + c S_{n-2} = 0} \quad (3.8)$$

Esta es la fórmula de recurrencia para calcular la suma de potencias enésimas de las raíces (S_n), conocidas S_{n-1} y S_{n-2} . El lector puede notar que la fórmula (3.8) es válida:

$\forall n \in \mathbb{Z}$, puesto que:

$$x_1^n + x_2^n = (x_1 + x_2)(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) - x_1 x_2 (x_1^{n-2} + x_2^{n-2}) \quad , \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$



EJEMPLO 39

Calcular la suma de las potencias séptimas de las raíces de: $x^2 - 2x + 2 = 0$

Usando la fórmula 3.8, se tiene:

$$* S_2 - 2 S_1 + 2 S_0 = 0 \quad , \text{ donde } S_1 = x_1 + x_2 = 2 \quad \text{ y } \quad S_0 = 2$$

$$\rightarrow S_2 - 2(2) + 2(2) = 0 \rightarrow S_2 = 0$$

$$* S_3 - 2 S_2 + 2 S_1 = 0 \rightarrow S_3 - 2(0) + 2(2) = 0 \rightarrow S_3 = -4$$

$$* S_4 - 2 S_3 + 2 S_2 = 0 \rightarrow S_4 - 2(-4) + 2(0) = 0 \rightarrow S_4 = -8$$

Luego:

$$S_3 \cdot S_4 = (x_1^3 + x_2^3)(x_1^4 + x_2^4) \rightarrow S_3 \cdot S_4 = x_1^7 + x_2^7 + (x_1 x_2)^3 (x_1 + x_2)$$

$$\text{es decir: } S_3 \cdot S_4 = S_7 + (x_1 x_2)^3 \cdot S_1$$

como: $x_1 x_2 = 2$, reemplazando se obtiene:

$$(-4)(-8) = S_7 + (2)^3(2) \rightarrow S_7 = x_1^7 + x_2^7 = 16$$

FORMACIÓN DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA A PARTIR DE SUS RAÍCES

Conocidas las raíces x_1 y x_2 de una cierta ecuación cuadrática, el problema que se plantea ahora es obtener esa ecuación. Podemos usar el teorema del factor para esto. Si x_1 y x_2 son las raíces, entonces la ecuación será:

$$\boxed{(x - x_1)(x - x_2) Q(x) = 0}$$

y como la ecuación es de segundo grado, entonces $Q(x)$ tiene grado cero, es decir $Q(x) = a_0$. Sin pérdida de generalidad, tomando $a_0 = 1$, se tiene:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0 \rightarrow x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$$

es decir la ecuación es :

$$x^2 - Sx + P = 0$$

(3.9)

donde : $S = x_1 + x_2$ es la suma de raíces

$P = x_1 x_2$ es el producto de raíces



EJEMPLO 40

* La ecuación cuadrática, cuyas raíces son : -2 y 5 es :

$$x^2 - (-2 + 5)x + (-2)(5) = 0 \rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$$

* La ecuación cuadrática que generó las raíces : $\sqrt{2} + 3$ y $\sqrt{2} - 3$ es :

$$x^2 - (\sqrt{2} + 3 + \sqrt{2} - 3)x + (\sqrt{2} + 3)(\sqrt{2} - 3) = 0$$

$$\rightarrow x^2 - 2\sqrt{2}x - 7 = 0$$

* La ecuación cuadrática que dió origen a las raíces : $\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{3}$ es :

$$x^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)x + \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) = 0 \rightarrow x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} = 0$$

que se podría escribir también así : $6x^2 - x - 1 = 0$

RAÍCES ESPECIALES EN UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA

En algunos casos se requiere que las raíces de una ecuación cuadrática tengan cierta particularidad; o al revés, a partir de una ecuación cuadrática. ¿qué característica podemos anticipar para las raíces? Eso es lo que trataremos en esta sección.



1. RAÍCES SIMÉTRICAS U OPUESTAS

Las dos raíces de una ecuación cuadrática se dice que son **SIMÉTRICAS** si tienen la forma : r y $-r$, es decir una es la negativa de la otra.

$$\text{Luego : } x_1 + x_2 = 0 = -\frac{b}{a} \rightarrow b = 0$$

Con lo cual, la ecuación (3.2) queda así :

$$ax^2 + c = 0$$

(3.10)

Una ecuación cuadrática, cuyo primer miembro no presenta término lineal, siempre tiene sus raíces simétricas.



2. RAÍCES RECÍPROCAS O INVERSAS

Las dos raíces de una ecuación cuadrática se dice que son **RECÍPROCAS** si presentan

la forma : r y $\frac{1}{r}$ ($r \neq 0$), es decir, una es la inversa de la otra.

Se observa que : $x_1 \cdot x_2 = 1 = \frac{c}{a} \rightarrow a = c$

Con esto , la ecuación (3.2) queda así : $ax^2 + bx + a = 0$ (3.11)

Una ecuación cuadrática, donde el primer miembro tiene coeficientes extremos iguales, tiene sus dos raíces recíprocas entre sí.

3. UNA RAÍZ NULA

Una de las raíces es nula, o $x_1 = 0$, entonces ocurre lo siguiente :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \rightarrow 0 + x_2 = -\frac{b}{a} \rightarrow x_2 = -\frac{b}{a} \quad (\text{ésta es la otra raíz})$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \rightarrow 0 = \frac{c}{a} \rightarrow c = 0$$

Con esto la ecuación (3.4) queda así : $ax^2 + bx = 0$ (3.12)

Una ecuación cuadrática cuyo primer miembro no posee término independiente, tiene una raíz nula o "0", la otra raíz es $-\frac{b}{a}$.

4. UNA RAÍZ LA UNIDAD

Una de las raíces de la ecuación es $x_1 = 1$, en este caso sucede que :

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \rightarrow 1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \rightarrow x_2 = \frac{c}{a} \quad (\text{ésta es la otra raíz})$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \rightarrow 1 + \frac{c}{a} = -\frac{b}{a} \rightarrow a + c = -b \quad \text{o sino : } a + b + c = 0$$

Y la ecuación (3.4) queda así : $ax^2 - (a + c)x + c = 0$ (3.13)

Una ecuación cuadrática cuyo coeficiente lineal es el negativo (o opuesto) de la suma de los coeficientes extremos (o mejor aún, cuya suma de coeficientes es igual a cero) tiene como raíces a la unidad, la otra será $\frac{c}{a}$.

EJEMPLO 41

Calcule las raíces de la ecuación :

$$a(b-c)x^2 + b(c-a)x + c(a-b) = 0$$

siendo a , b y c distintos entre sí.

Se puede notar que la suma de coeficientes :

$$a(b-c) + b(c-a) + c(a-b) = ab - ac + bc - ab + ac - bc = 0$$

Entonces, una raíz de la ecuación es : $x_1 = 1$ y la otra es :

$$x_2 = \frac{c(a-b)}{a(b-c)}$$

es decir la ecuación es :

$$x^2 - Sx + P = 0$$

(3.9)

donde : $S = x_1 + x_2$ es la suma de raíces

$P = x_1 x_2$ es el producto de raíces



EJEMPLO 40

* La ecuación cuadrática, cuyas raíces son : -2 y 5 es :

$$x^2 - (-2 + 5)x + (-2)(5) = 0 \rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$$

* La ecuación cuadrática que generó las raíces : $\sqrt{2} + 3$ y $\sqrt{2} - 3$ es :

$$x^2 - (\sqrt{2} + 3 + \sqrt{2} - 3)x + (\sqrt{2} + 3)(\sqrt{2} - 3) = 0$$

$$\rightarrow x^2 - 2\sqrt{2}x - 7 = 0$$

* La ecuación cuadrática que dió origen a las raíces : $\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{3}$ es :

$$x^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)x + \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) = 0 \rightarrow x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} = 0$$

que se podría escribir también así : $6x^2 - x - 1 = 0$

RAÍCES ESPECIALES EN UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA

En algunos casos se requiere que las raíces de una ecuación cuadrática tengan cierta particularidad; o al revés, a partir de una ecuación cuadrática. ¿qué característica podemos anticipar para las raíces? Eso es lo que trataremos en esta sección.

1. RAÍCES SIMÉTRICAS U OPUESTAS

Las dos raíces de una ecuación cuadrática se dice que son **SIMÉTRICAS** si tienen la forma : r y $-r$, es decir una es la negativa de la otra.

$$\text{Luego : } x_1 + x_2 = 0 = -\frac{b}{a} \rightarrow b = 0$$

Con lo cual, la ecuación (3.2) queda así :

$$ax^2 + c = 0$$

(3.10)

Una ecuación cuadrática, cuyo primer miembro no presenta término lineal, siempre tiene sus raíces simétricas.

2. RAÍCES RECÍPROCAS O INVERSAS

Las dos raíces de una ecuación cuadrática se dice que son **RECÍPROCAS** si presentan

la forma : r y $\frac{1}{r}$ ($r \neq 0$), es decir, una es la inversa de la otra.

Se observa que : $x_1 \cdot x_2 = 1 = \frac{c}{a} \rightarrow a = c$

Con esto , la ecuación (3.2) queda así : $ax^2 + bx + a = 0$ (3.11)

Una ecuación cuadrática, donde el primer miembro tiene coeficientes extremos iguales tiene sus dos raíces recíprocas entre sí.



UNA RAÍZ NULA

Una de las raíces es nula, o $x_1 = 0$, entonces ocurre lo siguiente :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \rightarrow 0 + x_2 = -\frac{b}{a} \rightarrow x_2 = -\frac{b}{a} \quad (\text{ésta es la otra raíz})$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \rightarrow 0 = \frac{c}{a} \rightarrow c = 0$$

Con esto la ecuación (3.4) queda así : $ax^2 + bx = 0$ (3.12)

Una ecuación cuadrática cuyo primer miembro no posee término independiente, tiene una raíz nula o "0", la otra raíz es $-\frac{b}{a}$.



UNA RAÍZ LA UNIDAD

Una de las raíces de la ecuación es $x_1 = 1$, en este caso sucede que :

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \rightarrow 1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \rightarrow x_2 = \frac{c}{a} \quad (\text{ésta es la otra raíz})$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \rightarrow 1 + \frac{c}{a} = -\frac{b}{a} \rightarrow a + c = -b \quad \text{o sino : } a + b + c = 0$$

Y la ecuación (3.4) queda así : $ax^2 - (a + c)x + c = 0$ (3.13)

Una ecuación cuadrática cuyo coeficiente lineal es el negativo (u opuesto) de la suma de los coeficientes extremos (o mejor aún, cuya suma de coeficientes es igual a cero) tiene como raíz a la unidad, la otra será $\frac{c}{a}$.



