EQUATIONS DE KEPLER

Considérons le vecteur **K**, moment de la quantité de mouvement, par rapport à o, par unité de masse:

$$\mathbf{K} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{v} \;;$$

$$\dot{\mathbf{K}} = \dot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{v}}\,.$$

D'ailleurs,

$$\mathbf{r} = r\,\mathbf{e}_r,$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v},$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a} = \varphi(r)\,\mathbf{e}_r,$$

et donc

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{o} \quad \rightarrow \quad \mathbf{K} = \text{const.}$$

Dans un repère cylindrique avec centre en o et plan r-θ qui coïncide avec le plan de l'orbite, on a alors, voir le paragraphe 3.6,

$$\mathbf{v} = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta\,,$$

où θ est un angle mesuré à partir d'une droite x choisie, voir la figure 7.1.

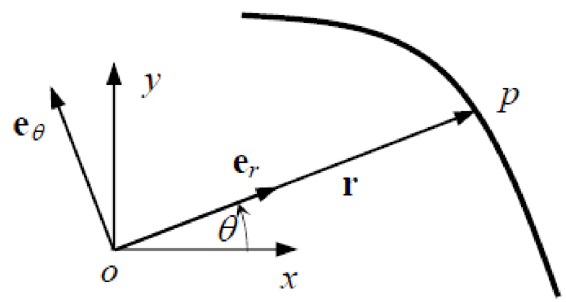


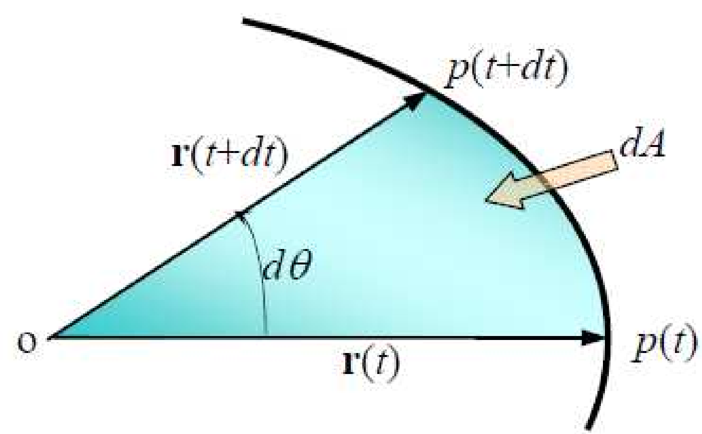
Figure 7.1

Dans ce repère on a alors

$$\mathbf{K} = r\,\mathbf{e}_r \wedge (\dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta) = r^2\dot{\theta}\,\mathbf{e}_z\,,$$

et donc, par le fait que $\mathbf{K}$ est un vecteur constant

$$r^2\dot{\theta} = c\,,$$



L'énergie mécanique totale E par unité de masse sera donc

$$E = \frac{1}{2} v^2 - U ,$$

avec E constante, par l'intégrale première de l'énergie. En coordonnées cylindriques cette intégrale première s'écrit simplement

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) = U(r) + E .$$

On appelle *problème de Kepler* l'étude du mouvement d'un point matériel p soumis à l'action d'une force centrale du type

$$\varphi(r) = -\frac{k}{r^2} ,$$

où k est une constante positive ; la force $\varphi(r)$ est donc attractive, et le potentiel correspondant

