

أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2010

التمرين الأول:

1

لدينا الفلكة (S) معرفة بمعادلتها الديكارتية التالية :
 $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$
 نغير شكل المعادلة بالطريقة التالية :
 $(x^2 - 2x) + (y^2 - 4y) + (z^2 - 6z) - 11 = 0$
 $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 - 11 = 14$ يعني :
 $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$ يعني :
 إذن (S) فلكة مركزها $\Omega(1; 2; 3)$ و شعاعها $R = 5$.

2 أ

لدينا : $C(0; 1; -4)$ و $B(1; 1; -4)$ و $A(0; -2; 0)$
 إذن : $\overrightarrow{AC}(0; 3; -4)$ و $\overrightarrow{AB}(1; 3; -4)$
 و منه :
 $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \vec{k}$
 $= 0\vec{i} - (-4)\vec{j} + 3\vec{k}$
 $= 4\vec{j} + 3\vec{k}$

لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من المستوى (ABC)
 بما أن المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ متجهة منظمية على المستوى (ABC)
 فإن : المتجهتان \overrightarrow{AM} و $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ متعامدتان.
 يعني أن : $\overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$
 $\begin{pmatrix} x \\ y + 2 \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$ يعني :

يعني : $0x + 4(y + 2) + 3z = 0$ يعني : $4y + 3z + 8 = 0$
 و هذه الكتابة الأخيرة عبارة عن معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

2 ب

لدينا : $\Omega(1, 2, 3)$ و $(ABC) : 4y + 3z + 8 = 0$
 إذن : $d(\Omega, (ABC)) = \frac{|0 + 8 + 9 + 8|}{\sqrt{0^2 + 4^2 + 3^2}} = \frac{25}{\sqrt{25}} = \sqrt{25} = 5$
 نلاحظ أن : $d(\Omega, (ABC)) = R$

إذن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S) في النقطة $H(\alpha, \beta, \gamma)$

3 أ

علما أن المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(0, 4, 3)$ منظمية على المستوى (ABC)
 لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من المستقيم (Δ)
 بما أن (Δ) مار من Ω و عمودي على (ABC)
 فإن المتجهتان $\overrightarrow{\Omega M}$ و $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ متجهتان مستقيمتان.
 يعني : $(\exists t \in \mathbb{R}) ; \overrightarrow{\Omega M} = t \vec{n}$

يعني : $(\Delta) : \begin{cases} x - 1 = 0t \\ y - 2 = 4t \\ z - 3 = 3t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

يعني : $(\Delta) : \begin{cases} x = 1 \\ y = 4t + 2 \\ z = 3t + 3 \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

و هذه النظمة الأخيرة عبارة عن تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ).

3 ب

لدينا : $(ABC) : 4y + 3z + 8 = 0$
 $(\Delta) : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 4t \\ z = 3t + 3 \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

نعلم أن $H(\alpha, \beta, \gamma)$ هي نقطة تماس الفلكة (S) و المستوى (ABC)
 إذن : $(\Omega H) \perp (ABC)$

و نعلم كذلك أن : (2) $(\Delta) \perp (ABC)$ و (3) $\Omega \in (\Delta)$

من (1) و (2) و (3) نستنتج أن : $(\Omega H) = (\Delta)$ يعني : $H \in (\Delta)$

و لتحديد إحداثيات النقطة H نطلق من النظمة التالية :
 $\begin{cases} H \in (\Delta) \\ H \in (ABC) \end{cases}$

و هذه النظمة تكافئ : $(t \in \mathbb{R})$
 $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 4t + 2 \\ \gamma = 3t + 3 \\ 4\beta + 3\gamma + 8 = 0 \end{cases}$

نعوض قيم α و β و γ في المعادلة الرابعة من النظمة نحصل على :

$$4(4t + 2) + 3(3t + 3) + 8 = 0$$

نحل هذه المعادلة البسيطة نحصل على : $t = -1$

نعوض t بالعدد -1 في المعادلات الثلاث الأولى نجد :

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 4(-1) + 2 = -2 \\ \gamma = 3(-1) + 3 = 0 \end{cases}$$

و بالتالي : $H(1; -2; 0)$ هي نقطة تقاطع (Δ) و المستوى (ABC).