EJEMPLO 41

Calcule las raíces de la ecuación :

$$a(b-c)x^2 + b(c-a)x + c(a-b) = 0$$

siendo a , b y c distintos entre sí.

Se puede notar que la suma de coeficientes :

$$a(b-c) + b(c-a) + c(a-b) = ab - ac + bc - ab + ac - bc = 0$$

Entonces, una raíz de la ecuación es : $x_1 = 1$ y la otra es :

$$x_2 = \frac{c(a-b)}{a(b-c)}$$

ECUACIONES CUADRÁTICAS EQUIVALENTES

Las ecuaciones cuadráticas :

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad ; \quad a \neq 0$$

$$mx^2 + nx + p = 0 \quad ; \quad m \neq 0$$

se dice que son EQUIVALENTES, o que tienen las mismas raíces, si y solo si :

$$\boxed{\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p}} \quad (3.14)$$



EJEMPLO 42

Calcular los valores de m y n si las ecuaciones :

$$(m+2)x^2 + (n-1)x + 5 = 0 \quad \text{y} \quad (m-1)x^2 + (n-3)x + 6 = 0$$

son equivalentes.

Si son equivalentes, entonces se debe cumplir que :

$$\frac{m+2}{m-1} = \frac{n-1}{n-3} = \frac{5}{6}$$

$$\text{De : } \frac{m+2}{m-1} = \frac{5}{6} \rightarrow 6m+12 = 5m-5 \rightarrow m = -17$$

$$\text{De : } \frac{n-1}{n-3} = \frac{5}{6} \rightarrow 6n-6 = 5n-15 \rightarrow n = -9$$

ECUACIONES CUADRÁTICAS CON SÓLO UNA RAÍZ EN COMÚN

Las ecuaciones cuadráticas : $ax^2 + bx + c = 0 \quad ; \quad a \neq 0$

$$mx^2 + nx + p = 0 \quad ; \quad m \neq 0$$

Tienen solamente una raíz en común si y solo si se cumple que :

$$\boxed{(an - bm)(bp - cn) = (ap - cm)^2} \quad (3.15)$$

El lector puede demostrar que aquella raíz común es : $x = \frac{ap - cm}{bm - an}$

Una aplicación de ésta propiedad se da en el problema 90 (pág. 151)



ECUACIONES CÚBICAS Y ECUACIONES CUÁRTICA

LA ECUACIÓN DE TERCER GRADO O ECUACIÓN CÚBICA

Durante muchos siglos, desde el año 300 a.c. la resolución de una ecuación cúbica despertó entre los matemáticos un interés apasionante. Diofanto ya planteaba algunas ecuaciones cúbicas. Recién en la época del renacimiento, célebres matemáticos de la escuela italiana de Bolonia, obtuvieron una solución satisfactoria. Estos fueron : Scipio Ferro, Niccolo Fontana (apodado Tartaglia) y Cardano. La fórmula que resuelve la ecuación cúbica lleva el nombre de este último, pero en realidad aquella se debe a Tartaglia.

FORMA GENERAL :

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad ; \quad a \neq 0 \quad (4.1)$$

La resolución de ésta ecuación en el caso general no resulta nada sencillo. Una forma más simple es la que se obtiene haciendo un cambio de variable con el objeto de eliminar el término cuadrático.

Haciendo : $x = y - \frac{b}{3a}$, reemplazando en (4.1) resulta :

$$a\left(y - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(y - \frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(y - \frac{b}{3a}\right) + d = 0 \rightarrow ay^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)y + \left(d - \frac{bc}{3a} + \frac{2b^3}{27a^2}\right) = 0$$

Dividiendo entre "a" :

$$y^3 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right)y + \left(\frac{d}{a} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{2b^3}{27a^3}\right) = 0$$

Consideramos que :

$$\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2} = p \quad ; \quad \frac{d}{a} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{2b^3}{27a^3} = q$$

La ecuación se podrá expresar de una forma más simple.

FORMA REDUCIDA :

$$x^3 + px + q = 0 \quad (4.2)$$

RESOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN CÚBICA

Sea : $x = u + v$ una raíz de la ecuación (4.2). Si calculamos de algún modo los valores de u y v , entonces tendríamos resuelta ya la ecuación. Elevando al cubo :

$$x^3 = (u + v)^3 \rightarrow x^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v) \rightarrow x^3 = u^3 + v^3 + 3uvx$$

De aquí :

$$x^3 + (-3uv)x + (-u^3 - v^3) = 0$$

Esta última debe ser la misma ecuación (4.2) y por lo tanto :

$$-3uv = p \wedge -u^3 - v^3 = q$$

$$\rightarrow \boxed{u^3 + v^3 = -q \wedge uv = -\frac{p}{3}} \quad (4.3)$$

Se ha formado un sistema de dos ecuaciones con incógnitas u y v . Para resolverlo podemos considerar que u^3 y v^3 son raíces de una ecuación cuadrática de la que se conoce la suma de sus raíces : $u^3 + v^3 = -q$ y el producto de raíces : $u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}$. Esa ecuación, por (3.9), es :

$$\lambda^2 - (-q)\lambda + \left(-\frac{p^3}{27}\right) = 0 \rightarrow \lambda^2 + q\lambda - \frac{p^3}{27} = 0$$

Resolviendo ésta ecuación, resulta :

$$\lambda_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad ; \quad \lambda_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Indistintamente λ_1 , puede representar a u^3 ó v^3 ; lógicamente si $\lambda_1 = u^3$ entonces $\lambda_2 = v^3$ o al revés. Luego con esto se tiene :

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad ; \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad (4.4)$$

Finalmente, reemplazando en $x = u + v$, se obtiene :

$$\boxed{x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}} \quad (4.5)$$

Ésta es la famosa FÓRMULA DE CARDANO para resolver una ecuación cúbica en su forma reducida (4.2).

Sabemos que la ecuación cúbica tiene 3 raíces. ¿De qué manera podemos obtener esas 3 raíces a partir de la fórmula (4.5)? El asunto no es tan complicado como parece.

De los números complejos, recordemos que 1 , $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = w$ y $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = w^2$

son las raíces cúbicas de la unidad, con la propiedad que : $1 + w + w^2 = 0$. También recordemos que la operación : $\sqrt[3]{A}$ tiene 3 raíces : q , qw y qw^2 ; donde q es la raíz principal.

Entonces, de acuerdo a esto, en (4.4) tanto u como v tienen tres raíces cada uno, pero tenemos en cuenta que dichas raíces deben satisfacer el sistema (4.3) es decir, debemos tomar una raíz de la primera con otra de la segunda de tal modo que :

$$u^3 + v^3 = -q \quad \wedge \quad uv = -\frac{p}{3}$$

De (4.4), consideremos que u_0 y v_0 son las raíces principales en cada caso, entonces

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \begin{cases} u_0 \\ v_0 \cdot w \\ v_0 \cdot w^2 \end{cases} \quad ; \quad \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \begin{cases} v_0 \\ u_0 \cdot w \\ u_0 \cdot w^2 \end{cases}$$

Realizando todas las combinaciones posibles, tenemos que la primera de las condiciones (4) siempre se verifica, pero sólo 3 de éstas combinaciones satisfacen la segunda condición. Así

$$u_0 \cdot v_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}} \rightarrow u_0 v_0 = -\frac{p}{3}$$

$$(u_0 \cdot w)(v_0 \cdot w^2) = u_0 v_0 \cdot w^3 = u_0 \cdot v_0 \rightarrow (u_0 w) \cdot (v_0 w^2) = -\frac{p}{3}$$

$$(u_0 \cdot w^2)(v_0 \cdot w) = u_0 v_0 \cdot w^3 = u_0 \cdot v_0 \rightarrow (u_0 w^2) \cdot (v_0 w) = -\frac{p}{3}$$

En cambio, al realizar la siguiente combinación, así como las otras, resulta

$$(u_0)(v_0 w) = -\frac{p}{3} \cdot w \quad (\text{no cumple la segunda condición})$$

Por lo tanto, las tres raíces de la ecuación cúbica, en la fórmula de CARDANO, son :

$$x_1 = u_0 + v_0, \quad x_2 = u_0 w + v_0 w^2, \quad x_3 = u_0 w^2 + v_0 w \quad (4.6)$$

EJEMPLO 43

Resolver la ecuación : $x^3 - 2x - 4 = 0$

Assumiendo que : $x = u + v$, se tiene que : $u^3 + v^3 = 4 \wedge uv = \frac{2}{3}$

luego u^3 y v^3 son raíces de : $\lambda^2 - 4\lambda + \frac{8}{27} = 0 \rightarrow \lambda = 2 \pm \sqrt{\frac{100}{27}}$

con lo cual : $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{\frac{100}{27}}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{\frac{100}{27}}}$

Luego de calcular las raíces principales en cada caso se tiene que :

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{\frac{100}{27}}} = \begin{cases} 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \\ (1 + \frac{\sqrt{3}}{3})w \\ (1 + \frac{\sqrt{3}}{3})w^2 \end{cases}, \quad \sqrt[3]{2 - \sqrt{\frac{100}{27}}} = \begin{cases} 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \\ (1 - \frac{\sqrt{3}}{3})w \\ (1 - \frac{\sqrt{3}}{3})w^2 \end{cases}$$

Entonces, las tres raíces de la ecuación, haciendo las combinaciones adecuadas, son :

$$x_1 = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \rightarrow x_1 = 2$$

$$x_2 = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)w + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)w^2 \rightarrow x_2 = -1 + i$$

$$x_3 = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)w^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)w \rightarrow x_3 = -1 - i$$

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LAS RAÍCES DE LA ECUACIÓN CÚBICA

En la fórmula de CARDANO (4.5), la naturaleza de los valores de x dependen del parámetro: $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$, al cual se le denomina DISCRIMINANTE de la ecuación cúbica reducida y se le denota por Δ , es decir :

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \quad (4.7)$$

y con esto la fórmula de CARDANO queda así :

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} \quad (4.8)$$

Considerando que $p, q \in \mathbb{R}$, se tienen los siguientes casos :

1. Si $\Delta = 0$, entonces la fórmula queda así : $x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$

suponiendo que la raíz principal de : $\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = \alpha$, se puede ver que $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces las raíces de la ecuación serán :

$$x_1 = \alpha + \alpha = 2\alpha, \text{ donde } x_1 \in \mathbb{R}$$

$$x_2 = \alpha w + \alpha w^2 = \alpha(w + w^2) = -\alpha; \quad x_2 \in \mathbb{R} \text{ (recuerde que } 1 + w + w^2 = 0)$$

$$x_3 = \alpha w^2 + \alpha w = \alpha(w^2 + w) = -\alpha; \quad x_3 \in \mathbb{R} \quad (4.9)$$

Es decir, las tres raíces son REALES, siendo dos de ellas iguales.

