یکان

۱۳

مجلهٔ ریاضیات

در این شماره:

سال یکم - شمارهٔ سیزدهم

اسفندماه ۱۳۴۳

بها: ۲۰ ریال

انجمن معلمان ریاضی

صفحهٔ ۴۳ مطالعه شود

مبانی ریاضیات جدید

موضوع سخنرانی استاد گرامی جناب آقای

دکتر محسن هشترودی

روزدوشنبه ۲۴ اسفندساعت۵بعدازظهردرتالار

دبیرستان رضاشاه کبیر (تالار فرهنگ)

انجمن معلمان ریاضی از همهٔ همکاران ارجمند تقاضای شرکت دارد ورود برای عموم آزاد است

یکان سال

برای اینکه مجموعهٔ حل مسائل نهایی با بهای مناسبتر بدست محصلین برسد ، یکان سال در دو جلد جداگانه منتشر میشود

جلداول : مجموعهٔ علمی شامل مقاله‌های جامعی در رشته‌های مختلف علوم وحل چندمسئلهٔ ممتاز ومعروف ریاضی

جلددوم: شامل حل مسائل امتحانات نهایی سال‌ششم ایران وکشورهای دیگر

هردوجلد بزودی منتشر میشود

قابل توجه مشترکین یکان

برای تجدید اشتراک وجه‌مربوط را به‌حساب جاری که در ستون پائین ذکر شده پرداخت و قبض آن را برای ادارهٔ مجله ارسال دارند . (نشانی: صندوق‌پستی ۲۴۶۳)

از تألیفات هوشنگ شریف‌زاده

پانصد مسألهٔ فیزیک

برای کلاسهای پنجم دبیرستان و داوطلبان کنکور دانشکده‌ها

بها: ۱۰۰ریال

۴۲۰ مسألهٔ فیزیک

برای کلاسهای چهارم دبیرستان و داوطلبان کنکور دانشکده‌ها

بها: ۶۰ ریال

راهنمای فیزیک

برای کلاسهای سوم دبیرستان

بها: ۳۰ریال

ناشر: بنگاه مطبوعاتی معراجی

تهران - خیابان ناصرخسرو

یکان

مجلهٔ ریاضیات

شمارهٔ سیزدهم ــ سال اول

اسفندماه ۱۳۴۳

صاحب‌امتیاز ومدیرمسئول : عبدالحسین مصحفی

زیر نظر شورای نویسندگان

هرماه یکبار منتشر میشود

جای‌ادارهٔ موقت ــ تهران‌خیابان‌سربازشماره ۳۵۳

نشانی پستی : صندوق پستی ۲۴۶۳

تلفن : ۷۵۸۵۷۰

اشتراك سالانه (۱۲شماره) ۲۰۰ ریال

تك‌شماره ۲۰ریال

حساب بانکی ــ حساب جاری ۶۸۶۳ شعبهٔ فردوسی بانك صادرات

مقاله‌های رسیده مسترد نمیشود

چاپ آذر

به مناسبت جشن ملی و باستانی نوروز ۱۳۴۴
بهترین تبریکات خود را به همهٔ خوانندگان عزیز
به ویژه دبیران گرامی و دانش آموزان عزیز
تقدیم می‌دارد .

شورای نویسندگان

کارنامهٔ یک سالهٔ یکان

با این شماره نخستین سال انتشار یکان پایان می‌یابد . کارنامه گذشتهٔ یکان دوازده مجلدی از آن است که تاکنون منتشر شده است . ارج و مقام روز افزون یکان مؤید راه وروش انتخابی و مبین گذشته‌ای افتخارآمیز می‌باشد . هرچند کارهایی که انجام گرفته همه به جای خود مفید ولازم بوده است اما برای نیل به هدفی که یکان به خاطر آن منتشر می‌شود بسیاری از امکانات فراهم نبوده است ؛ توجه کامل به خواست وعلاقهٔ خوانندگان ، وقوف به اینکه اطلاعات بسیاری از جوانان کشورما حتی دربارهٔ موادی از ریاضیات که در برنامهٔ آموزشی پیش بینی شده ناقص است ، علم به اینکه اکثریت محصلین ما ، چنانکه بارآمده‌اند ، هدف از تحصیلات را تنها گذراندن امتحان دانسته وعمدهٔ سعی آنان در به‌دست‌آوردن حدنصاب نمرهٔ قبولی است ، پرهیزازچاپ مطالب تکراری ومطالبی که به‌نحوی دراختیار اکثریت خوانندگان قرارداشته است وبسیاری از اموردیگرموجب بوده است که برنامهٔ گذشته کاریکان انعطاف پذیر و متغیر باشد .

کاریکان در یک‌سال گذشته بیشتر مصروف به‌تهیهٔ مقدمات شده است ، و فعلا ، با تجاربی که به دست‌آمده و باسنجش همه‌جانبهٔ افکار وخواستهای خوانندگان وبالاخره با برآورد میزان احتیاج محصلین ما به‌مباحث جدید ریاضی ودرجه بندی این مباحث ازلحاظ تقدم و تأخر به مقیاس الاهم فالاهم ، امکان آن فراهم آمده است که از این پس ، یکان ، آن‌طور که آرزوی مؤسس آن بوده وآن‌طور که سعی ناشر آن برآن است وهمان گونه که خواست‌خوانندگان آن می‌باشد، مفیدتر ومؤثرتراز گذشته‌و نزدیکتر به هدف مقدس خویش به‌طالبین علم عرضه شود

محققین و نویسندگانی که آثار و نوشته‌های ایشان زیب صفحات شماره‌های گذشتهٔ یکان بوده است همه به‌اندازهٔ کافی معروفیت داشته و شناخته شده می‌باشند. آنچه آنان را به همکاری همه جانبه و مؤثر و بدون توقع هیچ پاداش مادی با یکان واداشته است، درحقیقت، عشق و علاقهٔ وافر ایشان به پیشرفت علم و شوق کامل ایشان در بنای آیندهٔ علمی کشور می‌باشد. علاقمندی این شخصیتها به دانش بشری به‌سستی نمی‌گراید و کوشش بی شائبهٔ شورای نویسندگانی که رشد و تکامل یکان را همچون پرورش فرزندی شایسته، برعهده و تحت نظر دارد خستگی نمی‌پذیرد. از این جهت با اطمینان قطعی می‌توان امیدوار بود که، یکان آینده‌ای درخشانتر و تابناکتر از آنچه انتظار می‌رود در پیش دارد.

استاد گرامی جناب آقای **دکتر محسن هشترودی** که از انتشار یکان از هیچ نوع کمك مؤثر دریغ نورزیده و مخصوصاً مسائل ایشان تمام شماره‌های گذشتهٔ مجله را ممتاز ساخته است، آقای **جهانگیر شمس آوری** عضو مؤثر شورای نویسندگان که علاوه بر تهیه و تنظیم مقاله‌های مجله، با نوشتن سرمقاله‌های دلنشین زبان گویای همهٔ علاقمندان به بهبود آموزش ریاضیات در ایران بوده است. آقای **باقر امامی** که در هر شماره فصلی از تاریخ علوم ریاضی را باز گو نموده موجبات توسعهٔ اطلاعات علمی خوانندگان را فراهم آورده است. آقای **پرویز شهریاری** که در هر زمینه و در هر مبحثی هر شمارهٔ از مجله را غنی ساخته است آقای **مهدی مدغم** که با ترجمهٔ بهترین مقاله‌ها ارتباط دائمی مجله را با مجله‌های معروف دنیا بر قرار داشته است. و بالاخره جناب آقای **احمد بیرشك** و سایر فضلا و نویسندگانی که باهمهٔ گرفتاریهای روزمرهٔ زندگی از ابراز مساعدت در هر موردی کوتاهی نداشته‌اند. مسلماً از این بعدهم به همکاریهای ذیقیمت خود ادامه خواهند داد، زیرا قصد و نیت همهٔ آنان خدمت به عالم علم بوده و می‌باشد.

درزمینهٔ ارسال مسائل برای مجله کمك دوستداران بیش از حد انتظار بوده است و در این مورد چه بسیار مسائلی که از دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز رشتهٔ ریاضی واصل شده و مناسبتی برای ارائهٔ آن درمجله پیش نیامده است. ذکر نام همهٔ آنهایی که مسئله ارسال داشته‌اند ده‌ها صفحه از مجله را لازم دارد و در این میان دوست ناشناس آقای **مهندس عباس سعیدی** بیش از دیگران ابراز محبت داشته است. تشکر ما از همهٔ دوستداران آن خواهد بود که در پیشرفت و تکامل مجلهٔ محبوب ایشان بکوشیم.

یکان بر اساس علاقه و اعتقاد بنیان شده است و همچنانکه در گذشته در انتشار مرتب آن هیچ وقفه‌ای حاصل نشد از این به بعد نیز بدون هیچ تعطیل مرتباً به دست دوستداران خواهد رسید. نخستین شماره از دومین سال یکان درماه بعد تقدیم خوانندگان عزیز خواهد شد.

عبدالحسین مصحفی

مسائل افسانه‌ای

تضعیف مکعب — تثلیث زاویه — تربیع دایره

سیدمحمد کاظم نائینی

از قرن ششم‌وپنجم قبل ازمیلاد سه‌مسئلهٔ مهم ریاضی‌افکار ریاضیدانان‌جهان رابه خود مشغول داشته‌و مغزهای‌بزرگترین متفکران را در اعصار مختلف تاریخ برای حل‌خودبه‌مبارزات پردامنه دعوت‌کرده است ودرطی هزاران سال هرگونه تلاشی راکه برای حلشان مصروف می‌شده عقیم گذاشته است.

این‌سه مسئلهٔ مشهورومعظم که‌ریشهٔ تاریخی آنها به‌دوران افلاطون‌می‌رسد عبارتنداز :

تضعیف مکعب ، تثلیث‌زاویه ، تربیع‌دایره که شکل‌اصلی آنها درعبارت دیگرچنین است ؛ ساختن مکعبی که حجمش‌دو برابرحجم‌مکعب مفروض باشد؛ تقسیم زاویهٔ مفروضی به‌سه‌قسمت متساوی؛ ساختن مربعی‌هم سطح‌دایره‌ای مفروض .

مراحل مختلفی راکه ریاضیات درسیر تاریخی خود از دورانهای باشکوه وافسانه‌ای یونان قدیم تاکمی قبل ازدوران عصرحاضر گذرانده است به‌خوبی درچگونگی حل‌این‌سه‌مسئله کهن‌سال منعکس است. به‌عقیدهٔ بسیاری از دانشمندان ریاضی‌و مورخان وعلمای متدلژی عامل‌اصلی سیرتطور وتحول‌ریاضیات و پیشرفت تدریجی آن دراعصار مختلف زمان همین سه مسئله می‌باشد. هرگونه کشف واختراعی درزمینه‌های مختلف ریاضی صورت گرفته صرفاً دراثر تـلاش فکری و مبارزات دامنه‌دار اندیشهٔ انسانی به‌منظورحل‌آنها بوده‌است. بسیاری ازدانشمندان معروف جهان شهرت بین‌المللی خویش را درسایهٔ حل‌آنها به دست‌آورده‌اند . تقریباً تمام هندسهٔ یونانی در اطراف این سه مسئله‌رشدکرده است وآنها ضمن‌تلاش وکوشش خودبرای حل آنها بسیاری از مکانهای هندسی ونظریه‌های مختلف مربوط به معادلات درجهٔ سوم و درجهٔ چهارم و مقاطع مخروطی و تعداد بسیاری از منحنیها بادرجات بالاتر راکشف‌کردند.

ریشهٔ کلیه نظریه‌های مختلف مربوط بـه‌معادلات متعالی وهمچنین اعداد غیرجبری(ترانساندان) وهمچنین‌هندسهٔ‌تحلیلی دکارت درهمین مسائل مشهور است.

محتملا دانشمندان قدیم چون یونیان گمان نمی‌کردند که راه حلهایی راکه آنها به‌دنبالشان می‌گشتند وجود ندارد. دشواری وحل‌ناپذیری‌این مسائل آتش اشتیاق آنها را شعله‌ور می‌ساخت وهرچه‌قدر مسئله‌ای مشکلتر وبغرنجتر جلوه می‌نمود حرص ولعشان را بیشترکرده وآنـان را در رسیدن بـه‌نتیجه راغبتر می‌ساخت ومغزهای بزرگی‌چون فیثاغورث و افلاطون‌و وآپولونیوس ، بقراط وارشمیدس را به‌عرصهٔ هندسه می‌کشاند.

سرتاسر تـاریخ علم حکایت از کوششهای طاقت‌فرسای دانشمندان ریاضی درحل این‌سه مسئله افسانه‌ای است وماضمن بررسی‌مختصری ازاین‌کوششهای تاریخی‌چگونگی حل‌ناپذیری این مسائل وفوایدی راکه ضمن حل‌آنها درزمینه‌های مختلف ریاضی عاید شده است مورد بررسی قرار می‌دهیم.

دو مسئله اول از نظرجبری هم‌ارز معادلات درجهٔ سوم زیرند :

$$x^{۳}=۲$$

و

$$۴x^{۳}-۳x-a=۰$$

(a یك‌کسرحقیقی است) معادلهٔ اول صورت ساده‌ای از معادلهٔ $x^{۳}=۲a^{۳}$ و معادله دوم صورت دیگری از رابطهٔ زیراست :

$$۴\cos^{۳}\frac{x}{۳}+۳\cos\frac{x}{۳}=x\cos$$

مسئلهٔ تربیع دایره تحت فرمول جبری در نمی آید. کوششهایی که برای حل این مسئله به‌عمل آمده کلیهٔ کتب ریاضی وسالنامه‌ها را از زمان فیثاغورث تا به‌امروز پر کرده است .

در مورد مسئلهٔ اول دو افسانه موجود است که آنها را **اراتوستن** Eratosthenes (صاحب غربال معروف برای اعداد اول) نقل کرده است:

مردم آتن درزمان افلاطون دوچارطاعونی شدند که‌اطباء از پیشگیری وعلاج آن‌عاجز ماندند ناچار به کاهن‌معبد **دلوس** پناه بردند . وی از خدایان استمداد جست. ندایی ازغیب‌آمد که تنها راه‌علاج طاعون تضعیف میز **آپولون** است (مذبحی که به‌شکل مکعب بود) به‌شرط آنکه شکلش تغییرنکند. این مسئله که به‌مسئلهٔ دلوسی معروف است هرچند در صورت ظاهر ساده است ولی مردم ازحل آن عاجز ماندند . مادامی که راه‌حلی برای آن پیدا نشود طاعون بامردم ستهزه خواهدکرد .

افسانه دوم این است که مسئلهٔ تضعیف مکعب به‌وسیلهٔ Minos پادشاه کرت‌مطرح‌شده است ، زیرا برای نخستین‌بار او بودکه دستورداد برای دوپسرش دوقبر به‌شکل مکعب بسازند که حجم یکی‌دوبرابر حجم دیگری باشد، چه‌سن پسربزرگتر دوبرابر سن پسر کوچکتر بوده‌است .

ساختگی بودن این افسانه‌ها ونظایر بیشمارآن به‌خوبی ازشکل ظاهری آنها پیداست واین‌خود دشواری وعظمت واهمیت این مسائل را می‌رساند. به‌جای بیان این‌افسانه‌ها بهترآن است که‌بگوییم ریاضیدانی‌ضمن تعمیم دادن مسئله‌ای ازهندسه‌مسطحه به‌این نکته رسیده بودکه برای ساختن مربعی که مساحتش دو برابر مساحت مربع‌مفروض باشد، لازم است‌مربعی به‌قطرمربع مفروض بسازیم .

وبعد ذهنش‌متوجه‌مکعب شده خواسته است ببیندکه‌چگونه می‌توان باخط‌کش یااحتمالا پرگار مکعبی ساخت که حجمش دوبرابر حجم‌مکعب مفروض باشد.ودراین‌جاست که تلاش‌برای پیداکردن راه ساده وراه‌حل مشابه بامسئله مربع آغاز شده و افکارواندیشه بشری به‌بازی‌گرفته شده است.

قبل‌ازتوضیح‌بیشتر درماهیت‌مسائل و چگونگی کوششهای دوهزارساله و افسانه‌ای دانشمندان، بهتراست نخست مختصری درعلل لاینحلی این مسائل سخن‌گفته شود.

مشکلات موجود در مسائلی نظیرمسائل سه‌گانه فوق و مسائل دیگرکه از زمانهای قدیم به جای‌مانده مربوط به‌ذات خود مسائل‌نیستند بلکه این اشکالات در تعاریف وحدود میدان عملیات وحوزهٔ اصول‌وقرار دادهااست. نهی کلاسیکی که‌استفاده ازهروسیلهٔ دیگری جزخط کش وپرگار را برای حل‌مسائل‌فوق ممنوع می‌سازد داغ‌غیرممکن رابرپیشانی حل‌آنها می‌زند. آیا وقتی که‌ما کلمهٔ غیرممکن رادر موردحل‌این مسائل بیان‌می کنیم به‌همان‌مفهومی است که‌هرانسان‌تن‌پروری برای گریزازاندیشه‌ای یا انجام عملی شاق بابیان آن خودرا آزاد می‌سازد؟ یااینکه معادل بامحدودیتی است که برای یك میدان به‌وجودآمده‌است. محدودیتهای قدیمی ، دراثر کثرت استعمال ، آنقدرجنبهٔ‌طبیعی به‌خودگرفته وبه‌انسان تحمیل شده‌اند که‌فکرواندیشهٔ او را به خطامی کشانندواوراحتی‌ازاشاره‌به‌آن‌هم بازمی‌دارد . مثلاوقتی که یونانیان از ساختمان هندسی صحبت می کردند، مقصودشان ساختمانی بودکه فقط باخط‌کش وپرگار بنامی‌شود ،زیرا اینها ابزار خدایان بودند وکسی حق‌تخطی ازآنها را نداشت‌وبه‌کار بردن وسیله‌ای دیگر ارزش آن‌را نداشت که‌فیلسوف فکرخود رامصروف آن‌دارد. اندیشهٔ‌دانشمندان فقط دراطراف‌کار باهمین دووسیله دورمی‌زد .

مسائلی که فقط به وسیلهٔ خط‌کش حل می‌شوند از نظر هندسه به‌مسائل خطی موسومند واز نظرجبری به‌معادلات درجه اول‌خطی منجر می‌شوند.مسائلی‌که برای ساختمان آنهاپرگار نیزضروری باشد، ازنظر جبری‌هم‌ارز معادلات درجهٔ دومند.

اگر مسئله‌ای حلش به‌وسیله‌ای جزخط‌کش و پرگارنیاز داشت ، دارای حدی بالاتر ازتفکر یك‌دانشمند می‌بود ، زیرا دراین‌صورت درجهٔ مسئله بالاتر از درجه۲ است. بدیهی است هرگونه کوشش برای‌حل این قبیل‌مسائل باابزار ناقص‌بیهوده است ودرحدود خط‌کش وپرگار عمل غیرممکن است.

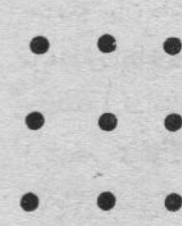
معادلات از درجات بالاتر (بالاتر ازدو) اگر به وسیلهٔ دستکاری قابل تحویل به‌معادلات‌درجهٔ یك یادرجهٔ دوم باشند حلشان و ساختمان نظیرهندسی آنها‌به‌وسیلهٔ خط‌کش و پرگار میسراست.ولی‌اشکال اساسی معادلات درجهٔ سومی که‌ازتضعیف مکعب و تثلیث زاویه به‌دست می‌آیند آن است‌که این معادلات تحویل‌پذیر نیستند (به‌مقالهٔ تثلیث زاویه درهمین شماره رجوع کنید.) پس به‌وسیلهٔ خط‌کش وپرگار حل‌آنها ممکن‌نیست.ولی تاسه‌قرن قبل ازما این‌حقایق معلوم نبود ودرحدود دوهزارسال این‌سه‌مسئله به‌وسیلهٔ‌مغزهای متفکر ریاضیدانان موردحمله قرار گرفته بود وتا به‌امروز هم‌حتی اشخاصی حرفه‌ای هستند که هنوزنمی‌دانندکه‌درحدود دوقرن‌است که‌این‌مسائل‌ازنظرریاضیات حل‌شده وبه‌دوران اقتدار آنها خاتمه داده‌شده است.

اصولا اصطلاحات ممکن وغیرممکن وبی‌معنی آن‌طور که درهندسه وسایر قسمتهای مختلف ریاضی به‌کار برده شده‌اند دارای معانی مطلق نیستند ودرهرمورد باید همراه این کلمات حوزهٔ مفروضات وحدود معلومات ونوع ابزار وادوات که‌برای

اثبات یا یك ساختمان هندسی ضروری است قیدشود. غیرممکن بودن تقریباً همیشه نتیجهٔ محدودیتی است که‌جزء مفروضات بیان می‌شود، امابعضی از این محدودیتها چنان مأنوس انسان شده وبه‌وسیله‌سنتها تضمین‌گردیده است که همگان آنها راوحی‌منزل دانسته وعدول از آنها را خطایی‌بزرگ تصور می کنند . اگر محدودیتها را کنـار بگذاریم ، غیرممکن، ممکن می‌شود . در مورد این سه‌مسئله نیز امر بدین‌منوال است.

همواره اعمالی‌که درریاضیات صورت می گیرد یامسائلی که در مباحث مختلف طرح می‌شود ، عموماً تحت شرایط‌خاص واصول‌قراردادی‌وحوزه‌های‌مفروض ومحدودی هستندکه بن‌بست استدلال وامکاناتندولی‌هرآن‌باتغییراصل ومبنا وتوسعهٔ‌معلومات وگسترش حوزهٔ مفروضات می‌توان امکانات را تاحد دلخواه افزایش داد ومراتب را به‌نحوی دیگر مورد بررسی قرارداد. همیشه تغییر اصل‌وقرارداد و توسعهٔ حدومرز مفروضات به‌وسیلهٔ افراد مبتکر وباجرئت وتا اندازه‌ای جسور صورت می گیرد . ریاضیدانان عادی واسیر قیدوبند ومحدودات ، اغلب برپیشانی بسیاری از امور داغ‌غیرممکن را می‌کوبند .

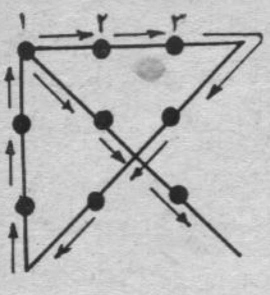
به‌عنوان مثال وروشن شدن موضوع به‌ذکر دومسئله‌ساده که‌معمولا درمجلات به‌عنوان معماذکرمی‌شود می‌پردازیم: ۹نقطه درسه سطر وبه‌ستون به‌شکل مربع قرار دارند (شکل۱)باچهار خط‌متقاطع این۹نقطه را به‌هم‌وصل کنید به‌شرط‌آنکه قلم ازروی کاغذ برداشته نشود ورسم هرخط تکرار نشود : غیراز سه‌فرض چهار خط ، برنداشتن‌قلم، وعدم تکرارخطوط، چهارچوب شکل ظاهری مسئله نیز درحل آن‌اشکال ایجاد کرده استو



ش ۱

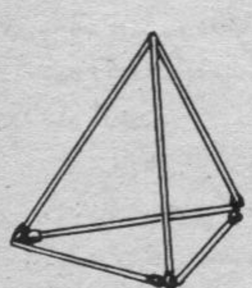
مشکل اصلی‌برای حل مسئله همین‌است. بدیهی است مادامی‌که درچهارچوب این مربع محصور شده‌ایم و افکارمان از حدود آن تجاوزنکند مفروضات مذکور برای‌حل‌مسئله کفایت‌نمی‌کند وحل آن‌غیرممکن‌است‌ولی‌اگرکسی‌جرئت کندوازچهارچوب‌شکل مسئله یعنی ازحدود مربع تجاوز نماید مسئله را به‌سهولت حل می‌کند .

ازنقطه ۱ شروع کنید (شکل۲) به‌سمت نقطه ۳ و ازآن خارج شده در جهت فلش زاویه‌ای بسازید . باچهار خط طبق مفروضات نه‌نقطه به‌هم وصل‌می‌شود. مسئلهٔ‌دیگر مشهورتراست. با۶ عدد چوب کبریت چهـار مثلث متساوی الاضلاع بسازید : ۶ چوب‌کبریت را در صفحه میز بریزید وکوشش‌کنید تامسئله را حل کنید . حل مسئله در صفحه امکان ندارد . مادامی که افکار شما درصفحه‌اسیر قید محیط‌دوبعدی است حل مسئله‌غیر ممکن است‌ولی به‌محض آنکه افکار خودرا ازصفحه خارج کـرده وارد فضای سه‌بعدی کنید مسئله بـه‌سهولت حل می‌شود یعنی می‌توان باساختن هرم مثلث‌القاعده (چهار وجهی منتظم) مسئله راحل‌کرد (شکل۳) .



ش ۲

کلیهٔ کشفیات و اختراعات در اثر همین جهش وخروج ازحوزهٔ مفروضات است، اگرحوزهٔ عملیات را محدود به‌اعداد صحیح کنیم، مسلماً‌وجود عبارت $\frac{a}{b}$ چنانچه a مضرب b نباشد ، غیر ممکن است . برای یك میدان محدود به مجموعهٔ معینی از اعداد مثلا اعداد از ۱ تا ۱۰۰ اعمال ۵۲+۶۸ و ۷×۴۳ غیر ممکن است. اگرحوزهٔ عملیات‌فقط‌محدود بـه اعداد مثبت باشد ، هرگاه b بزرگتر از a بـاشد، $a-b$ غیر ممکن است واگر حوزه مفروضات محدود باعداد منطق باشد ، اگرa توان nام عددی نباشد $\sqrt[n]{a}$ غیرممکن‌است.درحوزهٔ مفروضات واصول هندسهٔ اقلیدسی اگـر طی یك سلسله استدلال و براهین منطقی تضاد حکمی را بااصل معروف (از یك نقطه خارج یك خط بیش ازیك خط به‌موازات آن نمی‌توان رسم کـرد) (یا دو خط بیش ازیك نقطه تلاقی ندارند) ظاهرسازیم حکم غیرممکن تلقی خواهد شد . اگر میدان عمل محدود به اعدادفرد باشد، عمل‌ضرب امکان دارد ولی در این میدان عمل‌جمع‌تقریباً غیر ممکن‌است، چه مجموع‌دوعدد فرد فردنیست. اگرمیدان‌محدود به‌اعداد اول باشد،ضرب غیرممکن وعمل‌جمع جزدرحالات‌خیلی نادر ممکن نخواهد بود . و بالاخره اگر حوزهٔ عملیات فقط محدود به کارکردن با ابزاری چون خط‌کش وپرگار باشد ، تضعیف‌مکعب ، تثلیث‌زاویه ، تربیع دایره غیر ممکن است.



ش ۳

اگربخواهیم‌کلیهٔ عملیات را به‌طور همه‌جانبه‌ممکن‌سازیم باید هرگونه محدودیتی راکناربگذاریم و حوزهٔ مفروضات و معلومات خودرا گسترش دهیم.

پس ممکن بودن وغیر ممکن بودن ، بی معنی بودن و با معنی بودن‌هر یك‌دارای مفهوم نسبیند وهیچ یك ازآنها خاصیت ذاتی‌عمل نیستند بلکه ناشی از محدودیتی هستندکه انسان خود واردعملیات می کند. اگرسد شکسته شود و میدان عمل گسترش یابد غیرممکن پس می‌رود ودنیایی دیگر ظاهرمی گردد وتمام اعمال ممکن و ساختمانهای مختلف هندسی به‌صورت همه جانبه ممکن می‌شود .

چنانکه گفتیم مسئلهٔ تربیع دایره با دو مسئلهٔ دیگر این فرق رادارد که‌تحت فرمول‌جبری در نمی‌آید. ارشمیدس نخستین کسی بودکه متوجه‌شدکه‌اشکالی که هست در تعریف است‌وچنین بیان‌داشت که‌این‌مسئله هم‌ارزتعیین‌عدد π است، زیراسطح‌دایره‌ای به‌شعاع واحد برابر πواحدمربع‌است‌واگر عددπ بتواند به‌شکلی دیگر بیان‌شود مسئلهٔ ساختن مربع معادل‌سطح دایره حل می - شود .روش ارشمیدس درحل‌این مسئله این‌بود که‌فرض کردمحیط دایره بین‌دودسته‌کثیر الاضلاع منتظم قرارگرفته است که‌دسته‌ای محاط دردایره ودستهٔ‌دیگرمحیط بردایره‌اند اوکار را با ۶ضلعی شروع کرد وبادوبرابر کردن اضلاع آن به‌کثیرالاضلاعهای ۹۶ ضلعی رسید .

ماوقتی‌که ازسطح کثیرالاضلاع‌صحبت می کنیم‌عبارت خود را بادقت بیان‌می‌کنیم اما وقتی‌که ازسطح محصوردریك منحنی صحبت می‌کنیم مقصود چیست ؟ گرچه می‌توان خطوط کثیر- الاضلاعها را براین سطح محیط ویا درآن محاط کرد واز حد بالا ویا ازحدپائین چنین سطحی گفتگو نمود ، اما خود اندازهٔ سطح را جزبادرنظرگرفتن تعریف ومفهوم بینهایت وحدتعریف کرد . ارشمیدس می‌دانست که‌اگر طول محیط‌کثیر الاضلاعهای محاطی‌وطول‌محیط‌کثیرالاضلاعهای‌محیطی‌هر یك‌رشته‌ای به‌وجود آورند وهرگاه عمل تا بینهایت ادامه یابد ، این دو رشته حد مشترکی دارندکه همان‌محیط دایره است .

برروی این مسئله بود که ارشمیدس توانائی روش افناء Exhaustion راآزمایش‌کرد وبـاتیزهوشی خود عدπ را حدمشترك‌دورشتهٔ متشکل‌ازمحیط کثیرالاضلاعهای‌محیطی‌ومحاطی بردایره‌ای به شعاع ۱، بین $3\frac{1}{7}$ و $3\frac{10}{71}$ تخمین زد .

وضع نظریهٔ افناء برجسته ترین‌کاریاضی ادو کسوس است که درحقیقت نخستین کار درحساب مقادیر بینهایت کوچك infintesimal است و مبنای عمل وی برروی مفهوم دقیق حدقرارداشته است به این‌ترتیب باید ادوکسوس (۴۰۸ یا۳۵۵ ق م) را یکی ازبانیان دورهٔ حساب انتگـرال و دیفرانسیل دانست .انتگرال گیری ازسطوح‌ساده درزمان‌وی صورت‌گرفته است . **انتیفون Antiphon** معاصر سقراط ، برای حل مسئلهٔ تربیع دایره بااتکابه نظریهٔافناراهی‌مشابه‌باروش ارشمیدس ارائه‌داده‌است .نوع‌استدلال اوچنین است: کثیرالاضلاع منتظمی را، مثلا مربع ، دردایرهٔمفروض‌محاط‌می کنیم پس ازآن‌برروی هرضلع‌آن‌مثلث‌متساوی‌الاضلاعی‌می‌سازیم که‌رأس‌آن‌بر روی‌دایره باشد . بدین‌ترتیب ۸ضلعی منتظمی‌بدست می‌آوریم‌چون‌به‌همین ترتیب‌پیش‌رویم کثیرالاضلاعهای منتظم ۱۶و۳۲و۶۴ضلعی حاصل می‌شود وبدین‌ترتیب‌شیرهٔ سطح‌دایره کشیده می‌شود (افنا) . در حقیقت چنان است که دایره راتربیع‌کرده باشیم . سطح‌کثیر- الاضلاعهارفته‌رفته بزرگ می‌شوند ولی‌نمی‌توانندازحدمعینی‌که سطح دایره است‌بزرگتر شوند . این‌روش را ارسطو و مفسران او بدین قرار مورد انتقاد قرار دادنـد کـه هراندازه هم عدهٔ اضلاع زیاد شود باز هم سطح‌کثیرالاضلاع مساوی سطح دایره نخواهدبود **بریسون Bryson** شاگـرد سقراط درنیمهٔ اول قرن چهارم کارهای انتیفون را تکمیل کـرد. بدین ترتیب کـه کثیرالاضلاعهای محیطی بردایره‌ای رسم کردکه انتیفون درآن کثیرالاضلاعهای‌محاطی‌رسم کرده‌بود. پیدااست‌که اختلاف سطح این‌کثیرالاضلاعهاهرچه‌شمارهٔ‌اضلاع زیادشودروبه‌نقصان می‌رود وسطح‌دایره‌حدبالای‌کثیرالاضلاعهای محاطی وحد پایین کیثر - الاضلاعهای محیطی است .

روش بروسون نیز مانند روش انتیفون مورد انتقادارسطو و دیگران قرار گرفت و خالی از نقص هـم نبوده است ، ولی چنانکه بیان داشتیم همین روش‌که‌مبتنی بر اشراق است پایه و مایه‌روش افناءوشیره‌کشی یا طریقهٔ حدی و همچنین ریشهٔ‌حساب جـامعه و فـاضله بـود . و همین روش بـود کـه مورد استفاده ارشمیدس قرارگرفت ومذکور افتاد واو عدد π را بین۳٫۱۴۲ و۳٫۱۴۱معین کرد. در طول هزاروهشتصد سال بعد ازارشمیدس مسئلهٔ تربیع دایره پیشرفت زیادی نکرد وراه حلهای عجیب و غریبی نیز توسط مربع سازان منتشر شد و اندازه‌های تقریبی فراوانی برای‌عدد π پیداکردندکه ازهمه جالبتر $\sqrt{10}$ است. این مقدار در قرون‌وسطی بسیار مـورد استفاده قـرارگرفت و برای‌تکمیل کارارشمیدس و اصلاح مقادیر تقریبی وی برای‌عدد π نیز اقدامات زیادی‌به عمل‌آمدواز آن میان کثیرالاضلاعهای محیطی و محاطی ۳۹۳۲۱۶ ضلعی ویت Viète ریاضیدان و دانشمند فرانسوی‌برای به‌دست‌آوردن عدد π باده‌رقم اعشارقابل توجه است .