$$U(r) = \frac{k}{r}$$

$$k = G(m_1 + m_2) .$$

$$U(r) = G\frac{m_1 + m_2}{r}$$

Par l'intégrale première de l'énergie,

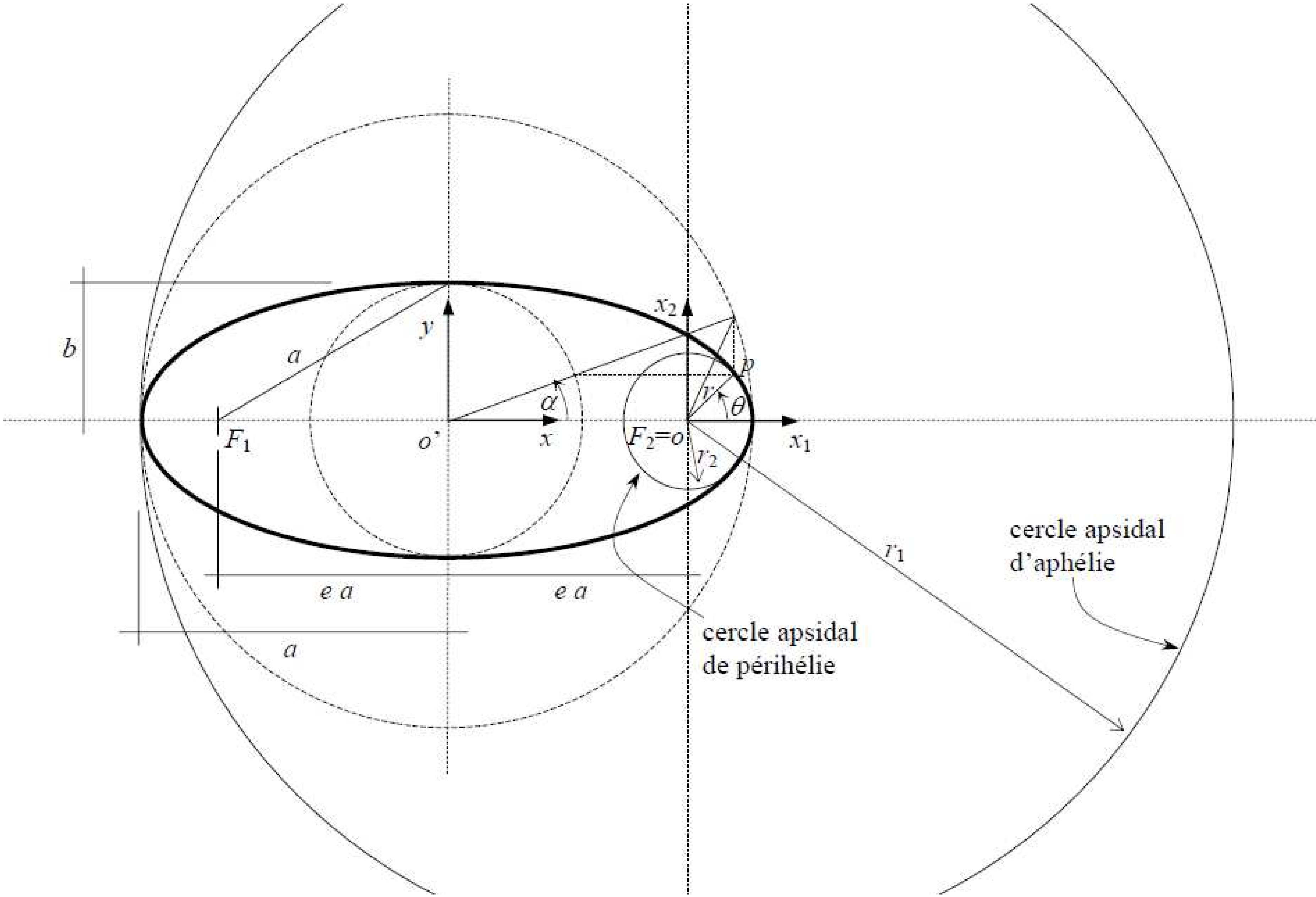
$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) = \frac{k}{r} + E\,,$$

il faut que ce soit toujours

$$\frac{k}{r} \geq -E\,, \qquad \text{Si } E = 0, \quad v_\infty = \sqrt{\frac{2k}{r_0}}$$

Equation de Kepler

$$k = \frac{c^2}{q}, \quad c = r^2\dot{\theta} \quad \text{et} \quad r = \frac{q}{1 + e\cos\theta} \qquad e = \sqrt{1 + \frac{2\,E\,c^2}{k^2}}$$



b
a
y
x_2
p
r
θ
α
F_1
o'
x
F_2=o
x_1
r_2
r_1
e a
e a
a
cercle apsidal de périhélie
cercle apsidal d'aphélie

grand axe a, semi-petit axe b et foyers F_1 et F_2 :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

De la géométrique analytique élémentaire on sait que

$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}, \qquad |F_1-o'|=|F_2-o'|=e\,a$$

$$a=\frac{q}{1-e^2} \qquad b=\sqrt{q\,a}$$

$$q=\frac{c^2}{k} \quad \rightarrow \quad \mathrm{c}=\sqrt{qk}\,,$$

et donc on a que

$$\pi a\sqrt{qa}=\frac{1}{2}\sqrt{qk}\,\tau\,,$$

d'où, finalement, la *troisième loi de Kepler* :

$$\frac{\tau^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{k}.$$