2. Si $\Delta < 0$, entonces (4.6) queda así :

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{-\Delta}i} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{-\Delta}i}$$

suponiendo que la raíz principal de :

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{-\Delta}} \cdot i = \alpha + \beta i \rightarrow \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{-\Delta}} i = \alpha - \beta i ; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

con lo cual las raíces de la ecuación quedarán así :

$$x_1 = (\alpha + \beta i) + (\alpha - \beta i) = 2\alpha ; x_1 \in \mathbb{R} \quad (4.10)$$

$$x_2 = (\alpha + \beta i) w + (\alpha - \beta i) w^2 = -\alpha - \beta \sqrt{3} i ; x_2 \in \mathbb{R} \text{ (compruébelo)}$$

$$x_3 = (\alpha + \beta i) w^2 + (\alpha - \beta i) w = -\alpha + \beta \sqrt{3} i ; x_3 \in \mathbb{R} \text{ (también compruébelo)}$$

Es decir, las tres raíces son REALES, pero todas distintas entre si.

3. Si $\Delta > 0$, entonces de (4.6) consideremos que las raíces principales en cada caso sean las siguientes :

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} = \alpha_1, \quad \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} = \alpha_2, \quad \text{observe que } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

luego las raíces serán :

$$x_1 = \alpha_1 + \alpha_2 ; x_1 \in \mathbb{R} \quad (4.11)$$

$$x_2 = \alpha_1 w + \alpha_2 w^2 = -\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \right) \sqrt{3} i ; x_2 \text{ es imaginaria}$$

$$x_3 = \alpha_1 w^2 + \alpha_2 w = -\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} - \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \right) \sqrt{3} i ; x_3 \text{ es imaginaria}$$

En consecuencia, sólo una raíz es REAL y las otras dos IMAGINARIAS y además conjugadas.

LA ECUACIÓN DE CUARTO GRADO O ECUACIÓN CUÁRTICA

FORMA GENERAL : $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 ; a \neq 0 \quad (4.13)$

RESOLUCIÓN DE FERRARI

Multipliquemos la ecuación (4.13) por $4a$ y acomodemos los dos primeros términos :

$$4a^2 x^4 + 4abx^3 + 4acx^2 + 4adx + 4ae = 0$$

$$(2ax^2)^2 + 2(2ax^2)(bx) + 4acx^2 + 4adx + 4ae = 0$$

Sumando y restando $b^2 x^2$ para completar cuadrados :

$$(2ax^2)^2 + 2(2ax^2)(bx) + b^2 x^2 - b^2 x^2 + 4acx^2 + 4adx + 4ae = 0$$

$$(2ax^2 + bx)^2 - (b^2 - 4ac)x^2 + 4adx + 4ae = 0$$

Supongamos que existe un "y" tal que permite expresar ésta última ecuación como :

$$(2ax^2 + bx + y)^2 - (Mx + N)^2 = 0 \quad (4.14)$$

En esa misma ecuación, hagamos lo siguiente :

$$\underbrace{(2ax^2 + bx)^2 + 2(2ax^2 + bx)y + y^2 - 2(2ax^2 + bx)y - y^2 - (b^2 - 4ac)x^2 + 4adx + 4ae = 0}_{(2ax^2 + bx + y)^2 - \{(b^2 - 4ac + 4ay)x^2 + 2(by - 2ad)x + (y^2 - 4ae)\} = 0}$$

Esto significa que :

$$(Mx + N)^2 = (b^2 - 4ac + 4ay)x^2 + 2(by - 2ad)x + (y^2 - 4ae)$$

$$\text{de donde : } M^2 = b^2 - 4ac + 4ay \quad (4.15)$$

$$MN = by - 2ad \quad (4.16)$$

$$N^2 = y^2 - 4ae \quad (4.17)$$

Eliminando M y N de éstas, mediante : $(MN)^2 = M^2 \cdot N^2$ se tiene :

$$(by - 2ad)^2 = (b^2 - 4ac + 4ay)(y^2 - 4ae)$$

$$y^3 - cy^2 + (bd - 4ae)y + (4ace - b^2e - ad^2) = 0 \quad (4.18)$$

A ésta ecuación (4.18) se le denomina ecuación cúbica RESOLVENTE de la ecuación cuártica. De hecho esta ecuación puede resolverse y obtener un valor para "y", lo cual garantiza la existencia de aquel y la ecuación cuártica (4.13) puede expresarse como (4.14).

De las relaciones (4.15) y (4.16) puede obtenerse los valores de M y N , con los cuales de la ecuación (4.14) se obtendrá :

$$2ax^2 + bx + y + Mx + N = 0 \quad \vee \quad 2ax^2 + bx + y - Mx - N = 0 \quad (4.19)$$

Luego de resolver estas ecuaciones cuadráticas se obtendrán las cuatro raíces de la cuártica.

Sean r_1 , r_2 , r_3 y r_4 las cuatro raíces de la ecuación (4.13). Supongamos que r_1 y r_2 se obtuvieron de la primera de las ecuaciones (4.19), obviamente r_3 y r_4 saldrán de la segunda. Pero, puede que no sea así, de repente r_1 y r_3 salen de la primera o tal vez r_1 y r_4 . Es decir hay distintas formas en que las raíces puedan obtenerse por pares de aquellas ecuaciones (4.19). En realidad (y esto puede comprobarse de inmediato) existen sólo 3 formas distintas de aparear las raíces en dos ecuaciones cuadráticas. Estas 3 posibilidades las da los 3 posibles valores de "y" de la ecuación cúbica resolvente.

Basta con tomar sólo uno de los valores de "y" (se recomienda el más elemental) para obtener las cuatro raíces de la cuártica. Si se tomará otro de los valores de "y", resultarán las mismas cuatro raíces, sólo que apareadas de otro modo en las ecuaciones cuadráticas.

Luego :

$$x_1 = -\sqrt{2} \quad , \quad x_2 = 1 - \sqrt{3}i \quad ; \quad x_3 = \sqrt{2} \quad , \quad x_4 = 1 + \sqrt{3}i$$

Estas son las mismas raíces anteriores, pero fíjese que resultaron apareadas de modo distinto al caso anterior. El lector puede comprobar que con $y = -\sqrt{6}i$ también salen las mismas raíces pero con un nuevo apareamiento.

EJEMPLO 44

Resolver : $x^4 - x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

Multiplicando por 4 y acomodando la ecuación :

$$4x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 = 0 \rightarrow \underline{4x^4 - 4x^3 + x^2} + 3x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$(2x^2 - x)^2 + 3x^2 + 4x + 4 = 0$$

Suponiendo la existencia de un "y", que permite colocar la ecuación así :

$$\underline{(2x^2 - x)^2 + 2(2x^2 - x)y + y^2 - 2(2x^2 - x)y - y^2 + 3x^2 + 4x + 4 = 0}$$

$$\rightarrow (2x^2 - x + y)^2 - \left[(4y - 3)x^2 - 2(y + 2)x + y^2 - 4 \right] = 0$$

$$\rightarrow (2x^2 - x + y)^2 - (Mx - N)^2 = 0 \quad \dots (\beta)$$

de donde : $M^2 = 4y - 3$, $MN = y + 2$, $N^2 = y^2 - 4$

con lo cual : $(y + 2)^2 = (4y - 3)(y^2 - 4) \rightarrow y^3 - y^2 - 5y + 2 = 0$

resolviendo : $y = -2$, $y = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, $y = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$

Para $y = -2$: $M^2 = -11$, $MN = 0 \rightarrow M = \sqrt{11}i$, $N = 0$

En (β) : $(2x^2 - x - 2)^2 - (\sqrt{11}ix)^2 = 0$

Luego :

$$2x^2 - x - 2 + \sqrt{11}ix = 0 \quad \vee \quad 2x^2 - x - 2 - \sqrt{11}ix = 0$$

$$\rightarrow 2x^2 - (1 - \sqrt{11}i)x - 2 = 0 \quad \vee \quad 2x^2 - (1 + \sqrt{11}i)x - 2 = 0$$

Resolviendo :

$$x_{1,2} = \frac{(1 - \sqrt{11}i) \pm \sqrt{(1 - \sqrt{11}i)^2 - 4(-4)}}{2(2)} = \frac{1 - \sqrt{11}i \pm \sqrt{6 - 2\sqrt{11}i}}{4}$$

$$x_{3,4} = \frac{(1 + \sqrt{11}i) \pm \sqrt{(1 + \sqrt{11}i)^2 - 4(-4)}}{2(2)} = \frac{1 + \sqrt{11}i \pm \sqrt{6 + 2\sqrt{11}i}}{4}$$

RESOLUCIÓN DE DESCARTES

El procedimiento seguido por René Descartes (1596 - 1650) para resolver la ecuación cuártica (4.13) es : primero, eliminar el término cúbico mediante una sustitución, y segundo, suponer que el primer miembro de la ecuación así obtenida es descompuesta en dos factores cuadráticos.

En la ecuación (4.13), haciendo : $x = y - \frac{b}{4a}$ se obtiene :

$$a \left(y - \frac{b}{4a}\right)^4 + b \left(y - \frac{b}{4a}\right)^3 + c \left(y - \frac{b}{4a}\right)^2 + d \left(y - \frac{b}{4a}\right) + e = 0$$

y luego de efectuar las operaciones correspondientes , además dividiendo todo entre "a" resulta :

$$y^4 + ry^2 + sy + t = 0 \quad (4.20)$$

donde los coeficientes r , s y t se calculan en base a los coeficientes : a , b , c , d y e .