تاریخچهٔ تعیین عدد π با تـاریخچهٔ مسئلهٔ تربیع دایره یکی‌است وحتی دریونان‌این مسئله نیز به صورت مسائل‌افسانه‌ای جزء تاریخ ریاضیات به ثبت رسید .

یهودیان قدیم نسبت محیط دایره به قطرآن‌را برابـر ۳

می‌دانستند . مصریها اندازهٔ نزدیکتری به مقدار واقعی داشتند. در **پاپیروس ریند** ، ۱۷۰۰ قبل از میلاد ، این مقدار را برابر $3\frac{13}{81}$ یا $\frac{256}{81}$ ذکر کرده‌اند .

استادغیاث‌الدین جمشیدکاشانی مخترع کسرهای اعشاری مقداری π ومضارب آن را در اعداد از یك تانه درجدولی ثبت کرده است واین مهمترین کاراستاد است که عدد πرا به‌صورت ۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲ = π دررسالهٔ محیطیه‌ذکر کرده است . عدد π تا ۱۶ رقم اعشار متعلق به استاد تا چند قرن مورد استفاده قرارگرفت وبی‌رقیب ماند .درسال ۱۸۷۳ یکنفر انگلیسی به‌نام **ویلیام شانکر William Shanker** عددπ را تا۷۰۷رقم اعشارحساب کردومقدار اخیر را درغرفهٔ‌ریاضیات قصراکتشافات درپاریس دورتادور طالاری نوشته‌اند

در سال ۱۹۵۲ به‌کمك ماشینهای محاسبهٔ‌الکترونیکی عدد π را تا ۳۰۰۰ رقم اعشار حساب کردند ودرنتیجهٔ این محاسبه معلوم شدکه قسمتی ازارقام ویلیام شانکر غلط است ولی هنوز (سال ۱۹۶۵) در قصر اکتشافات پاریس این ارقام را تصحیح نکرده‌اند .

لازم به ذکر نیست که این اندازهٔ تقریب برای عددπ هیچگونه فایدهٔ عملی ندارد ولی این اعمال صرفاً به‌منظوررسیدن به‌مقدار واقعی عدد π وتربیع‌دایره بوده است .

اخترشناس آمریکائی **سیمون نیوکومب** می‌گوید ، ده‌رقم اعشار برای عددπکافی است که‌محیط زمین راتا یك اینچ تقریب حساب کنیم و۳۰رقم‌اعشار،محیط‌تمام عالم‌قابل رویت را باتقریبی که‌برای‌نیرومندترین میکرسکپها هم غیرتشخیص‌است تعیین‌می‌کند .

عددπبا ۱۶ رقم اعشار به‌خوبی برای تعیین‌محیط‌دایره‌ای که‌شعاعش مساوی‌بافاصلهٔ زمین‌از خورشید باشد با خطائی کمتر ازقطر یك‌مو کفایت‌می‌کندوبا۴رقم اعشارمی‌توان تمام محاسباتی که عملاموردنیاز است بادقت‌کافی انجام دادحتی‌برای تهیهٔ‌نقشهٔ بهترین هواپیماها همین قدر کفایت‌می‌کند .

از لحاظ‌نظری ممکن‌است تصریح کرد که‌این‌کوششهای طاقت‌فرسا برای‌تعیین‌عدد π نشانه‌ای ازدقت‌روشهای ریاضی‌جدید است ، وبرای‌اندك‌امیدی است که‌شاید دراعشارهای‌پشت‌سرهم‌عدد پی نوعی ازنظم وقاعده‌کشف شود و بدان وسیله‌بتوان‌ماهیت عدد π را روشن‌کرد .

دراواخرقرن هیجدهم مسئلهٔ تربیع دایره واردمرحله‌ای کاملاجدید می‌شود. **لامبر**(Lambert) نشان دادکهπ عددی گویا نیست و**لاگرانژ** ثابت کردکه این عدد نمی‌تواند ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ دوم باضرایب گویا باشد .

درسال ۱۸۴۴ ریاضیدان فرانسوی **ژاك لیوویل** (Jacques Liouville) استاد دانشسرایعالی و پایه‌گذار مجلهٔ‌ریاضیات درمقابل آکادمی علوم گزارشی قرائت‌کرددرمورد طبقهٔ بسیاروسیع مقادیری‌که نه‌جبریند ونه‌قابل‌تبدیل به‌اعداد گنگ می‌باشند ، وبدین‌وسیله مقادیری‌راکه ازنظرماهیت خود نمی‌توانند ریشه‌های هیچیك ازمعادلات جبری باشندارائه داد ؛ ۵۰سال بعد **ژرژ کانتور** (George Cantor) دربرهان جدید برای قضیهٔ لیوویل تئوری اعداد غیر جبری به نام **ترانساندان** را برپایهٔ محکمی‌وضع نمود ونشان داد که وسعت میدان این‌اعداد خیلی بیشتر از اعدادجبری است نه‌تنها عدد π و e (پایه‌لگاریتم طبیعی) بلکه اغلب مقادیرلگاریتمها و نسبتهای مثلثاتی ترانساندانند .

بسط عدد π به‌شکل‌کسر مسلسل توسط لامبر در ۱۷۶۱ کشف شدو دارای اهمیت تاریخی است :

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{3+\cfrac{7^2}{2+\cfrac{9^2}{2+\cdots\cdots}}}}}$$

عدم تناوب دراین‌کسر به‌طور قطع نشان می‌دهدکه عدد π ریشهٔ‌معادلهٔ درجهٔ دوم با ضرائب گویا نیست راین امرخود دال برآن است‌که تربیع دایره تنها به وسیلهٔ خط‌کش وپرکار امکان ندارد وحل این‌مسئله با پشت‌سرهم نوشتن اعشارهای عدد πازنظر هندسی‌ممکن نیست‌این‌مطلب به‌طورقطع به‌مسئلهٔ‌تربیع‌دایره خاتمه‌دادولی‌اشتیاق‌سازندگان مربع‌معادل دایره‌را خاموش‌نکرد وهنوزهم به نظر عده‌ای می‌آیدممکن است عددی جبری باشد. اگرمی‌توانستند این امرراثابت‌کنند ، به‌مربع درآوردن‌دایره که به‌طور رسمی باخط‌کش وپرگار ممکن نبود ،لااقل باابزار وآلات‌دیگری‌امکان‌پذیرمی‌شدو اگرچه‌این‌کارارزش‌عملی‌نداشت لااقل‌نقطهٔ اوجی برای‌کوششهای بیهودهٔ دو هزارساله می‌بود.

به‌هرحال جستجوکنندگان نادان هر سال درصددکشف راه‌حلهای جدید بودند وبرای جلوگیری از این‌سیل همکاری مزاحم بودکه خیلی قبل از **لیندمان** که عدم امکان‌حل مسئلهٔ تربیع دایره را ثابت‌کرد، درسال ۱۷۷۵ آکادمی علوم فرانسه تصمیم گرفت‌که ازآن پس هرگونه‌اکتشافی‌راکه راجع به‌تربیع دایره و دومسئلهٔ دیگر به‌آکادمی‌داده شود قبول‌نکند- این‌اقدام بسیار باجرئت وجسارت همراه بودچه عدم امکان تربیع دایره درسال ۱۸۸۲ ثابت‌گردید وهنگامی‌که بالاخره درسال۱۸۷۳ ریاضی‌دان‌فرانسوی **شارل‌هرمیت** (Charles Hermit) ثابت‌کردکه عدد e ترانساندان است تا اندازهٔ قابل ملاحظه‌ای

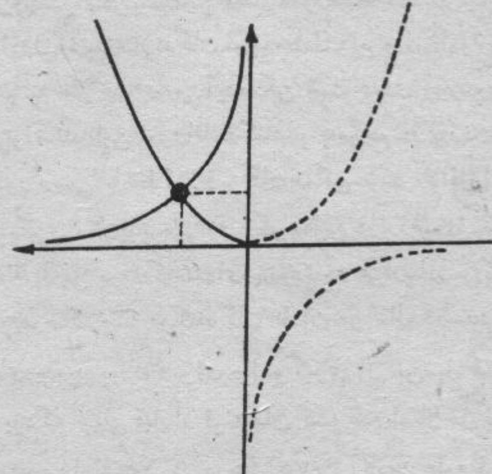
امید مربع سازان به یأس گرائید زیرا ارتباط نزدیکی میان π و e مشهود بود واین خود کوششی را که برای اثبات ترانساندان بودن عدد π بعمل می‌آمد مضاعف کرد و نه سال بعد لیندمان آلمانی آنرا ثابت کرد . بدین ترتیب آنالیز جدید به مسئله‌ای که از تمام ریاضیدانان اززمان افلاطون به بعد ، باج میگرفت پایان داد .

حل مسئلهٔ تضعیف مکعب و به طور کلی معادلهٔ درجهٔ سوم دو جمله‌ای $x^3=2a^3$ رامیتوان به مسئلهٔ دیگری بازگردانید که‌آن نیز شهرتی‌به سزادارد وآن مسئلهٔ درج دو واسطهٔ‌هندسی بین دوطول‌مفروض است منظوراز این مسئله این‌است‌که هرگاه دو طول a و b مفروض باشند دوطول مانند x و y را طوری بیابیدکه داشته باشیم :

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{b}$$

از این معادلات حاصل می‌شود $y^2=bx$ و $x^2=ay$ و $xy=ab$. معادلهٔ اول و سوم یکدستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی را تشکیل می‌دهند اولی یک سهمی و سومی یک هذلولی متساوی‌القطرین (یا یك منحنی هموگرافیك) است از تلاقی این دو منحنی وسایط مطلوب حاصل می‌شود (شکل ٤) .

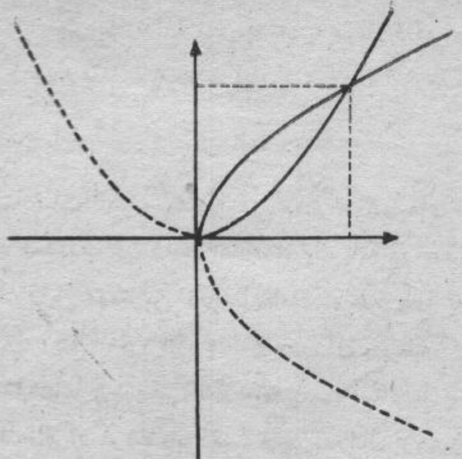
$$\begin{cases} y^2=bx \\ xy=ab \end{cases}$$



ش ٤

دستگاه معادلهٔ اول و دوم را نیز می‌توان از طریق ترسیم حل‌کرده و نقاط برخورد دوسهمی را به دست آورد (شکل ۵)

درحالت خاص‌که $b=2a$ باشد ، $x^3=2a^3$ که همان معادلهٔ تضعیف مکعب است . بازگردانیدن مسئلهٔ تضعیف مکعب



ش ۵

به درج واسطهٔ هندسی بین دوعدد از مهمترین کارهای ریاضی **ارخیتاس** Archytas (تارنتومی) دوست افلاطون در سیراکوز است.

ارخیتاس دو واسطه را از تقاطع سه سطح دوار پیدا کرد .محل تقاطع دوتا از این منحنیها (استوانه وحلقه Tore باقطر داخلی صفر) یك منحنی است که انحنای مضاعف دارد .نقطه‌ای که منحنی سطح سوم را که مخروطی قائم است قطع می‌کند جواب مسئله را می‌دهد .

این نخستین‌بار است که‌درتاریخ ریاضیات‌منحنی باانحنای مضاعف‌مورداستفاده‌قرارمی‌گیرد **منائیخموس** (Menaichmos) شاگرد ادوکسوس ریاضیدان معاصر ارسطو برای‌حل دومعادلهٔ ارختیاس محل برخورد دو مقطع مخروطی را از دو راه پیدا کرده‌است. یکی دوسهمی‌ودیگری یك‌سهمی ویك‌هذلولی‌متساوی القطرین . شکل هردو راه حل مطابق امروز در همین صفحه رسم شده است .

تاریخ‌نویسان کشف مقاطع مخروطی را به منائیخموس نسبت می‌دهند . این شخص مغز متفکری بود که کتاب اصول اقلیدس‌را الهام بخشید واوضمن جستجوی راه‌حلی برای‌تضعیف مکعب به‌این مکانهای هندسی برخورد وبالاخره مسئله را با تقاطع دومقطع مخروطی حل‌کرد. جزئیات راه‌حل اودردست نیست ولی یك صورت ممکن دیگر نیز در شکل‌زیر مربوط به حل معادلات درجه سوم دو جمله‌ای به صورت کلی: $x^3-N=0$ جهت توضیح بیشتر نشان داده می‌شود :

معادلهٔ‌سهمی $y=x^2$ است: نقطهٔ P به‌مختصات $x=N$ و $y=1$ را در نظر گرفته دایره هائی به‌قطر PO رسم می‌کنیم معادلهٔ این دوایر به صورت کلی

$$x^2+y^2-Nx-y=0$$

(بقیه در صفحهٔ ۵۴)

این مقاله به‌وسیلهٔ گروه‌آموزش ریاضیات در دانشگاه شیکاکو از شهر شیکاکو واقع در ایـالت ایلی نویز آمریـکا تهیه شده

رنگ آمیزی نقشه

و به خواهش شورای نویسندگان به وسیلهٔ آقای **وارتان وارتانیان** به‌زبان‌فارسی برگردانده‌شده است .

مقدمه

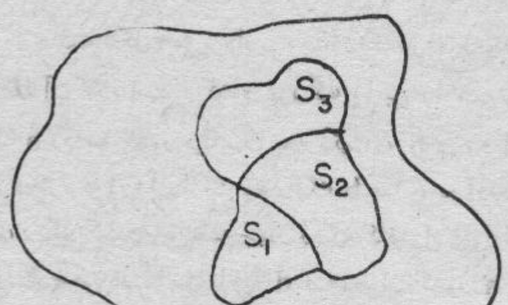
یکی از مشهورترین مسائل حل نشدهٔ ریاضیات عبارت است از مسئلهٔ رنگ آمیزی نقشه . صورت ریاضی این مسئله در حدود کمتر از یك قرن پیش داده شده است .

نقشه‌کشان انگلستان ضمن تجربه‌های متعدد ، مشاهده کرده بودند که برای رنگ کردن حتی متنوع‌ترین نقشه‌های سیاسی بیش از چهار رنگ لازم نیست . تقریباً در سال ۱۸۵۰ این موضوع توجه یك دانشجوی ریاضی ادینبورو را به نام **فرانسیس گوتری** (Francis Guthrie) جلب کرد . وی در این موضوع یك نقشهٔ جالب ریاضی را مشاهده می‌کرد که اثبات آن عملاً مقدور بود. گوتری موضوع را با برادرش مورد بحث قرار داد و وی نیز آن‌را در اختیار **دومورگان** (De Morgan) ریاضیدان و استاد منطق در انگلستان قرار داد. توسط شخص اخیر مسئله در میان سایر ریاضیدانان انگلستان انتشار یافت و **کی‌لی** (Caylay) بزرگ در سال ۱۸۷۸ توجه انجمن ریاضیدانان لندن را به این موضوع جلب کرد .

تاکنون توضیحات بسیاری دربارهٔ مسئلهٔ چهار رنگ، آن‌طور که نامگذاری شده، داده شده است که به خوبی دانشجویان و معلمان را به مفهوم موضوع مورد بحث وارد می کند . هدف این مقاله چیزی دیگر است . روشی که برای توضیح مطلب در اینجا اتخاذ شده است دارای این هدف اصلی است که راههایی را برای برانگیختن قوهٔ خلاقه در کاوشهای ریاضی ارائه‌می‌دهد. مسئلهٔ فوق مثال بارزی از این موضوع خواهد بود که تکنیك می‌تواند وسیلهٔ خوبی برای پیشرفت در مسائل و حل آنها باشد. قسمت اعظم این مقاله از یك کتاب روسی به نام **بحثهای ریاضی** که به‌وسیلهٔ **ای . ب . دین کین** (E . B . Dynkin) و **وی . ا . آسپنسکی** (V.A. Uspenski) نوشته شده و در مسکو و لنینگراد به سال ۱۹۵۲ انتشار یافته استخراج شده است . این کتاب در واقع بر اساس مطالبی تنظیم شده که به وسیلهٔ یکی از بخشهای انجمن ریاضیات دانشگاه مسکو برای دانش آموزان دبیرستانها تهیه گردیده است .

مسئلهٔ رنگ آمیزی نقشه

یك نقشهٔ سیاسی ، کشورها را به رنگهای مختلف نشان می‌دهد . معمولا لزومی ندارد که کشورهای مختلف دارای رنگهای متفاوت باشند ، بلکه تنها باید دو کشور همجوار ، دو رنگ مختلف داشته باشند . در شکل ۱ کشورهای S_1 و S_2 هم‌مرز بوده و باید رنگهای مختلف داشته باشند، در حالی که کشورهای S_1 و S_3 تنها در یك نقطه مشترکند و می‌توانند همرنگ باشند .

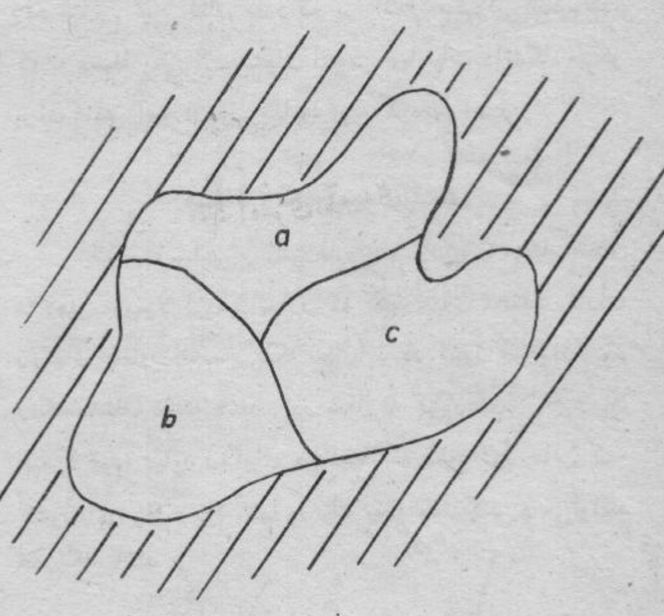


ش ۱

در صورتی که در رنگ کردن یك نقشه هیچ یك از کشورهای هم مرز همرنگ نباشند، می گویند که آن نقشه **موزون** رنگ شده است. بنابراین طبیعتاً این سؤال پیش می‌آید که آیا برای رنگ کردن موزون یك نقشهٔ مفروض چند رنگ متفاوت

لازم خواهد بود ؟ واضح است که یك پاسخ این سؤال چنین است که تعداد رنگها باید برابر تعداد کشورها موجود در نقشه باشد. ولی این جواب مطلوب ما نیست چه آنچه در حقیقت سؤال شده این است که **حداقل** چند رنگ برای رنگ کردن هر نقشه‌ای کافی است.

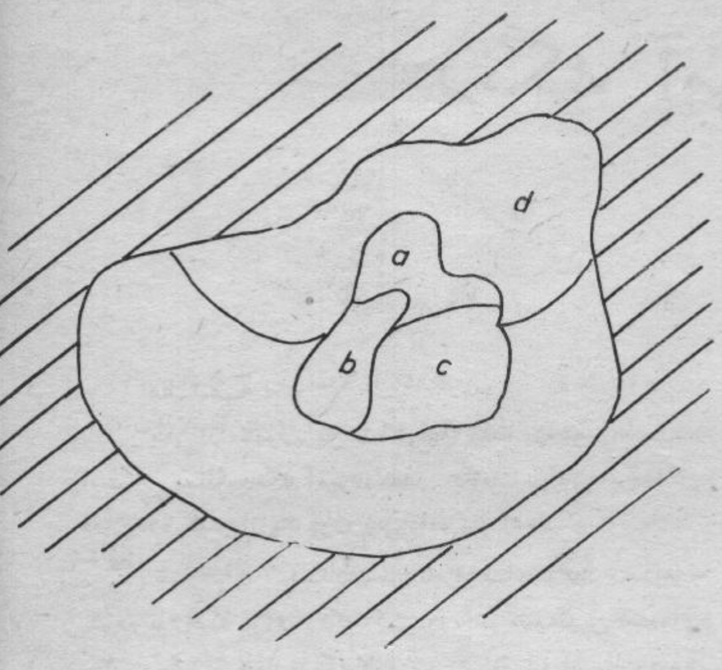
شکل ۲ را که بسان جزیره‌ای در میان دریاست در نظر بگیرید. برای رنگ‌آمیزی آن چند رنگ لازم است ؟ برای خود جزیره فقط سه رنگ کافی است و چون دریا در نقشه‌ها دارای رنگ واحدی بوده و تمام کشورهای ساحلی باید رنگی جز رنگ دریا داشته باشند ، دریا به منزلهٔ کشور دیگری به حساب می‌آید. بنابراین برای رنگ‌آمیزی نقشهٔ ۲ ، روی‌هم ، چهار رنگ لازم است .



ش ۲

حال به شکل ۳ می‌پردازیم . چند رنگ برای رنگ‌آمیزی موزون آن لازم است ؟ کشور بزرگ پایین را می‌توان از رنگ a زد و سه کشور دیگر را به رنگهای b و c و d رنگ آمیزی کرد و دریا را نیز به رنگ b یا c درآورد . پس برای رنگ کردن این نقشه چهار رنگ کافی است . ولی اگر کشور کوچکی در داخل ناحیهٔ d و همجوار کشور a باشد، و این کشور وابسته به کشور بزرگ پایین باشد ، همان طور که اغلب در نقشه‌های سیاسی اتفاق می‌افتد ، دیگر نمی‌توان کشور بزرگ پایین را از رنگ a زد، چه در این حال آن کشور وابسته و همجوار a و کشور a هردو دارای یك رنگ می شوند . در چنین صورتی باید رنگ پنجمی برای رنگ کردن کشور بزرگ پایین و آن کشور وابسته انتخاب کرد. وجود چنین کشورهای وابسته ، رنگ آمیزی نقشه را بسیار پیچیده می کند.

اما این حالت به مسئلهٔ چهار رنگ نقشه ارتباطی ندارد، چه در این مسئله فرض این است که هر کشوری از یك قسمت جداگانه تشکیل یافته است . با این قرار ، همان طور که گفته شد، رنگ‌آمیزی موزون نقشهٔ ۳، چهار رنگ بیشتر لازم ندارد .



ش ۳

از آنچه دیدیم معلوم می‌شود که برای رنگ آمیزی موزون تمام این اشکال و نقشه‌های دیگری که وجود دارد، چهار رنگ کفایت می‌کند . این نتیجهٔ مبتنی بر حدس را ممکن است به صورت زیر بیان کرد :

هر نقشهٔ مسطح به وسیلهٔ چهار رنگ به طریق موزون رنگ‌آمیزی می‌شود .

این نظریه را می توان با کشیدن نقشه‌ای که برای رنگ آمیزی موزون آن به ۵ رنگ یا بیشتر نیاز باشد رد کرد . تاکنون کسی نتوانسته است چنین نقشه‌ای بکشد . از طرف دیگر ثابت شده است که برای رنگ آمیزی موزون هر نقشه‌ای ۵ رنگ کافی است. وبدین ترتیب با مطالب زیرین که ثابت شده است با بن بست ناامیدکننده‌ای روبرو می‌شویم :

هیچ نقشه‌ای را نمی‌توان با ۳ رنگ به طریق موزون رنگ آمیزی کرد (شکل ۲) .

هر نقشه‌ای را می‌توان به‌وسیلهٔ ۵ رنگ به طریق موزون رنگ آمیزی کرد .

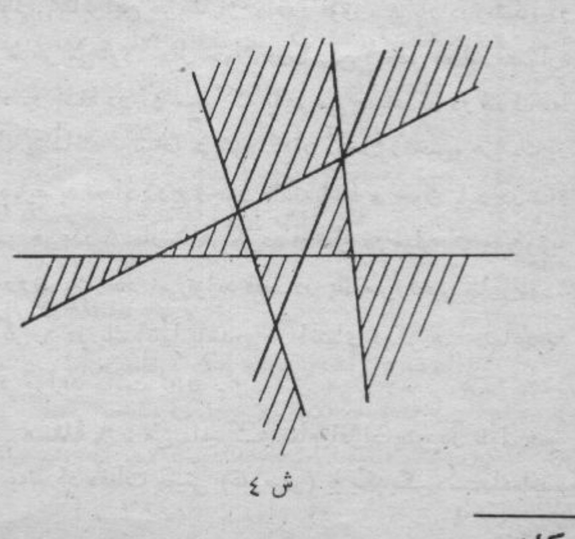
بقیهٔ این مقاله دربارهٔ حالت کلی نیست وتنها مربوط به نقشه‌هایی است که ممکن است آنها را با دو رنگ به طریق موزون رنگ آمیزی کرد .

چند مسئله و حل آنها

مسئلهٔ اول : هر نقشهٔ تشکیل شده از ترسیم هر چند

خط مستقیم در صفحه را می‌توان به وسیلهٔ دو رنگ ، رنگ آمیزی موزون کرد.

حل : این مطلب را به وسیلهٔ استقراء ریاضی اثبات می‌کنیم (برای درك اثبات به روش استقراء ریاضی به شمارهٔ ۹ مجلهٔ یکان صفحهٔ ۴۰ رجوع کنید) . دو رنگ آبی و قرمز را در نظر بگیرید. نقشهٔ متشکل از یك خط مستقیم در صفحه را با قرار دادن آبی در یك طرف و قرمز در طرف دیگر می‌توان رنگ‌آمیزی موزون کرد . حال فرض می‌کنیم که ثابت شده باشد که دو رنگ برای رنگ آمیزی موزون هر نقشه‌ای متشکل از n خط مستقیم کفایت می‌کند . نقشهٔ K را متشکل از $n+1$ خط مستقیم در نظر بگیرید . با حذف یکی از خطوط، نقشهٔ K' متشکل از n خط به دست می‌آید که می‌توانیم آن را با دو رنگ آبی و قرمز به طریق موزون رنگ آمیزی کنیم. حال خط حذف شدهٔ S را دوباره می‌کشیم . در یك طرف خط S کشورهای K را به همان رنگی که در نقشهٔ K' داشتند باقی می‌گذاریم ودرطرف دیگر آن خط تمام رنگهای آبی را به قرمز و رنگهای قرمز را به آبی تبدیل می‌کنیم. چون K' رنگ آمیزی موزون شده بود، هر دو قسمت K به طریق موزون رنگ آمیزی شده‌اند. حال اگر جزئی ازخط S مرز مشترك دو کشور از نقشهٔ K باشد، طبیعتاً این دو باید از تقسیم یك کشور از نقشه K' به‌وسیلهٔ خط S به‌وجود آمده باشند. وچون در نقشهٔ K رنگهای یك طرف S بدون تغییر مانده و رنگهای طرف دیگر عوض شده‌اند ،این دو کشور یکی به‌رنگ آبی و دیگری قرمز است، بدین ترتیب ثابت شد که اگر موضوع مسئله درباره نقشهٔ متشکل، از n خط صادق باشد ، برای نقشهٔ متشکل از $n+1$ خط نیز صادق است . اینك چون مطلب فوق (موضوع مسئله) در مورد نقشه‌های متشکل از یك خط صادق است ، لازم می‌آید که برای نقشه‌های متشکل از ۳خط وبعد چهار خط وغیره نیزصادق باشد.

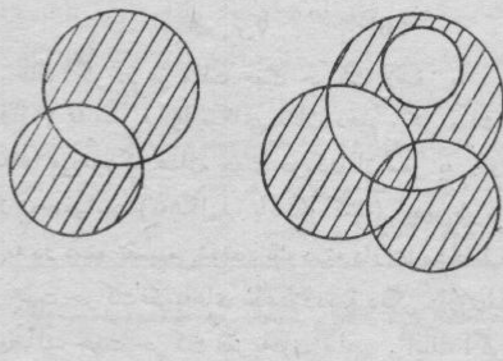


ش ۴

بنابر این هر نقشهٔ متشکل از هر چند خط مستقیم درصفحه را با دو رنگ می‌توان رنگ‌آمیزی موزون کرد (شکل ۴) .

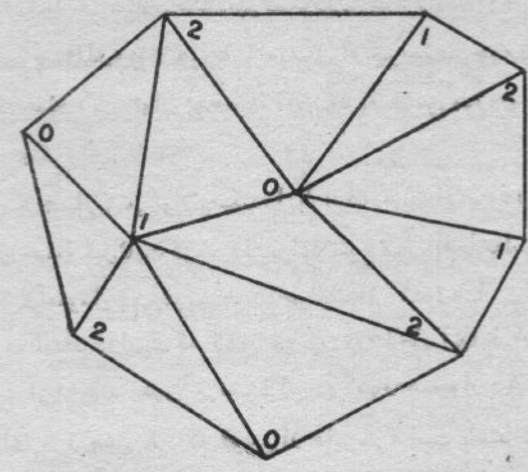
مسئلهٔ دوم : هر نقشهٔ متشکل از ترسیم هرچند دایره را در صفحه می توان به وسیلهٔ دو رنگ به طریق موزون رنگ آمیزی کرد .

حل : می‌توان حکم را با استفاده از استقراء ریاضی نظیر مسئلهٔ قبل ثابت کرد، ولی برای تنوع، در اینجا به استدلال دیگری متوسل می‌شویم : به هر یك از کشورها ، عددی معرف تعداد دوایری که کشور مز بور در داخل آنها قراردارد نسبت می‌دهیم . بدین ترتیب اگر دو کشور همجوار A و B دارای مرز مشترکی که قوسی از دایره C است باشند ، یکی از این دو کشور در داخل C و دیگری در خارج آن خواهد بود . از طرف دیگر A و B هر دو یا درداخل یا در خارج هر دایره دیگری در صفحه به غیر از C هستند ، بنابراین اختلاف اعداد منسوب به‌آنها برابر واحد است .حال تمام کشورهایی راکه عدد منسوب به‌آنها زوج است قرمز و تمام کشورهایی راکه عدد منسوب به‌آنها فرد است آبی رنگ کنید . واضح است که بدین نحو نقشهٔ مفروض به طریق موزون رنگ آمیزی می‌شود(شکل ۵) .



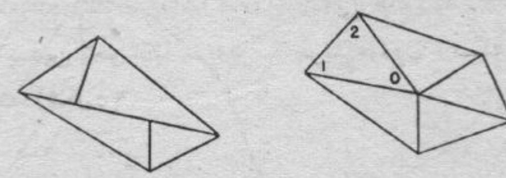
ش ۵

مسئلهٔ سوم : نقشه‌ای متشکل از کشورهایی که همه به شکل مثلثند در نظر بگیرید . این مثلثها ممکن است که نقطهٔ مشترکی نداشته باشند یا در یك رأس و یا در یك ضلع مشترك باشند (این چنین تقسیم صفحه رامعمولا مثلث بندی می گویند). از این گذشته فرض کنید که این مثلث بندی دارای این خاصیت است که می توان به هریك از رأسهای مثلثهای آن یکی ازاعداد ۰ و ۱ و ۲ را به نحوی منسوب کرد که به دو انتهای هرضلع همیشه اعداد متفاوت منسوب شده باشد (شکل ۶ رانگاه کنید). چنین نقشه‌ای را می‌توان فقط با دو رنگ به‌طریق موزون رنگ آمیزی کرد .



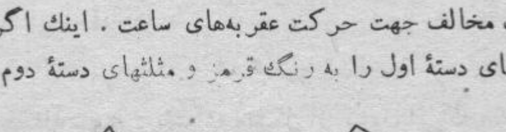
ش ٦

حل : توجه کنید که دوشکل زیررا (شکل ۷) نمی‌توان با دورنگ به طرز موزون رنگ‌آمیزی کرد چه‌شکل الف‌مثلث بندی به نحو مطلوب نیست وشکل ب دارای خاصیت مخصوص فوق‌الذکر نمی‌باشد .



ب ش۷ الف

حال اگر در هر مثلث جهت حرکت ازصفر به ۱ واز ۱ به ۲ واز ۲ به صفر را با پیکانی نشان دهیم ، هر مثلث‌صاحب مشخصه‌ای می‌شودکه همان جهت حرکت از صفر به ۱ و از ۱ به۲واز۲ به‌صفراست (به‌شکل۸، بالانگاه‌کنید). بدین‌طریق تمام مثلثها به دو دسته تقسیم‌می‌شوند، یك دسته دارای مشخصهٔ جهتی موافق جهت حرکت‌عقربه‌های ساعت ودستهٔ دیگر دارای‌مشخصهٔ جهت مخالف جهت حرکت عقربه‌های ساعت . اینك اگر تمام مثلثهای دستهٔ اول را به رنگ قرمز و مثلثهای دستهٔ دوم را به رنگ آبی کنیم ، به جهت‌آنکه دو مثلث مجـاور دارای جهتی مخالف‌هم هستند (به شکل ۸، پایین نگاه کنید) ، رنگ‌آمیزی به طرز موزون انجام خواهدگرفت .



ش ۸

مسئلهٔ چهارم : برروی یك صفحهٔ عادی شطرنج‌شامل ٦٤ مربع، یك‌رخ نمی تواند از یك‌گوشه شروع کند و باعبور فقط یك بار ازهر مربع‌به گوشهٔ دیگر صفحه که بانقطهٔ شروع بر یك قطر قرار دارند برسد .