3 ج

للتحقق من أن $H(1; -2; 0)$ هي نقطة تماس المستوى (ABC) و الفلكة (S) يكفي أن نتحقق من أن مثلث إحداثيات النقطة H يحقق كلا من معادلتى المستوى (ABC) و الفلكة (S).

لدينا : $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$
 $(ABC) : 4y + 3z + 8 = 0$

يكفي إذن أن نعوض x و y و z على التوالي بالأعداد 1 و -2 و 0 في معادلتى (ABC) و (S) و نرى هل تتحقق المتساويات.

$$1^2 + (-2)^2 + 0^2 - 2 \times 1 - 4(-2) - 6 \times 0 - 11 = 0$$

إذن : $H \in (S)$

$$4(-2) + 3(0) + 8 = -8 + 8 = 0$$

و لدينا كذلك : $H \in (ABC)$

و بالتالي : H هي نقطة تماس المستوى (ABC) و الفلكة (S).

التمرين الثاني:

1

لنحل في \mathbb{C} المعادلة : $z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$

$$\Delta = (-8\sqrt{3})^2 - 4 \times 64 = -64 = (8i)^2$$

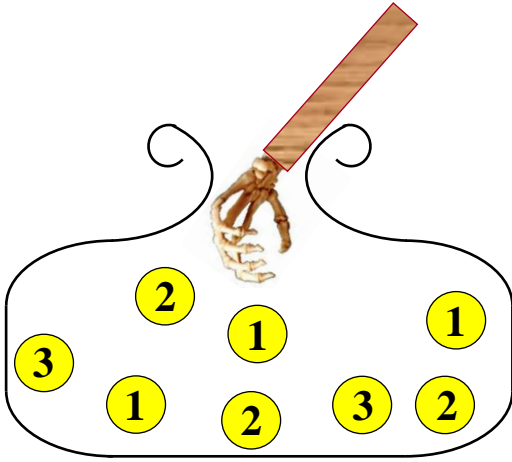
إذن : المعادلة تقبل الحلين العقديين z_1 و z_2 المعرفين بما يلي :

$$z_1 = \frac{8\sqrt{3} - 8i}{2} = 4\sqrt{3} - 4i \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{8\sqrt{3} + 8i}{2} = 4\sqrt{3} + 4i$$

$$\begin{cases} BA = BC \\ \widehat{ABC} = 60^\circ \end{cases} \text{ أو بتعبير آخر :}$$

و هذا يعني أن المثلث ABC متساوي الساقين رأسه B و قياس الزاوية \widehat{B} هو 60° .
و بالتالي : ABC مثلث متساوي الأضلاع .

التمرين الثالث :



عندما نسحب عشوائيا كرتين بالتتابع و بدون إحلال من صندوق يحتوي على 8 كرات فإنه توجد C_8^1 إمكانية لسحب الكرة الأولى و توجد C_7^1 إمكانية لسحب الكرة الثانية .

إذن هذه التجربة العشوائية تحتمل $C_8^1 \times C_7^1$ نتيجة ممكنة .

$$\text{يعني : } \text{card}(\Omega) = C_8^1 \times C_7^1 = 8 \times 7 = 56$$

بحيث : Ω هو كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية .

1

للحصول على كرتين تحملان معا العدد 2 لدينا :

C_3^1 إمكانية لسحب كرة أولى تحمل 2 في السحبة الأولى .

C_2^1 إمكانية لسحب كرة ثانية تحمل 2 في السحبة الثانية .

إذن احتمال الحصول على كرتين تحملان معا العدد 2 يساوي :

$$p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_3^1 \times C_2^1}{56} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$$

الحصول على كرتين إحداهما على الأقل تحمل 3 يمكن أن يتم عن طريق حالتين و هما :

الحالة الأولى : الحصول على الكرة الأولى تحمل 3 و الكرة الثانية تخالف 3

بـ $C_2^1 \times C_7^1$ إمكانية .

الحالة الثانية : الحصول على الكرة الأولى مخالفة لـ 3 و الكرة الثانية تحمل 3

بـ $C_6^1 \times C_2^1$ إمكانية .

إذن : احتمال الحصول على كرتين إحداهما على الأقل 3 يساوي :

$$p(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_2^1 \times C_7^1 + C_6^1 \times C_2^1}{56} = \frac{26}{56} = \frac{13}{28}$$

2

ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات التي تحمل عددا فرديا .