Supongamos que (4.20) se puede expresar así :

$$(y^2 + my + n)(y^2 - my + p) = 0 \quad (4.21)$$

Efectuando : $y^4 + (n + p - m^2)y^2 + m(p - n)y + np = 0$

de donde : $n + p - m^2 = r$; $m(p - n) = s$; $np = t$

de las dos primeras : $p + n = m^2 + r$; $p - n = \frac{s}{m}$

$$\rightarrow 2p = m^2 + r + \frac{s}{m} \quad ; \quad 2n = m^2 + r - \frac{s}{m}$$

y con la tercera : $4np = 4t \rightarrow (2n)(2p) = 4t$

$$\rightarrow \left(m^2 + r - \frac{s}{m}\right)\left(m^2 + r + \frac{s}{m}\right) = 4t \rightarrow (m^2 + r)^2 - \left(\frac{s}{m}\right)^2 = 4t$$

$$\rightarrow m^6 + 2rm^4 + (r^2 - 4t)m^2 - s^2 = 0$$

Esta última es una ecuación cúbica en " m^2 " que necesariamente posee una raíz real; de la cual es posible hallar m y con él se pueden hallar n y p . Entonces la ecuación (4.21) puede ser ya resuelta.



EJEMPLO 45

Hallar las raíces de la ecuación : $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 5x - 2 = 0$

Usando la sustitución $x = y - 1$ para eliminar x^3 , resulta :

$$(y - 1)^4 + 4(y - 1)^3 + 4(y - 1)^2 + 5(y - 1) - 2 = 0$$

$$\rightarrow y^4 - 2y^2 + 5y - 6 = 0$$

Asumiendo que ésta se descompone así :

$$(y^2 + my + n)(y^2 - my + p) = 0 \quad \dots (\gamma)$$

$$\rightarrow y^4 + (n+p-m^2)y^2 + m(p-n)y + np = 0$$

$$\text{luego : } n+p-m^2 = -2 \quad , \quad m(p-n) = 5 \quad , \quad np = -6$$

$$\text{de las dos primeras : } p+n = m^2-2 \quad , \quad p-n = \frac{5}{m}$$

puede usarse la segunda identidad de LEGENDRE así :

$$(p+n)^2 - (p-n)^2 = 4pn \rightarrow (m^2-2)^2 - \left(\frac{5}{m}\right)^2 = 4(-6)$$

$$\rightarrow m^2(m^2-2)^2 + 24m^2 - 25 = 0 \rightarrow m^6 - 4m^4 + 28m^2 - 25 = 0$$

$$\text{De aquí es fácil ver que : } m^2 = 1 \rightarrow m = 1$$

calculando n y p :

$$p+n = -1 \quad , \quad p-n = 5 \rightarrow p = 2 \quad , \quad n = -3$$

en (γ) :

$$(y^2 + y - 3)(y^2 - y + 2) = 0$$

$$\rightarrow y^2 + y - 3 = 0 \vee y^2 - y + 2 = 0$$

$$\rightarrow y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} \quad , \quad y_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

$$\text{Como : } x = y - 1 \rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} - 1 \quad , \quad x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{7}i}{2} - 1$$

$$\rightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2} \quad , \quad x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$$



ECUACIONES ESPECIALES

ECUACIÓN BINOMIA

FORMA GENERAL: $ax^n \pm b = 0$; $a > 0$, $b > 0$, $n \in \mathbb{Z}^+$ (5.1)

RESOLUCIÓN

Por comodidad, los coeficientes a y b de (5.1) se han considerado números reales positivos; pero si éstos, en general, son números complejos puede seguirse un procedimiento análogo. Los casos $n = 1$ y $n = 2$ son los más triviales y ya han sido tratados anteriormente.

De los números complejos, recuerde que :

$$\sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{\cos 0 + i \operatorname{sen} 0} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right); k = 0, 1, 2, \dots, (n-1) \quad (5.2)$$

$$\sqrt[n]{-1} = \sqrt[n]{\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi}{n}; k = 0, 1, 2, \dots, (n-1) \quad (5.3)$$

Caso 1: $ax^n - b = 0$

$$ax^n = b \rightarrow x^n = \frac{b}{a} \rightarrow x^n = \frac{b}{a}(1) \rightarrow x = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \cdot \sqrt[n]{1}$$

Usando (5.2) :

$$x = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \cdot \left[\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \right] \quad (5.4)$$

donde : $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$

Caso 2: $ax^n + b = 0$

$$ax^n = -b \rightarrow x^n = -\frac{b}{a} \rightarrow x^n = \frac{b}{a}(-1) \rightarrow x = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \cdot \sqrt[n]{-1}$$

Usando (5.3) :

$$x = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \cdot \left[\cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi}{n} \right] \quad (5.5)$$

donde : $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$

En ambos casos $\frac{b}{a}$ es positivo y $\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ debe efectuarse en \mathbb{R} ; es decir, se debe considerar sólo su raíz aritmética. Para cada valor de "k" se obtiene una raíz; como "k" toma los valores desde 0 hasta $(n-1)$, habrán en total "n" raíces de la ecuación binomia.



Ejemplo 46

Resolver la ecuación: $64x^6 - 27 = 0$

La ecuación corresponde al caso 1 con: $n = 6$, $a = 64$, $b = 27$, entonces por (5.4) se tiene:

$$x = \sqrt[6]{\frac{27}{64}} \left[\cos \frac{2k\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{6} \right], \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$k = 0: x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} (\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = \frac{\sqrt{3}}{2} (1 + i \cdot 0) \rightarrow x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$k = 1: x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) \rightarrow x_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4} i$$

$$k = 2: x_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) \rightarrow x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4} i$$

$$k = 3: x_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} [\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi] = \frac{\sqrt{3}}{2} [-1 + i \cdot 0] \rightarrow x_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$k = 4: x_5 = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} \right] = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right] \rightarrow x_5 = -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4} i$$

$$k = 5: x_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\cos \frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{3} \right] = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right] \rightarrow x_6 = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4} i$$



EJEMPLO 46

Hallar todas las raíces de la ecuación: $x^5 + 32i = 0$

No está dentro de los casos considerados, pero podemos resolverla así:

$$x^5 = -32i \rightarrow x = \sqrt[5]{-32i} \rightarrow x = \sqrt[5]{32} \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} \right)$$

Usando la fórmula de D'MOIVRE :

$$x = \sqrt[5]{32} \left[\cos \left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{5} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{5} \right) \right]; \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$k = 0: x_1 = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{10} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{10} \right)$$

$$\begin{aligned}
 k = 1 : x_2 &= 2 \left(\cos \frac{7\pi}{10} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{10} \right) \\
 k = 2 : x_3 &= 2 \left(\cos \frac{11\pi}{10} + i \operatorname{sen} \frac{11\pi}{10} \right) \\
 k = 3 : x_4 &= 2 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} \right) = 2(0 + i(-1)) \rightarrow x_4 = -2i \\
 k = 4 : x_5 &= 2 \left(\cos \frac{19\pi}{10} + i \operatorname{sen} \frac{19\pi}{10} \right)
 \end{aligned}$$

ECUACIÓN TRINOMIA

FORMA GENERAL: $\boxed{ax^{2n} + bx^n + c = 0}$, $abc \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}^+$ (5.6)

RESOLUCIÓN

Se nota que (5.6) es una ecuación cuadrática en " x^n ". De modo que usando la sustitución: $x^n = y$, la ecuación quedará así:

$$ay^2 + by + c = 0$$

La restricción $abc \neq 0$ significa que ninguno de los coeficientes: a , b ó c es nulo. Luego:

$$y = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \vee \quad y = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

es decir:

$$x^n = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \vee \quad x^n = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En cada parte, usando los detalles de la ecuación binomia, se obtienen n raíces.

En total $2n$ raíces de la ecuación (5.6)



EJEMPLO 48

Resolver: $x^6 + 63x^3 - 64 = 0$

Haciendo $x^3 = y$ se obtiene: $y^2 + 63y - 64 = 0$

de donde: $y = 1 \vee y = -64$ es decir: $x^3 = 1 \vee x^3 = -64$

* $x^3 = 1$, por (5.4): $x = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$

$k = 0 : x_1 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = 1 + 0 \cdot i \rightarrow x_1 = 1$

$k = 1 : x_2 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \rightarrow x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$k = 2 : x_3 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \rightarrow x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$* \quad x^3 = -64 \text{ por (5.5) : } x = 4 \left[\cos \frac{(2q+1)\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{(2q+1)\pi}{3} \right], \quad q = 0, 1, 2$$

$$q = 0 : x_4 = 4 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \right) = 4 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \rightarrow x_4 = 2 + 2\sqrt{3}i$$

$$q = 1 : x_5 = 4 (\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) = 4(-1 + 0 \cdot i) \rightarrow x_5 = -4$$

$$q = 2 : x_6 = 4 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{3} \right) = 4 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \rightarrow x_6 = 2 - 2\sqrt{3}i$$

ECUACIÓN BICUADRADA

$$\text{FORMA GENERAL : } \boxed{ax^4 + bx^2 + c = 0}, \quad abc \neq 0 \quad (5.7)$$

RESOLUCIÓN

Observe que ésta es un caso particular de la ecuación trinomia (5.6) para $n = 2$. De modo que :

$$x^2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \vee \quad x^2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{luego : } x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}, \quad x_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Considerando que : $b^2 - 4ac = \Delta$, éstas raíces se pueden colocar así :

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}} = \alpha & x_3 &= \sqrt{\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}} = \beta \\ x_2 &= -\sqrt{\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}} = -\alpha & x_4 &= -\sqrt{\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}} = -\beta \end{aligned} \quad (5.8)$$



EJEMPLO 49

Resolver la ecuación : $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$

Factorizando el primer miembro (mediante un aspa simple) se obtiene :

$$(4x^2 - 1)(x^2 - 9) = 0 \rightarrow (2x + 1)(2x - 1)(x + 3)(x - 3) = 0$$

luego, las raíces son : $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = -3$, $x_4 = 3$