حـل : رخ می‌تواند به تعداد دلخواهی مربع به جلو وعقب وچپ و راست حرکت کند . هریك از چنین حرکاتی‌را می توان به عنوان یك یا چند حرکت متوالی ساده عبارت از حرکت ازمربعی به‌مربع مجاور تلقی‌کرد . حال صفحهٔ شطرنج را به همان وضع عادی سفید وسیاه‌که یك رنگ آمیزی موزون است در نظر بگیرد . برای عبور از تمام ٦٤ مربع، رخ باید ٦٣ حرکت ساده فوق‌الذکر را انجـام دهد . تعـدادی زوج از این حرکت ساده رخ را از مربعی به رنگ‌مفروض ، به‌مربع دیگری به‌همان رنگ می‌رساند، در نتیجه٦٣ حرکت ساده رخ را از مربع گوشهٔ‌آغاز حرکت به مربع دیگری به رنگی غیر از رنگ مربع مبدأ می‌رساند . پس هر مسیری که رخ برای حرکت انتخاب‌کند مربع انتهایی حرکت نمی‌تواند مربع‌مورد نظر در مسئله، که‌هم رنگ مربع مبدأ است، باشد .

مسئلهٔ ۵ : آیا می‌توان تمام۲۸ عدد دو مینوی یك دسته دومینو را به‌صورت‌زنجیر به دنبال هم‌قرار داد به‌طوری‌که‌دریك انتهای‌آن عدد ٦ و درانتهای دیگر عدد ٥ باشد ؟

حـل : هردو مینو از دو قسمت تشکیل شده‌است که در هرقسمت‌یکی‌ازاعداد۰، ۱، ۲، ۳، ٤، ٥، ٦ قراردارد.درهردستگاه دو مینو به تعداد جفتهایی‌که از این رشته اعدادمی‌توان تشکیل داد ، یعنی ۲۸ ، دو مینو وجود دارد . هر عدد فقط یك بار با یکی از ٦ عدد دیگر جفت می‌شود و یك بارهم با خودش جفت می‌شود . بنابراین هریك از ۷ عدد فوق ، ۸ بار دردستگاه دو مینو ظاهر می‌شود. حال چون درساختن زنجیر مطلوب‌همواره اعداد دو نصفهٔ دو دو مینو که به‌هم می‌چسبند در دو طرف‌خط اتصال یکسانند ، نتیجه می‌شود که‌در داخل زنجیر، هر یك از اعدادباید به تعداد زوج وجود داشته‌باشند و چون باید در تمام زنجیر هرعدد ۸ بار ظاهر گردد و تمام دو مینوهای موجودبه کار روند یك عدد نمی‌تواند فقط در یك سرزنجیر ظاهرشود. پس‌اگر ٦ در یك انتها باشد ، در انتهای دیگر هم حتماًعدد٦ وجود خواهد داشت نه ٥ .

مسئلهٔ ٦ : می دانیم کـه تمام افراد بشر در طول عمر خود به‌تعداد دفعات معینی (غیرصفر) با یکدیگر دست‌داده‌اند.

مسئله آن است که تعداد افرادی که در طول عمر خود فرد بار با یکدیگر دست داده‌اند عددی است زوج .

حل : فرض کنید که عدهٔ کل افراد بشر N و تعداد دست دادنها برابر m باشد . افراد را از ۱ تا m به ترتیب شماره‌گذاری کنید و فرض کنید که n_k تعداد دست‌دادنهای شخص شمارهٔ k باشد(بنا به فرض $n_k \neq ۰$) . حال تعداد کل دست دادنها را جمع می‌کنیم. در این محاسبه هر دست دادن که عملی است دوجانبه دوبار حساب می‌شود ، بنابراین :

$$n_۱+n_۲+\cdots\cdots+n_N=۲m$$

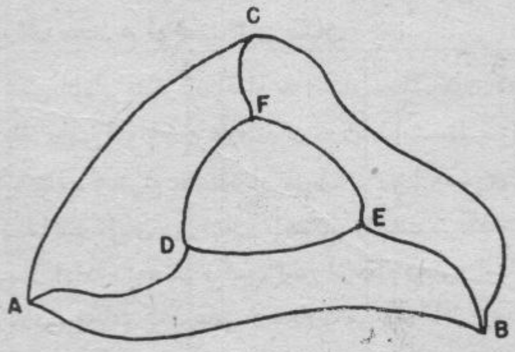
ولی می‌دانیم که در صورتی مجموعی نظیر جمع فوق مساوی عددی زوج است که تعداد جمله‌های فرد در آن، عددی زوج باشد ، پس تعداد افرادی که در عمر خود فرد بار دست داده‌اند زوج است .

مسئلهٔ ۷: در یك جشن افتتاحیه ۲۲۵ نفر شرکت دارند. دراین جشن دوستان با یکدیگر دست می‌دهند. وقتی که جشن به اتمام می‌رسد ، در میان افراد حاضر در آن جلسه حداقل یك نفر بوده که به تعداد دفعات زوج دست داده است .

حل : چون تعداد کل دست دادنها ، همان طور که در مسئلهٔ ۶ گفته شد ، زوج است و تعداد افراد حاضر در جلسه ، یعنی تعداد جمله‌های جمع فرد است ، لااقل باید یکی از جمله‌های جمع زوج باشد .

مسئلهٔ ۸ : در شکل ۹ شش نقطه وجود دارد که در آن هر نقطه به سه نقطه از ۵ نقطهٔ بقیه متصل است . هرگاه به جای شش نقطه فقط ۵ نقطه داده شده بود ، امکان نداشت که هر یك از نقاط به سه نقطه از چهار نقطهٔ بقیه وصل گردد .

حل : فرض کنید که این امر امکان پذیر بود . اگر تعداد قوسهایی را که از هر نقطه می‌گذرد بشماریم ، چون هر قوس دارای دو سر است ، ضمن این شمردن هر قوس دوبار به حساب می‌آید و عددی زوج نتیجه می‌شود: ازطرفی دیگر چون از هر نقطه سه قوس گذشته است ، روی هم ۱۵ قوس وجود دارد . می‌بینید که از یك طرف باید مجموع کل اعداد وابسته به نقاط دوبرابر تعداد کل قوسهای مرسوم بوده وبنابراین عددی زوج به‌دست آید واز طرف دیگر آن عدد ۱۵ است، بنابراین این حالت امکان پذیر نیست .



ش ۹

نتیجه

این هشت مسئله با حل آنها نمونه‌هایی است از مسائلی که در کتاب روسی فوق‌الذکر وجود دارد و مربوط به مسئلهٔ دورنگ است . همهٔ این مسائل به‌نحوی مربوط به رنگ‌کردن موزون نقشه‌ها می‌باشد . تنوع واستقلال این مسائل واصالت روشهای حل آنها موجب می‌شود که طرح چنین مسائلی به‌خصوص برای دانش‌آموزان دبیرستانها تأثیر فراوانی برای برانگیختن قوهٔ خلاقه و ابتکار آنان داشته باشد .

بی آنکه عصبانی شوید این مسئله را حل کنید

سرعت یك ترن مسافربری x برابر سرعت یك ترن باری است . حال این دو ترن را در دو حالت مختلف در نظر بگیرید. حالت اول هردو در یك جهت حرکت می‌کنند و ترن مسافربری از آن دیگری سبقت می‌گیرد . حالت دوم این دو ترن در دو جهت مختلف حرکت می‌کنند واز هم می‌گذرند. اگر بدانیم که زمان سبقت گرفتن ترن مسافربری از ترن باری x برابر زمان ردشدن این دو ترن از هم در حالت دوم است مقدار x چقدر است؟

فراموش نکنید که در حل این مسئله نباید عصبانی بشوید!

پاسخ مسئلهٔ شمارهٔ گذشته زیر همین عنوان

هوای دیروز آفتابی بوده است . لابد می‌پرسید چرا . یك خط بکشید و به‌وسیلهٔ نقاطی در روی آن امروز و دیروز و پریروز و پس پریروز و پس در آن پریروز را مشخص کنید ؛ و روابطی را که به گفتهٔ اداره هواشناسی هواهای روزهای مختلف دارند به مبداء امروز برگردانید . نتیجه خواهید گرفت که چون هوای پریروز بارانی بوده هوای دیروز آفتابی بوده است .

ساده ترین راه

تعیین اعداد فیثاغورثی

خلیل صدیق ارشادی

شورای محترم نویسندگان یکان

ضمن اظهار تشکر از اقدام به انتشار مجلهٔ یکان که در تنویر افکار دانش‌آموزان و علاقمندان به ریاضیات سهم بسزایی دارد - بانهایت احترام به‌استحضار می‌رساند: با وجودی که این‌جانب‌ساحت مقدس دبیرستان‌ودانشکده را پشت سر گذاشته‌ام اما آنی از‌ادامهٔ تحصیل وکسب فیض از مقام محترم استادان و از لابلای صفحات کتب علمی و مجلات مربوط غافل نبوده با کمال میل ورغبت تلاش می‌کنم که تا آخر دقایق عمر ازدریای بیکران علوم جان تشنهٔ خود را، تاآنجاکه ممکن است، سیراب نمایم. مجلهٔ یکان یکی‌از بهترین نشریاتی است که‌به همت شما مانند چشمهٔ آب زلالی این تشنگی علمی رارفع می‌نماید.

حل‌یکی از مسائل مندرج درچندشمارهٔ پیش مرابرآن‌داشت که در مورد اعداد فیثاغورثی بیشتر مطالعه نمایم. یکی دو ماه پس ازآغاز این مطالعه در بیمارستان بستری شده تحت عمل جراحی‌قرارگرفتم ولی همانجا، در بستربیماری، موفق‌شدم‌دو فرمول بسیار ساده برای تشخیص و تعیین این اعداد، از صفر تا بینهایت، پیداکنم. در شمارهٔ دوم صفحات ۴۵و۴۶ شرح بسیار شیرینی در بارهٔ اعداد فیثاغورثی درج شده بود که مرا برآن داشت تا نتیجهٔ مطالعات خود را در این بارهٔ به شورای محترم نویسندگان‌آن مجله تقدیم داشته وتقاضا نمایم درصورت امکان آنرا در یکی ازشماره‌های آیندهٔ مجله درج فرموده ودر معرض قضاوت استادان محترم قرار دهند. بدیهی است من استاد ریاضی نیستم ولی ممکن است فرمولهای مکتشفه در حل مسائل مربوط به اعداد فیثاغورثی سبب تسهیل‌کار دانش‌آموزان عزیز و سایر افراد علاقمند گردد و شاید از این راه بنده نیز توانسته باشم خدمتی انجام داده باشم.

***

قضیهٔ فیثاغورث در نظر یونانیان قدیم جنبهٔ نیمه خدایی داشت و به‌طوریکه در صفحهٔ ۹ شمارهٔ ۱۰ مجلهٔ یکان اشاره شده فیثا غورث پس ازکشف این خاصیت جشنی گرفت وانگشت‌شصت خودرا در راه‌آلههٔ «مزو» قربانی‌کرد.

بدیهی است هزاران و ملیونها مثلث قائم‌الزاویه می‌توان ساخت که در تمامی‌آنها رابطهٔ فیثاغورث‌برقرار می‌باشد. ولی این رابطه همیشه به‌نسبت ۳:۴:۵ نیست، به‌میل خود می‌توان‌دوخط‌را برهم‌عمود نموده‌وازهر نقطهٔ یکی‌به‌هر نقطهٔ دیگری وتری رسم نموده و مثلث قائم الزاویه‌ای بسازیم. شك نیست‌که در تمامی این مثلثها رابطهٔ فیثاغورث صادق خواهد بود.

دیوفانتوس راه حلی برای تعیین این اعداد پیدا کرد که عمل آن مستلزم صرف وقت زیادی است. از طریق اعداد کمپلکس نیز همان طورکه در مقالهٔ مذکور اشاره شده است، می توان آنهارا پیداکرد. ولی این اولین باری است‌که از راهی بسیار ساده و آسان می توان این رابطه را در مورد تمامی اعداد، از صفر تابی نهایت، تعمیم داد. ازآنجایی‌که اعداد زوج‌دراین مورد، مثل سایر موارد، خاصیت مشترك ندارند و آنچه در موردیکی‌صادق‌است‌در مورددیگری‌وفق نمی‌دهد، برای هرکدام فرمول جداگانه‌ای‌داده شده است.

این فرمولهاکاملا بی‌سابقه بوده وبرای نخستین بارجهت اظهار نظر برای چند نفر از استادان خارجی طی‌نامهٔ‌خصوصی ارسال گردید. اینك نیز از طریق مجله پرارزش «یکان» در معرض افکار عموم و قضاوت صاحبنظران گذارده می‌شود.

ازطریق حل این فرمولها، بادر دست داشتن یکی ازاعداد می توان دوعدد دیگر را پیداکرد. به عبارت دیگر اگریکی از اضلاع مثلث قائم‌الزاویه معلوم باشد، ضلع دیگر ووترآن‌نیز به‌آسانی تعیین می‌گردد.

باید دانست‌که کلیهٔ ضرایب این روابط‌نیز همیشه خاصیت رابطهٔ اصلی را حفظ می‌نمایند.

اعداد زوج

اگر x را عدد زوج فرض‌کنیم:

$$x^2+\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2-1\right]^2=\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2+1\right]^2$$

واگر y را عدد فرد بگیریم :

$$y^{۲}+\left(\frac{y^{۲}-۱}{۲}\right)^{۲}=\left[\left(\frac{y^{۲}-۱}{۲}\right)+۱\right]^{۲}$$

جهت روش شدن مطلب جدول زیر تنظیم شده که استفاده از فرمولها را در مورد اعداد ازصفر تا ۲۶ نشان می‌دهد.

اعداد زوج

$$x^{۲}+\left[\left(\frac{x}{۲}\right)^{۲}-۱\right]^{۲}=\left[\left(\frac{x}{۲}\right)^{۲}+۱\right]^{۲}$$

$۲^{۲}$	=	$۰^{۲}$	+	$۲^{۲}$
$۵^{۲}$	=	$۳^{۲}$	+	$۴^{۲}$
$۱۰^{۲}$	=	$۸^{۲}$	+	$۶^{۲}$
$۱۷^{۲}$	=	$۱۵^{۲}$	+	$۸^{۲}$
$۲۶^{۲}$	=	$۲۴^{۲}$	+	$۱۰^{۲}$
$۳۷^{۲}$	=	$۳۵^{۲}$	+	$۱۲^{۲}$
$۵۰^{۲}$	=	$۴۸^{۲}$	+	$۱۴^{۲}$
$۶۵^{۲}$	=	$۶۳^{۲}$	+	$۱۶^{۲}$
$۸۲^{۲}$	=	$۸۰^{۲}$	+	$۱۸^{۲}$
$۱۰۱^{۲}$	=	$۹۹^{۲}$	+	$۲۰^{۲}$
$۱۲۲^{۲}$	=	$۱۲۰^{۲}$	+	$۲۲^{۲}$
$۱۴۵^{۲}$	=	$۱۴۳^{۲}$	+	$۲۴^{۲}$
$۱۷۰^{۲}$	=	$۱۶۸^{۲}$	+	$۲۶^{۲}$

اعداد فرد

$$y^{۲}+\left(\frac{y^{۲}-۱}{۲}\right)^{۲}=\left[\left(\frac{y^{۲}-۱}{۲}\right)+۱\right]^{۲}$$

$۱^{۲}$	=	$۰^{۲}$	+	$۱^{۲}$
$۵^{۲}$	=	$۴^{۲}$	+	$۳^{۲}$
$۱۳^{۲}$	=	$۱۲^{۲}$	+	$۵^{۲}$
$۲۵^{۲}$	=	$۲۴^{۲}$	+	$۷^{۲}$
$۴۱^{۲}$	=	$۴۰^{۲}$	+	$۹^{۲}$
$۶۱^{۲}$	=	$۶۰^{۲}$	+	$۱۱^{۲}$
$۸۵^{۲}$	=	$۸۴^{۲}$	+	$۱۳^{۲}$
$۱۱۳^{۲}$	=	$۱۱۲^{۲}$	+	$۱۵^{۲}$
$۱۴۵^{۲}$	=	$۱۴۴^{۲}$	+	$۱۷^{۲}$
$۱۸۱^{۲}$	=	$۱۸۰^{۲}$	+	$۱۹^{۲}$
$۲۲۱^{۲}$	=	$۲۲۰^{۲}$	+	$۲۱^{۲}$
$۲۶۵^{۲}$	=	$۲۶۴^{۲}$	+	$۲۳^{۲}$
$۳۱۳^{۲}$	=	$۳۱۲^{۲}$	+	$۲۵^{۲}$

به‌طوریکه مشاهده می‌شود :

در مورد اعداد زوج : **عدد سومی = عدد دومی + ۲**

در مورد اعداد فرد : **عدد سومی = عدد دومی + ۱**

چرا

تثلیث زاویه

ممکن نیست

نوشتهٔ : **کارل روبستو**

ترجمهٔ: **مهدی مدغم**

چهار مسئلهٔ ترسیم هندسی تضعیف مکعب ، تربیع دایره ، ترسیم هفت ضلعی منتظم وتثلیث زاویه ازجملهٔ معروفترین مسائل ترسیم هندسی کلاسیك یونان قدیم است که سعی می‌شد مانندسایر مسائل فقط به کمك خط کش وپرگار حل شود . از میان چهار مسئلهٔ فوق مشهور ترین آنها مسئلهٔ ثلث کردن زاویه است . طی سالهای متمادی کوشش بسیاری برای استدلال وحل این مسئله به عمل آمد وبدون نتیجه ماند . بدیهی است زوایایی از قبیل ۹۰° و ۱۳۵° و ۱۸۰° و ۳۶۰° وجود دارند که تقسیم آنها به سه قسمت متساوی بسیار آسان است . اما منظور ما آن است که ثابت کنیم تثلیث یك زاویه در حالت کلی تنها به کمك خط کش و پرگار غیر ممکن است . برای این منظور کافی است نشان دهیم که زاویه‌ای وجود دارد که تقسیم آن به سه زاویهٔ متساوی محال است، زیرا یك قاعدهٔ عمومی باید شامل هرحالت به تنهائی نیز باشد. پس عدم روش کلی برای حل این مسئله در صورتی که مثلا تثلیث زاویه‌ای مانند ۶۰° امکان نداشته باشد ثابت است .

می‌دانیم که یك خط راست می‌تواند دایره‌ای را فقط در دو نقطه قطع نماید و پیداکردن این دو نقطهٔ تلاقی منجر به حل یك معادلهٔ درجهٔ دوم می‌گردد . برعکس حل یك معادلهٔ درجهٔ دوم را می‌توان به پیداکردن نقاط تلاقی یك خط و یك دایره منجر نمود. پس جوابهای یك معادلهٔ درجهٔ دوم را به وسیلهٔ خط کش وپرگار می‌توان تعیین کرد. اما برای یافتن ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم چنین راهی وجود ندارد . اینك اگر زاویه‌ای مانند θ داشته باشیم مسئله آن است که $\frac{\theta}{3}$ را مشخص نمائیم .

معادل جبری این مسئله را به طرق مختلف می‌توان به دست آورد ولی ساده‌ترین راه آن است که فرض کنیم زاویهٔ θ به وسیلهٔ کسینوس آن معلوم باشد ، $y = \cos\theta$. در این صورت مسئله آن است که مقدار $z = \cos\frac{\theta}{3}$ را مشخص کنیم . اما از مثلثات مسطحه داریم :

$$\cos\theta = y = 4\cos^3\frac{\theta}{3} - 3\cos\frac{\theta}{3} \qquad (1)$$

به عبارت دیگر ، مسئلهٔ تثلیث زاویه‌ای مانند θ به فرض $\cos\theta = y$ معادل آن است که جوابهای معادلهٔ درجهٔ سوم زیر را بسازیم :

$$y = 4z^3 - 3z \qquad (2)$$

یا

$$4z^3 - 3z - y = 0$$

حال اگر θ برابر ۶۰° اختیار شود $y = \sin\theta = \frac{1}{2}$ می‌گردد و معادلهٔ (۲) به صورت زیر درمی‌آید .

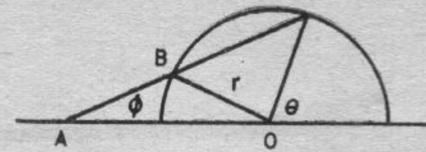
$$8z^3 - 6z = 1 \qquad (3)$$

و چون این معادله دارای ریشهٔ گویا نیست ، یافتن z یا $\cos\frac{\theta}{3}$ و درنتیجه زاویهٔ $\frac{\theta}{3}$ به کمك خط کش وپرگار غیرممکن است

اولین استدلال برای اینکه با خط کش و پرگار هر زاویه‌ای را نمی‌توان به سه زاویهٔ برابر قسمت کرد درسال ۱۸۳۷ به وسیلهٔ **وانتزل (Wantzel)** به عمل آمده است .

استدلال این که هرزاویه را نمی‌توان با پرگار وخط کش به سه قسمت برابر تقسیم نمود هنگامی صحیح است که خط کش را فقط وسیله‌ای برای رسم خط بدانیم . ولی اگر خط کش را در موارد دیگری غیر از رسم خط راست از دو نقطهٔ معین به کار بریم تثلیث برای زوایای دیگر امکان می‌پذیرد . قیداین که در ترسیمات هندسی جز ازخط کش و پرگار استفاده نشود ریشه‌ای قدیمی دارد . یونانیها خود از وسایل دیگری برای ترسیم استفاده می نمودند چنانکه طریق زیر برای تثلیث زاویه که درآثار ارشمیدس یافته شده گواه براین مدعاست .

فرض کنیدزاویهٔ ثابتی مانند θ مطابق با شکل ۱ داشته باشیم. یك ضلع زاویه را به طرف چپ امتداد داده نیمدایره‌ای به مرکز O رأس زاویهٔ و به شعاع دلخواه رسم کنید . دو نقطهٔ A و B را روی یك خط کش قسمی جداکنید که : $AB = r$



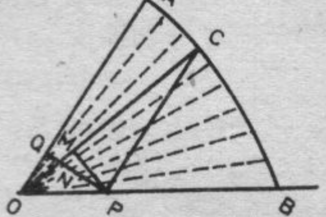
ش۱

(r شعاع دایره است). درحالی که نقطهٔ B را روی نیم‌دایره نگاه می‌دارید خط‌کش را طوری حرکت دهید که لبهٔ آن از نقطهٔ تلاقی ضلع زاویه و نیم‌دایره بگذرد. وقتی که نقطهٔ A خط‌کش بر امتداد قاعدهٔ زاویه قرار گرفت خطی رسم نمائید تا زاویه‌ای برابر φ باقاعدهٔ زاویهٔ مفروض بسازد:

$$\varphi = \frac{\theta}{۳}$$

روش دیگری که برای تثلیث یك زاویه به‌طریق تقریبی وباخطای کم توسط **نیکومد** (Nicomedes) عرضه‌شده‌است به این شرح است: درشکل۲، AOB زاویهٔ‌مفروضی است. از نقطهٔ P واقع بر OB خطی عمود بر OA رسم کنید تا AO را در Q قطع نماید. اکنون از O خطوطی رسم کرده روی این خطوط‌ازجایی‌که PQ را قطع می‌نماید به‌اندازهٔ ۲(OP) جدا کنید. اگرنقاط حاصل به وسیلهٔ خطوط راستی به‌هم وصل شوند، شکل حاصل ازاین خطوط شکل‌تقریبی یك‌مکان هندسی است که به‌نام:

کنکوئیدنیکومد (Conchoid of Nicomedes) معروف است. برای تثلیث یك‌زاویه، عمودی بر PQ از P اخراج کنید تا کنکوئید را در C قطع کند. زاویهٔ AOC که‌بدین‌ترتیب به‌دست‌می‌آید ثلث‌زاویهٔ AOB می‌باشد.



ش۲

برای اثبات PM را بر OC عمود کنید. می‌توان نوشت:

$$\cos \widehat{MPQ} = \cos \widehat{OCP} = \frac{PM}{PN}$$

$$\sin \widehat{MOP} = \frac{PM}{OP} \quad و \quad \sin \widehat{OCP} = \frac{PN}{NC} = \frac{PN}{۲(OP)}$$

$$\sin \widehat{MOP} = ۲ \sin \widehat{OCP} \cos \widehat{OCP} = \sin ۲(\widehat{OCP})$$

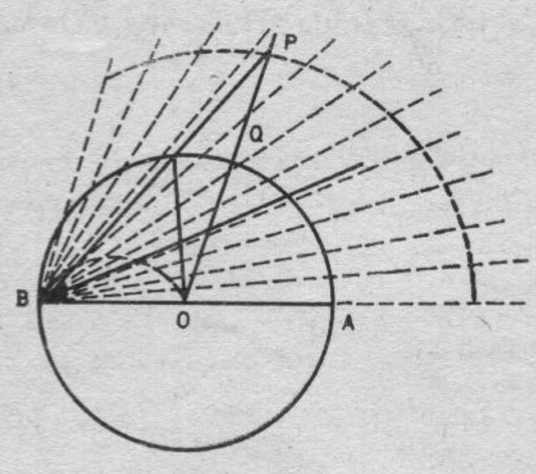
از این روابط حاصل می‌شود:

$$\angle MOP = ۲\angle(OCP)$$

و چون $\angle OCP = \angle AOC$ ،

$$\angle AOB = ۳\angle AOC$$

ترسیم هندسی جالب زیر نیز زاویه را به‌سه‌قسمت برابر تقسیم می‌نماید. دایره‌ای به‌مرکز O و به‌قطر AB رسم می‌کنیم. از B وترهایی رسم‌کرده امتداد می‌دهیم. روی هروتر در دو طرف محیط دایره مقداری برابر شعاع دایره جدا می‌کنیم. مکان‌هندسی این نقاط **لیماکن پاسکال** (Limacon of Pascal) نامیده می‌شود. اکنون به‌طوری که‌درشکل ۳ پیداست روی OA وبه رأس O زاویه‌ای را که می‌خواهیم به‌سه قسمت کنیم رسم کرده ضلع زاویه را امتداد می‌دهیم تالیماکن را در نقطهٔ P



ش۳

قطع کند. خط BP دایره را در Q تلاقی می‌کند. اکنون

$$\angle PBA = \angle BQO = ۲\angle P \quad و \quad PQ = QO = OB = r$$

$\angle POA = \frac{۲}{۳}\angle PBA$. اگرزاویهٔ PBA رانصف کنیم تثلیث پایان می‌یابد.

مسئلهٔ تثلیث زاویه که ابتدا به‌وسیلهٔ یونانیان پیشنهادشد بدین‌ترتیب بود که با خط‌کش وپرگار تنها و بدون خطا انجام پذیرد. اشتباه درقیداستعمال خط‌کش بدون علامت، بسیاری را برآن داشته است تادربارهٔ حل مسئله‌ای که بیش از یك قرن است به‌عنوان مسئله‌ای غیرممکن‌شناخته‌شده کوشش‌بدون نتیجه‌ای مصروف‌دارند.

پایان

یادی از:

حسین هورفر

از آقای منوچهر امین ناطقی دوست وخویش نزدیك شادروان حسین‌هورفر خواهش شد اطلاعاتی دربارهٔ زندگی علمی آن مرحوم برای مجلهٔ یکان فراهم آورندکه نوشتهٔ ایشان درزیرچاپ می‌شود.

آقای امین ناطقی مؤسس اولین مجلهٔ ریاضی در ایران می‌باشند . ایشان به اتفاق مرحوم سعید عزیزی در سال ۱۳۰۶ دست به انتشار مجلهٔ ریاضی «خیام» زدند و۱۳ شمارهٔ آن رابا موفقیت کامل منتشر نمودند .

شادروان حسین هورفردرسال ۱۲۸۰ خورشیدی در شهر تهران به دنیا آمده در سال ۱۳۰۱ پس ازاتمام تحصیلات متوسط در **دارالمعلمین مرکزی** که ریاست آن بر عهدهٔ مرحوم ابوالحسن فروغی بودبه‌کارمعلمی پرداخت‌ودرمدارس **کمالیه وسعادت** به تدریس اشتغال ورزید ــ از سال ۱۳۰۶ آن موقع‌که مدارس‌متوسطهٔ کامل تهران منحصر به چهار مدرسهٔ **دارالفنون ، دارالمعلمین مرکزی ، شرف و ثروت** بود به سمت معلم ریاضی دورهٔ دوم متوسطه در مدارس شرف وثروت انتخاب شد بعدها تا سال ۱۳۱۳ در دبیرستانهای مختلف تهران تدریس کرد. درسال ۱۴-۱۳۱۳ دردانشسرای مقدماتی تدریس‌نمود . سال ۱۳۲۴ بازرس اداری و۱۳۳۵ بازرس فنی و در۱۳۲۹ مجدداً دبیر شد وبالاخره در سال ۱۳۳۷ بازنشسته‌گردیداماتا پایان عمر افتخارآمیز خود خدمت معلمی را ترك نکرد ــ شادروان هورفر دارای استعداد وهوش مافوق عادی بود.احاطه وتسلط او در موادی‌که تدریس می‌کرد کمتر نظیر داشت. تمام مواد ریاضی دورهٔ دوم دبیرستان را درس می‌داد. در آن سالهاکه معلمین مطالب درسی را به صورت جزوه‌می‌گفتنداحتیاج به‌داشتن کتاب به خوبی احساس می‌شد وبااینکه عدهٔ شاگردان مدارس متوسطه بسیار محدود وچاپ‌کتابهای درسی مشتری و داوطلبی نداشت برای اولین بار در ایران به چاپ‌کتابهای ریاضی باحروف سربی وگراور همت‌گمارد واولین‌کتاب هندسهٔ رقومی‌را درسال ۱۳۰۸ به‌چاپ رسانید. بعد به تدریج یك دورهٔ کامل کتابهای ریاضی مخصوص دبیرستان درتمام رشته‌ها (جبرـ مثلثات هندسه ومخروطات ــ رقومی و ترسیمی مکانیك ــ هیئت) تألیف نمودکه مکرر به چاپ رسید . پس از آنکه رسم فنی جزو مواد درسی دبیرستانها قرارگرفت در این مورد هم دست به‌کارتهیهٔ کتاب رسم فنی شد وبه خوبی ازعهده برآمد.

شادروان هورفر در رشتهٔ هندسهٔ رقومی وترسیمی استادی بی‌همتا بود و چاپ‌کتاب حل‌المسائل هندسهٔ رقومی و ترسیمی او تاآن زمان نه تنها درایران بلکه دردنیا بی‌سابقه بودـ دراین‌کتاب که متجاوز از ۱۱۵۰ مسئله حل شده است مؤلف علاوه برآنکه بیش‌ازیکصد جلدکتاب به زبانهای مختلف رامورد استفاده قرار داده تعداد زیادی مسائل را شخصاً طرح وحل‌کرده است . چاپ دوم آن درسال ۴۱ دردسترس علاقمندان قرارگرفت .

هورفر در چند سال قبل دست به ابتکار تازه‌ای زد و درصدد برآمدکه اعداد اول سلسلهٔ اعداد را ازیك تایك میلیون به طریق مستقیم به دست‌آورد. دراین‌راه متجاوز ازپنجسال تلاش‌کردو بیش ازیك میلیون فیش تهیه نمود تا به مقصود رسید. محاسبات خودرا برای مراجع علمی ذیصلاحیت فرستادتانتیجهٔ قطعی‌آن اعلام شود و متأسفانه عمرش برای اطلاع ازنتیجه‌کفاف نکرد. البته افتخارکشف وحساب او به نام خودش محفوظ خواهد ماند.

شادروان هورفر نه‌فقط‌درریاضیات تبحرداشت بلکه در ادبیات بسیار پرمایه بود ــ خوب و سلیس می‌نوشت ـ نیکوشعر می‌گفت . در موسیقی دست داشت ــ تار استادانه می‌نواخت و می‌ساخت ـ جزء عدهٔ معدودی بودکه به دستگاههای موسیقی ایرانی و کلیهٔ ریزه‌کاریهای‌آن، وقوف داشت.

شادروان هورفر به اخذ نشانهای فرهنگ درجهٔ ۱ و۲ نایل آمد .

چراغ عمرش در۲۵ دیماه ۱۳۴۳ خاموش شد و با مرگ وی فرهنگ ایران یکی‌ازپرارزش‌ترین و دانشمندـترین دبیران‌خودرا ازدست‌داد. خدایش بیامرزاد .

راهنمای ریاضیات متوسطه

از : باقر امامی

نقل از مطبوعات شوری

نکته‌ای از درس

محاسبهٔ مجموع مکعبات جمله‌های یک تصاعد حسابی

اگر a_0 و a_1 و a_2 و .... a_n و a_{n+1} و .... جمله‌های یک تصاعد حسابی به‌قدر نسبت d باشد مجموع مکعبات n جملهٔ اولیهٔ این تصاعد را ازروی دستور زیر می‌توان محاسبه نمود:

$$a_1^3+a_2^3+\dots+a_n^3=\frac{(a_{n+1}\cdot a_n)^2-(a_1a_0)^2}{4d}$$

اثبات: دراتحاد:

$$(a_n^2+da_n)^2-(a_n^2-da_n)^2=4da_n^3$$

به n به‌ترتیب مقادیر یک تا n را نسبت می‌دهیم:

$$(a_1^2+da_1)^2-(a_1^2-da_1)^2=4da_1^3$$
$$(a_2^2+da_2)^2-(a_2^2-da_2)^2=4da_2^3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(a_n^2+da_n)^2-(a_n^2-da_n)^2=4da_n^3$$

از جمع روابط بالا باتوجه به‌اتحاد:

$$a_k^2-da_k=a_{k+1}^2+da_{k-1}=a_ka_{k-1}$$

نتیجه می‌شود:

$$(a_n^2+da_n)^2-(a_1^2-da_1)^2=4d(a_1^3+a_2^3+\dots+a_n)^3$$

ویا:

$$a_1^3+a_2^3+a_3^3+\dots+a_n^3=\frac{(a_{n+1}\ a_n)^2-(a_1a_0)^2}{4d}$$

مثال: مطلوبست محاسبهٔ مجموع:

$$S=1^3+6^3+11^3+\dots+96^3$$

دراین‌مثال: $a_0=-4$ و $a_{n+1}=a_{21}=101$ و $d=5$ است بنابراین:

$$S=\frac{(96\times101)^2-4^2}{20}=\frac{(9696-4)(9696+4)}{20}$$
$$=94460\times97=4700620$$

نکته‌ای خارج از درس

دوخاصیت از واسطهٔ نمائی دوعدد

عدد: $(1)\qquad C_\alpha(a\text{ و }b)=\left(\frac{a^\alpha+b^\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$

را واسطهٔ نمائی مرتبهٔ α از دوعدد مثبت a و b می‌نامیم.