عندما نسحب كرتين بالتتابع و بدون إحلال من صندوق يحتوي على خمس كرات تحمل أعدادا فردية و 3 كرات تحمل أعدادا زوجية . فإنه يُحتمل أن نحصل على كرات كلها تحمل أعدادا فردية أو كرة واحدة تحمل عددا فرديا .

و يمكن ألا نحصل على أية كرة تحمل عددا فرديا .

2

$$\begin{cases} aff(A) = a = 8i \\ aff(B) = b = 4\sqrt{3} - 4i \\ aff(C) = c = 2(4\sqrt{3} + 4i) \\ aff(M) = z \\ aff(M') = z' \end{cases} \text{ لدينا :}$$

و لدينا الدوران \mathcal{R} معرف بما يلي : $\mathcal{R}_0\left(\frac{4\pi}{3}\right) : (P) \mapsto (P)$
 $M(z) \mapsto M'(z')$

إذن حسب التعريف العقدي للدوران \mathcal{R} : $(z' - 0) = e^{\frac{i4\pi}{3}}(z - 0)$

ننتقل من الكتابة : $\mathcal{R}(M) = M'$

$$z' = \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) z \text{ يعني :}$$

$$z' = \left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right) z \text{ يعني :}$$

$$z' = \left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) z \text{ يعني :}$$

$$z' = \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) z \text{ يعني :}$$

2

$$\begin{aligned} aff(A) \times \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= 8i \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -4i + 4\sqrt{3} = aff(B) \end{aligned} \text{ لدينا :}$$

حصلنا إذن على العلاقة التالية : $aff(A) = \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times aff(B)$

و هي نفسها الكتابة العقدية للدوران \mathcal{R}

و من تلك الكتابة نستنتج أن : $\mathcal{R}(A) = B$

2

$$\begin{aligned} \frac{a-b}{c-b} &= \frac{8i - (4\sqrt{3} - 4i)}{2(4\sqrt{3} + 4i) - (4\sqrt{3} - 4i)} \\ &= \frac{12i - 4\sqrt{3}}{4\sqrt{3} + 12i} = \frac{4\sqrt{3}(\sqrt{3}i - 1)}{4\sqrt{3}(1 + \sqrt{3}i)} \\ &= \frac{(\sqrt{3}i - 1)(\sqrt{3}i - 1)}{(1 + \sqrt{3}i)(\sqrt{3}i - 1)} = \frac{(\sqrt{3}i)^2 - 2(\sqrt{3}i) + 1^2}{(\sqrt{3}i)^2 - 1} \\ &= \frac{-2 - 2\sqrt{3}i}{-4} = \frac{-2}{-4} + \frac{-2\sqrt{3}i}{-4} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{\frac{i\pi}{3}} \end{aligned}$$

$$\frac{a-b}{c-b} = e^{\frac{i\pi}{3}} \text{ إذن :}$$

2

$$\begin{cases} \left|\frac{a-b}{c-b}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{a-b}{c-b}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases} \text{ حصلنا على : } \frac{a-b}{c-b} = e^{\frac{i\pi}{3}} \text{ يعني :}$$

$$\begin{cases} BA = BC \\ \left(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases} \text{ يعني : } \begin{cases} |a-b| = |c-b| \\ \left(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{3u_n}{21 + u_n} > 0$

أي : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} > 0$

يعني أن العبارة (P_{n+1}) عبارة صحيحة .

و بالتالي : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$



ليكن n عددا صحيحا طبيعيا .

لدينا : $u_n > 0$ إذن التعبير $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ مُعرَّف . (المقام يجب أن يخالف الصفر)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3u_n}{21 + u_n} \times \frac{1}{u_n} = \frac{3}{21 + u_n}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{21 + u_n}$$

نعلم أن : $u_n > 0$ إذن : $21 + u_n > 21$

$$\frac{3}{21 + u_n} < \frac{3}{21} \quad \text{يعني :} \quad \frac{1}{21 + u_n} < \frac{1}{21}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{7} \quad \text{يعني :} \quad \frac{3}{21 + u_n} < \frac{1}{7}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} < \frac{1}{7} u_n$$



نعلم أن : $\frac{1}{7} < 1$

نضرب هذه المتفاوتة في العدد الموجب قطعاً u_n نحصل على :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{1}{7} u_n < u_n \quad (1)$$

و نعلم كذلك حسب السؤال (2) أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} < \frac{1}{7} u_n$ (2)

إذن من النتيجتين (1) و (2) نجد ما يلي : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} < u_n$

و بالتالي : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية تناقصية .