EJEMPLO 50

Hallar las raíces de la ecuación : $x^4 - 6x^2 + 25 = 0$

Haciendo : $x^2 = y$ la ecuación se reduce a : $y^2 - 6y + 25 = 0$

$$\rightarrow y = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 100}}{2} \rightarrow y = 3 \pm 4i \rightarrow x^2 = 3 \pm 4i$$

$$* \quad x^2 = 3 + 4i \rightarrow x = \pm \sqrt{3 + 4i}$$

$$\text{pero : } \sqrt{3 + 4i} = \sqrt{3 + 2(2i)} = \sqrt{3 + 2\sqrt{-4}} = \sqrt{4} + \sqrt{-1} = 2 + i$$

$$\rightarrow x = \pm(2 + i) \rightarrow x_1 = 2 + i, \quad x_2 = -2 - 2i$$

$$* \quad x^2 = 3 - 4i \rightarrow x = \pm \sqrt{3 - 4i} = \pm(2 - i)$$

$$\text{de donde : } x_3 = 2 - i, \quad x_4 = -2 + i$$

PROPIEDADES DE LAS RAÍCES EN LA ECUACIÓN BICUADRADA

De (5.8) se puede observar que el primer par de raíces : x_1 y x_2 son opuestas o simétricas entre sí, y el otro par : x_3 y x_4 también son opuestas entre sí. Pero, en valor absoluto, el del primer par es diferente al del segundo. Con esto, se tiene que :

$$x_1 + x_2 = 0, \quad x_3 + x_4 = 0$$

y aplicando el teorema de CARDANO-VIETE, se pueden probar las siguientes propiedades :

$$1. \text{ SUMA DE RAÍCES : } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \quad (5.9)$$

$$2. \text{ SUMA DE PRODUCTOS BINARIOS : } x_1 x_2 + x_3 x_4 = \frac{b}{a} \quad (5.10)$$

$$3. \text{ PRODUCTO DE RAÍCES : } x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \frac{c}{a} \quad (5.11)$$


EJEMPLO 51

Una raíz de la ecuación : $9x^4 - 37x^2 + m = 0$ es $\frac{1}{3}$. Hallar m .

Por tratarse de una ecuación bicuadrada, si una raíz es $x_1 = \frac{1}{3}$ entonces

otra será : $x_2 = -\frac{1}{3}$. Sean $x_3 = \beta$ y $x_4 = -\beta$ las otras dos raíces.

Nótese que la suma de las cuatro raíces es cero.

$$\text{Por (5.10) : } x_1 x_2 + x_3 x_4 = \frac{-37}{9} \rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) + (\beta)(-\beta) = -\frac{37}{9}$$

$$\rightarrow \frac{1}{9} + \beta^2 = \frac{37}{9} \rightarrow \beta^2 = 4 \rightarrow \beta = 2 \vee \beta = -2$$

Es indistinto tomar cualquiera de ellos. Con $\beta = 2$, usando (5.11) se tiene:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \frac{m}{9} \rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)(2)(-2) = \frac{m}{9} \rightarrow m = 4$$

ECUACIÓN RECÍPROCA

DEFINICIÓN: La ecuación polinomial:

$$P_{(x)} = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0; a_0 \neq 0$$

se denomina ECUACIÓN RECÍPROCA DE PRIMERA ESPECIE si y solo si se satisface la condición:

$$x^n \cdot P\left(\frac{1}{x}\right) \equiv P(x), \quad \forall x \neq 0 \quad (5.12)$$

TEOREMA 16

Si:

$$P_{(x)} = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0; a_0 \neq 0$$

es una ecuación RECÍPROCA DE PRIMERA ESPECIE entonces en $P(x)$ los coeficientes de los términos extremos, y de los equidistantes a ellos, son iguales; es decir:

$$a_i = a_{n-i}, \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots, n$$

además, si una raíz de la ecuación es r ($r \neq 0$) entonces necesariamente otra raíz será $\frac{1}{r}$

PRUEBA

Si: $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n; a_0 \neq 0$

$$\rightarrow P\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 \left(\frac{1}{x}\right)^n + a_1 \left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} + a_2 \left(\frac{1}{x}\right)^{n-2} + \dots + a_{n-1} \left(\frac{1}{x}\right) + a_n$$

$$\rightarrow x^n P\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

$$x^n P\left(\frac{1}{x}\right) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Según la definición (5.12) siendo $P(x)$ recíproca de primera especie:

$$x^n P\left(\frac{1}{x}\right) = P(x), \text{ entonces:}$$

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

la identidad se satisface si : $a_0 = a_n$, $a_1 = a_{n-1}$, $a_2 = a_{n-2}$, etc.

Es decir : $a_i = a_{n-i}$, $\forall i = 0, 1, 2, \dots, n$

Por otro lado, r es una raíz de la ecuación recíproca de primera especie :

$$P(x) = 0 \text{ , entonces : } P(r) = 0 \text{ , } r \neq 0 \quad \dots (\alpha)$$

$$\text{Como : } x^n P\left(\frac{1}{x}\right) \equiv P(x) \text{ , } \forall x \neq 0 \text{ , en particular : } r^n P\left(\frac{1}{r}\right) = P(r)$$

luego, en (α) se tiene :

$$P(r) = 0 \rightarrow r^n P\left(\frac{1}{r}\right) = 0 \text{ , y como } r \neq 0 \rightarrow P\left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

Esto significa que $\frac{1}{r}$ es también raíz de : $P(x) = 0$.



EJEMPLO 52

Las siguientes ecuaciones : $2x^3 - 5x^2 - 5x + 2 = 0$

$$x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$3x^5 - x^3 - x^2 + 3 = 0$$

son RECÍPROCAS de PRIMERA ESPECIE. En cada una, fíjese que los coeficientes de los términos extremos y los coeficientes de los equidistantes a ellos son iguales.

DEFINICIÓN : La ecuación polinomial :

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \text{ ; } a_0 \neq 0$$

se denomina ECUACIÓN RECÍPROCA DE SEGUNDA ESPECIE si y solo si se satisface la condición :

$$x^n \cdot P\left(-\frac{1}{x}\right) \equiv (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot P(x) \text{ , } \forall x \neq 0 \quad (5.13)$$

TEOREMA 17

$$\text{Si } P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \text{ , } a_0 \neq 0$$

es una ecuación RECÍPROCA de SEGUNDA ESPECIE , entonces el grado de la ecuación n es PAR , el polinomio $P(x)$ tiene un término central.

Si $\frac{n}{2}$ es PAR, los términos que equidistan de aquel término central cuyos grados son pares tienen coeficientes iguales, pero aquellos cuyos grados son impares tienen coeficientes de igual módulo y con signos opuestos, así :

$$a_i = a_{n-i}, \forall i = 0, 2, 4, \dots, n \wedge a_i = -a_{n-i}, \forall i = 1, 3, 5, \dots, (n-1)$$

En cambio, si $\frac{n}{2}$ es IMPAR sucede lo contrario, es decir, los equidistantes de grado par tienen coeficientes iguales en módulo pero de signos opuestos y los de grado impar coeficientes iguales.

Además, si una raíz de la ecuación es $r (r \neq 0)$ necesariamente otra raíz será $-\frac{1}{r}$.

La prueba de este teorema es similar al anterior, de manera que la dejamos para que la realice el lector.

Lo más resaltante del teorema es que afirma que NO existen ecuaciones recíprocas de segunda especie con grado impar.



EJEMPLO 53 :

Las ecuaciones siguientes : $3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 2x + 3 = 0$

$$x^6 + 4x^5 - x^4 - x^3 + x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$x^8 - 5x^7 + 2x^5 - 9x^4 - 2x^3 + 5x + 1 = 0$$

son recíprocas de segunda especie. En cada una, el lector puede verificar lo que afirma el teorema.

RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN RECÍPROCA

El procedimiento para resolver ecuaciones recíprocas consiste en emplear el criterio de factorización de polinomios recíprocos, como se indica en cada caso:

CASO 1 : RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN RECÍPROCA DE PRIMERA ESPECIE

Si la ecuación es de grado PAR, se procede así :

- En el primer miembro, el cual es un polinomio recíproco, se factoriza de todos los términos la parte variable del término central (asumiendo que éste es completo y ordenado).
- A continuación, se agrupan los términos extremos y los equidistantes a ellos.
- Luego, se realiza la sustitución : $x + \frac{1}{x} = a$

y con esto, se demuestran las siguientes posibles sustituciones :

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = a^2 \rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = a^2 \rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = a^3 \rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) = a^3 \rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = a^3 - 3a$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = (a^2 - 2)^2 \rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} + 2 = a^4 - 4a^2 + 4 \rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} = a^4 - 4a^2 + 2$$

y así sucesivamente.

- El resultado de todo esto será un nuevo polinomio mucho más simple de factorizar. Una vez conseguida la factorización se repone el cambio inicial, es decir se sustituye

"a" por $x + \frac{1}{x}$.

- * Si la ecuación es de grado IMPAR, entonces una raíz de la ecuación, o es "1" o sino "-1" y por lo tanto un factor del primer miembro $P(x)$ será $(x-1)$ o de lo contrario $(x+1)$. Por el teorema del factor, la ecuación se expresará así :

$$(x-1) \cdot Q(x) = 0 \quad \text{ó} \quad (x+1) \cdot Q(x) = 0$$

donde $Q(x)$ resulta ser también un polinomio recíproco y de grado par, y su factorización es como lo anterior.