واضح است که واسطهٔ حسابی:

$$C_1(a\text{ و }b)=\frac{a+b}{2}=A(a\text{ و }b)$$

واسطهٔ توافقی:

$$C_{-1}(a\text{ و }b)=\frac{1}{\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})}=H(a\text{ و }b)$$

واسطهٔ مجذوری:

$$C_1(a\text{ و }b)=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}=Q(a\text{ و }b)$$

به‌ازاء $\alpha=0$ فرمول (1) به‌صورت مبهم در می‌آیدولی می‌توان ثابت کرد که:

$$\underset{\alpha\to0}{\text{حد}}\ C_\alpha(a\text{ و }b)=\sqrt{ab}$$

وبنابراین می‌توان فرض کرد که:

واسطهٔ‌هندسی: $C_0(a\text{ و }b)=\sqrt{ab}=G(a\text{ و }b)$

واگر $\alpha>\beta$ باشد اثبات می‌گردد که:

$$C_\alpha(a\text{ و }b)\geqslant C_\beta(a\text{ و }b)$$

وازآنجا نتیجه می‌شود که:

$$Q(a\text{ و }b)\geqslant A(a\text{ و }b)\geqslant G(a\text{ و }b)\geqslant H(a\text{ و }b)$$

اینک دوخاصیت دیگر ازواسطهٔ نمائی دوعدد مثبت :

خاصیت I-

$$C_{\alpha}(a \text{ و } b) \times C_{-\alpha}(a \text{ و } b) = C_{0}^{2}(a \text{ و } b) \qquad (2)$$

این رابطه مستقیماً قابل اثبات است :

$$C_{\alpha}(a \text{ و } b) = \left(\frac{a^{\alpha}+b^{\alpha}}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$C_{-\alpha}(a \text{ و } b) = \left(\frac{a^{-\alpha}+b^{-\alpha}}{2}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{2}{\frac{1}{a^{\alpha}}+\frac{1}{b^{\alpha}}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = ab\left(\frac{2}{a^{\alpha}+b^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

از ضرب C_{α} در $C_{-\alpha}$ رابطهٔ (۲) به‌دست می‌آید. و

این رابطه تعمیم رابطهٔ معروف:

$$A(a \text{ و } b) \times H(a \text{ و } b) = G^{2}(a \text{ و } b)$$

است که درحالت مخصوص $\alpha = 1$ از آن نتیجه می‌گردد.

به‌ازاء $\alpha = \mp\frac{1}{2}$ داریم :

$$C_{\frac{1}{2}}(a \text{ و } b) = \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^{2} = \frac{a+b}{4}+\frac{\sqrt{ab}}{2} = \frac{A(a \text{ و } b)+G(a \text{ و } b)}{2}$$

$$C_{-\frac{1}{2}}(a \text{ و } b) = \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}}{2}\right)^{-2} = H^{2}(\sqrt{a} \text{ و } \sqrt{b})$$

از دستور (۲) روابط دیگری نیز بین سه‌واسطهٔ عددی و هندسی و توافقی دوعدد نتیجه می‌گردد :

$$A[(a \text{ و } b) \text{ و } G(a \text{ و } b)] \times H^{2}(\sqrt{a} \text{ و } \sqrt{b}) = G^{2}(a \text{ و } b) \qquad (3)$$

خاصیت II-

$$\frac{C_{\alpha}(a \text{ و } a)}{C_{\alpha}\left(\frac{1}{a} \text{ و } \frac{1}{b}\right)} = C_{0}^{2}(a \text{ و } b) \qquad (4)$$

معلوم است که :

$$C_{-\alpha}(a \text{ و } b) = \frac{1}{C_{\alpha}\left(\frac{1}{a} \text{ و } \frac{1}{b}\right)} \qquad (5)$$

و به‌سهولت می‌توان تحقیق کرد که :

$$C_{-\alpha}(a \text{ و } b) = \left(\frac{a^{-\alpha}+b^{-\alpha}}{2}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^{\alpha}}+\frac{1}{b^{\alpha}}\right)\right]^{\frac{1}{\alpha}}} = \frac{1}{C_{\alpha}\left(\frac{1}{a} \text{ و } \frac{1}{b}\right)}$$

رابطهٔ (٤) را از روابط ۲ و ۵ می‌توان نتیجه گرفت .

وضمناً ازدستور ٤ به‌ازاء ۲و۱ — و ۱ = α نتیجه می‌شود:

$$\frac{A(a \text{ و } b)}{A\left(\frac{1}{a} \text{ و } \frac{1}{b}\right)} = \frac{H(a \text{ و } b)}{H\left(\frac{1}{a} \text{ و } \frac{1}{b}\right)} = \frac{Q(a \text{ و } b)}{Q\left(\frac{1}{a} \text{ و } \frac{1}{b}\right)} = ab = G^{2}(a \text{ و } b)$$

یعنی :

نسبت واسطهٔ عددی (یا توافقی و یا مجذوری) دوعدد مثبت به‌واسطهٔ عددی (یاتوافقی‌ویامجذوری) عکس این اعداد برابر حاصل‌ضرب این‌دوعدد است.

تعدادقطرهای چندضلعیها و چندوجهیها

(افراسیاب‌ملکی - دبیردبیرستانهای تفرش)

دریك n ضلعی تعداد خطوطی که یك‌رأس را به سایر رأسها وصل‌می‌کند برابر است با $n-1$ ، تعداد خطوطی که رأس دوم را به رأسهای دیگر وصل می‌کند (بجز خط واصل‌بین دورأس اول ودوم) برابراست‌با $n-2$ وباادامهٔ این محاسبه ، تعداد همهٔ خطوط واصل بین رأسهای مختلف برابر خواهدبود بامجموع:

$$(n-1)+(n-2)+(n-3)+\ldots+2+1$$

یعنی برابر با $\frac{n(n-1)}{2}$ که‌چون تعداد ضلعها یعنی n را از آن‌کم‌کنیم تعداد قطرها برابر خواهدشد با $\frac{n(n-3)}{2}$

باروش مشابه برای تعداد قطرهای چندوجهی که‌شامل n رأس باشد رابطهٔ زیر حساب می‌شود .

تعداد قطرها $= \frac{n(n-1)}{2} -$

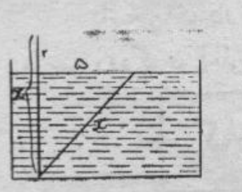
[تعداد قطرهای تمام وجها + تعداد یالها] —

حل مسائل شمارهٔ ۷

حل مسائل متفرقهٔ شمارهٔ ۷ در شمارهٔ ۸ بـه چاپ رسید امـا حل آن دسته از مسائل شمارهٔ ۷ کـه برای دانش‌آموزان دورهٔ دوم دبیرستان مطرح شده بود بـه علت شروع سال تحصیلی و عدم تناسب موضوع مسائل با برنامهٔ مواد ابتدای سال موکول به بعد شد. اینك ابتدا حل این دسته از مسائل شمارهٔ ۷ و بعد حل مسائل شمارهٔ ۱۱ از نظر خوانندگان می‌گذرد.

کلاسهای چهارم

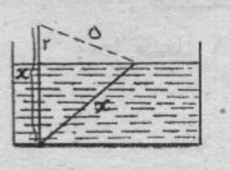
حل مسئلهٔ ۱۴۱۴ـ اگر طول نیزه را x فرض کنیم چون ۲متر آن ازآب بیرون بوده است طول قسمتی ازآن‌که داخل‌آب قرارگرفته برابر $x-۲$ است



در حالت اول بنابر رابطهٔ فیثاغورث داریم.

$$x^۲=(x-۲)^۲+۵^۲$$

که پس از ساده کردن و حل $x=۷٫۲۵$ به‌دست می‌آید.



درحالت دوم بنابر رابطهٔ مربع ضلع مقابل به‌زاویهٔ حاده در مثلث داریم:

$$x^۲=x^۲+۲۵-۲x\times ۲ \quad \text{و} \quad x=۶٫۲۵$$

پاسخهای درست رسیده از: حسن سعادتی‌ـ‌حسین جعفری گلپایگانی ـ حسین ارشام ـ داوودبازکی ـ اسماعیل دیشیدی ـ خلیل فضل‌اللهی.

حل مسئلهٔ ۱۴۱۵ـ تعیین x از رابطهٔ زیر

$$\left(\sqrt[۳]{۳٫۵}+\frac{۱}{۴}\sqrt[۳]{۲۲۴}\right)^x=۲۸$$

$$\sqrt[۳]{۲۲۴}=\sqrt[۳]{۶۴\times ۳٫۵}=۴\sqrt[۳]{۳٫۵} \quad \text{و} \quad ۲۸=۲^۳\times ۳٫۵$$

و معادله به‌صورت زیر ساده می‌شود

$$\left(۲\sqrt[۳]{۳٫۵}\right)^x=۲^۳\times ۳٫۵ \quad \text{و} \quad x=۳$$

پاسخهای درست رسیده از: اسماعیل دیشیدی‌ـ‌داوود بازکی ـ حسین ارشام ـ حسن سعادتی ـ صادق شوکتی ـ قاسم اخوان ـ خلیل فضل‌اللهی ـ داریوش نوریزاده ـ یوسف قانع ـ یدالله ابراهیمی ـ محمدحسین طحان‌زاده.

حل مسئلهٔ ۱۴۱۶ـ چنانچه یك‌ریشهٔ معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ مجذورریشهٔ دیگر باشد، داریم

$$x'x''=x'^۳=\frac{c}{a} \quad \text{و} \quad x'=\sqrt[۳]{\frac{c}{a}} \quad \text{و} \quad x''=\sqrt[۳]{\frac{c^۲}{a^۲}}$$

$$x'+x''=-\frac{b}{a} \quad \text{یا} \quad \sqrt[۳]{\frac{c}{a}}+\sqrt[۳]{\frac{c^۲}{a^۲}}=-\frac{b}{a}$$

طرفین رابطهٔ اخیررا به‌توان ۳ رسانده و ساده‌می‌کنیم، حاصل می‌شود.

$$b^۳=ac(۳b-a-c)$$

پاسخهای درست رسیده از: یوسف‌قانع ـ داریوش‌ نوریزاده‌ـ‌حسن‌سعادتی‌ـ‌حسین‌ارشام‌ـ‌خلیل‌فضل‌اللهی‌یدالله‌ابراهیمی

حل مسئلهٔ ۱۴۱۷ـ حل دستگاه زیر:

$$\begin{cases} x+y+xy=14 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{xy}=3\sqrt{2}+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-2\sqrt{xy}+xy=14 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{xy}=3\sqrt{2}+2 \end{cases}$$

با حذف $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ بین دو معادلهٔ دستگاه نتیجه خواهد شد.

$$xy-3(\sqrt{2}+1)\sqrt{xy}+2(2+3\sqrt{2})=0$$

$\sqrt{xy}=\sqrt{2}+3$ و $2\sqrt{2}$ یا $xy=11+6\sqrt{2}$ و 8

$$\begin{cases} xy=8 \\ x+y=6 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$$

واگر فرض کنیم $xy=11+6\sqrt{2}$ خواهیم داشت $x+y=-3-6\sqrt{2}$ ونتیجه‌می‌شود که x و y هردومنفی‌هستند که قابل‌قبول نیست.

پاسخهای درست رسیده از: محمود ترابی‌ـ‌صادق شوکتی ـ یوسف‌قانع ـ حسن‌سعادتی.

حل مسئلهٔ ۱۴۱۸ـ حل‌دستگاه زیر:

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt[3]{y}-3}=-1 \\[2ex] \dfrac{x-46}{y-45}=-1 \end{cases}$$

دستگاه پس از ساده‌کردن به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=7 \\ x+y=91 \end{cases}$$

چنانچه طرفین معادلهٔ اول دستگاه را به‌توان ۳ برسانیم وبااستفاده ازمعادلهٔ دوم به‌دست می‌آید $\sqrt[3]{xy}=12$ و یا $xy=1728$ با معلوم بودن حاصل‌ضرب و حاصل‌جمع x و y جوابهای قابل قبول دستگاه عبارت خواهد شد از

$x=27$ و $y=64$

پاسخهای رسیده از: خلیل‌فضل‌اللهی ـ حسن‌سعادتی‌ـ یوسف‌قانع ـ محمود ترابی ـ یدالله‌ابراهیمی ـ آقامحمدآبادی‌ـ داوودبازکی ـ اسماعیل‌دیشیدی ـ محمدحسین‌طحان‌زاده‌ـ‌غلامعلی معول ـ محمود صابرهمیشگی ـ مرتضی‌رودگری آملی‌ـ مجید شریف‌واقفی ـ عباس‌بشیری ـ صادق‌شوکتی.

حل مسئلهٔ ۱۴۱۹ـ تعیین x ازرابطه‌زیر

$$3^x+3^{x+1}+\ldots+3^{x+n}=5^x+5^{x+1}+\ldots+5^{x+n}$$

بافرض $A=3^x$ و $B=5^x$ خواهیم داشت

$$A+3A+3^2A+\ldots+3^nA=B+5B+5^2B+\ldots+5^nB$$

و نتیجه می‌شود

$$\frac{A(3^{n+1}-1)}{2}=\frac{B(5^{n+1}-1)}{4}$$

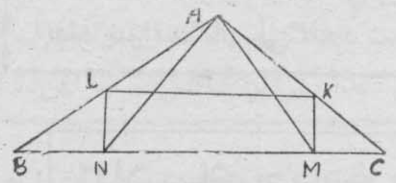
$$\frac{B}{A}=\frac{2(3^{n+1}-1)}{5^{n+1}-1}=\frac{5^x}{3^x}=\left(\frac{5}{3}\right)^x$$

بعد از لگاریتم گرفتن داریم

$$x=\frac{\log 2+\log(3^{n+1}-1)-\log(5^{n+1}-1)}{\log 5-\log 3}$$

پاسخهای درست رسیده از: مرتضی رودگری‌آملی‌ـ اسماعیل‌دیشیدی ـ داوود بازکی ـ حسن‌سعادتی ـ حسین‌ارشام ـ قاسم اخوان.

حل مسئلهٔ ۱۴۲۰ـ چهار ضلعیهای $ALNM$ و ANM محاطی هستند ودایره‌ای که برسه‌نقطهٔ A و N و M



بگذرد برنقاط K و L نیز خواهد گذشت یعنی چهار ضلعی $KMNL$ محاطی بوده و چون دو ضلع مقابلش متوازی و دوزاویهٔ مجاورش قائمه‌است لازم می‌آید که مستطیل باشد.

پاسخهای درست رسیده از: داریوش نوریزاده ـ مرتضی رودگری آملی ـ مجیدشریف واقفی.

کلاسهای پنجم

حل مسئلهٔ ۱۴۲۱ـ حل‌دستگاه زیر:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+xy+y^2}{x+y}=7 \\[2ex] \dfrac{x^2-xy+y^2}{x-y}=9 \end{cases}$$

بافرض $x=my$ وازتقسیم طرفین دومعادله بریکدیگر به‌دست‌خواهدآمد

$$\frac{m^2+m+1}{m+1}\times\frac{m-1}{m^2-m+1}=\frac{7}{9}$$ یا

$\dfrac{m^3-1}{m^3+1}=\dfrac{7}{9}$ و $m=2$

در ازاء این‌مقدار از m برای y مقدار قابل قبول $y=۳$ وازروی آن $x=۶$ به‌دست می‌آید.

پاسخهای درست رسیده از : مرتضی رودگری ـ حسین‌ارشام‌ـ داودبازکی‌ـ اسماعیل‌دیشیدی ـ مجیدشریف‌واقفی‌ـ غلامعلی‌معول ـ حبیب‌موسی‌زاده ـ خلیل فضل‌اللهی ـ اصغر بنائی بهرام امین‌شریفی ـ منصور معتمدی .

حل‌مسئلهٔ ۱۴۲۲ـ تعیین a و b و c برای بر قراری اتحاد زیر

$$\frac{a}{tg\,x}+\frac{b}{cotg\,x}+\frac{c}{tg\,x+cotg\,x}=\frac{۲+۳tg^{۴}x}{tg\,x(۱+tg^{۲}x)}$$

طرف‌اول‌را برحسب $tg\,x$ نوشته مرتب می کنیم. می‌شود

$$\frac{b\,tg^{۴}x+(a+b+c)tg^{۲}x+a}{tg\,x(۱+tg^{۲}x)}=\frac{۳tg^{۴}x+۲}{tg\,x(۱+tg^{۲}x)}$$

و در نتیجه $a=۲$ و $b=۳$ و $c=-۵$ به دست می‌آید .

پاسخهای درست رسیده است: منصور معتمدی‌ـ‌حسین ارشام ـ مرتضی رودگری ـ حسن سعادتی ـ غلامعلی معول ـ محمد ساعی .

حل‌مسئلهٔ ۱۴۲۳ـ درهر مثلث داریم

$$A+B+C=\pi \quad \text{یا} \quad \frac{A}{۲}+\frac{C}{۲}=\frac{\pi}{۲}-\frac{B}{۲}$$

چنانچه از طرفین رابطهٔ اخیر تانژانت گرفته وبسط‌دهیم پس ازاختصار رابطهٔ مطلوب به‌دست می‌آید یعنی خواهیم‌داشت

$$tg\frac{A}{۲}tg\frac{B}{۲}+tg\frac{B}{۲}tg\frac{C}{۲}+tg\frac{C}{۲}tg\frac{A}{۲}=۱$$

پاسخهای درست رسیده از : محمد ساعی ـ حسن سعادتی ـ حسین ارشام ـ غلامعلی معول .

حل‌مسئلهٔ ۱۴۲۴ـ اگر شعاع قاعدهٔ استوانه وارتفاع آن را به‌ترتیب R و h نمایش دهیم داریم

$$v=\pi R^{۲}h \qquad (۱)$$

S سطح‌لیوان موردنظر عبارتست از

$$S=\pi R^{۲}+۲\pi Rh \qquad (۲)$$

چنانچه مقدار h را از رابطهٔ (۱) به‌دست آورده و در رابطهٔ(۲) قرار دهیم نتیجه می‌شود

$$S=\frac{۲v}{R}+\pi R^{۲} \quad \text{و} \quad S'=\frac{-۲v}{R^{۲}}+۲\pi R$$

S' وقتی صفر شده و تغییر علامت می‌دهد یعنی S وقتی مینیمم است که

$$R=\sqrt[۳]{\frac{v}{\pi}} \rightarrow h=R=\sqrt[۳]{\frac{v}{\pi}}$$

پاسخ درست رسیده از : حسین ارشام

حل مسئلهٔ ۱۴۲۵ـ به ترتیب زیر عمل می کنیم

$$m_{BC}=\frac{۰+۴}{۲-۰}=۲ \quad \text{و} \quad m_{BA}=-\frac{۱}{۲}$$

$$(AB):\ y-۰=-\frac{۱}{۲}(x-۲) \quad \text{یا}$$

$$y=-\frac{۱}{۲}x+۱$$

$$A(x=۰ \ \text{و}\ y=۱)$$

$$m_{AD}=m_{BC}=۲ \ \text{و}\ (AD):\ y=۲x+۱$$

$$D(\alpha \ \text{و}\ ۲\alpha+۱) \ \text{و}\ BD=\sqrt{۱۰}\rightarrow D(-۱ \ \text{و}\ -۱)$$

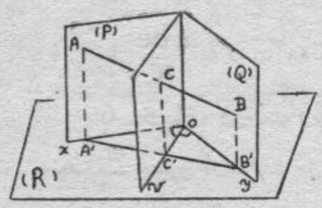
و بعد از آن مساحت ذوزنقه و اندازهٔ C حساب خواهد شد .

پاسخ درست رسیده از: محمود ترابی .

حل مسئلهٔ ۱۴۲۶ـ اگر $B(\alpha$ و $\alpha)$ رأس دیگری از لوزی باشد از رابطهٔ $OA=AB$ که برحسب α نوشته‌می‌شود جواب $\alpha=۴$ و $B(۴$ و $۴)$ به‌دست‌آمده و C رأس دیگرلوزی قرینهٔ A نسبت به نیمسازربع اول بوده $C(۱$ و $۳)$ می‌باشد .

پاسخهای درست رسیده از: محمود ترابی ـ حسین ارشام ـ غلامعلی معول .

حل مسئلهٔ ۱۴۲۷ـ اگر صفحه‌ای مانند R عمود بر دو صفحهٔ P و Q اختیارکنیم‌و فصل‌مشترکهای آن رابا صفحه‌های PوQ نیمساز فرجهٔ آنها به‌ترتیب‌با OxوOyوOv نمایش دهیم تصویر AB برصفحهٔ R خط $A'B'$ خواهدشد و مطابق شکل در مثلث $OA'B'$ داریم



$$\frac{A'C'}{B'C'}=\frac{A'O}{B'O}$$

$$\frac{A'C'}{B'C'}=\frac{AC}{BC}$$

$$A'O=AH \quad \text{و}$$

$$B'O=BK$$

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AH}{BK}$$

پاسخهای درست رسیده از: غلامعلی معول

کلاسهای ششم

حل مسئلهٔ ۱۴۲۸ـ به فرض

$$y_{۱}=\sqrt[۴]{(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)}-x$$

$$y_{۲}=\sqrt[۳]{(x+a')(x+b')(x+c')}-x$$

خواهیم داشت

$$\lim y = \lim y_1 - \lim y_2 \quad \text{و} \quad y = y_1 - y_2$$

با استفاده از اتحادهای

$$(A-B)(A^3+A^2B+AB^2+B^3)=A^4-B^4$$

$$(A-B)(A^2+AB+B^2)=A^3-B^3$$

و به فرض $A = \sqrt[4]{(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)}$ و $x=B$ خواهیم داشت

$$y_1 = \frac{(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)-x^4}{A^3+A^2B+AB^2+B^3}$$

عبارت صورت نسبت به x ازدرجهٔ سوم می‌باشد وچنانچه‌صورت و مخرج را بر x^3 تقسیم نموده و x را به سمت ∞ میل‌دهیم حد y_1 برابر خواهد شد با $\frac{a+b+c+d}{4}$ وبه‌طریق‌مشابه حد y_2 درازاء $x \to \infty$ برابر خواهد شد با $\frac{a'+b'+c'}{3}$ در نتیجه

$$\lim_{x\to\infty} y = \frac{a+b+c+d}{4} - \frac{a'+b'+c'}{3}$$

حل مسئلهٔ ۱۴۲۹ـ در هر مثلث داریم

$$a^2+c^2-b^2 = 2ac\cos B$$

$$\frac{a^2+c^2-b^2}{\operatorname{cotg} B} = \frac{2ac\cos B \cdot \sin B}{\cos B}$$

$$= 2ac\sin B = \frac{abc}{R}$$

و به همین ترتیب مقدار هر یك از دو کسر دیگر نیز برابر با $\frac{abc}{R}$ به دست‌آمده‌رابطهٔ داده‌شده محقق خواهدبود.

پاسخهای درست رسیده از : قاسم اخوان ـ منصور معتمدی ـ حسین ارشام ـ مرتضی رودگری ـ حسن سعادتی سید عباس موسویان .

حل مسئلهٔ ۱۴۳۰ ـ مقادیر $\cos A$ و $\cos B$ و $\cos C$ را از روابط کسینوسها در مثلث به دست‌آورده دررابطهٔ مفروض قرارمی‌دهیم که‌حاصل این عبارت بعد از اختصار برابر خواهد شد با ۳

پاسخهای‌درست‌رسیده از : مرتضی رودگری ـ حسین ارشام ـ قاسم اخوان

حل مسئلهٔ ۱۴۳۱ـ چون ضرایب a و b و c تصاعد هندسی با مجموع ۷ تشکیل می‌دهند داریم

$$b^2=ac \quad \text{و} \quad a+b+c=7$$

وچون ضریب زاویهٔ امتداد مجانب برابر با ۱ است پس :

$$1 = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \frac{ax^2+bx+c}{x\sqrt{x^2+2}} = a \quad \text{و} \quad a=1$$

و خواهیم داشت ($b+c=6$ و $b^2=c$) و از آنجا $b=2$ و -3 و $c=4$ و 9 به‌دست می‌آید

حل مسئلهٔ ۱۴۳۲ـ تعیین عدد $N=\overline{abc}$ باشرط زیر

$$(\overline{abc})_6 = (\overline{abc})_5 + (\overline{adc})_m$$

از بسط رابطه و مرتب نمودن‌آن خواهیم داشت

$$(m^2-11)a+(m-1)b+c=0$$

چون a و b و c مقادیر مثبت هستند و $m>1$ بناچار $m^2-11<0$ بوده و $m=3$ قابل قبول است (زیرا اگر $m=2$ فرض شود $a=b=c=1$ بوده و رابطه بر قرار نیست) و ازآنجا $-2a+2b+c=0$ و نتیجه می‌شود که $c=0$ و ۲ ($c<3$ و b و a) وبالاخره جوابهای مسئله‌به‌ترتیب زیر به‌دست می‌آید

$$N = 110 \text{ و } 220 \text{ و } 102 \text{ و } 212$$

حل مسئلهٔ ۱۴۳۳ـ در مثلث MFF' به فرض $MF=m$ و $MF'=n$ داریم

$$tg\frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{(p-FF')(p-MF)}{p(p-MF')}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a-c)(a+c-m)}{(a+c)(a+c-n)}}$$

و

$$tg\frac{\omega'}{2} = \sqrt{\frac{(a-c)(a+c-n)}{(a+c)(a+c-m)}}$$

نتیجه خواهد شد

$$tg\frac{\omega}{2}\, tg\frac{\omega'}{2} = \frac{a-c}{a+c}$$

با توجه به فرمولهای مربوط به مقادیر شعاعهای دایره‌های محاطی داخلی و خارجی مثلث رابطه‌های دیگر محقق خواهد شد

پاسخ درست رسیده از: حسن سعادتی

حل‌مسئلهٔ ۱۴۳۴ـ اگر دایرهٔ به‌قطر $A_1A'_1=2a$ دایره‌ای باشدکه تصویرآن بیضی مفروض و $P'Q'$ و $R'S'$ دو وتر از این دایره باشدکه در M' متعامد بوده و PQ و RS تصویرهای‌آنها باشد داریم

$$M'P'=MP \;،\; M'Q'=MQ \quad \text{و}$$

$$MR=M'R'\times\frac{b}{a} \quad \text{و} \quad MS=M'S'\times\frac{b}{a}$$

$$M'P'\cdot M'Q'=M'R'\cdot M'S'$$

$$MP\cdot MQ = MR\cdot MS\cdot\frac{b^2}{a^2}$$ یا

$$\frac{MP\cdot MQ}{MR\cdot MS}=\frac{b^2}{a^2}$$

حل مسئلهٔ ۱۴۳۵ـ قوت نقطهٔ C نسبت به دایرهٔ (E و B و A) عبارتست از

$$\overline{CN}\cdot\overline{CE}=\overline{CA}\cdot\overline{CB}=K$$

و نتیجه می‌شود که در انعکاس به‌قطب C و بـه قوت K نقطهٔ M منعکس نقطهٔ E می‌باشد ووقتی E عمودمنصف AB را بپیماید M دایرهٔ منعکس این عمود منصف را خواهد پیمود .

حل مسئلهٔ ۱۴۳۶ـ در هـر چهارضلعی خطوطی کـه اوساط اضلاع مقابل را به یکدیگر وصل می کنند باخطی که اوساط دو قطررا به هم وصل می کند در یك نقطه متقارب بوده ومنصف یکدیگر می باشند . درچهار ضلعی محاطی ABCM اگر I وسط قطر AC و J وسط قطر BM باشد P وسط I J خواهد بود وچون B ثابت است و M بر دایره حرکت می کند مکان J دایره‌ای مانند (Γ') که در تجانس $(B$ و $\frac{1}{2})$ مجانس دایرهٔ (Γ) می باشد ومکان P دایره‌ای است مانند (Γ'') که‌درتجانس $(I$ و $\frac{1}{2})$مجانس دایرهٔ (Γ') است

حل مسئلهٔ ۱۴۳۷ـ معادلهٔ درجهٔ سوم زیررا در نظر می گیریم

$$z^3-az^2+(a^2-1)z-a^3+2=0$$

بنابر روابط داده شده x و y و ۲ جوابهای معادلهٔ بالا هستند و بنابر روابط بین ریشه‌ها و ضرایب معادلهٔ درجهٔ سوم روابط مطلوب محقق خواهد شد .

حل مسئلهٔ ۱۴۳۸ـ

$7777=\text{مضرب}13+3$ و $4444=\text{مضرب}13-3$

$$7777^{4444}=(\text{مضرب}13+3)^{4444}=\text{مضرب}13+$$

$$(3^4)^{1111}=\text{مضرب }13+(\text{مضرب}13+3)^{1111}$$

$$=\text{مضرب}13+3^{1111}$$

$$4444^{7777}=\text{مضرب }13+(-3^7)^{111}$$

$$=\text{مضرب }13-3^{1111}$$

$$7777^{4444}+4444^{7777}=\text{مضرب }13$$

پاسخ درست رسیده از حسین ارشام .

حل مسئلهٔ ۱۴۳۹ـ از بسط رابطه نتیجه خواهد شد.

$$259(2d+c)=40b+585e-156a$$

$$5b+4e-2a=\text{مضرب }7$$

$b<3$ است زیرا رقم b در دستگاه به مبنای ۳ به‌کار رفته است و چون $b>a\neq 0$ پس $a=1$ و $b=2$ و ازآنجا $e=5$ و داریم

$2d+c=11$ و $259(2d+c)=2849$

c باید فرد باشد و چون $c<6$ پس $c=3$ قابل قبول بوده و $d=4$ می‌شود

حل مسئلهٔ ۱۴۴۰ـ عـدد مفروض بـه صورت زیـر نوشته می‌شود

$$\overline{abc}(1000^5+1000^4+1000^3+1000^2+1000+1)=\frac{\overline{abc}(1000^6-1)}{999}=\frac{\overline{aba}(10^{18}-1)}{999}$$

بنابر قضیهٔ فرما این عدد بر ۱۹ قابل قسمت است

حل مسئلهٔ ۱۴۴۱ـ رابطهٔ تابع به صورت زیر نوشته مـی‌شود

$$\frac{1}{y^2}=x^2+ax+b$$

$$\frac{-2y'}{y^3}=2x+a \quad \text{یا} \quad \frac{y'}{y^3}=-x+\frac{a}{2}$$

$$\frac{y''y^3-3y'^2y^2}{y^6}=-1 \quad \text{یا} \quad y''y-3y'^2+y^4=0$$

پاسخ رسیده از حسین ارشام .

حـــــل مسائـــل شماره ۱۱

کلاس چهارم طبیعی

حل مسئلهٔ ۱۷۲۸ ـ به فـرض اینکه a عـدد مثبت باشد داریم

$(a-1)^2=a^2-2a+1\geq 0$ یا $a^2+1\geq 2a$ و

$\frac{a^2+1}{a}\geq 2$ یا $a+\frac{1}{a}\geq 2$

تساوی وقتی است که $a=1$ باشد

ثانیاً داریم

$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ و $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 0$ و $\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\geq 0$

از جمع نظیر به‌نظیر طرفین نا مساویهای بالا به دست خواهد آمد

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}\geqslant 6$$

پاسخهای درست رسیده از : علی اصغر یوسفی نظر حسینی یزدی ـ فریدون امین‌زاده دبیرستان فردوسی رضائیهٔ ـ دانش عمرانی دبیرستان هدایت سنندج ـ حسین ذوالفقاری دبیرستان قناد بابل ـ ابوالحسن گوران ـ علیرضا حق شناس دبیرستان شاهپور رشت ـ عبدالحسین قانع دبیرستان ایرانشهر یزد ـ محمد صدیق دبیرستان شاهپور رشت ـ حسین جعفری ـ سید محمدکاظم عابدینی ـ عباسعلی کوچکی دبیرستان ایرانشهر یزد ـ خسرو ستوده دبیرستان شاهپور شیراز ـ ولی‌الله اردشیری ـ

حل مسئلهٔ ۱۷۲۹ ـ عبارتهای A و B به صورت زیر تجزیه می‌شوند

$$A=(8x-7)(1-4x) \quad \text{و} \quad B=(x+2)(1-4x)$$

$$1)\quad \frac{A}{B}=\frac{8x-7}{x+2}$$

$$2)\quad \frac{A}{B}=8 \rightarrow 8x-7=8x+16 \quad \text{و} \quad -7=16$$

غیر ممکن است

$$3)\quad \frac{A}{B}<1 \quad \text{یا} \quad \frac{8x-7}{x+2}-1<0 \quad \text{یا}$$

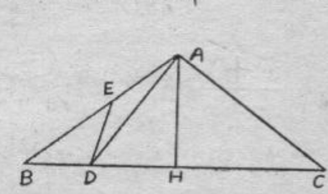
$$\frac{7x-9}{x+2}<0 \quad \text{و} \quad -2<x<\frac{9}{7}$$

پاسخهای درست رسیده از: حسین تبریزی دبیرستان ناصرخسرو ـ ولی‌الله اردشیری ـ سیدمحمدکاظم عابدینی ـ حسین جعفری ـ عبدالحسین قانع ـ ابوالحسن گوران ـ فریدون امین‌زاده ـ دانش عمرانی ـ علی صحرا نورد دبیرستان محمد قزوینی ـ سید مهدی حمیدی دبیرستان شاهپور شیراز ـ علی‌اکبر قولیج ـ حسین امین الهی کلاس سوم دبیرستان امروز ـ احمد ارتفاعی ـ فرهنگ نادری علیزاده دبیرستان فردوسی تبریز (حل کامل مسائل ارسال شود) ـ طلعت مشکین دبیرستان فاطمه سیاح .