و بما أنها مصغورة بالعدد 0 ($u_n > 0$) فإنها متقاربة .



من أجل $n = 0$. لدينا : $u_0 = 1 \leq \left(\frac{1}{7}\right)^0$

إذن العبارة صحيحة من أجل $n = 0$

نفترض أن $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$

لدينا حسب السؤال (2) : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} < \frac{1}{7} u_n$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} < \frac{1}{7} u_n \leq \frac{1}{7} \left(\frac{1}{7}\right)^n$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$

إذن العبارة صحيحة من أجل $(n + 1)$

و بالتالي : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$



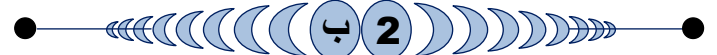
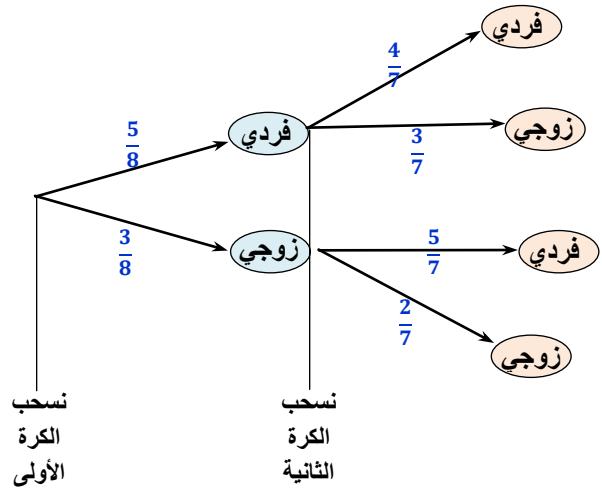
لدينا : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$

و بما أن : $\left(\frac{1}{7}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{7}$ و هو عدد موجب و أصغر من 1

إذن : القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي X هي : 0 أو 1 أو 2

أو بتعبير أجمل : $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$

للإجابة على الأسئلة الأخرى نستعين بشجرة الاحتمالات التالية و التي تَمَّ الحصول عليها انطلاقاً من التجربة العشوائية (السحب العشوائي بالتتابع و بدون إحلال)



$p[X = 1]$ هو احتمال الحصول بالضبط على كرة تحمل عددا فرديا .

إذن حسب شجرة الاحتمالات السابقة :

$$p[X = 1] = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{56} + \frac{15}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$$



نقصد بقانون احتمال المتغير العشوائي X التطبيق P_X التالي :

$$P_X : \{0; 1; 2\} \mapsto [0; 1]$$

لدينا حسب السؤال (1) : $p(A) = \frac{3}{28}$ إذن : $p[X = 0] = \frac{3}{28}$

$$p[X = 2] = 1 - p[X = 0] - p[X = 1] = 1 - \frac{3}{28} - \frac{15}{28} = \frac{5}{14}$$

و بالتالي : قانون احتمال المتغير العشوائي X هو التطبيق P_X المعروف

بما يلي : $P_X : \{0; 1; 2\} \mapsto [0; 1]$

$$0 \mapsto p[X = 0] = \frac{3}{28}$$

$$1 \mapsto p[X = 1] = \frac{15}{28}$$

$$2 \mapsto p[X = 2] = \frac{5}{14}$$

التمرين الرابع :



نبرهن على صحة العبارة (P_n) التالية : $(P_n) : (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$

لدينا : $u_0 = 1 > 0$ إذن العبارة (P_0) صحيحة .

نفترض أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$

إذن : u_n كمية موجبة قطعاً .

و منه فإن الكميتان $3u_n$ و $u_n + 21$ موجبتان قطعاً كذلك .

إذن الكمية $\frac{3u_n}{u_n + 21}$ موجبة قطعاً باعتبارها خارج كميتين موجبتين .

و لدينا : $g(1) > 0$. إذن : $\forall x \in]0; 1]$; $g(x) > 0$ (1)

الحالة الثانية : $x \in [1; +\infty[$ يعني : $x \geq 1$

إذن : $g(x) \geq g(1)$ (لأن g تزايدية على $[1; +\infty[$)

و لدينا : $g(1) > 0$. إذن : $\forall x \in [1; +\infty[$; $g(x) > 0$ (2)

من النتيجتين (1) و (2) نستنتج أن : $\forall x \in]0; +\infty[$; $g(x) > 0$.