EJEMPLO 54 :

Hallar todas las raíces de la ecuación :

$$2x^6 + x^5 - 7x^4 + 8x^3 - 7x^2 + x + 2 = 0$$

Se trata de una ecuación recíproca de primera especie de grado par. Factorizando x^3 de todos los términos :

$$x^3 \left(2x^3 + x^2 - 7x + 8 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) = 0$$

Agrupando los términos extremos y los equidistantes a ellos :

$$x^3 \left[2 \left(x^3 + \frac{1}{x^3} \right) + \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) - 7 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 8 \right] = 0$$

Haciendo el cambio : $x + \frac{1}{x} = a$, al reemplazar se obtiene :

$$x^3 [2(a^3 - 3a) + (a^2 - 2) - 7(a) + 8] = 0 \rightarrow x^3 (2a^3 + a^2 - 13a + 6) = 0$$

Factorizando el polinomio entre paréntesis y reemplazando "a" :

$$x^3 (a-2)(a-3)(2a+1) = 0 \rightarrow x^3 \left(x + \frac{1}{x} - 2 \right) \left(x + \frac{1}{x} - 3 \right) \left[2 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 1 \right] = 0$$

$$\rightarrow x^3 \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x} \right) \left(\frac{x^2 - 3x + 1}{x} \right) \left(\frac{2x^2 + x + 2}{x} \right) = 0 \rightarrow (x-1)^2 (x^2 - 3x + 1) (2x^2 + x + 2) = 0$$

Luego: $(x-1)^2 = 0$, $x^2 - 3x + 1 = 0$, $2x^2 + x + 2 = 0$

$$\rightarrow x_{1,2} = 1 \quad , \quad x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \quad , \quad x_{5,6} = \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{4}$$

Se puede comprobar que: $x_2 = \frac{1}{x_1}$, $x_4 = \frac{1}{x_3}$ y $x_6 = \frac{1}{x_5}$



EJEMPLO 55:

Resolver la ecuación: $2x^5 + 7x^4 + 12x^3 + 12x^2 + 7x + 2 = 0$

La ecuación es recíproca de primera especie y de grado impar entonces necesariamente una de sus raíces es 1 ó sino -1. Se nota que ésta raíz es -1 y por el teorema del factor la ecuación quedará así:

$$(x+1) \cdot Q_{(x)} = 0 \rightarrow (x+1)(2x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 5x + 2) = 0$$

Usando el procedimiento, detallado en el ejemplo anterior, para el polinomio entre paréntesis, se tiene:

$$(x+1)x^2 \left(2x^2 + 5x + 7 + \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} \right) = 0$$

$$\rightarrow (x+1)x^2 \left[2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + 5 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 7 \right] = 0$$

Haciendo $x + \frac{1}{x} = a$:

$$(x+1)x^2 [2(a^2 - 2) + 5a + 7] = 0 \rightarrow (x+1)x^2 (2a^2 + 5a + 3) = 0$$

$$(x+1)x^2 (a+1)(2a+3) = 0 \rightarrow (x+1)x^2 \left(x + \frac{1}{x} + 1 \right) [2 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 3] = 0$$

$$(x+1)x^2 \left(\frac{x^2 + x + 1}{x} \right) \left(\frac{2x^2 + 3x + 2}{x} \right) = 0 \rightarrow (x+1)(x^2 + x + 1)(2x^2 + 3x + 2) = 0$$

$$\rightarrow x+1 = 0 \quad , \quad x^2 + x + 1 = 0 \quad , \quad 2x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$\rightarrow x_1 = -1 \quad , \quad x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \quad , \quad x_{4,5} = \frac{-3 \pm \sqrt{7}i}{4}$$

Verifique que: $x_3 = \frac{1}{x_2}$ y que: $x_5 = \frac{1}{x_4}$

CASO 2 : RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN RECÍPROCA DE SEGUNDA ESPECIE

Recuerde que una ecuación de este tipo sólo puede ser de grado par y, el procedimiento para resolverlo es análogo al caso anterior, sólo que aquí la sustitución a emplear es : $x - \frac{1}{x} = a$ y en base a ésta se prueba que :

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = a^2 \rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = a^2 \rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 + 2$$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^3 = a^3 \rightarrow x^3 - \frac{1}{x^3} - 3x \frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{x}\right) = a^3 \rightarrow x^3 - \frac{1}{x^3} = a^3 + 3a$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = (a^2 + 2)^2 \rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} + 2 = a^4 + 4a^2 + 4 \rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} = a^4 + 4a^2 + 2$$

y así sucesivamente .

**EJEMPLO 56 :**

Resolver la ecuación : $2x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 5x + 2 = 0$

La ecuación es recíproca de segunda especie, entonces desarrollando el procedimiento.

$$x^2 \left(2x^2 + 5x - 7 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} \right) = 0 \rightarrow x^2 \left[2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + 5 \left(x - \frac{1}{x} \right) - 7 \right] = 0$$

Haciendo : $x - \frac{1}{x} = a$:

$$x^2 [2(a^2 + 2) + 5(a) - 7] = 0 \rightarrow x^2 (2a^2 + 5a - 3) = 0$$

$$\rightarrow x^2 (2a - 1)(a + 3) = 0 \rightarrow x^2 \left[2 \left(x - \frac{1}{x} \right) - 1 \right] \left[x - \frac{1}{x} + 3 \right] = 0$$

$$\rightarrow x^2 \left[\frac{2x^2 - x - 2}{x} \right] \left[\frac{x^2 + 3x - 1}{x} \right] = 0 \rightarrow (2x^2 - x - 2)(x^2 + 3x - 1) = 0$$

$$\rightarrow 2x^2 - x - 2 = 0 \quad ; \quad x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$\rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4} \quad ; \quad x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Observe que : $x_2 = -\frac{1}{x_1}$ y también que : $x_4 = -\frac{1}{x_3}$



EJEMPLO 57 :

Hallar las raíces de la ecuación :

$$2x^6 - 9x^5 + 7x^4 + 12x^3 - 7x^2 - 9x - 2 = 0$$

Como la ecuación es recíproca de segunda especie, se tiene:

$$x^3 \left(2x^3 - 9x^2 + 7x + 12 - \frac{7}{x} - \frac{9}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) = 0$$

$$x^3 \left[2 \left(x^3 - \frac{1}{x^3} \right) - 9 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + 7 \left(x - \frac{1}{x} \right) + 12 \right] = 0$$

$$\text{Haciendo: } x - \frac{1}{x} = a : x^3 [2(a^3 + 3a) - 9(a^2 + 2) + 7a + 12] = 0$$

$$x^3 (2a^3 - 9a^2 + 13a - 6) = 0$$

$$\rightarrow x^3 (a - 1)(a - 2)(2a - 3) = 0$$

$$\text{Reponiendo: } x^3 \left(x - \frac{1}{x} - 1 \right) \left(x - \frac{1}{x} - 2 \right) \left[2 \left(x - \frac{1}{x} \right) - 3 \right] = 0$$

$$\rightarrow x^3 \left(\frac{x^2 - x - 1}{x} \right) \left(\frac{x^2 - 2x - 1}{x} \right) \left(\frac{2x^2 - 3x - 2}{x} \right) = 0$$

$$\rightarrow (x^2 - x - 1)(x^2 - 2x - 1)(2x^2 - 3x - 2) = 0$$

$$\rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \quad , \quad x^2 - 2x - 1 = 0 \quad , \quad 2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$\rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad , \quad x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{2} \quad , \quad x_5 = 2, x_6 = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Compruebe que: } x_2 = -\frac{1}{x_1} \quad , \quad x_4 = -\frac{1}{x_3} \quad , \quad x_6 = -\frac{1}{x_5}$$



TRANSFORMACIÓN DE LAS RAÍCES DE UNA ECUACIÓN POLINOMIAL

I. INCREMENTO O DISMINUCIÓN DE LAS RAÍCES EN UNA MISMA CANTIDAD

Sean $\{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n\}$ el conjunto de las n raíces de la ecuación polinomial :

$$P_{(x)} = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad , \quad a_0 \neq 0 \quad (5.14)$$

Se quiere obtener una nueva ecuación de la forma :

$$Q_{(x)} = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \dots + b_{n-1} x + b_n = 0 \quad ; \quad b_0 \neq 0 \quad (5.15)$$

tal que sus raíces sean las de $P_{(x)} = 0$, pero agregadas en una misma cantidad h ($h \neq 0$) , es decir :

$$\{r_1 + h ; r_2 + h ; r_3 + h ; \dots ; r_n + h\} \quad (5.16)$$

Cuando $h > 0$, se tratará de un INCREMENTO de las raíces y cuando $h < 0$ una DISMINUCIÓN de las mismas.

La ecuación (5.14) podemos colocarla así :

$$P_{(x)} = a_0 (x - r_1) (x - r_2) (x - r_3) \dots (x - r_n) = 0 \quad ; \quad a_0 \neq 0$$

Si sustituimos x por $x - h$, esta ecuación quedará así :

$$P_{(x-h)} = a_0 (x - h - r_1) (x - h - r_2) (x - h - r_3) \dots (x - h - r_n) = 0$$

donde se nota que sus raíces son las del conjunto dado en (5.16). Esto quiere decir que la nueva ecuación se obtiene así :

$$Q_{(x)} = P_{(x-h)} = 0$$

Luego, haciendo la sustitución x por $x - h$ en (5.14) , resulta que :

$$Q_{(x)} = a_0 (x - h)^n + a_1 (x - h)^{n-1} + a_2 (x - h)^{n-2} + \dots + a_{n-1} (x - h) + a_n = 0 \quad (5.17)$$

en la ecuación que se pide. Para llegar a la forma (5.15) se tiene que desarrollar cada una de las potencias indicadas y las reducciones correspondientes en forma ordenada. En los casos $n = 1 ; 2$ ó 3 ésto resulta sencillo, pero cuando $n \geq 4$ aquello puede ser muy laborioso. Vamos a detallar un método práctico para formar la ecuación en esos casos.

Recordando el algoritmo de la división: $D \equiv d \cdot q + R$, dividimos en forma sucesiva $P(x)$ entre $(x+h)$, hasta obtener un cociente constante, y averiguemos el residuo en cada caso. Así:

$$P(x) = (x+h) \cdot q_1(x) + R_1, \quad q_1(x) \text{ es de grado } n-1$$

$$q_1(x) = (x+h) \cdot q_2(x) + R_2, \quad q_2(x) \text{ es de grado } n-2$$

$$q_2(x) = (x+h) \cdot q_3(x) + R_3, \quad q_3(x) \text{ es de grado } n-3$$

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \quad \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$$

$$q_{n-2}(x) = (x+h) \cdot q_{n-1}(x) + R_{n-1}, \quad q_{n-1}(x) \text{ es de grado } 1$$

$$q_{n-1}(x) = (x+h) q_n(x) + R_n, \quad q_n(x) \text{ es de grado } 0 \rightarrow q_n(x) = c \neq 0$$

donde los residuos: $R_1, R_2, R_3, \dots, R_{n-1}, R_n$ son constantes (de grado 0)

Entonces:

$$q_{n-1}(x) = c(x+h) + R_n$$

$$q_{n-2}(x) = [c(x+h) + R_n](x+h) + R_{n-1}$$

$$q_{n-3}(x) = \{[c(x+h) + R_n](x+h) + R_{n-1}\}(x+h) + R_{n-2}$$

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$$

$$q_1(x) = \{ \dots \{ [c(x+h) + R_n](x+h) + R_{n-1} \} (x+h) + R_{n-2} \} \dots \} (x+h) + R_2$$

$$P(x) = \{ \{ \dots \{ [c(x+h) + R_n](x+h) + R_{n-1} \} (x+h) + R_{n-2} \} \dots \} (x+h) + R_2 \} (x+h) + R_1$$