حل مسئلهٔ ۱۷۳۰ ـ ارتفاع AH از مثلث را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH داریم

$$\overline{AB}^2=\overline{BH}^2+\overline{AH}^2=6400+3600=10000$$

$$AB=AC=100$$



$$\frac{BD}{AB}=\frac{35}{100}=\frac{7}{20} \quad \text{و} \quad \frac{BE}{BC}=\frac{56}{160}=\frac{7}{20}$$

دو ضلع از مثلث BDE با دو ضلع از مثلث ABC نظیر به نظیر متناسب بوده و زاویهٔ بین آنها مشترک است پس دو مثلث متشابهند با نسبت تشابه ۷ بر ۲۰ و در ضمن $DE=BD=35$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADH داریم

$$\overline{AD}^2=\overline{AH}^2+\overline{DH}^2=3600+2025=5625$$

$$AD=75 \quad \text{و} \quad \overline{AD}^2+\overline{AC}^2=5625+10000=15625=\overline{DC}^2$$

و مثلث ACD در زاویهٔ A قائمه است

پاسخهای درست رسیده از : سید مهدی حمیدی ـ دانش عمرانی ـ فریدون امین‌زاده ـ عبدالحسین قانع ـ حسین جعفری عباسعلی کوچکی ـ ولی‌الله اردشیری ـ حسین تبریزی ـ حسن منصوری کلاس دوم دبیرستان رهنما ـ حسین مظفریان رضائیه هوشمند وجدانی کلاس سوم دبیرستان رضا پهلوی تجریش ـ عبدالرحمن چگنی زاده دبیرستان پهلوی دزفول ـ طلعت مشکین ناصر نهاوندی پور دبیرستان مروی ـ بهنام زرقانی ـ حسن یزدانی نژاد ـ ستار اسفندیاری ـ محسن اسفندیاری دبیرستان دکتر نصیری ـ رحمت‌الله صالحی دبیرستان امیرکبیر

کلاس چهارم ریاضی

حل مسئلهٔ ۱۷۳۱ ـ طرفین رابطه را به توان ۲ می‌رسانیم خواهیم داشت .

$$\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^2=\frac{(2+\sqrt{3})^2}{4+\sqrt{3}+2\sqrt{4+2\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{(2+\sqrt{3})^2}{4+\sqrt{3}+2(\sqrt{3}+1)}=\frac{(2+\sqrt{3})^2}{3(2+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{2+\sqrt{3}}{3}$$

$$\left(\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^2=\dots=\frac{2-\sqrt{3}}{3}$$

$$2\times\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\times\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{2\times 1}{2-\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}-1}$$

$$=\frac{2}{2-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}+1-1}=\frac{2}{3}$$

و حاصل طرف اول برابر خواهد شد با

$$\frac{2+\sqrt{3}}{3}+\frac{2-\sqrt{3}}{3}+\frac{2}{3}=2$$

پاسخهای درست رسیده از : عباسعلی کوچکی ـ

حسین تبریزی ـ هوشمند وجدانی ـ ولی‌الله اردشیری ـ عبدالحسین‌قانع ـ سید محمدکاظم عابدینی ـ عباسعلی نقدی دبیرستان امیرکبیرلنگرود ـ حسین نجفی ثانی دبیرستان‌البرز فربده رباطی دبیرستان نوباوگان ـ همایون مهاجر دبیرستان هدف ۳ احمد میرنژاد ـ ابراهیم اوصیاء دبیرستان قناد بابل کامبیز علوی دبیرستان هدف ۱ـ دانش‌عمرانی ـ احمد داروئی دبیرستان قریب ـ عبدالرحیم حاج طلب دبیرستان قطب دزفول سعید شریعتمداری دبیرستان هدف ۱

حل مسئلهٔ ۱۷۳۲ ـ رابطهٔ مفروض به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\sqrt[p]{b+x}\left(\frac{x+b}{bx}\right)=\frac{c}{a}\sqrt[p]{x}$$

$$\frac{(x+b)^{p+1}}{b^p x^p}=\frac{c^p x}{a^p}$$

$$\text{یا}\quad (x+b)^{p+1}=\frac{c^p b^p}{a^p}x^{p+1}$$

$$\frac{x+b}{x}=\sqrt[p+1]{\frac{c^p b^p}{a^p}} \quad \text{و} \quad x=\frac{b}{\sqrt[p+1]{\dfrac{c^p b^p}{a^p}}-1}$$

پاسخهای درست رسیده از : احمد داروئی ـ دانش عمرانی ـ کامبیز علوی نژاد ـ عبدالحسین قانع ـ عباسعلی کوچکی ولی‌الله اردشیری

پاسخهای رسیده است : فریده رباطی ـ حجت‌الله افقهی ـ حسین تبریزی

حل مسئلهٔ ۱۷۳۳ ـ معادله‌به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)^2=4 \quad \text{یا} \quad \frac{x}{a}+\frac{a}{x}\pm 2=0$$

$$x^2+a^2\pm 2ax=0 \quad \text{یا} \quad (x\pm a)^2=0 \quad \text{و}$$

$$x=\pm a$$

پاسخهای درست رسیده از : محمدرضا عباس زاده ثانی دبیرستان خوارزمی ـ همایون مهاجری ـ حسین نجفی ثانی ـ عباسعلی نقدی ـ سیدمحمدکاظم‌عابدینی ـ ولی‌الله‌اردشیری هوشمند وجدانی ـ حسین تبریزی عباسعلی‌ـ کوچکی ـ حسین مظفریان ـ فریدون امین زاده ـ حجت‌الله‌افقهی ـ کامبیزعلوی نژاد ـ ابراهیم اوصیاء ـ هوشنگ شهریاری دبیرستان کرمان عبدالحسین قانع ـ پرویز برادران شکوهی دبیرستان فردوسی تبریز ـ سیدمهدی نوریان‌نجف‌آباد ـ سیدمهدی حمیدی ـ ناصر نهاوندی‌پور ـ بهنام زرقانی ـ حسین‌ذوالفقاری ـ حسین‌جعفری ـ علی اکبرقولیج ـ علی‌اصغریوسفی‌نظرحسینی ـ سیدهرمزرحمانی ـ فریده رباطی ـ احمدوماهرخ‌لسان‌پزشکی ـ زهراثباتی دبیرستان‌حجت احمدارتفاعی ـ حسین امین‌الهی ـ علی‌صحرا نورد ـ ستاراسفندیاری رحمت‌الله صالحی ـ داود فریقی دبیرستان داورپناه ـ احمد داروئی ـ غلامحسین طاهری افشار ـ محمد رضا رستم تباح دبیرستان‌قناد ـ محمدکریم روشن ـ حسین امیرحسینی دبیرستان دارالفنون‌شهریارمهاجر ـ ژیلاشقاقی ـ اسماعیل گلجاریان‌دبیرستان قنادبابل ـ رمضان صیامی دبیرستان البرز ـ منصور نهاوندی پور عبدالرحمن چگنی‌زاده .

حل مسئلهٔ ۱۷۳۴ ـ عبارت داده شده به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$S=2\times 2^{\frac{2}{3}}\times 2^{\left(\frac{2}{3}\right)^2}\times\cdots\times 2^{\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$S=2^{1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$\lim\left[1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=3$$

$$\lim S=2^3=8$$

پاسخهای‌درست‌رسیده از : عبدالحسین قانع ـ دانش عمرانی ـ کامبیزعلوی‌نژاد ـ عباسعلی کوچکی ـ حجت‌الله افقهی احمدداروئی ـ رمضان صیامی ـ اسفندیار حق‌جو دبیرستان‌شاهپور شیراز ـ سید مهدی حمیدی .

حل مسئلهٔ ۱۷۳۵ ـ با توجه به رابطهٔ $xz=y^2$ خواهیم داشت

$$\frac{1}{3}(x+y+z)\sqrt[3]{xyz}=\frac{1}{3}(x+y+z)\sqrt[3]{y^3}$$

$$=\frac{1}{3}(xy+y^2+yz)=\frac{1}{3}(xy+xz+yz)$$

پاسخهای رسیده‌درست از : طلعت‌مشکین ـ سیدمهدی حمیدی ـ اسفندیار حق جو ـ منصور نهاوندی پور ـ عبدالرحمن چگنی‌زاده ـ شهریار مهاجر ـ محمد رضا رستم شباح ـ ولی‌الله اردشیری ـ عباسعلی کوچکی ـ کامبیزعلوی نژاد ـ دانش‌عمرانی عبدالحسین قانع ـ رحمت‌الله صالحی ـ علی صحرانورد ـ احمد ارتفاعی ـ علی‌اکبرقولیج ـ حسین ذوالفقاری ـ ناصرنهاوندی‌پور ـ محمودامجدی دبیرستان صفائی سمنان ـ حجت‌الله افقهی ـ حسین تبریزی ـ همایون مهاجری ـ محمد رضا عباس زاده حسن‌یزدانی نژاد ـ ابراهیم اوصیاء ـ جلیل مکی ـ احمدداروئی محسن‌اسفندیاری ـ ابوالحسن گوران ـ بهنام زرقانی ـ غلامحسین طاهری افشار ـ محمدکریم روشن ـ اسماعیل گلجاریان سید هرمز رحمانی .

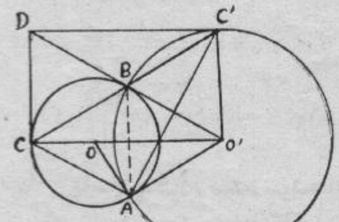
حل مسئلهٔ ۱۷۳۶ـ هر یك از مثلثهای BMI و CNI متساوی الساقین بوده و $BM=MI$ و $CN=NI$ است پس $MN=BM+CN$ و در مثلث قائم‌الزاویهٔ AMN داریم

$$AM.AN=AK.MN \quad \text{یا} \quad AK=\frac{AM.AN}{BM+CN}$$

چنانچه AK نصف ارتفاع AH باشد N وسط AC بوده و $IN=NC=AN$ می‌باشد و لازم می‌آید که زاویهٔ AIC قائمه باشد و این درصورتی است که نصف زاویهٔ C برابر با ۴۵° و تمام زاویهٔ C قائمه باشد که غیر ممکن است .

پاسخهای درست رسیده از : علی اکبر قولیج ـ عبدالحسین قانع ـ دانش عمرانی ـ حسن منصوری کلاس دوم دبیرستان رهنما ـ عباسعلی کوچکی ـ حسین نجفی ثانی ـ حسین جعفری ـ بهنام زرقانی ـ شهریار مهاجر ـ

حل مسئلهٔ ۱۷۳۷ ـ از مثلث قائم‌الزاویهٔ AOO' $O'A=R\sqrt{3}$ به دست می‌آید



۲) چون ضلع OA از مثلث قائم‌الزاویهٔ OAO' نصف وتر OO' است اندازهٔ زاویهٔ $AO'O$ برابر ۳۰° و اندازهٔ زاویهٔ AOO' برابر ۶۰° است

۳) دو نقطهٔ A و B نسبت به OO' قرینه‌اند پس

$$CB=CA=AB$$

زیرا اندازهٔ کمان AC برابر با اندازهٔ زاویهٔ COA و برابر با ۱۲۰° است . مثلث ABO' نیز متساوی الاضلاع است و $AO'=O'B=AB$ و چون زاویهٔ $O'BC'$ زاویهٔ خارجی مثلث CBO' است اندازهٔ آن برابر با دو برابر اندازهٔ زاویهٔ BCO' و برابر با ۶۰° به دست‌می‌آید پس مثلث $BC'O'$ متساوی‌الاضلاع بوده و چهار ضلعی $ABC'O'$ لوزی می‌باشد و ازآنجا اندازهٔ زاویهٔ $BC'A$ برابر ۳۰° و اززاویهٔ BCA برابر ۶۰° بوده مثلث ACC' با مثلث AOO' متشابه است. وچون $AC=AO'=R\sqrt{3}$ نسبت تشابه دومثلث برابر با

$$\frac{AC}{AO}=\frac{R\sqrt{3}}{R}=\sqrt{3}$$

است و داریم

$$CC'=2CB=2R\sqrt{3} \quad \text{و} \quad AC'=3R$$

۴) چهار ضلعی $CDC'O'$ مستطیل است و با توجه به اندازه‌های زاویه‌های حساب شده معلوم خواهدشد که دو قطر آن از B گذشته و B مرکز تقارن آن می باشد

پاسخهای رسیده از : طلعت مشکین ـ زهرا اثباتی ـ داوود پرویزی از ساوه ـ حسین جعفری ـ حسین نجفی ثانی ـ عباسعلی کوچکی ـ حسن منصوری کلاس دوم ـ دانش عمرانی ـ علی اکبر قولیج ـ هوشمند وجدانی ـ محمود امجدی ـ احمد مشرفی ـ عباسعلی نقدی ـ ابراهیم اوصیاء ـ هوشنگ شهریاری حجت‌الله افقهی ـ احمد میر نژاد ـ محسن اسفندیاری ـ ناصر نهاوندی پور ـ احمد ارتفاعی ـ عبدالحسین قانع ـ بهنام زرقانی احمد داروئی ـ فریدون امین زاده ـ اسماعیل گلجاریان

کلاس پنجم طبیعی

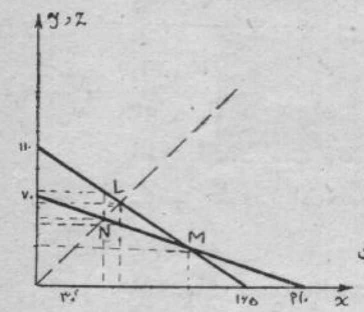
حل مسئلهٔ ۱۷۳۸ـ بنابر فرض داریم

$$x+y+z=180^\circ \quad \text{و} \quad z=\frac{y}{2}+15^\circ$$

بین دو رابطه یك دفعه z و یك دفعه y را حذف می‌کنیم ، نتیجه می‌شود

$$y=-\frac{2}{3}x+110 \quad \text{و} \quad z=-\frac{1}{3}x+70$$

۲) نمایش هندسی دو تابع طبق شکل زیر است (x و y و z مقادیر مثبت می‌باشند)



۳)ازروی نمودارمعلوم می‌شود که درازاء۳مقدارازx مثلث ABC متساوی‌الساقین‌می‌باشد

اولا در ازاء طول نقطهٔ M که درآن $y=z$

ثانیاً درازاء طول نقطهٔ N (نقطهٔ تلاقی نمودار تابع z بانیمساز محورها) که درآن $x=z$

ثالثاً درازاء طول نقطهٔ L که درآن $x=y$

مثلث ABC هیچگاه نمی‌تواند متساوی‌الاضلاع باشد زیرا برای این‌کار لازم است که نقطهٔ تلاقی نمودارهای دوتابع برنیمساز محورها واقع باشد وچنین نیست

۴) از راه محاسبه کافی است که دستگاههای زیر را حل کنید

$$\begin{cases} x+y+z=180 \\ y=2z-30 \\ y=z \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x=120^\circ \\ y=30^\circ \\ z=30^\circ \end{cases} \quad \text{و}$$

$$\begin{cases} x+y+z=180^\circ \\ y=2z-30 \\ z=x \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x=52.5^\circ \\ y=75^\circ \\ z=52.5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=180 \\ y=2z-30 \\ y=x \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{array}{|l} x=66^\circ \\ y=66^\circ \\ z=48^\circ \end{array}$$

حل مسئلهٔ ۱۷۳۹ ـ اولا داریم

$$\sin(-\frac{\pi}{2}-x) = -\sin(\frac{\pi}{2}+x) = -\cos x$$ و

$$\sin(\frac{5\pi}{2}+x) = \sin(\frac{\pi}{2}+x) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{-\pi}{2}+x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$$ و

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right) = -\sin x$$

$$y = -\cos x + \cos x + \sin x + \sin x = 2\sin x$$

$$tg\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -cotg\,x \quad \text{و} \quad tg\left(x+\frac{3\pi}{2}\right) = -cotg\,x$$

$$tg\left(x-\frac{5\pi}{2}\right) = -tg\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -cotg\,x$$

و $$tg\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = cotg\,x$$

$$z = -cotg\,x - cotg\,x - cotg\,x + cotg\,x = -2\,cotg\,x$$

ثانیاً داریم

$$y^2z - z = 0 \quad \text{یا} \quad z(y^2-1) = 0$$

یا $$-2\,cotg\,x\,(4\sin^2 x - 1) = 0$$

$$cotg\,x = 0 \quad \text{و} \quad x = K\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$4\sin^2 x - 1 = 0 \quad \sin x = \pm\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad x = K\pi \mp \frac{\pi}{6}$$

ثالثاً به فرض $\sin x = \frac{3}{5}$ و x کمان منفرجه:

$$\cos x = -\sqrt{1-\sin^2 x} = -\frac{4}{5}$$ و $y = \frac{6}{5}$ رادیان

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$

$$= -\frac{4}{5}\cos\frac{6}{5} - \frac{3}{5}\sin\frac{6}{5}$$

پاسخهای رسیده از : حجت‌الله افقهی ـ عباسعلی کوچکی .

کلاس پنجم ریاضی

حل مسئلهٔ ۱۷۴۰ ـ برای اینکه دوخط D و Δ متعامد باشند باید .

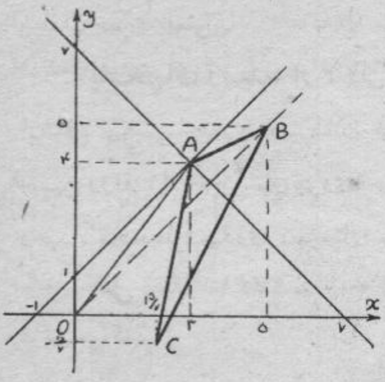
$$m_D \cdot m_\Delta = -1 \quad \text{یا} \quad a(a-2) = -1$$

$$a^2 - 2a + 1 = 0 \quad \text{و} \quad a = 1 \quad \text{یا}$$

وچون دو خط درنقطهٔ بعرض ۴ متقاطعندپس

$$\begin{cases} 4 = x+b-4 \\ 4 = -x+b+2 \end{cases} \quad \text{و} \quad b=5 \quad \text{و} \quad x=3$$

۲) الف ـ دوخط $y=x+1$ و $y=-x+7$ مطابق شکل رسم شده‌اند



ب ـ داریم $A(3, 4)$ و فرض می‌کنیم $B(\alpha, \alpha)$ اگر OA قاعدهٔ مثلث ABO اختیار شود ارتفاع آن برابراست بافاصلهٔ نقطهٔ B ازخط OA، معادلهٔ OA عبارتست از $4x - 3y = 0$ وفاصلهٔ B از OA می‌شود

$$d = \frac{|3\alpha - 4\alpha|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|\alpha|}{5} \quad \text{و} \quad OA = \sqrt{9+16} = 5$$

$$S = \frac{5}{2} \times \frac{|\alpha|}{5} \quad \text{یا} \quad 2.5 = \frac{|\alpha|}{2} \quad \text{و} \quad \alpha = \pm 5$$

وچون B بر نیمساز ربع اول واقع است $\alpha = 5$ قابل قبول است (در صورت مسئله اشتباه شده و عدد مساحت مثلث ۱۷٫۵ چاپ شده است که درازاء آن $\alpha = 35$ به دست می‌آید راه عمل فرق نمی‌کند)

ج ـ به فرض $A(4, 3)$ و $B(5, 5)$ واینکه O مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC باشد شعاع این دایره برابر است با فاصلهٔ O تا هر یك ازاضلاع AB و AC و BC. معادلهٔ AB عبارتست از $2y - x - 5 = 0$ و فاصلهٔ O تا این خط برابراست با $\sqrt{5}$ معادلهٔ خطی که با ضریب زاویهٔ m بر A گذشته‌است عبارتست از $y = mx - 3m + 4$، فاصلهٔ O را تا این خط تعیین کرده مساوی $\sqrt{5}$ قرارمی‌دهیم

$$\frac{|-3m+4|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{5} \quad \text{یا} \quad 4m^2 - 24m + 11 = 0 \quad \text{و}$$

$m = \frac{1}{2}$ و $\frac{11}{2}$ درازاء $m = \frac{1}{2}$ معادلهٔ AB حاصل می‌شود و درازاء $m = \frac{11}{2}$ معادلهٔ خط AC به صورت $y = \frac{11}{2}x - \frac{25}{2}$ به‌دست‌می‌آید . به طریق مشابه معادلهٔ خط BC به‌صورت $y = -2x - 5$ به‌دست‌می‌آید. بامعلوم بودن معادله‌های

AC و BC مختصات C حساب می‌شود $C\left(\frac{15}{7}, -\frac{5}{7}\right)$.

به سادگی معلوم خواهد شدکه O درخارج مثلث ABC واقع بوده ومرکز دایرهٔ محاطی خارجی مثلث می‌باشد .

پاسخهای درست رسیده‌از: مصطفی آقاجانی دبیرستان جلوه ـ محمدکریم روشن دبیرستان قناد بابل ـ حمید نادری ـ شعار ـ حسین نعمتی .

پاسخهای رسیده از : ولی‌الله اردشیری ـ بهروز ارشاقی ـ عیسی حیدری دبیرستان خرد ـ حجت‌الله افقهی ـ حسین رزاقی‌زاده دبیرستان مروی ـ حبیب‌الله پوردشتی دبیرستان وحید ـ محمدعلی مهدوی دبیرستان سخن .

حل مسئلهٔ ۱۷۴۱ ـ تابع $f(x)$ را به صورت زیر فرض می کنیم

$$y=f(x)=A(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\dots(x-b)^{\lambda}+K$$

مشتق تابع به صورت زیرخواهد بود

$$y'=f'(x)=A(x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1}\dots(x-b)^{\lambda-1}Q(x)$$

چون y بر y' بخش پذیر است بنابراین $K=0$ و $Q(x)=1$ وچون تابع را نسبت به x ازدرجهٔ m فرض‌کنیم داریم

$$\alpha+\beta+\gamma+\dots+\lambda=m$$

وچنانچه‌تعداد عاملهای تابع را n فرض‌کنیم درجهٔ چند جمله‌ای مشتق برابر شده است با

$$\alpha+\beta+\dots+\lambda-n=m-n$$

اما چون اختلاف درجهٔ تابع ومشتق یك واحد است پس $n=1$ و تابع به صورت زیرخواهد بود

$$y=f(x)=A(x-a)^m$$

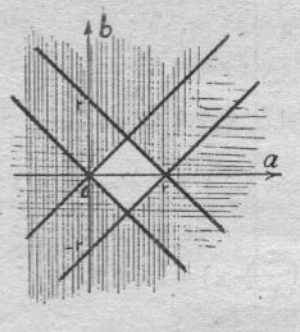
و چون $f(0)=1$ و چون $f(1)=0$ پس $a=1$ و پس $A=(-1)^m$ و در نتیجه تابع مطلوب عبارت خواهد شد از :

$$x=(-1)^m(x-1)^m=(1-x)^m$$

پاسخهای رسیده از : فیروزبایرامی دبیرستان ادیب ـ خسرو موحد دبیرستان ادیب (هر دو نفر از معلومات خارج از برنامهٔ متوسطه استفاده نموده و جواب صحیح را به دست آورده‌اند)

حل مسئلهٔ ۱۷۴۲ ـ از جمع و تفرین نظیر به نظیر طرفین دومعادله حاصل می‌شود .

$$\cos 2y=a+b-1 \quad \text{و} \quad \cos 2x=b-a+1$$



ثانیاً برای آنکه دستگاه ممکن باشدلازم وکافی است

$$\begin{cases}|a+b-1|\leqslant 1\\ |b-a+1|\leqslant 1\end{cases}$$

یا

$$\begin{cases}(a+b-1)^2-1\leqslant 0\\ (b-a+1)^2-1\leqslant 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a+b)(a+b-2)\leqslant 0\\ (b-a)(b-a+2)\leqslant 0\end{cases}$$

نمایش هندسی هریك از معادله های $a+b=0$ و .... طبق شکل‌رسم شده است و ناحیه‌ای که هاشور نخورده است مکان $M(a,b)$ است برای آنکه دستگاه مفروض ممکن باشد

ثالثاً به فرض مقادیر داده شده a وb داریم

$$\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{و} \quad 2x=2k\pi\pm\frac{\pi}{6} \quad \text{و} \quad x=k\pi\pm\frac{\pi}{12}$$

$$\cos 2y=\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad 2y=2k\pi\pm\frac{\pi}{3} \quad \text{و} \quad y=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$$

پاسخهای درست رسیده از : محمد علی مهدوی ـ عیسی حیدری ـ حبیب‌الله سلیم‌زاده دبیرستان امیرکبیرتویسرکان نصرت‌الله آقاجانی ـ حجت‌الله‌افقهی ـ فیروز بایرامی ـ خسرو موحد .

پاسخهای رسیده از: بهروز ساسانی‌دبیرستان‌کاظم‌زاده ایرانشهر ـ حسین نعمتی ـ غلامحسین طاهری افشار ـ حبیب‌الله پوردشتی وحسین رزاقی‌زاده .

حل مسئلهٔ۱۷۴۳ـ صفحهٔH را عمود بر Δ اختیارمی‌کنیم ونقطهٔ‌تلاقی آن‌را باΔ به Oوتصویرهای نقاط MوNوK و A و BوCوD را برصفحهٔH با M' و N' و ... و D' می‌نمائیم

۱) مثلث OM'K' متساوی‌الساقین است و N' وسط M'K' واقع بوده ودرنتیجه N وسط MK می‌باشد

۲) بنابرخاصیت نیساز زاویه‌های داخلی وخارجی مثلث داریم

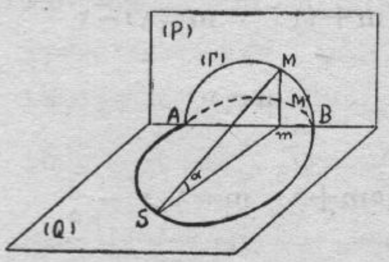
$$\frac{C'A'}{C'B'}=\frac{D'A'}{D'B'}=\frac{OA'}{OB'}$$

وچون $OA'=a$ و $OB'=b$ و نسبت بین‌تصویرهای دو قطعه خط واقع در یك امتداد برنسبت‌آن دو قطعه خط است بنابراین

$$\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}=\frac{a}{b}$$

پاسخهای درست رسیده از : نصرالله آقاجانی ـ محمد علی مهدوی ـ غلامحسین طاهری‌افشاری ـ حسین نعمتی بهروز ساسانی .

حل مسئلهٔ ۱۷۴۴ ـ α زاویهٔ SM باصفحهٔQ میباشد (درچاپ صورت مسئله به جای Q اشتباهیP چاپ شده است) m بر AB. فصل مشترک دوصفحه واقع خواهد شد

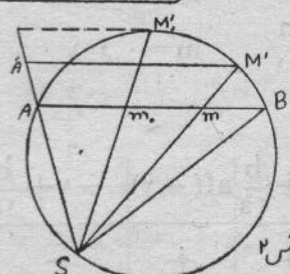


در مثلث ـ قائم‌الزاویهٔ SMm داریم

$$tg\alpha=\frac{Mm}{Sm}$$

یا

$$tg^۲\alpha=\frac{\overline{Mm}^۲}{\overline{Sm}^۲}$$



امـا در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABM داریم

$$\overline{Mm}^۲=Am\cdot mB$$

ودردایرهٔABS داریم

$$AM\cdot mB=Sm\cdot mM'$$

بنابراین نتیجه می‌شود

$$tg^۲\alpha=\frac{Sm\cdot mM'}{\overline{Sm}^۲}=\frac{mM'}{Sm}$$

۲) زاویهٔ حادهٔ α وقتی ماکزیمم است‌که $\frac{mM'}{Sm}$ ماکزیمم باشد . صفحهٔ Q را مانند شکل ۲ در نظر می گیریم بنابرقضیهٔ تالس داریم

$$\frac{mM'}{Sm}=\frac{AA'}{SA}$$

چون SA دارای مقدار ثابت است هـریك از نسبتهای بالا و درنتیجه $tg\alpha$ و ازآنجا α وقتی ماکزیمم خواهد بودکه AA' ماکزیمم باشد واین درحالتی است‌که $M'A'$ بر دایره مماس باشد و برای این‌کار بایدکه M' به وضع $M'_۰$ وسـط کمان AB باشد و دراین صورت $SM'_۰$ نیمساز زاویهٔ ASB بوده و $m_۰$ وازآنجا $M_۰$ مشخص می‌شود .

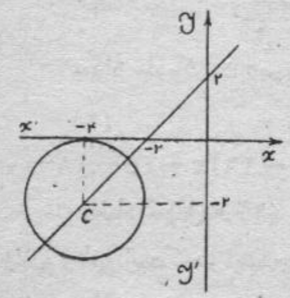
پاسخ درست رسیده از : حسین نعمتی

پاسخ رسیده از : نصرالله آقاجانی

کلاس ششم طبیعی

حـل مسئلـهٔ ۱۷۴۵ ـ وقتی که دایره‌ای به مرکز C $(\alpha$ و $\beta)$ درنقطهٔ به طول a بر $x'x$ مماس باشد چون شعاع نقطهٔ تماس بر $x'x$ عمود است لذا دو نقطهٔ C و نقطهٔ تمـاس دارای یك طول هستند یعنی $a=\alpha$ و چون فاصلهٔ خط مماس بردایره تا مرکز دایره برابر باشعاع دایره است پس$R=|\beta|$ وهمچنین وقتی دایره بر $y'y$ مماس باشد $\beta=b$ و $R=|\alpha|$ خواهد بود .

ثانیاً وقتی‌که طول نقطهٔ تماس دایره با $x'x$ برابر با ٤− باشد $\alpha=-٤$ است وچون مرکز دایره برخط بمعادلهٔ $y=x+۲$ واقع است ، و $\beta=-٤+۲=-۲$ و $R=|-۲|=۲$ بـوده معادلهٔ دایرهٔ مطلوب عبارت خواهد شد از



$$(x+٤)^۲+(y+۲)^۲=٤$$

$$x^۲+y^۲+۸x+٤y+۱٦=۰$$

پـاسخهای درست رسیده از : نصرت‌الله آقـاجانی کلاس پنجم دبیرستان جلوه ـ هادی‌آموزگار دبیرستان رازی شاهی ـ ولی‌الله اردشیری ـ رضاماژین کرمانشاه ـ رمضانعلی صفائی پنجم ریاضی دبیرستان خرد .

پاسخهای رسیده از:قاسم‌انتصاری‌ـفرامرزپورقلی‌زاده محمدکریم روشن پنجم ریاضی دبیرستان قنادبابل

حل‌مسئلهٔ ۱۷۴٦ـ به‌ترتیب زیر عمل می کنیم

$$۲\sin^۲x=۱-\cos۲x=۱+\sin۳x$$

$$\sin۳x=-\sin\left(\frac{\pi}{۲}+۲x\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{۲}-۲x\right)$$

و $$۳x+\left(-\frac{\pi}{۲}-۲x\right)=۲K\pi+\pi$$

$$x=۲K\pi+\frac{۳\pi}{۲}$$

و $$۳x-\left(-\frac{\pi}{۲}-۲x\right)=۲K\pi$$

$$x=\frac{۲K\pi}{۵}-\frac{\pi}{۱۰}$$

پاسخهـای درست رسیده از: هادی آموزگار ـ محمد کریم روشن ـ جلیل مکی ـ سید محمدکاظم عـابدینی ـ قاسم انتصاری ـ محمدحسن عزیزیان ـ رمضانعلی صفائی ـ فرامرز رهبردبیرستان شرف ـ ولی‌الله‌اردشیری ـ نصرت‌الله آقاجانی‌ـ حبیب‌الله پوردشتی و حسین رزاقی‌زاده ـ محمدعلی مهدوی ـ خسروموحد ـ فرامرز پورقلی‌زاده .