ليكن x عنصرا من المجال $]0; +\infty[$.

لدينا : $f(x) = x - 1 + \frac{x - 1 + \ln x}{x^2}$

إذن : $f'(x) = 1 + \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right) - 2x(x - 1 + \ln x)}{x^4}$

$= 1 + \frac{x^2 + x - 2x^2 + 2x - 2x \ln x}{x^4}$

$= 1 + \frac{-x^2 + 3x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{x^3 - x - 2 \ln x + 3}{x^3}$

و بالتالي : $(\forall x > 0) ; f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

نعلم حسب السؤال (3 ب) : $g(x) > 0$; $(\forall x > 0)$

و لدينا : $x^3 > 0$; $(\forall x > 0)$

إذن : $\frac{g(x)}{x^3} > 0$; $(\forall x > 0)$

يعني : $f'(x) > 0$; $(\forall x > 0)$

و بالتالي : f دالة تزايدية قطعاً على المجال $]0; +\infty[$.



لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - 1 + \frac{x - 1 + \ln x}{x^2} \right)$

$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - 1 + \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) \right)$

$\begin{matrix} 0^+ & 0^+ & 0^+ \\ +\infty & +\infty & -\infty \end{matrix}$

$= 0 - 1 + (+\infty)(1 - \infty - \infty)$

$= -1 + (+\infty)(+\infty) = -1 - \infty = -\infty$

و بالتالي : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

و تأويل هذه النهاية هندسياً هو : " المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (محور الأرتايب) مقارب عمودي للمنحنى (ع) بجوار الصفر على اليمين



$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - 1 + \ln x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \right)$

$= 0(1 - 0 + 0) = 0$

فإن : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{7} \right)^n = 0$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{7} \right)^n$

$\begin{matrix} \nearrow n \rightarrow \infty \\ \searrow n \rightarrow \infty \end{matrix}$

و بالتالي : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية متقاربة و تؤول على الصفر . $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

التمرين الخامس :



ليكن x عنصراً من المجال $]0; +\infty[$. لدينا :

$(x - 1)(3x^2 + 3x + 2) = 3x^3 + 3x^2 + 2x - 3x^2 - 3x - 2$
 $= 3x^3 - x - 2$



ليكن x عنصراً من المجال $]0; +\infty[$.

لدينا : $g(x) = x^3 - x - 2 \ln x + 3$; إذن :

$g'(x) = 3x^2 - 1 - \frac{2}{x} = \frac{3x^3 - x - 2}{x} = \frac{(x - 1)(3x^2 + 3x + 2)}{x}$



ليكن x عنصراً من المجال $]0; +\infty[$. يعني : $x > 0$

إذن : $3x^2 + 3x + 2 > 0$ و $x > 0$

و منه : $\frac{3x^2 + 3x + 2}{x}$ موجبة قطعاً باعتبارها خارج كميّتين موجبتين قطعاً .

و بالتالي : $(\forall x > 0) ; \frac{3x^2 + 3x + 2}{x} > 0$



ليكن x عنصراً من المجال $]0; +\infty[$.

لدينا : $g'(x) = \frac{(x - 1)(3x^2 + 3x + 2)}{x}$

و لقد علمنا من قبل أن : $(\forall x > 0) ; \frac{3x^2 + 3x + 2}{x} > 0$

إذن : إشارة $g'(x)$ تتعلق فقط بإشارة $(x - 1)$ على المجال $]0; +\infty[$.



ليكن x عنصراً من المجال $]0; 1]$. إذن : $x \leq 1$

يعني : $(x - 1) \leq 0$ و منه : $g'(x) \leq 0$

يعني أن الدالة g تناقصية على المجال $]0; 1]$.

ليكن x عنصراً من المجال $[1; +\infty[$. إذن : $x \geq 1$

و منه : $(x - 1) \geq 0$ يعني : $g'(x) \geq 0$

يعني أن الدالة g تزايدية على المجال $[1; +\infty[$.