Efectuando operaciones en esta última:

$$P(x) = \{ \{ \dots \{ [c(x+h)^2 + R_n(x+h) + R_{n-1}](x+h) + R_{n-2} \} \dots \} (x+h) + R_2 \} (x+h) + R_1$$

$$P(x) = \{ \{ \dots \{ c(x+h)^3 + R_n(x+h)^2 + R_{n-1}(x+h) + R_{n-2} \} \dots \} (x+h) + R_2 \} (x+h) + R_1$$

$$P(x) = \{ c(x+h)^{n-1} + R_n(x+h)^{n-2} + R_{n-1}(x+h)^{n-3} + R_{n-2}(x+h)^{n-4} + \dots + R_2 \} (x+h) + R_1$$

$$P(x) = c(x+h)^n + R_n(x+h)^{n-1} + R_{n-1}(x+h)^{n-2} + R_{n-2}(x+h)^{n-3} + \dots + R_2(x+h) + R_1$$

Haciendo la sustitución x por $x-h$ en ésta última, obtenemos:

$$Q(x) = P(x-h) = cx^n + R_n x^{n-1} + R_{n-1} x^{n-2} + R_{n-2} x^{n-3} + \dots + R_2 x + R_1 = 0 \quad (5.18)$$

Comparando (5.18) con (5.15) se tiene :

$$b_0 = c = a_0, b_1 = R_n, b_2 = R_{n-1}, b_3 = R_{n-2}, \dots, b_{n-1} = R_2, b_n = R_1$$

En resumen , al dividir $P_{(x)}$ sucesivamente entre $(x+h)$ los residuos obtenidos son (a excepción de b_0) los coeficientes de $Q(x)$ pero en orden invertido.



EJEMPLO 58 :

Si $\{a, b, c, d\}$ son las raíces de la ecuación : $2x^4 - 5x^3 + x^2 - x + 3 = 0$, hallar otra ecuación cuyas raíces sean : $\{a+2, b+2, c+2, d+2\}$

Se trata de incrementar las raíces en 2 unidades, es decir : $h = 2$ ($h > 0$)

En la ecuación, sustituyendo x por $x-2$ se obtiene :

$$2(x-2)^4 - 5(x-2)^3 + (x-2)^2 - (x-2) + 3 = 0$$

y ésta es la ecuación pedida ; sólo queda efectuar las operaciones y reducciones correspondientes. Una manera de obtener la ecuación ya desarrollada es así :

Dividiendo $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + x^2 - x + 3$ entre $(x+2)$, usando la regla de RUFFINI, se tiene :

2	-5	1	-1	3	→ $q_1(x) = 2x^3 - 9x^2 + 19x - 39$; $R_1 = 81$
-2	↓	-4	18	-38	
		2	-9	19	
				-39	81

Es decir :

$$P(x) = 2x^4 - 5x^3 + x^2 - x + 3 = (x+2)(2x^3 - 9x^2 + 19x - 39) + 81 \quad \dots(\alpha)$$

Ahora, dividiendo $q_1(x)$ entre $(x+2)$:

2	-9	19	-39	→ $q_2(x) = 2x^2 - 13x + 45$; $R_2 = -129$
-2	↓	-4	26	
		2	-13	
			45	-129

Es decir :

$$q_1(x) = 2x^3 - 9x^2 + 19x - 39 = (x+2)(2x^2 - 13x + 45) - 129 \quad \dots(\beta)$$

Asimismo $q_2(x)$ entre $(x+2)$

$$\begin{array}{r|rr|r} -2 & 2 & -13 & 45 \\ & \downarrow & -4 & 34 \\ \hline & 2 & -17 & 79 \end{array} \rightarrow q_3(x) = 2x - 17 ; R_3 = 79$$

es decir : $q_2(x) = (x+2)(2x-17) + 79 \quad \dots(\gamma)$

Finalmente $q_3(x)$ entre $(x+2)$ resulta : $q_3(x) = (x+2) \cdot 2 - 21 \quad \dots(\delta)$

osea : $q_4(x) = 2 , R_4 = -21$

Reemplazando (δ) en (γ) , luego (γ) en (β) y así hasta llegar a (α) se observa que :

$$P(x) = 2x^4 - 5x^3 + x^2 - x + 3 = 2(x+2) - 21(x+2) + 79(x+2) - 129(x+2) + 81$$

$$P(x) = 2x^4 - 5x^3 + x^2 - x + 3 = 2(x+2)^4 - 21(x+2)^3 + 79(x+2)^2 - 129(x+2) + 81$$

Haciendo la sustitución de x por $x-2$, resulta:

$$P(x-2) = 2(x-2)^4 - 5(x-2)^2 - (x-2) + 3 = 2x^4 - 21x^3 + 79x^2 - 129x + 81$$

Por lo tanto, la ecuación pedida (desarrollada) es :

$$Q(x) = 2x^4 - 21x^3 + 79x^2 - 129x + 81 = 0$$

El procedimiento anterior puede simplificarse como se muestra en el ejemplo siguiente .

EJEMPLO 59

Hallar una ecuación polinomial cuyas raíces sean las de :

$$x^5 - x^3 + 2x^2 + x - 4 = 0$$

Pero disminuídas en 1.

Supongamos que las raíces de la ecuación dada sean $\{a, b, c, d, e\}$; queremos obtener una ecuación cuyas raíces sean :

$$\{a-1, b-1, c-1, d-1, e-1\} , \text{ donde } h = -1 < 0$$

Dividiendo sucesivamente entre $(x-1)$:

$$\begin{array}{r|rrrrrr|r}
 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 4 \\
 1 & \downarrow & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\
 \hline
 & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 & -1 \rightarrow R_1 = -1 \\
 1 & \downarrow & 1 & 2 & 2 & 4 \\
 \hline
 & 1 & 2 & 2 & 4 & 7 & \rightarrow R_2 = 7 \\
 1 & \downarrow & 1 & 3 & 5 \\
 \hline
 & 1 & 3 & 5 & 9 & \rightarrow R_3 = 9 \\
 1 & \downarrow & 1 & 4 \\
 \hline
 & 1 & 4 & 9 & \rightarrow R_4 = 9 \\
 1 & \downarrow & 1 \\
 \hline
 & 1 & 5 & \rightarrow R_5 = 5
 \end{array}$$

Luego, la ecuación pedida es : $x^5 + R_5 x^4 + R_4 x^3 + R_3 x^2 + R_2 x + R_1 = 0$

$$x^5 + 5x^4 + 9x^3 + 9x^2 + 7x - 1 = 0$$

ELIMINACIÓN DEL SEGUNDO TÉRMINO

Los procedimientos para resolver las ecuaciones cúbica y cuártica, desarrollados por TARTAGLIA Y DESCARTES respectivamente, parten de la eliminación del segundo término en aquellas ecuaciones. Es decir :

La ecuación : $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$; $a \neq 0$ se debe transformar en $x^3 + px + q = 0$

La ecuación : $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$; $a \neq 0$, en $x^4 + rx^2 + sx + t = 0$

Esto se consigue incrementando las raíces en una cierta cantidad h de modo que aquellos términos desaparezcan de la ecuación.

En (5.17) , al efectuar el desarrollo, los primeros términos son :

$$Q_{(x)} = a_0 x^n + (a_1 - a_0 n h) x^{n-1} + (a_2 - a_1 n h + a_0 \frac{n(n-1)}{2} \cdot h^2) x^{n-2} + \dots = 0$$

El término en x^{n-1} (el segundo) se elimina si : $a_1 - a_0 n h = 0 \rightarrow h = \frac{a_1}{a_0 n}$; es decir

las raíces de la ecuación $P(x) = 0$ se deben incrementar en $h = \frac{a_1}{a_0 n}$

para eliminar el segundo término.



EJEMPLO 60 :

Eliminar el segundo término de la ecuación : $x^3 - 6x^2 + 5x + 2 = 0$

En este caso : $a_0 = 1$, $a_1 = -6$, $n = 3 \rightarrow h = \frac{-6}{1 \cdot 3} = -2$, es decir , incrementamos las raíces en $h = -2$ unidades ($h < 0$). Haciendo la sustitución x por $x + 2$:

$$\begin{aligned}(x+2)^3 - 6(x+2)^2 + 5(x+2) + 2 &= 0 \\ x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - 6x^2 - 24x - 24 + 5x + 10 + 2 &= 0 \\ \rightarrow x^3 - 7x - 4 &= 0\end{aligned}$$



EJEMPLO 61 :

Eliminar el término cúbico de la ecuación : $2x^4 + 24x^3 + 53x^2 - 2 = 0$

Ahora : $a_0 = 2$, $a_1 = 24$, $n = 4 \rightarrow h = \frac{24}{2 \cdot 4} = 3$. Se tiene que incrementar las raíces en $h = 3$ unidades ($h > 0$) .

Usando la regla de RUFFINI, para efectuar las divisiones sucesivas.