کلاس ششم ریاضی

حل مسئلهٔ ۱۷۴۷- مشتق ثانی تابع داده‌شده را حساب کرده بعداز ساده کردن برابر باصفر قرار می‌دهیم، می‌شود:

$$(۲a+b)x^۳-(۶a-۳c)x^۲-(۶b+۶c)x+۴a+۴b+۲c=۰ \qquad (۱)$$

از معادلهٔ

$$\frac{ax^۲+bx+c}{x^۲-۲x+۲}=x-\frac{۹}{۴}$$

بعداز ساده کردن ومرتب کردن نتیجه خواهد

$$۴x^۳-(۴a+۱۷)x^۲-(۴b-۲۶)x-۴c-۱۸=۰ \qquad (۲)$$

دومعادلهٔ (۱) و (۲) باید دارای ریشه‌های مشترك باشند ولازم وکافی است که‌ضرایب جمله‌های همدرجهٔ آنها نظیر به‌نظیر متناسب باشند یعنی :

$$\frac{۲a+b}{۴}=\frac{۶a-۳c}{۴a+۱۷}=\frac{۶b+۶c}{۴b-۲۶}=\frac{۴a+۴b+۲c}{-۴c-۱۸}$$

ازحل دستگاه بالا نتیجه خواهد شد

$a=۱$ و $b=۲$ و $c=-۵$

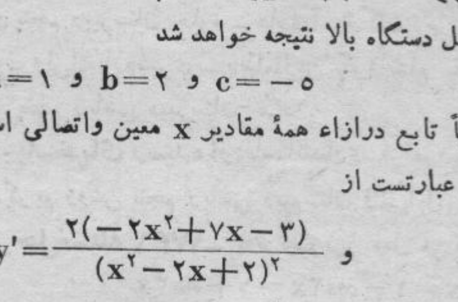
ثانیاً تابع درازاء همهٔ مقادیر x معین واتصالی است . مشتق تابع عبارتست از

$$y'=\frac{۲(-۲x^۲+۷x-۳)}{(x^۲-۲x+۲)^۲}$$ و

$y'=۰$ و $x=۳$ و $\frac{۱}{۲}$

جدول تغییرات و شکل منحنی تابع به‌شکل زیر است .

x	$-\infty$		۰		$\frac{۱}{۲}$		۳		$+\infty$
y'		−			۰	+	۰	−	
y	۱	↘	$-\frac{۵}{۲}$	↘	−۳	↗	۲	↘	۱



ثالثاً معادلهٔ مثلثاتی داده شده را نسبت به $\cos u=x$ مرتب می‌نمائیم .

$$(m-۱)x^۲-۲(m+۱)x+۲m+۵=۰ \qquad (۱)$$

جوابهای معادله را بااعداد ۱و۱- مقایسه می‌نمائیم

$\Delta'=-m^۲-m+۶$ $\quad m=-۳$ و ۲

$af(۱)=(m-۱)(m+۲)$ $\quad m=۱$ و -۲

$۱+\frac{b}{۲a}=\frac{-۲}{m-۱}$ $\quad m=۱$

$af(-۱)=(m-۱)(۵m+۶)$ $\quad m=۱$ و $-\frac{۶}{۵}$

$-۱+\frac{b}{۲a}=\frac{-۲m}{m-۱}$ $\quad m=۰$ و ۱

m	Δ	af(۱)	$۱+\frac{b}{۲a}$	af(−۱)	$-۱+\frac{b}{۲a}$
$-\infty$	−	+	+	+	−
−۳	۰				
	+	+	+	+	−
−۲		۰			
	+	−	+	+	−
$-\frac{۶}{۵}$				۰	
	+	−	+	−	−
۰					۰
	+	−	+	−	+
۱		۰	∞	۰	∞
	+	+	−	+	−
۲	۰				
$+\infty$	−	+	−	+	−

ازجدول بالا معلوم می‌شود.

در ازاء $m=-۳$ معادله دارای جواب مضاعف قابل قبول $x=-\frac{۱}{۲}$ است .

در ازاء $-۳<m<-۲$ دوجواب قابل قبول دارد

در ازاء $m=-۲$ یك‌جواب معادله $x=۱$ و جواب دیگر نیزقابل‌قبول است.

در ازاء $-۲<m<-\frac{۶}{۵}$ معادله فقط یك‌جواب قابل قبول‌دارد .

در ازاء $m=-\frac{6}{5}$ تنها جواب قابل قبول معادله $x=-1$ است.

ودر ازاء سایر مقادیر m معادله جواب قابل قبول ندارد.

ثالثاً چون ازمعادلهٔ (۱) مقدار $y=m$ را به‌دست‌آوریم همان تابع مفروض حاصل می‌شود. خطوط $x=1$ و $x=-1$ را در شکل منحنی رسم می‌نمائیم که منحنی را به‌ترتیب درنقاط به عرضهای ۲− و $-\frac{6}{5}$ قطع می‌کنند. باتوجه به نقاط تلاقی خط $y=m$ با منحنی همان نتایج قسمت ثانیاً حاصل خواهد شد.

پاسخهای درست رسیده از: رضامنصوری دبیرستان رهنما ـ یحیی فتاحی دبیرستان خوارزمی ـ رحیم خیردوست دبیرستان فردوسی‌رضائیه ـ فرامرز پورقلی‌زاده ـ محمدتوکلی دبیرستان پهلوی اراک ـ یدالله ارضی دبیرستان پهلوی اراک ـ قاسم‌انتصاری ـ ابراهیم طاهری آشتیانی دبیرستان امیرخیزی تبریز ـ یدالله حاج‌جعفری ـ فرامرز رهبر دبیرستان‌شرف ـ محمود مسعودی.

پاسخ رسیده از: نصرت‌الله بابائی اهرستانی دبیرستان رهنما ـ رحیم محمدی

حل مسئلهٔ ۱۷۴۸ـ معادلهٔ داده شده به صورت زیر نوشته می‌شود

$$2(2\cos^2 x-1)-4\cos\varphi\cos x+4\cos^2\varphi-1=0$$

$$4\cos^2 x-4\cos\varphi\cos x+4\cos^2\varphi-3=0 \qquad (1)$$

۱) به‌فرض $\cos x=u$ معادلهٔ بالا بادستگاه زیرهم‌ارز خواهد بود

$$\begin{cases} f(u)=4u^2-4u\cos\varphi+4\cos^2\varphi-3=0 \\ -1\leq u\leq 1 \end{cases}$$

$$\Delta'=4\cos^2\varphi-4(4\cos^2\varphi-3)=12(1-\cos^2\varphi)$$
$$=12\sin^2\varphi$$

مبین معادله مثبت یاصفر است بنابراین معادله در ازاء همهٔ مقادیر φ دوجواب دارد

$$f(1)=(2\cos\varphi-1)^2\geq 0 \quad \text{و}$$
$$f(-1)=(2\cos\varphi+1)^2\geq 0$$

$$\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}\cos\varphi \rightarrow -1<\frac{b}{2a}<1$$

ونتیجه می‌شود که هردو جواب معادله همواره در فاصلهٔ [۱و۱−] واقع بوده و قابل‌قبول می‌باشند

۲) ازحل معادلهٔ (۱) به‌دست می‌آید

$$\cos' x=\frac{2\cos\varphi+2\sqrt{3}\sin\varphi}{4}=\frac{1}{2}(\cos\varphi+\sqrt{3}\sin\varphi)$$

$$\cos'' x=\frac{2\cos\varphi-2\sqrt{3}\sin\varphi}{4}=\frac{1}{2}(\cos\varphi-\sqrt{3}\sin\varphi)$$

بعد از تبدیل عبارت داخل پرانتز به‌حاصل‌ضرب

$$\cos x=\cos(\varphi+\frac{\pi}{3}) \quad \text{و} \quad \cos x=\cos(\varphi-\frac{\pi}{3})$$

و جوابهای کلی معادله عبارت خواهد شد از

$$x=2K\pi\mp(\varphi+\frac{\pi}{3}) \qquad x=2K\pi\mp(\varphi-\frac{\pi}{3})$$

پاسخهای‌درست‌رسیده از: فرامرزرهبر ـ یدالله‌حاج‌جعفری ـ یدالله ارضی ـ محمدتوکلی ـ رضامنصوری ـ محمدعلی آل آقا ـ یوسف مصری‌دبیرستان‌کورش ـ رحیم خیردوست ـ فرامرزپورقلی‌زاده ابراهیم طاهری آشتیانی ـ خسرو موحد و فیروز بایرامی از کلاس‌پنجم دبیرستان‌ادیب ـ نصرت‌الله بابائی ـ هادی‌آموزگار دبیرستان رازی شاهی ـ حسین‌نعمتی پنجم ریاضی ـ رضاماژبن نصرت‌الله‌آقاجانی پنجم‌ریاضی دبیرستان‌جلوه ـ ولی‌الله‌اردشیری مهراسب قشقائی‌منصور دبیرستان شرف

حل‌مسئلهٔ ۱۷۴۹ـ اولاباتوجه‌به‌اینکه $102=17\times 6$ داریم:

$$\overline{abc}=100a+10b+c=$$
$$102a-2a+10b+c$$

ونتیجه می‌شود

$$\overline{abc}\equiv 2a-10b-c \pmod{17}$$

و برای اینکه عدد بر ۱۷ بخش پذیر باشد یعنی داشته باشیم.

$$\overline{abc}\equiv 0 \pmod{17}$$

لازم وکافی است که داشته‌باشیم

$$(1) \qquad 2a-10b-c\equiv 0 \pmod{17}$$

ثانیاً. از رابطهٔ اخیر نتیجه می‌گیریم

$$2a-c\equiv 10b \pmod{17}$$
$$(2a-c)^2+2b^2\equiv 100b^2+2b^2=102b^2$$
$$(2a-c)^2+2b^2\equiv 0 \pmod{17}$$

تبصره ـ رابطهٔ (۱) به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$۲a+۷b-c\equiv ۰\pmod{۱۷}$

پاسخهای درست رسیده از: مهراسب قشقائی ـ هادی آموزگار ـ نصرت الله بابائی ـ یوسف مصری ـ رضا منصوری محمد توکلی ـ یدالله ارضی ـ یدالله حاج جعفری ـ محمود مسعودی ـ رحیم خیردوست ـ فرامرز پورقلی زاده ـ ابراهیم طاهری آشتیانی ـ فیروز بایرامی ـ رحیم محمدی ـ حسین نعمتی ـ یحیی فتاحی ـ سید محمدکاظم عابدینی لنگرودی ـ فرامرز رهبر .

حل مسئلهٔ ۱۷۵۰ ـ عدد دورقمی مطلوب را $\overline{ab}$ فرض می‌کنیم ، داریم

$(\overline{ab})^۲=\overline{cdu}$ و $(\overline{ba})^۲=\overline{udc}$

از رابطه‌های

$(\overline{ab})^۲=۱۰۰a^۲+۲۰ab+b^۲$ و

$(\overline{ba})^۲=۱۰۰b^۲+۲۰ab+a^۲$

نتیجه می‌شود که $u=b^۲$ و $d=۲ab$ و $c=a^۲$ بنابراین $b\leq ۳$ و $۲۰ab<۱۰۰$ و $a\leq ۳$ و به‌دست خواهد آمد

$b=۳$	$b=۲$	$b=۱$
$a=۱$	$a=۱$ و ۲	$a=۱$ و ۲ و ۳

و عدد مطلوب یکی ازاعداد ۱۱ و ۲۱ و ۱۲ و ۲۲ و ۱۳ و ۳۱ می‌باشد .

پاسخهای درست رسیده از : رحیم خیردوست ـ سید محمدکاظم عابدینی ـ یحیی فتاحی ـ یدالله ارضی ـ محمد توکلی ـ رضا منصوری ـ یدالله حاج جعفری ـ کیوان پور قاسمی ـ نصرت الله بابائی

حل مسئلهٔ ۱۷۵۱ ـ داریم

$(\overline{ab})_{\overline{ba}}=(\overline{bbbb})_۳$

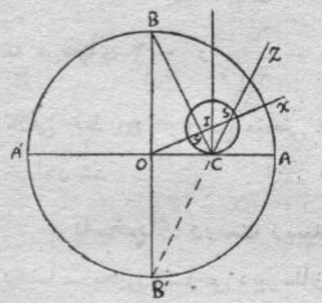
پس از بسط واختصار خواهیم داشت

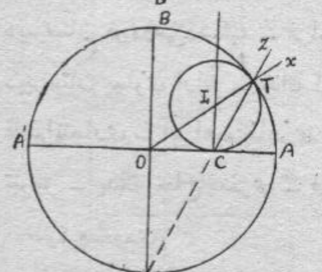
$$b=\frac{a^۲}{۳۹-۱۰a}$$

و به دست می‌آید $a=۳$ و $b=۱$

پاسخهای درست رسیده از : رضا منصوری ـ محمد توکلی ـ رحیم محمدی ـ یوسف محمدی ـ فرامرز رهبر ـ هادی آموزگار ـ هرمز گرجی بیانی ـ فرامرز پورقلی‌زاده ـ نصرت الله بابائی ـ محمود مسعودی ـ نصرت‌الله آقاجانی ـ خسرو موحد فیروز بایرامی ـ ابراهیم طاهری آشتیانی ـ کیوان پورقاسمی ـ رحیم خیردوست ـ محمدعلی آل آقا ـ یدالله ارضی ـ قشقائی منصور محمود عجمی ـ سید محمدکاظم عابدینی ـ یدالله ارضی

حل مسئلهٔ ۱۷۵۲ ـ اگر C نقطهٔ وسط OA باشد دو شعاع 'OB و IC از دایره‌های (O) و (I) موازی و هم‌جهت هستند و مرکز تجانس مستقیم دودایره S نقطهٔ تلاقی Ox با B'C بوده نیم خط CZ که از C در امتداد B'C رسم می‌شود مکان هندسی مرکز تجانس مستقیم دو دایره می‌باشد . دوشعاع OB و IC از دو دایرهٔ فوق‌الذکر متوازی و مختلف الجهت رسم‌شده‌اند و 'S نقطهٔ تلاقی BC با Ox مرکز تجانس معکوس و قطعه خط BC مکان هندسی مرکزهای تجانس معکوس دو دایره است .





۲) وقتی که دو دایرهٔ (O) و $(I_۱)$ مماس باشند T نقطهٔ تماس آنها که مرکز تجانس مستقیم آنهاست بر CZ واقع است بنابراین برای رسم دایرهٔ $(I_۱)$ که بر دایرهٔ (O) مماس باشد کافی است Ox را چنان رسم کنیم که از T نقطهٔ تلاقی B'C با دایرهٔ (O) بگذرد . درمثلث قائم‌الزاویهٔ $OCI_۱$ داریم

$\overline{oc}^۲+\overline{cI_۱}^۲=\overline{oI_۱}^۲$ و

$CI_۱=r$.

و $\frac{R^۲}{۴}+r^۲=(R-r)^۲$

$$r=\frac{۳R}{۸}$$

پاسخهای درست رسیده از : یدالله ارضی ـ محمد توکلی ـ رضا منصوری ـ کیوان پور قاسمی ـ ابراهیم طاهری آشتیانی .

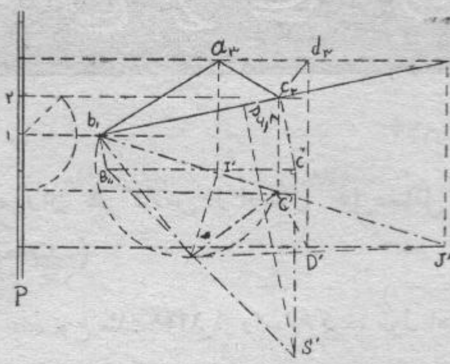
حل مسئلهٔ ۱۷۵۳ ـ فرض می‌کنیم دایرهٔ (O) به‌مرکز O دایرهٔ اصلی و A نقطه‌ای از یک مقطع مخروطی باشد ، 'A قرینهٔ A نسبت به O نیز نقطه‌ای از مقطع مخروطی خواهدبود . دو حالت درنظر می گیریم .

الف ـ A داخل دایرهٔ (O) باشد. مقطع مخروطی بیضی خواهد بود و F و 'F کانونهای آن نسبت به O قرینهٔ یکدیگرند و چهار ضلعی 'AFA'F متوازی‌الاضلاع بوده و چون $AF+AF'=۲a$ پس خواهیم داشت $FA+FA'=۲a$ و مکان F بیضی با کانونهای A و 'A و باطول قطر اطول ۲a می باشد و 'F نیز برهمین بیضی واقع خواهد بود .

ب ـ چنانچه A خارج دایرهٔ (O) واقع باشد مقطع مخروطی هذلولی بوده و با طریقی مشابه ثابت می‌شود که مکان کانونهای آن، هذلولی با کانونهای A و A' و با دایرهٔ اصلی برابر با دایرهٔ (O) می‌باشد .

پاسخ درست رسیده از : رضا منصوری .

حل مسئلهٔ ۱۷۵۴ـ مطابق اپوری که رسم شده است



نقاط c_2 و d_3 به کمک تسطیح صفحهٔ P حول یکی از افقیه‌هایش(درشکل بالا افقیهٔ رقوم ۱) بر صفحهٔ مقایسه به‌دست می‌آیند

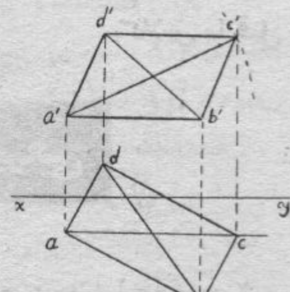
۳) در تسطیع صفحه J' نقطهٔ تلاقی B'C' باتسطیح‌افقیهٔ رقوم ۳(یعنی تسطیح a_3d_3) تعیین شده نقطهٔ I' مزدوج توافقی J' نسبت به‌دو نقطهٔ B' و C' معلوم شده است، I' پای نیمساز داخلی زاویهٔ BAC است و چون زاویهٔ DAI قائمه است نقطهٔ a_3 پیدا می‌شود .

ثانیاً به کمك تسطیح صفحهٔ قائم ماربر BC بر صفحهٔ مقایسه، S' و s به دست می‌آید.طول حقیقی SC برابر ۵ و فراز آن عکس فراز خط b_1c_2 و برابر با $\frac{\sqrt{6}}{12}$ حساب می‌شودوازآنجارقوم S برابر $2+2\sqrt{6}$ و تا تقریب ۰٫۱ برابر ۶٫۸ می‌باشد

پاسخهای درست رسیده از : محمد توکلی ـ رضا منصوری ـ یدالله حاج جعفری ـ محمد علی چیت‌ساز ـ نصرت‌الله بابائی ـ رحیم خیر دوست ـ ابراهیم طاهری آشتیانی ـ محمود عجمی ـیدالله ارضی .

پاسخهای‌رسیده از: سید محمدکاظم‌عابدینی ـفرامرز رهبر مهراسب قشقائی .

حل مسئلهٔ ۱۷۵۵ـ قطعه خط aba'b' افقیه است‌پس طول تصویر افقی آن یعنی $ab=4$ است . در تصویر افقی زاویهٔ abc قائمه بود و ac موازی حط الارض است بنابراین تصویر افقی مستطیل رسم‌می‌شود. به مرکز a' وبه‌شعاع‌برابر ۵ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا رابط نقطهٔ c را در c' قطع کند (دو جواب به‌دست‌می‌آید)وتصویر قائم‌مستطیل مشخص‌خواهدشد



پاسخهای درست رسیده از : یدالله ارضی ـ رحیم خیر دوست ـ فیروز بایرامی و خسرو موحد دانش‌آموزان کلاس‌پنجم دبیرستان ادیب ـ علی‌اکبر پرویزی نژاد دبیرستان خوارزمی ۲ ـ فرامرز رهبر ـ محمد علی چیت ساز دبیرستان خوارزمی ۲ ـ محمود عجمی ـ کیوان پور قاسمی ـ فرامرز پورقلی زاده ـ محمد توکلی ـ رضا منصوری .

پس آن پنج ریال چه شد؟

دوسیب فروش هریك ۳۰ سیب داشتند . اولی سیبهای خودراهر ۳دانه‌ای ۵ریال ودومی هردودانه‌ای ۵ ریال‌فروخت.درآخر روز که حساب‌کردند ازاین بابت ۱۲۵ ریال‌نصیب هر دوگشته بود .فردای آن روز تصمیم گرفتند که‌باهم شریك شوند وسیبها را به اتفاق بفروشند بازهر کدام ۳۰سیب به‌بازارآوردند و سیبهای خود را روی‌هم ریختند وهر ۵ دانه‌ای را ۱۰ ریال فروختند (۳ دانه ۵ ریال به اضافهٔ۲دانه ۵ریال) . درپایان روز وقتی که حساب کردند پولی‌که‌به‌دست‌آورده بودند ۱۲۰ ریال بودیعنی‌۵ریال کمتراز روز پیش . هر یك ازآنهاخیال می‌کرد که دیگری این ۵ ریال را برداشته است . آیا واقعاً این طور بود ؟ اگرنه پس آن ۵ ریال چه شده بو؟

مسائل برای حل

(مهلت قبول پاسخ تا بیستم فروردین ۱۳۴۴ ـ دانش آموزان هر کلاس از ارسال حل مسائل کلاس ما قبل خودداری نمایند.)

کلاس چهارم طبیعی

۲۳۷۵ـ فرض می‌کنیم

$$A=\sqrt{2}\,x^2+4x\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

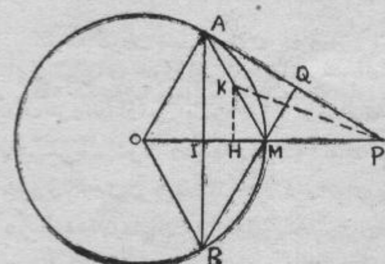
۱) مقدار A را درازاء $x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ تعیین کرده حاصل را به‌صورت حاصل‌ضرب عوامل درآورید.

۲) ریشه‌های معادلهٔ $A=0$ را پیدا کنید.

۲۳۷۶ـ به‌فرض $A=(4x^2-9)^2$ و $B=4(2x-3)^2$ مقادیر A و B را در ازاء

$x=\sqrt{5}+3\ \sqrt{21+17\sqrt{37}}$ مقایسه کنید

۲۳۷۷ـ دایرهٔ به‌مرکز O و به‌شعاع R مفروض است. شعاع OM ازآن رارسم کرده وعمودمنصف OM را نیز رسم می‌کنیم که دایره را در دونقطهٔ A و B قطع می‌کند.



۱) نوع چهارضلعی $AMBO$ راتعیین کرده اندازهٔ هریک از زاویه‌های آن راحساب کنید.

۲) در نقطهٔ A مماسی بردایره رسم می‌کنیم که امتداد BM رادر Q و امتداد OM را در P قطع می‌کند.

الف ـ ثابت کنید مثلث AMQ قائم‌الزاویه است و طول اضلاع آن را برحسب R حساب کنید.

ب ـ نوع مثلث AMP رامعلوم کرده طول اضلاع آن‌را برحسب R به‌دست آورید.

ج ـ اگر I وسط OM و H وسط IM و K وسط AM باشد نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ KPH ز $=\alpha$ را پیدا کنید.

کلاس چهارم ریاضی

یك مسئله‌از جمله مسائل امتحان جبر ثلث اول کلاس چهارم طبیعی دبیرستان ثریا ، دبیر: محمدشهبازی

۲۳۷۸ـ سه‌عدد متناسب با اعداد $\sqrt{3}$ و $\sqrt{4}$ و $\sqrt{5}$ طوری تعیین کنید که مجموع مربعات آنها ۲۴۰ باشد.

دومسئله ازجمله مسائل امتحان جبر کلاس‌چهارم ریاضی دبیرستان پهلوی گلپایگان. دبیر: محمدعلی‌حبیبی ـ فرستنده : حسین‌جعفری

۲۳۷۹ـ به‌ازاءچه‌مقدار از m عبارت $1+2m-m^2$ ماکزیمم می‌باشد.

۲۳۸۰ـ مقادیر p و q راچنان‌تعیین کنید که خارج‌قسمت تقسیم عبارت x^3+px^2+qx+2 بر $x-1$ برابر با x^2+2x+3 باشد و باقیماندهٔ تقسیم را به‌دست آورید.

۲۳۸۱ـ از مردی پرسیدند چندسال‌داری؟ جواب داد مجموع سن‌من وزنم‌بادوبچهٔ۲ساله‌و۳ساله‌ام رویهم پنج‌برابرسن ۲۰سال گذشته‌ام می‌باشد. از زنش پرسیدند ، گفت از شوهرم کوچکترم ودر ۲۱سالگی ازدواج کرده‌ام . سن زن و مرد را که اعداد صحیح‌اند حساب کنید.

(غلامرضا تقوائی ششم ریاضی دبیرستان رازی شاهی)

۲۲۸۲ـ دستگاه سه معادلهٔ سه‌مجهولی زیر را حل کنید

(E.P.M.)

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+y+z=3 \\ x+\frac{1}{y}+z=3 \\ x+y+\frac{1}{z}=3 \end{cases}$$

۲۲۸۳ـ حدمجموع رشته جمل زیر را وقتی که عدهٔ جمله‌های هررشته وتعداد رشته‌ها نامحدود باشد پیدا کنید.

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\dots\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\dots\right)$$
$$+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{9^3}+\dots\right)+\dots$$
$$+\left[\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{(2^n+1)^2}+\frac{1}{(2^n+1)^3}+\dots\right]+\dots$$

(فرستنده : فرامرز رهبر ششم‌ریاضی‌دبیرستان شرف)

۲۲۸۴ـ نقاط A وB وC وD وE وF به‌ترتیب بردایرهٔ بەمرکز O واقع بوده‌ومحیط آن‌را به‌شش قسمت متساوی تقسیم نموده‌اند. از A عمود AB_1 رابر OB واز B_1 عمود B_1C_1 را بر OC و از C_1 عمود C_1D_1 را بر OD رسم کرده وا ین عمل را تاتعیین نقطهٔ A_1 ادامه می‌دهیم . مجموع طولهای‌این عمودها را برحسب R شعاع دایره به‌دست آورید . چنانچه‌عمل رامجدداً ادامه داده‌ومرتب آن راتکرارکنیم حدمجموع‌طولهای عمودهاچقدر خواهد بود.

(علی‌اکبر ایزدفر دبیردبیرستانهای قزوین)

۲۲۸۵ـ درمثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($A=90°$) طولهای اضلاع جمله‌های یك‌تصاعدحسابی هستند. AH ارتفاع وارد بروترمی‌باشد. ثابت‌کنید:

۱) اضلاع هریك از دومثلث AHB و AHC تصاعد حسابی تشکیل می‌دهند .

۲) شعاعهای دایره های محیطی ، شعاعهای دایره های محاطی داخلی ، ارتفاعهای نظیر وترها، نیمسازهای زاویه‌های قائمه‌ازمثلث‌های ABC وABH وACH به‌ترتیب‌تصاعدحسابی می‌سازند .

(علی‌اکبر ایزدفر)

۲۲۸۶ـ به‌فرض $10^a=2^a$ و $\log_2 x=\frac{2a+10}{3}$ مقدار x را تعیین کنید.

از جمله سؤالهای‌امتحان ثلث‌اول کلاس‌چهارم ریاضی دبیرستان ٦ بهمن بندرپهلوی.
دبیر: سیدابراهیم نوری ـ فرستنده: ایرج‌صفرنیا

۲۲۸۷ـ به‌فرض اینکه داشته‌باشیم،

$x=\log_a bcd$ و $y=\log_b acd$ و $z=\log_c abd$ و $u=\log_d abc$

درستی رابطهٔ زیر را محقق‌کنید.

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{u+1}=1$$

(حسن‌پوررضائی دبیرستان رضاشاه‌کبیر تبریز)

۲۲۸۸ـ از نقطهٔ A واقع‌درخارج‌دایرهٔ (O) قاطع ABC ومماس AT را بردایره رسم کرده و روی خطی که در نقطهٔ B عمود بر AB رسم می‌شود نقطهٔ D را چنان تعیین می کنیم که مساحت مثلث ADC برابر با $\overline{AT}^2$ باشد .

۱) نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ DAB ز $=\alpha$ را تعیین کنید .

۲) به‌فرض اینکه A ثابت وقاطع ABC حول نقطهٔ A حرکت کند وضعی ازقاطع راتعیین کنیدکه در ازاء آن‌مساحت مثلث ABD مینیمم‌باشد (B بین A و C اختیارشود) و مقدار این مینیمم را برحسب R به فرض $AT=R\sqrt{3}$ به دست آورید .

(غلامعلی معول پنجم ریاضی دبیرستان صمصامی اراك)

۲۲۸۹ـ مثلث ABC متساوی الساقین و در زاویهٔ C قائمه می‌باشد. برخطی که ازنقطهٔ C موازی‌با AB رسم‌می‌شود نقطهٔ D را چنان تعیین‌کنید که BD=BA باشد. دوجواب به‌دست خواهیدآورد . در هردوحال اندازهٔ زاویهٔ DBC را معلوم‌کنید .

(مجله‌ریاضیات‌دانش‌آموز)

کلاس پنجم طبیعی

۲۲۹۰ـ منحنی (C) نمایش هندسی تابع $y=\frac{1}{x}$ و منحنی (C') نمایش هندسی تابع $y=\frac{1}{x^2}$ یکدیگر رادر نقطهٔ A(1و1) قطع می کنند. خط مماس برمنحنی (C) را در نقطهٔ A با T وخط مماس بر (C') رادر A با T' نمایش می‌دهیم معادله‌های خطوط T وT' راتعیین‌کنید . برمنحنی (C) نقطه‌ای مانند B وجود دارد که‌مماس برمنحنی درآن‌نقطه باT موازی

است ، مختصات این نقطه را پیدا کنید . مختصات نقطهٔ C از منحنی (C') را پیدا کنید که مماس بر منحنی در آن نقطه بر خط T' عمود باشد .

۲۲۹۱ـ در مثلث ABC زاویهٔ B منفرجه بوده و $\sin B=\frac{1}{3}$ و $\sin C=\frac{2}{3}$ می‌باشد مقدار $\sin A$ را حساب کنید

۲۲۹۲ـ مقدار عددی عبارت زیر را تعیین کنید

$$\frac{\cos 37^\circ 30' \cos 22^\circ 30' + \sin 37^\circ 30' \sin 22^\circ 30'}{4 \sin 7^\circ 30' \sin 3^\circ 45' \cos 3^\circ 45'}$$

کلاس پنجم ریاضی

۲۲۹۳ـ محیط مستطیلی مقدار ثابت $2p$ می‌باشد ، از دوران مستطیل حول یکی از اضلاع استوانه‌ای به وجود می‌آید. اندازهٔ اضلاع مستطیل چقدر باشد تا حجم استوانهٔ حادث ماکزیمم باشد و مقدار این ماکزیمم را حساب کنید .

(فرستنده : مصطفی گودرزی طالمه دانشجوی دانشکده افسری)

۲۲۹۴ـ در کره‌ای به شعاع R مکعب مستطیلی با قاعدهٔ مربع محاط می‌کنیم . ابعاد مکعب مستطیل چقدر باشد تا حجم آن ماکزیمم گردد .

(بهرام داها ـ ششم ـ ریاضی دبیرستان ناصرخسرو)

۲۲۹۵ـ تابع زیر مفروض است

$$y=x^2-4x\cos\varphi+4\cos 2\varphi$$

که در آن φ زاویه‌ای واقع در فاصلهٔ ۰ و π را تعیین می‌کند $(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$

۱) جدول تغییرات و مختصات نقطهٔ اکسترموم منحنی نمایش تابع را تعیین کنید

۲) اگر مماس در نقطهٔ به طول $x=1+\sin\varphi$ بر منحنی نمایش تابع با محور ox زاویهٔ φ بسازد ، مقدار φ را تعیین کنید.

۳) در ازاء دو مقدار از φ منحنی‌های نظیر از مبدأ مختصات می‌گذرند. این دو مقدار φ را تعیین کرده و منحنی‌های نظیر را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم کنید و ثابت کنید که این دو منحنی نسبت به محور $y'y$ متقارن‌اند

۴) معادلهٔ مکان هندسی رأسهای منحنیهای نمایش تابع مفروض را وقتی که φ در فاصلهٔ ۰ و π تغییر کند به دست آورده و منحنی مکان را در همان شکل قبلی رسم کنید .

(با اضافات از E.P.M.)

۲۲۹۶ـ به فرض

$$A=1-(\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c)+2\cos a\cos b\cos c$$

۱) اگر $A=0$ باشد مقدار $\cos a$ را برحسب b و c پیدا کنید

۲) عبارت A را به حاصل ضرب چهار سینوس تبدیل کنید

(مجله ریاضیات مقدماتی)

یک مسئله از جمله مسائل امتحان مسابقه برای انتخاب بهترین دانش‌آموز پنجم ریاضی کرمان ـ فرستنده منصور حسنی از دبیرستان پهلوی کرمان

۲۲۹۷ـ جوابهای بین صفر و 2π از معادلهٔ زیر را تعیین کنید

$$\frac{tg(\frac{\pi}{4}-x)}{tg(\frac{\pi}{4}+x)}=1-\sin 2x$$

۲۲۹۸ـ به فرض $\sin 2a=x$ و $\sin 3a=y$ رابطه‌ای مستقل از a بین x و y به دست آورید

(E.P.M.)

۲۲۹۹ـ کنج سه قائمهٔ oxyz مفروض است . نقاط A و B و C به ترتیب بر یالهای ox و oy و oz چنان قرار دارند که $OA=a$ و $OB=b$ و $OC=c$ است

۱) چنانچه α و β و γ اندازه‌های زاویه‌های مسطحهٔ فرجه‌های با یالهای BC و CA و AB از چهار وجهی OABC باشند رابطهٔ زیر را ثابت کنید

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

۲) فرض می‌کنیم (P) یک چندضلعی واقع در صفحهٔ ABC باشد مساحت آن را با S و مساحتهای چند ضلعیهای تصویر (P) را بر صفحه های xoy و yoz و zox با S_1 و S_2 و S_3 نمایش می‌دهیم. ثابت کنید

$$S^2=S_1^2+S_2^2+S_3^2$$

(E.P.M)

۲۳۰۰ـ صفحهٔ (P) و خط (D) متقاطع در S مفروض است . مکان هندسی خطوطی مانند Sx را تعیین کنید که قرینهٔ (D) نسبت به هر یک از خطوط Sx بر صفحهٔ (P) واقع باشد . حالت خاصی را که (D) بر (P) عمود است بررسی کنید:

(E.P.M.)

کلاس ششم طبیعی

۲۳۰۱ـ محور کانونی هذلولی H محور $y'y$ را در نقطهٔ I به عرض ۱ و محور غیرکانونی آن محور $x'x$ را در نقطهٔ J به طول ۱ قطع می‌کند . معادلهٔ خطی که رأس A از هذلولی را به J وصل می‌کند عبارتست از $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ و فاصلهٔ کانونی هذلولی برابر با $2\sqrt{5}$ می‌باشد. معادلهٔ هذلولی و معادله‌های مجانبهای آن را تعیین کرده و هذلولی را رسم کنید .