ليكن x عنصراً من المجال $]0; +\infty[$. نفصل بين حالتين :

الحالة الأولى : $x \in]0; 1]$ يعني : $x \leq 1$

إذن : $g(x) \geq g(1)$ (لأن g تناقصية على $]0; 1]$)

5 II

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = \int_1^e \underbrace{\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{u'} \times \underbrace{(\ln x)}_v dx = [uv]_1^e - \int_1^e uv dx$$

$$= \left[\frac{-\ln x}{x} \right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx = \frac{-1}{e} + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^e$$

$$= \frac{-1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}$$

5 II ب

لتكن \mathcal{A} مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى (\mathcal{C}) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = e$ و $x = 1$.
نقيس المساحة \mathcal{A} باستعمال التكامل التالي:

$$\mathcal{A} = \int_1^e |f(x) - (x+1)| dx = \int_1^e \left| \frac{x-1+\ln x}{x^2} \right| dx$$

ولدينا: $x \in [1, e]$ إذن: (1) $x > 1$ و منه: (2) $\ln x > 0$
نجمع المتفاوتتين (1) و (2) طرفا بطرف نجد: $x + \ln x > 1$

يعني: $\forall x \in [1, e]; x - 1 + \ln x > 0$

و منه: $\forall x \in [1, e]; \frac{x-1+\ln x}{x^2} > 0$

أي: $\forall x \in [1, e]; \left| \frac{x-1+\ln x}{x^2} \right| = \frac{x-1+\ln x}{x^2}$

و بالتالي بالرجوع إلى آخر تعبير للمساحة \mathcal{A} نجد:

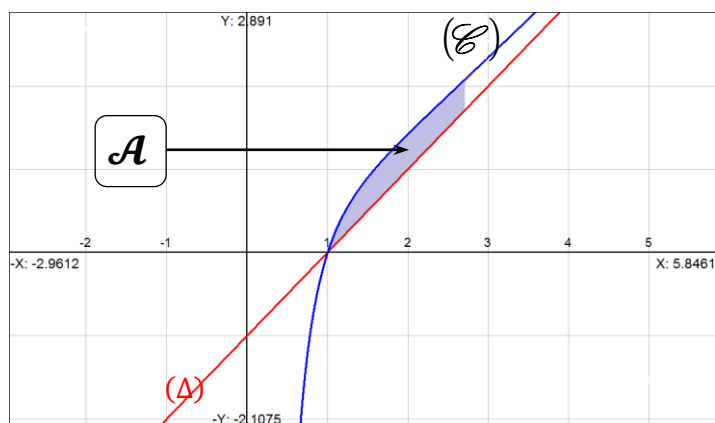
$$\mathcal{A} = \int_1^e \left| \frac{x-1+\ln x}{x^2} \right| dx = \int_1^e \left(\frac{x-1+\ln x}{x^2} \right) dx$$

$$= \int_1^e \frac{1}{x} dx - \int_1^e \frac{1}{x^2} dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$= [\ln x]_1^e - \left[\frac{-1}{x} \right]_1^e + \left(1 - \frac{2}{e} \right)$$

$$= 1 - \left(\frac{-1}{e} + 1 \right) + \left(1 - \frac{2}{e} \right) = \left(1 - \frac{2}{e} \right) \text{ unit}^2$$

$$= \left(1 - \frac{1}{e} \right) (1 \text{ cm})^2 = \left(1 - \frac{1}{e} \right) \text{ cm}^2$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 1 + \frac{x-1+\ln x}{x^2} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 1 + \frac{x-1+\ln x}{x^2} \right)$$

$$= (+\infty) + 0 = +\infty$$

إذن: (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2 II ج

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{x-1+\ln x}{x^3} \right)$$

$$= 1 - 0 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \right)$$

$$= 1 + 0(1 - 0 + 0) = 1$$

(2)

إذن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

و لدينا كذلك:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{x-1+\ln x}{x^2} \right)$$

$$= -1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1+\ln x}{x^2} \right)$$

$$= -1 + 0 = -1$$

(3)

إذن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = -1$

من النهايات (1) و (2) و (3) نستنتج أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (\mathcal{C}) بجوار $+\infty$.

3 II

معادلة المماس (T) للمنحنى (\mathcal{C}) في النقطة التي زوج إحداثياتها $(1, 0)$
تكتب على الشكل: $(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$
لدينا: $f'(1) = 3$ و $f(1) = 0$
إذن: $(T): y = 3(x-1)$