	2	24	53	0	-2	
-3	↓	-6	-54	3	-9	
	2	18	-1	3	-11	$\rightarrow R_1 = -11$
-3	↓	-6	-36	111		
	2	12	-37	114		$\rightarrow R_2 = 114$
-3	↓	-6	-18			
	2	6	-55			$\rightarrow R_3 = -55$
-3	↓	-6				
	2	0				$\rightarrow R_4 = 0$

Luego, la ecuación es : $2x^4 + R_4 x^3 + R_3 x^2 + R_2 x + R_1 = 0$

$$\rightarrow 2x^4 - 55x^2 + 114x - 11 = 0$$

que se puede expresar también como : $x^4 - \frac{55}{2}x^2 + 57x - \frac{11}{2} = 0$

II. MULTIPLICACIÓN DE LAS RAÍCES POR UN MISMO FACTOR CONSTANTE

Se desea obtener una ecuación polinomial cuyas raíces sean :

$$\{\alpha r_1; \alpha r_2; \alpha r_3; \dots; \alpha r_n\} \quad ; \quad \alpha \neq 0 \quad (5.19)$$

Coloquemos la ecuación (5.14) de la siguiente forma :

$$P(x) = a_0(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)\dots(x-r_n) = 0 \quad ; \quad a_0 \neq 0$$

Como $\alpha \neq 0$ multipliquemos ambos miembros por α^n :

$$\alpha^n P(x) = \alpha^n \cdot a_0(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)\dots(x-r_n) = 0$$

Haciendo la sustitución x por $\frac{x}{\alpha}$, se obtiene :

$$Q\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \alpha^n P\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \alpha^n \cdot a_0\left(\frac{x}{\alpha}-r_1\right)\left(\frac{x}{\alpha}-r_2\right)\left(\frac{x}{\alpha}-r_3\right)\dots\left(\frac{x}{\alpha}-r_n\right) = 0$$

Efectuando y simplificando, resulta :

$$Q(x) = \alpha^n \cdot P\left(\frac{x}{\alpha}\right) = a_0(x-\alpha r_1)(x-\alpha r_2)(x-\alpha r_3)\dots(x-\alpha r_n) = 0$$

De donde notamos que las raíces de ésta ecuación son los elementos dados en el conjunto (5.19) y ésta es la ecuación buscada. Lo cual significa que la ecuación buscada se obtiene así :

$$Q(x) = \alpha^n \cdot P\left(\frac{x}{\alpha}\right) = 0$$

Luego, de (5.14), ésta ecuación será :

$$Q(x) = \alpha^n P\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \alpha^n \left[a_0 \left(\frac{x}{\alpha}\right)^n + a_1 \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{n-1} + a_2 \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{n-2} + a_3 \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{n-3} + \dots + a_n \right] = 0$$

$$Q(x) = a_0 x^n + \alpha a_1 x^{n-1} + \alpha^2 a_2 x^{n-2} + \alpha^3 a_3 x^{n-3} + \dots + \alpha^n a_n = 0$$

Nótese que ésta ecuación se puede obtener directamente de (5.14) multiplicando los términos de $P(x)$, a partir del segundo, por α , α^2 , α^3 , ..., α^n respectivamente. ¡Tenga cuidado!, para ésto $P(x)$ debe estar completo ; de no ser así, previamente complete con ceros los términos que faltan.



EJEMPLO 62 :

A partir de la ecuación : $2x^4 - 5x^3 + 7x - 1 = 0$, forme otra cuyas raíces sean el doble de las de aquella.

Si las raíces de la ecuación dada son $\{a, b, c, d\}$ nos piden formar una ecuación cuyas raíces sean $\{2a, 2b, 2c, 2d\}$ ($\alpha = 2$). Entonces esa ecuación será :

$$2x^4 - 2 \cdot 5x^3 + 2^2 \cdot 0x^2 + 2^3 \cdot 7x - 2^4 \cdot 1 = 0 \rightarrow 2x^4 - 10x^3 + 56x - 16 = 0$$

que también se puede poner así : $x^4 - 5x^3 + 28x - 8 = 0$

RAÍCES SIMÉTRICAS

La ecuación cuyas raíces son : $\{-r_1, -r_2, -r_3, \dots, -r_n\}$, es decir las simétricas u opuestas de las correspondientes raíces de $P(x) = 0$, se obtiene haciendo $\alpha = -1$ en (5.19). Entonces la ecuación será :

$$Q(x) = a_0 x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - a_3 x^{n-3} + \dots + (-1)^n \cdot a_n = 0$$

es decir, resulta cambiando de signo a los términos de lugar par en $P(x)$, pero siempre que éste se encuentre completo y ordenado.



EJEMPLO 63

Hallar una ecuación polinomial cuyas raíces sean las simétricas de las de :

$$2x^5 - 7x^4 + x^2 - 3x + 1 = 0$$

Suponiendo que sus raíces son : $\{a, b, c, d, e\}$ se desea formar una nueva ecuación cuyas raíces sean las simétricas de aquellas, o sea $\{-a, -b, -c, -d, -e\}$. Complete el primer miembro antes :

$$2x^5 - 7x^4 + 0x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$$

Por la propiedad, cambiemos de signo a los términos de lugar par :

$$2x^5 + 7x^4 + 0x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0$$

Luego, la ecuación pedida será : $2x^5 + 7x^4 - x^2 - 3x - 1 = 0$

III. INVERSIÓN DE LAS RAÍCES

Suponiendo que todas las raíces de la ecuación (5.14) son distintos de "cero", se quiere obtener una ecuación cuyas raíces sean las inversas o recíprocas de aquellas, es decir :

$$\left\{ \frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \frac{1}{r_3}, \dots, \frac{1}{r_n} \right\} \quad (5.20)$$

Poniendo la ecuación (5.14) así :

$$P(x) = a_0(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)\dots(x-r_n) = 0 \quad ; \quad a_0 \neq 0$$

Haciendo la sustitución x por $\frac{1}{x}$:

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = a_0\left(\frac{1}{x}-r_1\right)\left(\frac{1}{x}-r_2\right)\left(\frac{1}{x}-r_3\right)\dots\left(\frac{1}{x}-r_n\right) = 0$$

Como $x \neq 0$, multipliquemos por x^n :

$$x^n P\left(\frac{1}{x}\right) = x^n \cdot a_0 \left(\frac{1}{x} - r_1\right) \left(\frac{1}{x} - r_2\right) \left(\frac{1}{x} - r_3\right) \dots \left(\frac{1}{x} - r_n\right) = 0$$

Efectuando y simplificando, resulta :

$$Q(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 (1 - r_1 \cdot x) (1 - r_2 \cdot x) (1 - r_3 \cdot x) \dots (1 - r_n \cdot x) = 0$$

de donde se nota que sus raíces son los elementos del conjunto (5.20). Esto quiere decir que la ecuación pedida se obtiene así :

$$Q(x) = x^n \cdot P\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Entonces de (5.14) se tendrá:

$$Q(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right) = x^n \left[a_0 \left(\frac{1}{x}\right)^n + a_1 \left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} + a_2 \left(\frac{1}{x}\right)^{n-2} + \dots + a_{n-1} \left(\frac{1}{x}\right) + a_n \right] = 0$$

Efectuando y reduciendo, queda así :

$$Q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_n x^n = 0$$

que también se puede poner así :

$$Q(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

y como se observa, ésta puede obtenerse directamente de (5.14) invirtiendo sólo el orden de sus coeficientes. Y como antes, fíjese que el polinomio esté completo y ordenado previamente.



EJEMPLO 64:

Hallar una ecuación cuyas raíces sean las recíprocas de las de:

$$3x^4 - 4x^3 + 2x - 5 = 0$$

Completando antes: $3x^4 - 4x^3 + 0x^2 + 2x - 5 = 0$

Invirtiendo el orden de los coeficientes, resulta :

$$-5x^4 + 2x^3 + 0x^2 - 4x + 3 = 0$$

ecuación cuyas raíces son las inversas de las raíces de la ecuación inicial.

Pero ésta, multiplicando por (-1) , puede también escribirse así:

$$5x^4 - 2x^3 + 4x - 3 = 0$$

IV. ELEVAR AL CUADRADO LAS RAÍCES

Se quiere obtener ahora una ecuación cuyas raíces sean los cuadrados de las de la ecuación (5.14), es decir :

$$\{ r_1^2, r_2^2, r_3^2, \dots, r_n^2 \} \quad (5.21)$$

Colocando la ecuación (5.14) en función de sus raíces, así :

$$P(x) = a_0(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_n) = 0 \quad (5.22)$$

Haciendo la sustitución x por $-x$:

$$P(-x) = a_0(-x - r_1)(-x - r_2)(-x - r_3) \dots (-x - r_n) = 0$$

Que también se puede escribir así .

$$P(-x) = a_0(x + r_1)(x + r_2)(x + r_3) \dots (x + r_n) = 0 \quad (5.23)$$

Multiplicando (5.22) y (5.23) miembro y a miembro y convenientemente :

$$P(x) \cdot P(-x) = a_0^2 \underbrace{(x - r_1)(x + r_1)}_{x^2 - r_1^2} \underbrace{(x - r_2)(x + r_2)}_{x^2 - r_2^2} \underbrace{(x - r_3)(x + r_3)}_{x^2 - r_3^2} \dots \underbrace{(x - r_n)(x + r_n)}_{x^2 - r_n^2} = 0$$

$$P(x) \cdot P(-x) = a_0^2 (x^2 - r_1^2)(x^2 - r_2^2)(x^2 - r_3^2) \dots (x^2 - r_n^2) = 0$$

En ésta última, haciendo : $x^2 = y$, resulta :

$$Q(y) = a_0^2 (y - r_1^2)(y - r_2^2)(y - r_3^2) \dots (y - r_n^2) = 0$$

ecuación cuyas raíces son los elementos del conjunto (5.21) .

El procedimiento puede resumirse del siguiente modo: luego de efectuar la multiplicación $P(x) \cdot P(-x)$, resultarán sólo potencias pares de " x " y a continuación se hace la sustitución : x^2 por " y " (o si prefiere por " x " directamente, pero obviamente ésta es distinta de la otra).



EJEMPLO 65 :

Dada la ecuación: $2x^3 + x^2 - x + 3 = 0$ cuyas raíces son $\{ \alpha, \beta, \gamma \}$

hallar otra ecuación cuyas raíces sean : $\{ \alpha^2, \beta^2, \gamma^2 \}$

Sea: $P(x) = 2x^3 + x^2 - x + 3 = 0$

Entonces: $P(-x) = 2(-x)^3 + (-x)^2 - (-x) + 3 = 0$

$$P(-x) = -2x^3 + x^2 + x + 3 = 0$$

Luego :

$$P(x) \cdot P(-x) = (2x^3 + x^2 - x + 3)(-2x^3 + x^2 + x + 3) = 0$$

El lector puede optar por cualquier procedimiento que conozca para efectuar esta operación. Puede ser así:

$$P(x) \cdot P(-x) = (x^2 + 3)^2 - (2x^3 - x)^2 = x^4 + 6x^2 + 9 - 4x^6 + 4x^4 - x^2 = 0$$

$$P(x) \cdot P(-x) = -4x^6 + 5x^4 + 5x^2 + 9 = 0$$

Sustituyendo x^2 por y , resulta :

$$Q(y) = -4y^3 + 5y^2 + 5y + 9 = 0 \quad \text{ó} \quad Q(x) = -4x^3 + 5x^2 + 5x + 9 = 0$$

que también se podrá expresar así:

$$Q(x) = 4x^3 - 5x^2 - 5x - 9 = 0$$

y ésta es la ecuación cuyas raíces son : $\{\alpha^2, \beta^2, \gamma^2\}$