۲۳۰۲ ـ اولا در تابع $y = a\cos nx$ مقادیر a و n را چنان معلوم کنید که منحنی نمایش تابع محور عرضها را در نقطهٔ به عرض ۱ قطع کرده و طول یکی از نقاط تقاطع آن بامحور طولها برابر با $\frac{\pi}{3}$ باشد.

ثانیاً منحنی نمایش تابع $y=\cos\frac{3x}{2}$ را در فاصلهٔ $[\frac{2\pi}{3}$ و $-\frac{2\pi}{3}]$ رسم کنید.

ثالثاً مساحت سطح محصور بین منحنی و محورطولها را که بالای این محور است حساب کنید.

کلاس ششم ریاضی

سؤالهای امتحان جبر ثلث اول بروجرد (دبیر: حسین صالحی)

۲۳۰۳ ـ تابع $y=\frac{1}{ax^2+bx+c}$ مفروض است.

اولا ضرایب a و b و c را طوری تعیین کنید که منحنی نمایش هندسی تابع درنقطه‌ای به طول $\frac{3}{2}$ دارای ماکزیممی برابر (−٤) بوده و $x=1$ یکی ازمجانبهای آن باشد.

ثانیاً مطلوبست رسم منحنی نمایش تابع

$$y=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}$$

ثالثاً ـ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم

$$mx^2-3mx+2m-1=0$$

را بادوعدد ۱− و ۲ از روی منحنی مقایسه کنید

رابعاً درشماره و علامت ریشه‌های معادلهٔ

$$\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}=\lambda$$

به ازاء مقادیر مختلف λ بحث کنید و ثابت کنید که بین x' و x'' ریشه‌های این معادله رابطه‌ای مستقل از λ وجوددارد وآن را به دست آورید

خامساً درمحل تقاطع منحنی تابع $y=\frac{a}{x^2-3x+2}$ با نیمساز ربع اول وسوم، به ازاء مقادیر مختلف a بحث کنید

۲۳۰۴ ـ تابع $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+ax+b}}$ مفروض است

اولا ضرایب a وb را به دست آورید که خطوط $x=1$ و $x=2$ مجانبهای منحنی باشند

ثانیاً مطلوبست رسم منحنی نمایش تابع

$$y=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}-\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-1}}$$

۲۳۰۵ ـ اگر O وR مرکز وشعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC، و I و r مرکزوشعاع دایرهٔ محاطی داخلی‌آن باشد

۱) ثابت کنید که اگر OI با BC موازی باشد داریم

$$\cos B+\cos C=1$$

۲) ثابت کنید که اگر O و I از BC به یک‌فاصله بوده اما OI با BC موازی نباشد، داریم

$$\cos B+\cos C=1+\frac{2r}{R}$$

(E.P.M)

۲۳۰۶ ـ اولا تعیین تغییرات و رسم منحنی نمایش تابع

$$y=2\sin(2x-5\frac{\pi}{3})-1$$

ثانیاً تعیین طولهای نقاط تقاطع منحنی بامحور طول و تعیین ضریب زاویهٔ مماس مرسوم بر منحنی در این نقاط

ثالثاً تعیین مرکزها ومحورهای تقارن منحنی

رابعاً بیان y و مشتق‌آن y' برحسب x، به حسب $tg x=t$. درازاءچه مقادیر از t داریم $y=0$ و تعیین مقادیر نظیر از y'

(ازسؤالهای امتحان رشته علوم اسرائیل)

۲۳۰۷ ـ به فرض اینکه $n\geq 2$ عدد صحیح دلخواه و p_1 و p_2 و ... و p_h عددهای اول کوچکتر یا مساوی با $n+1$ باشد وبه فرض

$$P=p_1\cdot p_2\cdot\cdots\cdot p_h$$

۱) ثابت کنید که هیچیک از n جملهٔ رشتهٔ:

$$P+2 \text{ و } P+3 \text{ و} \ldots \text{ و } P+(n+1) \qquad (1)$$

عدد اول نیست

۲) ثابت کنید که ازرشته‌های متشکل از n عدد متوالی که هیچیک ازجمله‌های آن عدد اول نباشد به‌تعداد نامحدودوجود دارد. در حالت $n=10$ اولین و آخرین جمله‌های دو رشتهٔ اول و دوم از این دسته‌ها را تعیین کنید.

(E.P.M.)

۲۳۰۸ ـ ثابت کنید که هر کسر غیر ممکن التحویل کوچکتر ازواحد $\frac{a}{b}$ را می‌توان به‌شکل

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{q}-\frac{a_1}{b_1} \qquad (1)$$

تبدیل نمود که در آن کسر $\frac{a_1}{b_1}$ غیر ممکن التحویل کوچکتر از واحد بوده و a_1 کوچکتر از a می‌باشد و نتیجه بگیرید که می‌توان کسر $\frac{a}{b}$ را به صورت زیر بسط داد

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{q}-\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}-\dots+(-1)^n\frac{1}{q_n} \qquad (2)$$

که در آن تعداد کسرهای $\frac{1}{q_i}$ محدود می‌باشد.

حالت خاص کسر $\frac{9}{26}$ را به صورت بالا بسط دهید

(از سؤالهای امتحانی کشور داکار)

۲۳۰۹ـ مثلث ABC ودایرهٔ محیطی آن (Γ) را در نظر می‌گیریم

۱) از O مرکز دایره خطی موازی با یک ضلع مثلث رسم می‌کنیم تا مماس در رأس مقابل این ضلع بردایرهٔ (Γ) را قطع کند. بدین ترتیب سه نقطهٔ α و β و γ به دست می‌آید. ثابت کنید این سه نقطه بر یک استقامت واقعند.

۲) از نقطهٔ تقاطع مماسهای مرسوم از دو رأس مثلث بر (Γ) خطی موازی باضلع واصل این دو رأس رسم می‌کنیم تا مماس در رأس دیگر مثلث را قطع کند. ثابت کنید سه نقطهٔ α_1 و β_1 و γ_1 که بدین ترتیب به دست می‌آیند بر یک خط مستقیم قرار دارند.

۳) خطی موازی با هر ضلع مثلث بر (Γ) مماس می‌کنیم (نقطهٔ تماس و رأس دیگر طرفین این ضلع واقع باشند) که این مماس، مماس در رأس مقابل را قطع می‌کند. ثابت کنید سه نقطهٔ α_2 و β_2 و γ_2 که بدین ترتیب حاصل می‌شود بر یک استقامت می‌باشند.

(G.P.B)

۲۳۱۰ـ در یک صفحهٔ کاغذ یک خط Δ رسم کرده و یک نقطهٔ P در خارج آن انتخاب کنید. کاغذ را چنان تا کنید که نقطهٔ P برروی یکی از نقاط خط Δ واقع شود محل تای کاغذ را مشخص کرده و کاغذ را باز کنید، بدین ترتیب اثری از تا برکاغذ باقی خواهد ماند که نمایش یک خط است. عمل را مجدداً و به دفعات تکرار کنید تا خطوط مختلف حاصل شود. پوش این خطوط را تعیین کنید (مقصود از پوش خطوط منحنی است که برهمهٔ آنها مماس می‌باشد).

(از مجلهٔ ریاضیات دانش‌آموز ـ ترجمه: ج.ش. آوری)

۲۳۱۱ـ دو نقطهٔ m_8 و n_2 را روی محور اقصر کاغذ انتخاب کنید که m و n به ترتیب از کنار چپ کاغذ به فاصلهٔ ۱۱ و ۵ واقع باشند. از m خطی رسم کنید که در جهت مثلثاتی با محور اقصر زاویهٔ ۱۳۰° بسازد و از n خطی رسم کنید که با محور اقصر در جهت مثلثاتی زاویهٔ ۴۰° بسازد خط اول را تصویر خط D و دوم را تصویر خط Δ بنامید.

۱) به فرض آنکه MN عمود مشترک D و Δ باشد این دو خط را مدرج کنید.

۲) برخط Δ صفحهٔ P را مرور دهید که با صفحهٔ مقایسه زاویهٔ ۴۵° بسازد (از دوجواب آن را اختیار کنید که افقیهٔ رقوم ۳ آن تقریباً پائین محور اقصر باشد). یک مقیاس شیب این صفحه را در کنار چپ کاغذ رسم کنید.

۳) در صفحهٔ P خط a_2o_0 را با فراز ۲ رسم کنید (a بر Δ واقع است و o سمت راست a)

۴) O مرکز و A یک رأس از مربع ABCD است که ضلع AB از آن افقیه می‌باشد، ملخص این مربع را رسم کنید

۵) نقطهٔ s_6 را بر D تعیین کرده ملخص هرم SABCD را رسم و آن را مرئی و مخفی کنید

۶) مقطع هرم را با صفحهٔ قائمی که بر ارتفاع SH هرم می‌گذرد به دست آورده اندازهٔ حقیقی آن را نمایش دهید.

(سید جعفر وفا بخش)

۲۳۱۲ـ نقطهٔ aa' را به بعد ۳ و ارتفاع ۴ تعیین کنید. بر این نقطه افقیه‌ای رسم کنید که با صفحهٔ قائم تصویر زاویهٔ ۴۵° ساخته و اثرش سمت چپ رابط aa' واقع باشد. همچنین جبهیه‌ای رسم کنید که با صفحهٔ افقی تصویر زاویهٔ ۶۰° ساخته اثرش سمت چپ aa' باشد. ملخص لوزی ABCD را رسم کنید بنابر آنکه AB برافقیه و AD بر جبهیهٔ مرسوم واقع بوده طول قطر AC برابر با ۵ باشد (نقاط B و C و D سمت راست A واقع‌اند). آثار صفحهٔ مواجهی را رسم کنید که از مرکز لوزی گذشته و بر صفحهٔ لوزی عمود باشد و مقطع آن را با لوزی پیدا کنید. (مسئله بدون استفاده از تسطیح حل می‌شود)

(ع . م)

مسائل متفرقه

۲۳۱۳ـ حدمجموع جمله‌های زیر را حساب کنید وقتی که تعداد آنها نا محدود باشد

$$S=\log_n A+\log_{n^2}A+\log_{n^4}A+\dots$$

(حسین نعمتی پنجم ریاضی متفرقه)

۲۳۱۴ـ مجموع n جمله‌از رشته جمل‌زیر راحساب کنید

$$S=2\times 2^{k}+5\times 2^{2k-1}+17\times 2^{3k-2}+\dots+(4^{n-1}+1)\times 2^{nk-n+1}$$

(حافظی دبیر دبیرستان بنیس)

۲۳۱۵ـ حاصل عبارت زیررا حساب کنید

$$S=\left(2-\frac{1}{\cos^2 x}\right)\left(2-\frac{1}{\cos^2 2x}\right)\left(2-\frac{1}{\cos^2 4x}\right)\dots\times\left(2-\frac{1}{\cos^2(2^{n-1}x)}\right)$$

(حسن تاهباز صالحی پنجم ریاضی دبیرستان هدف ۱)

۲۳۱۶ـ معادلهٔ زیررا حل کنید

$$(\sqrt{x})^{\log_5 x-1}=5$$

(محمد رضا مرعشی پور ـ ششم ریاضی دبیرستان البرز)

۲۳۱۷ـ عددی سه رقمی به شکل $\overline{abc}$ پیدا کنید که هیچیك از ارقامش صفر نبوده و عبارت $ab+bc+ca$ بر $a+b+c$ بخش پذیر باشد.

(فرستنده : قوام نحوی دبیر دبیرستانهای اهواز)

۲۳۱۸ـ ثابت کنید در هر دستگاه به مبنای $x>3$ دو عدد $(x-1)^3$ و $(x-1)(x^2+3)$ مقلوب یکدیگرند.

(م.ا. گیتی زاده دبیردبیرستانهای اهواز)

۲۳۱۹ـ عدد $(\overline{ab})_x$ را چنان تعیین کنید که اگردوبرابر رقم a را از آن کم کنیم در مبنای اعشاری برابر با $2x+1$ شود.

(م.ا. گیتی‌زاده)

۲۳۲۰ـ ضرایب a و b را پیداکنید برای‌آنکه عبارت $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+1$ بر $(x-1)^2$ بخش پذیر باشد

۲۳۲۱ـ به فرض u_n یك زاویهٔ حاده و

$$tg\, u_n=\frac{1}{n^2+n+1}$$

۱) مجموع $S=u_1+u_2+\dots=u_n$ را برحسب n حساب کنید

۲) حد S را وقتی که $n\to\infty$ تعیین کنید

(E.P.M.)

۲۳۲۲ـ دایرهٔ (c) به شعاع r بر محور ox مماس بوده و بر روی‌آن حرکت می کند. مطلوبست.

۱) معادلهٔ مکان هندسی رأس مثلثهای متساوی‌الساقینی که بر این دایره محیط بوده قاعده‌اش بر ox منطبق و یک رأسش مبدأ مختصات باشد.

۲) خط به معادلهٔ $y=mx$ $(m$ پارامتر) این منحنی را جز در نقطهٔ o در دو نقطهٔ دیگر M_1 و M_2 قطع می کند. معلوم کنید که‌مکان هندسی وسط M_1M_2 برمکان هندسی مرکز دایرهٔ (C) منطبق است

۳) معادلهٔ‌مکان هندسی‌نقطهٔ تلاقی ارتفاعات مثلث‌متساوی الساقین مزبور را پیداکنید.

(نقل از مجله راهنمای زندگی ۱۳۱۹)

۲۳۲۳ـ دایرهٔ بمرکز O وبه شعاع R ونقطه P واقع درصفحهٔ‌آن به فاصلهٔ $OP=a$ ازمرکز مفروض است. قاطعی متغیر از P گذشته ودایره را در نقاط M و N قطع می کند. زاویه‌های MOP و NOP را به ترتیب به θ و φ و زاویهٔ MPO را به λ می‌نمائیم

۱) مقدار $tg\frac{\theta}{2}tg\frac{\varphi}{2}$ را پیدا کنید

۲) محقق کنید که

$$(a+R)\sin\lambda=2R\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$$

۳) مساحت مثلث MON و اندازهٔ λ را از روی‌زاویهٔ ω به فرض

$$tg\frac{\theta}{2}-tg\frac{\varphi}{2}=\frac{2a}{a+R}tg\frac{\omega}{2}$$

پیداکنید . از روی λ مقدار ω را بر حسب θ و φ به دست‌آورید . شرط آنکه ω دارای مینیممی باشد چیست ؟

(نقل از مجله راهنمای زندگی)

۲۳۲۴ـ ضلع BC از مثلث ABC محاط در دایرهٔ ثابت O ثابت‌بوده ورأس A بردایره دریك طرف BC حرکت می‌کند . طول $BD=AC$ را بر AB جدا می‌کنیم .

۱) مکان هندسی نقطهٔ D را تعیین کنید

۲) اگر M وسط AD باشد مکان هندسی نقطهٔ M را تعیین کنید

۳) اگر N نقطهٔ تلاقی عمود منصف AD با AC باشد مکان هندسی N را به دست‌آورید

(ابراهیم صادقی دبیر دبیرستانهای‌آباده)

۲۳۲۵ـ مثلثی بسازیدکه ازآن ضلع a و زاویهٔ A و نسبت مجموع دوضلع دیگر به تفاضل آنها $\frac{b+c}{b-c}=\frac{p}{q}$ معلوم باشد .

(جمشید امیغیان دانشجوی علوم اصفهان)

۲۳۲۶ـ در سهمی مفروض P مثلث متساوی الاضلاعی محاط کنید که یك رأسش نقطهٔ معلوم A واقع‌بر سهمی باشد . ثابت کنیدکه مسئله حداقل یك و حداکثر سه جواب دارد .

(ماهنامهٔ ریاضیات آمریکا)

فیزیـــــک و شیمی

کلاسهای چهارم

از جملهٔ مسائل امتحان فیزیک ثلث اول دبیرستان ۶ بهمن بندر پهلوی

دبیر: نجم‌الدین موسوی- فرستنده: صفر نیا

۲۳۲۷- دو نیروی موازی و همسو F_1 و F_2 در دو نقطهٔ A و B بر جسمی اثر می‌کنند. اولا مقدار F_2 را به دست آورید بشرط آنکه $F_1 = 150gr$ و فاصلهٔ F_1 از برآیند ۲۰cm و فاصلهٔ F_2 از برآیند ۶۰cm باشد.

ثانیاً اگر اندازه‌گیری طول با تقریب یک میلیمتر و اندازه‌گیری نیروها با تقریب یک گرم به‌دست آمده باشند مقدار خطای نسبی و مطلق و همچنین کمیت اصلی F_2 را به دست آورید.

از جمله مسائل امتحان شیمی ثلث اول چهارم ریاضی دبیرستان پهلوی گلپایگان

دبیر: کریم نفیسی - فرستنده: حسین جعفری

۲۳۲۸- ۹٫۸ گرم اسید سولفوریک را باکلرورسدیم تا ۴۰۰ درجه حرارت می‌دهیم. گازحاصل‌را در ۵۰ cc آب‌حل و ۲۰ cc محلول را با نیترات نقره و ۳۰ cc محلول را با نیترات سرب ترکیب می‌کنیم معلوم کنید در هر قسمت چقدر رسوب حاصل می‌شود؟

از جمله مسائل امتحان شیمی ثلث اول چهارم طبیعی دبیرستان بهبهانی کازرون

دبیر: حسین جواهری

۲۳۲۹- از تجزیهٔ صد قسمتی یک اکسید مس خالص ۲۰٪ اکسیژن تولید گردیده است. چنانچه حرارت مخصوص مس ۰٫۰۹۲ باشد جرم اتمی دقیق مس را پیدا کنید.

کلاسهای پنجم

موضوع مسئلهٔ شیمی امتحان ثلث اول پنجم طبیعی دبیرستان بهبهانی کازرون

دبیر: حسین جواهری

۲۳۳۰- محلولی از نمک قلیای متبلور وجوش شیرین در اختیار است که باآن تجارب زیر را انجام می‌دهیم.

تجربهٔ ۱- ۳٫۷ گرم آن را وارد ۳۵cc محل نرمال جوهر نمک می‌نمائیم. پس از خروج کلیهٔ گازها بوای خنثی شدن بقیهٔ اسید ۲٫۵cc سود ۸۰ گرم در لیتر مصرف می‌شود.

تجربهٔ ۲- گازهای حاصل ازتجربهٔ (۱) را وارد محلول آب‌آهک ۰٫۸ نرمال می‌نمائیم. آزمایش نشان می‌دهدکه ۵۰cc از این‌آب آهک مصرف می‌شود. از اینجا تعداد ذرات (ملکول) آب تبلور نمک قلیا و نیز نسبت ملکولی دو جسم موجود در مخلوط را به‌دست‌آورید.

یك مسئله از: رضا داوودی دبیر دبیرستان درخشانی بنیس

۲۳۳۱- آلیاژی نا خالص ازچهار فلز آهن، آلومینیم، سرب و باریم به وزن ۱۰ گرم موجود است. این آلیاژ را در اسید نیتریك جوشانده و نتیجه راصاف می‌کنیم. برروی محلول به دست آمده آزمایشهای زیر را انجام می‌دهیم.

برروی محلول در مجاورت اسید استیك کرمات پطاسیم اضافه می‌کنیم رسوبی به وزن ۸٫۲۹ گرم‌به دست می‌آید. اگر این رسوب را با محلول سود سوزآور حرارت دهیم‌جرم‌آن به ۵٫۰۶ گرم می‌رسد. بر محلول زیر صافی به مقدار کافی پطاس‌محلولی افزوده حرارت می‌دهیم رسوب حاصل ۱٫۰۷ گرم می‌شود. محلول‌که زیر صافی به دست می‌آید بااسیدکلرئیدریك ترکیب وسپس باآمونیاك می‌جوشانیم. رسوب به دست‌آمده را خشك وتکلیس می‌کنیم پودر به‌دست آمده ۱٫۰۲ گرم می‌شود

اولا فعل و انفعال ممکنه را بنویسید.

ثانیاً عیار هر فلز را درآلیاژ به‌دست آورید.

ثالثاً. در صد ناخالص را تعیین کنید.

یك مسئله از هوشنك شریف‌زاده دبیر دبیرستانهای نی‌ریز

۲۳۳۲- مولدی را یك بار به مقاومت R_1 و بار دیگر به مقاومت R_2 می‌بندیم، اگر در هر دوحال گرمای تلف‌شده دردو مقاومت‌در یك زمان معین برابر باشند. ثابت‌کنیدمقاومت داخلی مولد واسطهٔ هندسی بین دو مقاومت R_1 و R_2 می‌باشد

کلاسهای ششم

۲۳۳۳- دریك بطری‌لید سلاح خارجی وصل به زمین و سلاح‌داخلی درپتانسیل ۶۰ کیلوولت‌است. این‌سلاح‌رابه یکی ازسلاحهای خازن بدون باری به ظرفیت ۰٫۱ میکروفارادکه سلاح دیگرش وصل به زمین است مربوط می‌کنیم. پتانسیل تعادل ۲۴ کیلوولت می‌گردد. ظرفیت بطری و انرژی ابتدائی آن را حساب‌کنید. اگر بجای اتصال بطری به‌خازن‌سلاحها را بهم وصل‌می‌کردیم چه مقدار حرارت درجرقه‌آزاد می‌شد.

(بقیه در پائین صفحهٔ مقابل)

انجمن معلمان ریاضی (ایران)

پیشرفت و بهبود آموزش ریاضیات در ایران و پرورش ریاضیدانانی شایسته برای آینده، همکاری مؤثر و هم‌آهنگی بیشتر معلمان ریاضی را ایجاب می‌نمود. روی این اصل، عده‌ای از دبیران ریاضی گرد آمدند و بعد از جلساتی بحث و تبادل نظر اقدام به تأسیس انجمن معلمان ریاضی نمودند

در نخستین جلسات، آقایان **بیرشك**، **شمس آوری** و **آذرنوش** مأمور تنظیم اساسنامه‌ای موقت برای انجمن شدند. بنابر اساسنامهٔ تنظیمی این آقایان که به تصویب سایر اعضاء مؤسس انجمن رسید اولا برنامهٔ کار انجمن به شرح زیر اعلام گردید:

۱ـ همکاری با دستگاههای رسمی آموزش و پرورش کشور.

۲ـ انتشار مجله‌های مخصوص برای معلمان کشور.

۳ـ تهیهٔ رساله ها و کتابهای روش تدریس.

۴ـ آشنا کردن معلمان با پیشرفتهای تازه در ریاضیات و روش تدریس آن.

۵ـ ایجاد آزمایشگاه ریاضی نمونه و تأسیس کتابخانهٔ فنی مربوط به ریاضیات.

۶ـ تشکیل جلسات معلمان ریاضی برای تبادل نظر و بحث و انتقاد.

ثانیاً قرار شد پنج نفر امور انجمن را بطور **موقت** اداره کنند تا هنگامی که عدهٔ اعضاء به صد نفر برسد و آنگاه برای تنظیم و تصویب اساسنامهٔ رسمی و تعیین سازمان دائمی اقدام شود.

آقایانی که به این منظور انتخاب شده‌اند عبارتند از:

حسین آزرم ـ احمد بیرشك ـ پرویز شهریاری ـ عبدالحسین مصحفی ـ باقر نحوی

پنج نفر منتخبین فوق‌الذکر تاکنون به انجام امور زیر توفیق یافته‌اند:

۱ـ اقدام به تهیهٔ نشانی معلمان ریاضی و ارسال اطلاعیهٔ تشکیل انجمن برای آنها

۲ـ مشاوره با متخصصین دربارهٔ چگونگی تعویض برنامه و آشنا شدن معلمان ریاضی با مباحث جدید.

۳ ـ دعوت از استاد گرامی **آقای دکتر محسن هشترودی** برای ایراد سخنرانی در روز ۲۴ اسفند و افتتاح انجمن

۴ ـ تهیهٔ بیوگرافی متأخرین از معلمان نامی ریاضی ایران و اقدام برای تجلیل خاطرهٔ آنان

۵ـ قبول معرفی پنج نفر معلم ریاضی به وزارت آموزش و پرورش برای استفادهٔ بورس واگذاری دولت آمریکا.

۶ـ تهیهٔ مقالات و وسایل انتشار اولین نشریهٔ انجمن

توفیق انجمن معلمان ریاضی در نیل به هدفهای خود منوط به همکاری همهٔ همکاران گرامی می‌باشد. معلمان ریاضی که تاکنون اطلاعیهٔ انجمن را دریافت نداشته‌اند می‌توانند به نشانی:

خیابان حافظ، دبیرستان رضا شاه کبیر

انجمن معلمان ریاضی

و یا توسط یکی از پنج نفر منتخبین فوق‌الذکر مکاتبه فرمایند.

معادل مکانیکی کالری ۴ر۱۸ ژول می‌باشد.

۲۳۳۴ ـ در صورتیکه بدانیم اسید کلریدریك ۳۵٪ (وزنی) دارای وزن مخصوص ۱ر۱۷۵ می‌باشد معلوم کنید چند سانتیمتر مکعب آب مقطر باید به ۱۵ سانتیمتر مکعب این اسید اضافه کرد تا محلولی با غلظت یك هشتم نرمال به دست آید.

برای داوطلبان کنکور

۲۳۳۵ ـ بین سه نقطه از مداری سه مقاومت a و b و c مثلثی بسته شده‌اند. در حالت دوم مقاومتهای a' و b' و c' را ستاره‌ای بین همین نقاط می‌بندیم و مقاومتهای بین نقاط مزبور در هر دو حالت معادل است. مقادیر a' و b' و c' را برحسب a و b و c و بالعکس پیدا کنید.

یك مسئله از حسین جواهری دبیر دبیرستان کازرون

۲۳۳۶ ـ ۱ر۴۲۵ گرم از مخلوط: جوهر نمك، اسید فرمیك و یك اسید متشابه‌الترکیب (همرو) با آن توسط 30cc سود نرمال خنثی شده است. نمکهای حاصل را با سود جامد پیرولیز کرده و گازهای حاصل از عمل را در یك ادیومتر منفجر کرده‌ایم. اضافه وزن لوله‌های اسید و پتاس به ترتیب ۰ر۵۴ و ۰ر۴۴ گرم شده است از اینجا مقدار هر یك از سه اسید را در مخلوط و نیز فرمول اسید همولوگ با اسید فرمیك را پیدا کنید.

مسائل از : استاد دکتر محسن هشترودی

برای دانش آموزان

۲۳۳۷ـ ثابت کنید که اگر m و n' هردو برشش مانده‌ای برابر ۵ یا برابر ۲ داشته باشند عبارت .

$$2\times 3^{2n}+3\times 2^{2m}+(m-2)(n-5)(46^{p}-11^{p})$$
$$+(m-5)(n-2)(57^{k}-22^{k})$$

بر کمترین مقدار خودش بخش پذیر است (m و n و p و k اعداد صحیح مثبت می‌باشند)

۲۳۳۸ـ مستطیلی بر بیضی محیط است . اگر رئوس قطر اطول بیضی را به نقاط تربیع اضلاع بزرگتر مستطیل وصل کنیم تا اقطار دو نیم‌مستطیل را که قطر اطول بیضی ضلع مشترک آنهاست قطع کند . ثابت کنید که این نقاط به بیضی تعلق دارند.

۲۳۳۹ ـ منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ را رسم کنید . سطح محصور بین منحنی و مجانب‌های آنرا حساب کنید . همچنین منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ را رسم کنید وسطح محصور بین منحنی ومجانبها را حساب کنید. مبدأ مختصات برروی هردو منحنی قراردارد . اختلاف نوع این نقطه برروی دو منحنی درچیست ؟

۲۳۴۰ـ دو پنجره در طرف کوچه‌ای دریک سطح قائم به ارتفاعهای مختلف قرار دارند. دو نقطه درسطح کوچه (درهمان سطح قائم مشترك پنجره‌ها) وجود دارد که از هریك از آنها می‌توان دو نردبام برپنجره‌ها تکیه داد به قسمی که نردبامها برهم عمود باشند . برای یکی از این نقاط نردبامهای مذکور باهم برابرو به طول a می‌باشد و برای نقطهٔ دیگر دو نردبام باهم برابر نیستند وطول نردبام بلندتر برابر b می‌باشد . ارتفاع پنجره‌ها وعرض کوچه و فاصلهٔ دو پنجره از هم و طول نردبام کوچکتر را تعیین کنید .

۲۳۴۱ـ مجموع مربعات فواصل رؤس مربعی از نقطهٔ ثابت o مقدار ثابت k^2 ومجموع مربعات فواصل این رؤس از نقطهٔ ثابت دیگر o' مقدار ثابت k'^2 است . ثابت کنید که دایرهٔ محیطی مربع بر بیضی ثابتی همواره مماس است .

برای دانشجویان

۲۳۴۲ ـ معادلهٔ لیوویل

$$f'y'=f.y^3-kf'.y^2+f''.y$$

راکه درآن k عددی ثابت و f تابعی معلوم از x است حل کنید .

۲۳۴۳ـ حل معادلهٔ لیوویل (Liouville)

$y'=y^3+ae^{kx}.y^2$ را به‌کوادراتور منجر کنید . همچنین برای معادله : $y'=y^3+\frac{a}{\sqrt{x}}y^2$ حل معادله‌را به کوادراتور منجر کرده و کوادراتور را انجام‌دهید. جواب عمومی معادله‌را تعیین کنید .

۲۳۴۴ـ معادلات لیوویل : $y'=y^3+axy^2$ و $y'=y^3+\frac{a}{x^2}y^2$ رابه معادلهٔ ریکاتی به‌صورت $\frac{dv}{du}=\alpha v^2+\beta u$ (α و β مقادیر معلوم ثابت) تبدیل کنید

(معادلهٔ دیفرانسیل $y'=Ay^3+By^2+Cy+D$ که درآن A و B و C و D توابعی از x هستند به معادلهٔ لیوویل معروف است . اگر یك‌جواب‌معادله معلوم باشدمی‌شود با تبدیلات مناسبی D و C راصفر کرد و معادله را به‌صورت $y'=Ay^3+By^2$ تبدیل‌کرد. باتبدیل دیگری برروی‌متغیر یابرروی تابع‌می‌توان A رابرابر واحدکرد وسرانجام‌صورت کانونیك‌معادلهٔ لیوویل (با معلوم بودن‌یك جواب) به‌صورت $y'=y^3+\varphi(x)y^2$ درمی‌آید. پل آپل Paul Apell ثابت کرده است که معادله‌لیوویل درحالاتی‌که دراول ذکرشد یاحل می‌شودو یا به معادلهٔ ریکاتی تبدیل می‌گردد)

۲۳۴۵ـ معادلهٔ دیفرانسیل $y'=\frac{A(x)y+B(x)}{C(x)y+D(x)}$ را می‌توان به‌صورت‌کانونیك معادلهٔ لیوویل‌تبدیل‌کرد وهمچنین معادلهٔ دیفرانسیل .

$$y'=\frac{Ay^3+By^2+Cy+D}{Fy+G}$$

که A وB و ...F و G توابعی از x می‌باشندبه معادلهٔ لیوویل قابل تبدیل است . این تبدیلات را انجام دهید

۲۳۴۶ـ معادلهٔ دیفرانسیل

$$xy''=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)y'^2+\psi\left(\frac{y}{x}\right)y'+f\left(\frac{y}{x}\right)$$

رابه معادلهٔ‌ریکاتی‌منجر کنید به‌فرض $\varphi=\frac{y^2}{x^2}$ ، و $\psi=-2\frac{y^2}{x^2}$ و $f=(2k-k^2)\frac{y^2}{x^2}+k$ (k عددی‌ثابت) معادله‌را کاملا حل کنید

اصطلاحات ریاضی

و

معادل انگلیسی آنها

تنظیم از : **ایرج ارشاقی**

۶ ـ تصاعدات Progressions

Arithmetical Progression	تصاعد حسابی	Arithmetic mean	واسطهٔ حسابی
Geometrical "	تصاعد هندسی	Geometrical mean	واسطهٔ هندسی
Common difference	قدر نسبت در تصاعد حسابی	Insert	درج واسطه کردن
Constant factor / Common Ratio	قدر نسبت در تصاعد هندسی	Series	سری (مجموع جمله‌های یك رشته)
Nth term	جملهٔ n ام	Infinite	سری نامحدود
Last term	جملهٔ آخر	Pure Recurring Decimal	کسر اعشاری، متناوب ساده
		Mixed " "	کسر اعشاری متناوب مرکب

***

Exercies :

1- The 5^{th} and 4^{th} term of an A.P. are − 61 and 64 ؛ flno the 23^{rd} term.

2- Insert 20 arithmetic means between 4 and 67 .

3- If the p^{th} , q^{th} , r^{th} terms a G.P. be a , b , c respectively , prove that : $a^{q-r} \quad b^{r-p} \quad c^{p-q} = ۱$

اشتباه از چیست!

۱ـ دوعدد a و b راکه‌هردو مثبتند در نظر بگیرید. اگر داشته باشیم:

$$a>b$$

باضرب کردن دوطرف در b خواهیم داشت:

$$ab>b^2$$

و با کم کردن a^2 از دوطرف و فاکتور گیری خواهیم داشت:

$$a(b-a)>(b+a)(b-a)$$

ازآنجا نتیجه می‌شود:

$$a>b+a$$

چون b بنا به‌فرض مثبت است، ازاین نامساوی چنین برمی‌آید که نه‌تنها a بزرگتر از خودش است بلکه ازهرعدد بزرگتراز خودش نیز بزرگتر است. آیاچنین چیزی ممکن است؟ لابد می‌گویید نه. پس اشتباه‌این استدلال درکجاست؟

***

۲ـ به‌این معادله نگاه کنید:

$$x-1=2 \qquad (1)$$

فقط به‌طرف اول ۱۰واحد علاوه می‌کنیم، می‌شود:

$$x+9=2$$

دوطرف این‌معادلهٔ اخیررا در $x-3$ ضرب‌می‌کنیم:

$$x^2+6x-27=2x-6$$

ازدوطرف $2x-6$ راکم‌می‌کنیم:

$$x^2+4x-21=0$$

یا

$$(x+7)(x-3)=0$$

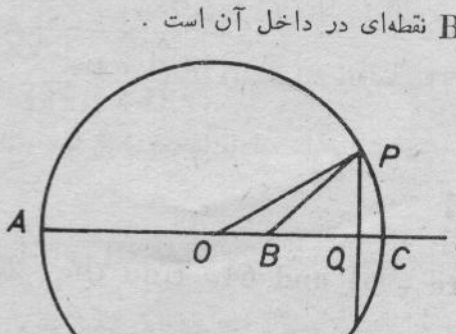
دوطرف را بر $x+7$ تقسیم می‌کنیم به‌دست می‌آید:

$$x-3=0$$

ازآنجا $x=3$. واین‌همان جواب معادلهٔ ۱ است. شاید بگویید که‌خوب جواب معادلهٔ ۱ باشد چه می‌شود. مطلب‌این است که باآنکه فقط به‌یك طرف معادله ۱۰ واحد علاوه کردیم باز جواب‌صحیح به‌دست آوردیم. حتماً چنین‌چیزی غیرممکن است. پس اشتباهی کرده‌ایم که همان جواب معادله (۱) را به دست‌آورده‌ایم. این‌اشتباه‌ازچیست؟

***

۳ـ در دایره شکل‌زیر، همان طورکه می‌بینید، O مرکز دایره و B نقطه‌ای در داخل آن است.



بارسم خط OB قطر AC به دست آمده است. حال نقطه‌ای در روی‌خط AC چنان تعیین می‌کنیم که‌داشته باشیم:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{AC} \qquad (1)$$

عمود منصف BD را رسم می‌کنیم تا دایره را درنقطهٔ P قطع کند. PO و PB را وصل‌می‌کنیم.

چنانچه r شعاع دایره باشد ،

$$AB = r + OB$$
$$BC = r - OB$$
$$AD = OD + r$$
$$DC = OD - r$$

وتناسب ۱ چنین می‌شود:

$$\frac{r+OB}{r-OB} = \frac{OD+r}{DO-r}$$

پس ازطرفین وسطین کردن خواهیم داشت :

$$(r+OB)(OD-r) = (r-OB)(OD+r)$$

وبعد ازضرب وخلاصه کردن ، می‌شود:

$$OB.OD = r^{۲}$$

حال از شکل به‌دست می‌آید:

$$OB = OQ - BQ \qquad (۲)$$

و

$$OD = OQ + QD$$

ولی چون Q وسط پاره خط BD است، QD و QB متساویند، بنابراین تساوی اخیر را می‌توان چنین نوشت :

$$OD = OQ + BQ \qquad (۳)$$

ازضرب کردن دورابطهٔ ۲ و۳ درهم وجانشین کردن $r^{۲}$ به‌جای OB.OD خواهیم داشت:

$$r^{۲} = \overline{OQ}^{۲} - \overline{BQ}^{۲} \qquad (٤)$$

طبق قضیهٔ فیثاغورث در دو مثلث OQP و BQP می‌توان نوشت :

$$\overline{OP}^{۲} = \overline{OQ}^{۲} + \overline{QP}^{۲}$$

$$\overline{BP}^{۲} = \overline{BQ}^{۲} + \overline{QP}^{۲}$$

این دوتساوی راکه ازهم تفریق کنیم، حاصل‌می‌شود:

$$\overline{OP}^{۲} - \overline{BP}^{۲} = \overline{OQ}^{۲} - \overline{BQ}^{۲}$$

اما $OP = r$، بنابراین تساوی اخیررا می‌توان چنین نوشت :

$$r^{۲} - \overline{BP}^{۲} = \overline{OQ}^{۲} - \overline{BQ}^{۲}$$

حال به جای طرف دوم تساوی فوق از رابطهٔ ٤ قرار می‌دهیم $r^{۲}$ وچنین به‌دست می‌آوریم:

$$r^{۲} - \overline{BP}^{۲} = r^{۲}$$

یا

$$\overline{BP}^{۲} = ۰$$

یا

$$BP = ۰$$

یعنی هر نقطه‌ای درداخل دایره برروی محیط آن قرار دارد. آیاعجیب نیست ؟

عقیدهٔ شما چیست، اشتباهی رخ داده است ؟ این اشتباه درکجاست ؟

***

اشتباه از این است

(مربوط به شمارهٔ ۱۲)

۱ـ وقتی می‌توانیم $\sqrt{x-y}$ را به صورت

$$\sqrt{-۱}\sqrt{y-x}$$

بنویسیم که مطمئن باشیم $y-x$ مثبت است . پس اگر فرض‌کنیم که $y-x$ مثبت است دراین‌صورت برحسب‌مقادیر a و b که به‌جای x و y می گذاریم و تساویهای ۱ و ۲ را به‌دست می‌آوریم ، یاتساوی ۱ ناصحیح است ویا تساوی ۲ ، یعنی‌اگر $b-a$ مثبت‌باشد، تساوی ۲ درست نیست واگر $b-a$ منفی باشد تساوی ۱درست نیست.

***

۲ـ درجایی‌که ازدوطرف تساوی جذر می گیریم و فقط علامت $+$ رامی‌گذاریم اشتباه رخ می‌دهد. درواقع از رابطهٔ

$$\left[(n+۱)-\left(\frac{۲n+۱}{۲}\right)\right]^{۲} = \left[n-\left(\frac{۲n+۱}{۲}\right)\right]^{۲}$$

می‌توان چنین بدست‌آورد :

$$n+۱-\left(\frac{۲n+۱}{۲}\right) = -n+\left(\frac{۲n+۱}{۲}\right)$$

یا

$$\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

***

۳ـ از آخرین نسبت تساوی ۳ نمی‌توان $r-t$ را از صورت و مخرج حذف‌کرد زیرا $r-t$ مساوی صفراست. لابد می‌پرسید چرا $r-t$ مساوی صفراست؟ توجه‌کنید: از رابطهٔ ۱ و ۲ به‌ترتیب می‌توان‌نوشت:

$$pr-qt=-ps$$

$$qr-pt=ps$$

وازضرب کردن طرفهای این‌دوتساوی‌درهم به‌دست‌آورد:

$$(p+q)r-(p+q)t=0$$

یا

$$(p+q)(r-t)=0$$

واضح‌است کـه دراین تساوی‌چون $p+q$ که مجموع دوطول است‌صفرنیست باید $r-t$ صفرباشد.

***

چرا چنین است؟

عددی سه‌رقمی که‌رقم یکان وصدگان آن لااقل دو واحد اختلاف داشته باشند در نظر بگیرید (مثل ۷۲۱). جای رقم‌یکان وصدگان را عوض‌کنید تاعدد جدیدی به‌دست آید (مثل ۱۲۷). حال این دو عدد را ازهم کم‌کنید (۵۹٤=۱۲۷−۷۲۱) جای‌رقم یکان‌وصدگان باقیمانده‌رانیزعوض‌کنید (٤۹۵). حال‌آن باقیمانده واین‌عدد را جمع کنید (۱۰۸۹=٤۹۵+۵۹٤). می‌بینیدکه حاصل ۱۰۸۹ شد. تااینجا که‌کارمهم وشگفت‌آوری انجام‌نگرفته است ، امااگرهمین رشتهٔ اعمال را دربارهٔ‌یك عددسه‌رقمی دیگر وبازهم یك‌عدد سه‌رقمی دیگر انجام دهید باشگفتی بسیار خواهید دیدکه در همه‌حال حاصل همان ۱۰۸۹ می‌شود.

آیا می‌توانید بگویید که چرا چنین‌است؟

پاسخ به «چرا چنین‌است» شمارهٔ گذشته

تقسیم بردوکردن متوالی یکی ازعوامل ضرب ، همان عملی است‌که برای‌بردن آن عامل به منبای ۲انجام می‌دهیم ، یعنی درواقع به‌این‌ترتیب قوایی از۲که مجموع‌آنها برابرآن عامل است‌به‌دست می‌آید. برای سهولت‌فهم مطلب‌همان عدد ۲۷راکه متوالیاً بر۲تقسیم شده‌است درنظربگیرید،۲۷درمبنای ۲چنین نوشته می‌شود ۱۱۰۱۱. واین می‌رساند که

$$۲۷=۱+۲^{۱}+۲^{۳}+۲^{٤}$$

وحاصل‌ضرب آن در ۶۳ را می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{aligned}۶۳\times۲۷&=۶۳(۱+۲^{۱}+۲^{۳}+۲^{٤})\\&=۶۳(۱+۲+۸+۱۶)\\&=۶۳\times۱+۶۳\times۲+۶۳\times۸+۶۳\times۱۶\\&=۶۳+۱۲۶+۵۰٤+۱۰۰۸\end{aligned}$$

و اینها همان اعدادی هستند که در ستون دوبرابرها باهم جمع شده‌اند. درستون تقسیم بردو ، هروقت خارج‌قسمت‌زوجی پیداشود، مثلا اگراین‌خارج‌قسمت‌دردومین‌تقسیم‌بردو به‌دست‌آمده‌باشد ، معلوم می‌شود که در مجموع قوای دویی کـه حاصل آنها برابر عدد نوشته شده در بالای این ستون است، $۲^{۲}$ وجود ندارد واگر خارج‌قسمت زوج در سومین تقسیم بر۲ به‌دست آمده باشد ، معلوم می‌شودکه درحاصل‌جمع $۲^{۳}$ وجود ندارد. به‌همین دلیل‌است که خارج‌قسمتهای زوج وحاصل‌ضرب مقابل‌آن درستون دوبرابرها را باید خطزد.

پرسش و پاسخ

سؤال : ۱-آیا $\frac{0}{\infty}=0$ می‌باشد ؟ اگر باشد پس $\frac{0}{\infty}=\frac{1}{\infty}$ است زیرا می‌دانیم که $\frac{1}{\infty}=0$. واگرهم صفر تقسیم بر بینهایت صفر نیست پس چقدر است ؟

۲- می‌دانیم که اگرعددی را برعددی بخش کنیم ،خارج قسمتی به دست می‌آید که اگر در مخرج ضرب کنیم بازصورت کسر نتیجه می‌شود . مثلا $\frac{24}{12}=2$ از طرفی می‌دانیم که $\frac{1}{\infty}=0$ ، اگر صفر را در بینهایت ضرب کنیم می‌شود $0\times\infty\neq 1$ زیراهرعددضرب درصفر حاصلش صفر می‌گردد.چرا اینگونه است ؟

اسماعیل گلجاریان

جواب : آقای گلجاریان‌ما نمی‌دانیم که شمادرچه کلاس هستیدوپایهٔ معلوماتتان‌چقدراست که جواب‌سؤال‌را متناسب‌باآن بدهیم‌ولی‌به‌هرحال‌امیدواریم که پاسخهای زیرین شماراقانع کند:

۱- $\frac{0}{\infty}$ برابر صفر است چه می‌توان مثلا آن را چنین نوشت :

$$\frac{0}{\infty}=0:\frac{1}{0}=0\times\frac{0}{1}=\frac{0}{1}=0$$

و به طور کلی هر عدد تقسیم بر ∞ برابر است باصفر (خود صفر هم جزء اعداد است) . ازاینکه چرا $\frac{0}{\infty}$ برابرصفر است و $\frac{1}{\infty}$ هم برابر صفر تعجب نکنید. $\frac{2}{\infty}$ هم برابر صفر است و $\frac{3}{\infty}$ هم همچنین برابر صفر است .

۲ ـ درست است که هر عددی ضرب در صفر حاصلش صفر می‌گردد، اما ∞ را درسلک‌اعداد نمی‌توان‌آورد(به مقالهٔ بینهایت در ریاضیات شمارهٔ ۱۲ رجوع کنید) . $0\times\infty$ ممکن است که برابر هرعددی بشود . درریاضیات به‌صورت $0\times\infty$ مبهم می‌گویند . یعنی معلوم نیست که برابرچه عددی است. مثلا به این عبارت نگاه‌کنید :

$$(x-1)\times\frac{3}{x^2-1}$$

فرض کنید که بخواهیم ببینیم مقدار آن‌بازاء $x=1$ چقدراست. باید به‌جای x درآن‌عبارت ۱ بگذاریم : دراین صورت عبارت به شکل $0\times\infty$ درمی‌آید که به ظاهر مبهم‌است . امامی‌توان آن را چنین نوشت :

$$(x-1)\times\frac{4}{x^2-1}=\frac{4(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{4}{x+1}$$

حال‌اگر در اینجا به‌جای x عدد ۱ را قرار دهیم به دست خواهیم آورد .

$$0\times\infty=2$$

واگر صورت‌کسر ازابتدا ۶ می بود بازاء $x=1$ به دست می‌آوردیم :

$$0\times\infty=3$$

***

سؤال : لطفاً طرز پیداکردن مجموع N جملهٔ رشتهٔ زیر را شرح دهید :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{N}$$

ویااگر تاکنون‌نتوانسته‌اند مجموع N جملهٔ رشتهٔ‌بالا را به دست آورند ، راهی وجود دارد که بتوان مجموع رشتهٔ فوق را وقتی‌که $N\to\infty$ پیدا کرد ؟

خسروجهانیار

جواب: این‌که شما نوشته‌اید یك سری‌است واتفاقاً از سریهای مشهور است و به آن سری **هارمونیك** (Harmonique) می گویند. سریها به‌طورکلی بردونوعند: **سریهای‌متقارب**(همگرا) وسریهای**متباعد**(واگرا). سری‌را متقارب‌می گویند وقتی که‌حاصل جمع n جملهٔ اول آن‌وقتی که n به‌سمت بینهایت میل می کند دارای حدی‌باشد. درغیراین‌صورت آن را متباعد می گویند. واضح است که سری‌اگر متباعدباشد، به‌دست آوردن مجموع آن (یعنی مجموع جمله‌ها وقتی که‌تعداد آنها بینهایت شود) اساساً مطرح نیست چه این مجموع برابر ∞ است . بنابراین بـرای به دست آوردن مجموع یك‌سری باید ابتدا متقارب بودن‌آن را ثابت‌کرد. اما سری‌هارمونیك از سریهای متباعداست. دلیل متباعدبودن آن را می‌توان چنین ثابت‌کرد: جمله‌ها را به‌ترتیب زیر دسته‌بندی می کنیم:

$$۱+\frac{۱}{۲}>\frac{۲}{۲}=۱$$

$$\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}>\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

$$\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۸}>\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$$

$$\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۱۱}+\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۱۳}+$$

$$\frac{۱}{۱۴}+\frac{۱}{۱۵}+\frac{۱}{۱۶}>\frac{۸}{۱۶}=\frac{۱}{۲}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

ومی گوییم که اگر جمله‌های سری‌را تـاجملهٔ معینی به p دسته‌تقسیم کرده‌باشیم،می توانیم p تااز‌این نامساویها‌بنویسم. حال اگر این‌نامساویها راجمع کنیم طرف‌اول مجموع جمله‌ها تاآن جمله معین است وطرف دوم p تـا $\frac{۱}{۲}$ یا $\frac{p}{۲}$ است . وداریم :

مجموع p دسته از جمله‌های‌سری $>\frac{p}{۲}$

امـا چون تعداد جمله‌های سری بینهایت است ، تعداد دسته‌هایی که می‌توان تشکیل داد، یعنی p ، نیز ∞ است و مجموع جمله‌های سری ازهرعدد بزرگی ، بزرگتراست. پس سری هارمونیك متباعد یعنی مجموعش بینهایت است.

اما ماتاکنون در جایی فرمولی که از روی آن بتوان مجموع تعداد محدودی از جمله‌های سری‌هارمونیك رابرحسب مرتبهٔ‌آن جمله‌ها به‌دست آورد ندیده‌ایم .

***

سؤال: ۱ـ لطفاً نام‌کتاب E.P.M را به‌وضوح نه به اختصار بنویسید تابرای استفاده خریداری‌کنم .

۲ـ درصورت امکان حروف یونانی کـه درریاضیات به کارمی‌رود بااسامی‌آنها برای اطلاع اینجانب وعدهٔ‌زیاددیگری ازدوستان من در مجله درج نمایید .

فرهاد مهینی

جواب : ۱ـ E.P.M نام اختصاری این‌کتاب است:

Exercices et Problèmes
des mathématiques

که در فرانسه چاپ شده و تألیف کومب (Combes) می‌باشد. ناشراین‌کتاب **Vuibert** درپاریس است .

۲ـ حروف یونانی‌که در ریاضیات مورد استعمال‌دارند چنین است :

مو	μ	آلفا	α
کسی	ξ	بتا	β
پی	π	گاما	γ
رو	ρ	دلتا	Δ,δ
سیگما	Σ,σ	اپسلین	ε
فی	φ	زتا	ζ
پسی	ψ	اتا	η
امگا	Ω,ω	تتا	θ
		لاندا	λ

***

سؤال : ۱ـ وقتی‌کـه یك‌تابع به‌دومتغیر مطلق بستگی داشته‌باشد ، می‌توان ازآن مشتق‌گرفت یانه واگرمی‌توان‌مشتق گرفت چطور ؟

۲ـ آیامی‌توان از توابع

$$y=\text{arc } \sin x$$

$$y=\text{arc } \cos x$$

$$y=\text{arc } tg x$$

$$y=\text{arc } cotg x$$

مشتق‌گرفت واگر می‌توان چطور؟ ومشتق‌آنهاچیست؟

داریوش قاضی وکیلی

جواب: ۱ـ چنانچه‌تابع به دومتغیرمطلق بستگی داشته باشد، ازآنهـا می‌توان برحسب هریك ازآن متغیرهای مطلق

مشتق گرفت. این مشتق را مشتق جزئی (یا مشتق نسبی) آن تابع نسبت به‌آن‌متغیر گویند. مثلا اگر تابع z به‌دو متغیر مطلق xوy بستگی داشته‌باشد ورابطهٔ بین‌آنها چنین باشد:

$$z = x^3 - 3x^2y + y^3$$

مشتق‌این‌تابع برحسب x که به z'_x نمایش داده‌می‌شود چنین محاسبه می‌شود:

$$z'_x = 3x^2 - 6xy$$

(yثابت فرض می‌شود، مانندیك‌عدد)

و مشتق آن برحسب y که به z'_y نمایش داده می‌شود ،چنین محاسبه می‌شود:

$$z'_y = -3x^2 + 3y^2$$

(x ثابت فرض می‌شود، مانند یك‌عدد)

۲ـ این توابع را توابع مثلثاتی معکوس می گویند و از آنهامی‌توان مشتق گرفت ومشتق آنهاچنین است:

$$y = \arcsin x$$

(وقتی‌که $\sin^{-1}x$ درربع اول یاچهام باشد)

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(وقتی‌که $\sin^{-1}x$ درربع دوم یا سوم باشد)

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \arccos x$$

(وقتی‌که $\cos^{-1}x$ درربع اول یادوم‌باشد)

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(وقتی‌که $\cos^{-1}x$ درربع سوم یاچهارم باشد)

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \operatorname{arctg} x \quad ; \quad y' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$y = \operatorname{arccotg} x \quad ; \quad y' = \frac{-1}{1+x^2}$$

راه مشتق‌گیری از این توابع تا اندازه‌ای مفصل و در کتابهای‌ریاضیات عالی هست به‌همین‌جهت ازشرح‌آنهادراینجا خودداری می کنیم.

***

سؤال : در کتاب فیزیك کلاس پنجم طبیعی و ریاضی صفحهٔ ۹۶ درقسمت‌حالت مخصوص منشور نوشته است«درصورتی که زاویهٔ I کوچك باشد، زاویهٔ r هم‌کوچك است ومی‌توان به جای‌سینوس،خود زوایارا برحسب‌رادیان‌قرارداد یعنی $I = nr$» وحال‌آنکه می‌توان زوایا را برحسب درجه یاواحد دیگری‌نیز به‌کاربرد، زیرا ضرایب تبدیل واحد از طرفین تساوی حذف می‌شود،ولی‌کتاب این موضوع را یادآور نشده واین امرباعث می‌شودکه ما محصلین درموقع حل‌مسئله مقداری وقت خود را صرف تبدیل واحد زاویه‌کنیم .

جواب : به‌نظر ماآنچه درکتاب نوشته شده است‌برای آن است که‌بگوید چراازفرمول $\sin I = n \sin r$ می‌توان‌تساوی $I = nr$ رانوشت. پس‌ازآنکه این تساوی را نوشتیم همان‌طور که شمانوشته‌اید می‌توان دردوطرف تساوی به‌جای Iوr اندازهٔ آنها رابرحسب واحد دیگری جزرادیان نیز گذاشت . بدنبود که درکتاب هم‌به‌این‌موضوع اشاره می‌شد و دراین باره مثالی زده‌می‌شد .

***

آیا شما هم می توانید ؟

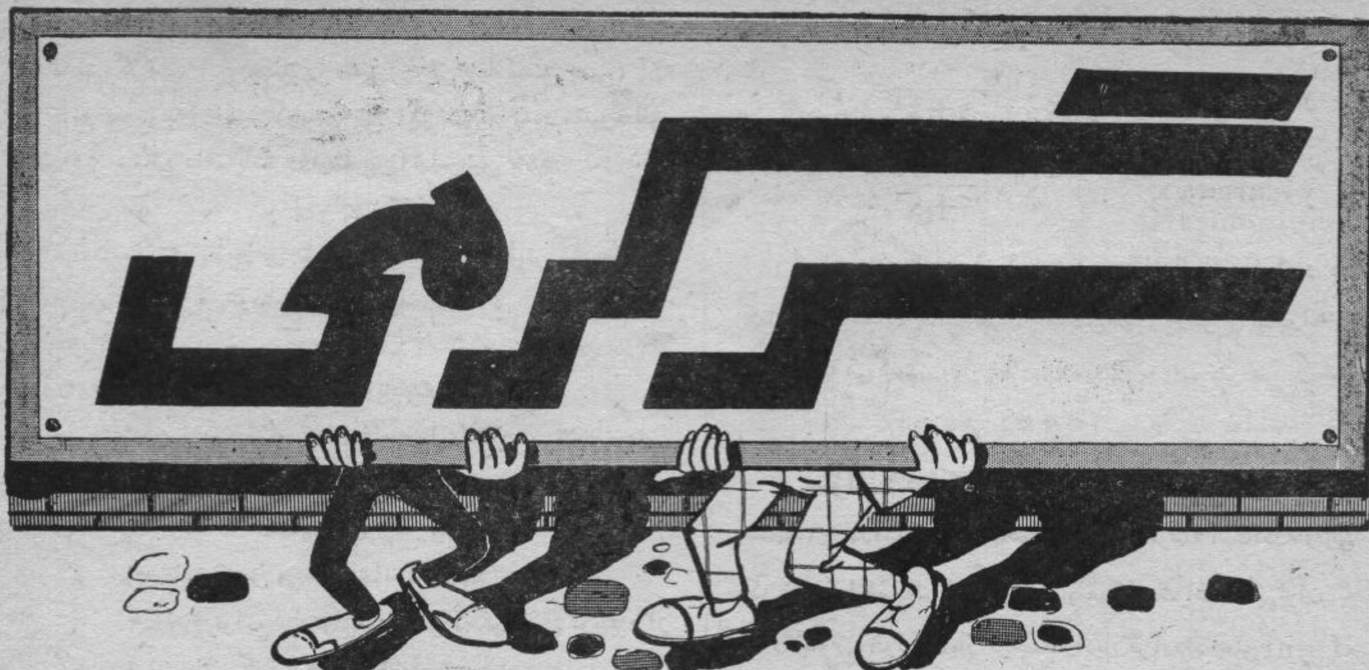
به‌این قالب نگاه‌کنید:

$$157^2 = 24649$$
$$158^2 = 24964$$

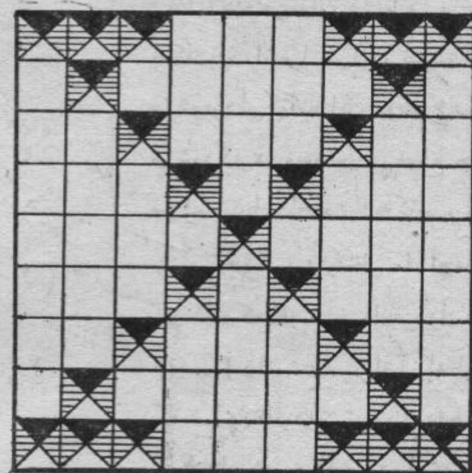
$$13^2 = 169$$
$$14^2 = 196$$

$$913^2 = 833569$$
$$914^2 = 835396$$

شاید اعداد دیگری نیز باشند که از همین قالب باشند . آیا شما هم می‌توانید با آنها چنین قالبی بسازید ؟



جدول کلمات متقاطع



افقی: ۱ ـ محمد بن موسی خوارزمی این نام را برای این رشتهٔ مهم از ریاضیات وضع نمود. ۲ ـ بخش مهمی از ریاضیات که با کمیتهای متصل سر و کار دارد. ۳ ـ وارونهٔ واحد ـ اولش را معرب کنید واحد انگلیسی طول ـ دو سوم از نه برابر ده. ۴ ـ ریاضیدانان قدیم ایرانی به علمی می گفتند که بیشتر ازخواص مثلثات کروی بحث می کرد ـ هندیها به وتر می گفتند که بعدها به جیب تحریف شد. ۵ ـ نتیجهٔ مقایسهٔ دو مقدار ـ به آن آسه هم می گویند. ۶ ـ قضیه‌اش در مبحث موربات مطالعه می‌شود ـ بدون نقطهٔ آخر واحد طول. ۷ ـ به آخر اعداد می آید تا مرتبهٔ آنها را برساند ـ نسبت مثلثاتی ـ و به آخرش افزوده شود در مورد متغیر با Δx و در مورد تابع با Δy نموده می‌شود.

بقیه در پائین صفحهٔ بعد

مسئلهٔ برش

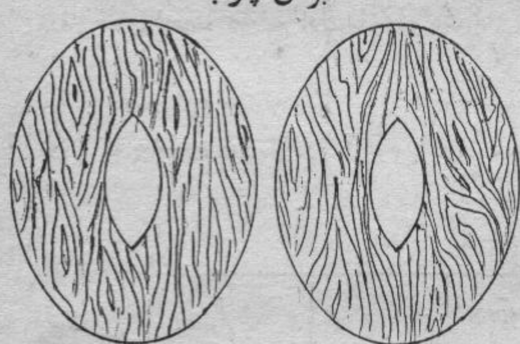
درچاپ صورت مسئلهٔ برش شمارهٔ قبل اشتباه رخ داده است درست آن مجدداً ذکر می‌شود.

مستطیل به ابعاد ۱۶ در ۹ سانتیمتر را به دو قسمت چنان تقسیم کنید و دو قسمت را چنان پهلوی هم قرار دهید که مربعی معادل با مستطیل به دست آید. مسئله را در حالت کلی برای مستطیل با ابعاد a و b بررسی کنید.

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
ا	ر	ش	م	ی	د	س
ی	ک	ص	د		س	ه
ن	ا	ت		س	ی	م
ش	ش		د	ه		ی
ت	ا	ل	س		س	و
ی	ن	م		ن	م	ا
ن	ی	ر		م	ت	ر

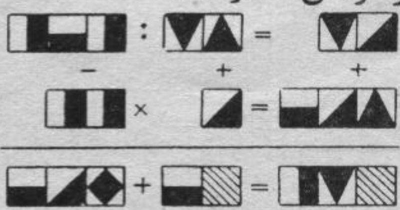
حل جدول شمارهٔ ۱۲

برش چوب



از نجاری خواسته‌اند که از دو قطعه چوب به شکل بالا یك تختهٔ کاملاً گرد به شکل دایره برای میز بسازد بدون آنکه چیزی از آن دور بیندازد یا چیزی به آن اضافه کند. چگونه؟

سرگرمی فکری (از مطبوعات آلمان)



در شکل بالا هرمربع نمایش یك رقم می‌باشد و مربعهای متشابه نمایش رقمهای متساوی می‌باشند. بین هردو عدد علامت عملی که باید انجام بگیرد گذاشته شده است و هرعدد زیر خط، حاصل عمل دو عدد بالایی است. این اعداد را پیدا کنید.

فرستنده: مهندس هورفر

ازجمله نامه های رسیده

☆آقای **کیوان پور قاسمی مقدم** نوشته‌اند که، «لغت ، مسأله، که به همین صورت صحیح است درمجلهٔ یکان به صورت غیر صحیح مسئله ، به چشم می‌خورد .»

نکتهٔ بالا مورد توجه نویسندگان یکان بوده است. چنانچه درشماره های نخستین یکان مراعات می‌شد. اما بنا به تصمیم شورای نویسندگان ، شیوهٔ نگارش مندرجات یکان منطبق بر مصوبات شورای عالی فرهنگ بوده وهمان شیوه‌ای است که درچاپ کتابهای درسی نیز مراعات شده است . مصوبات شورای عالی فرهنگ دربارهٔ شیوهٔ خط فارسی به صورت یك جزوه از طرف ادارهٔ مطالعات‌وبرنامه‌های وزارت فرهنگ (فعلاآموزش و پرورش) چاپ ومنتشرشده است .

☆آقای **نصرت‌الله ارضی** از اراك نوشته‌اند :

« در صفحهٔ ۱۵ شمارهٔ ۱۰ یکان در مقالهٔ انتقاد برکتاب فیزیك سوم توسط آقای هوشنگ شریف زاده علامت سانتیمتر مربع (c) بیان شده است و حال آنکه در حل المسائلهای تألیف ایشان علامت (Cm^2) به‌کاررفته است .»

«در صفحهٔ ۳۷ شمارهٔ ۱۰ فرمول اسید بوتان‌اوئیك(اسید بوتیریك) که به صورت CH_3CH_2COOH چاپ شده است صحیح نیست .»

«شعر لطیفی که ضمن مقالهٔ مندرج در صفحهٔ ٤ شمارهٔ ۱۱ چاپ شده است در دیوان کلیم کاشانی به صورت اصلی خود چنین مذکور است .

موجیم که آسودگی ما عدم ماست   ما زنده به آنیم که آرام نداریم»

«معمای آشپزخانهٔ مشترك مذکور درصفحهٔ ۱۵ شمارهٔ ۱۱ تحریف شدهٔ معمای معروف تقسیم قرص نان و منسوب به علی‌بن ابیطالب (ع) می‌باشد.»

یکان - دردو مورد اول عدم توجه مسئولان چاپخانه در غلط‌گیری موجب اشتباه شده‌است . علامت سانتیمتر مربع (cm^2) می‌باشد. علامتهای قرار دادی بین‌المللی فیزیك منطبق بر تصمیم کنگرهٔ بین‌المللی ژنو در یکان سال چاپ شده است ،

درمورد معمای آشپزخانهٔ مشترك علاوه برآقای ارضی ، عده‌ای دیگراز خوانندگان نیزایرادگرفته‌اند . توجه عموم‌مردم به مسائل‌فکری ومعماهای ریاضی موجب شده است که چه درگذشته و چه درحال کتابهای متنوعی دراین زمینه نگارش یابد ودرنتیجه یك مسئله به صورتهای مختلف بیان شود . تنها از کتابهایی که دراین زمینه ودریکی دوسال اخیر درکشورهای آمریکا ، شوروی وفرانسه چاپ شده‌است نزدیك به‌بیست جلد دراختیار نویسندگان یکان می‌باشد . دربارهٔ مسائل ریاضی منسوب به‌علی‌بن ابیطالب(ع) مقالهٔ جامعی درموقع مقتضی دریکان چاپ خواهد شد .

● آقای **رضا منصوری** دانش‌آموز ششم ریاضی دبیرستان رهنما دربارهٔ اثبات مسئلهٔ شمارهٔ ۷ از ترسیمات هندسی فقط با پرگار مذکور درصفحهٔ ۱۵ شمارهٔ ۸ یکان ایرادگرفته‌اند وتوضیح داده‌اندکه قبلاباید بیان می‌شدسه نقطهٔ A و M و C بریك

(دنباله در صفحهٔ ماقبل آخر)

بقیهٔ شرح جدول کلمات متقاطع

۸ - دو معادله را گویندکه دارای ریشه‌های مشترك باشند .
۹ - وارونهٔ عملی از چهارعمل اصلی.

قائم: مجموعهٔ جامعترین مقاله‌های‌علمی‌وجالبترین مسائل سال.۲- از یك وسه‌تشکیل شده اما یك دوازدهم یك به علاوهٔ سه است. ۳- نام عام مرابحه و تنزیل. ۴- وارونهٔ عددی یك رقمی- باعلامت + مشخص‌می‌شود.۵- درقدیم علمای علم اعداد به‌عددهای زوج می گفتند و نام یك نوع مربع و فقی نیزمی‌باشد - فیلسوف و ریاضیدانان عالیمقام ایرانی ۶. - برای‌کلمهٔ عرض از مختصات وضع شده بود - طول نوار سی درجهٔ منطقة‌البروج . ۸ - نقطهٔ حرف اولش را به حرف دوم بدهید مقدار فضای اشغال شده توسط جسم می‌باشد.۸- دانشمندوریاضیدان مشهورانگیسی.۹- ریاضیدان معروف ایرانی‌که اولین‌کتاب جبررا نوشت .

حل مسئلهٔ خرید اسب

(مذکور در صفحهٔ سرگرمی شمارهٔ ۱۲)

بهای اسب را با x ومال پنج نفر را به ترتیب با a و b و c و d و e نمایش می‌دهیم . خواهیم داشت :

$$\begin{cases} ۵a+۴b=۵x \\ ۵b+۳c=۵x \\ ۵c+۲d=۵x \\ ۵d+e=۵x \\ ۶e+a=۶x \end{cases}$$

ازحل دستگاه نتیجه می‌شود

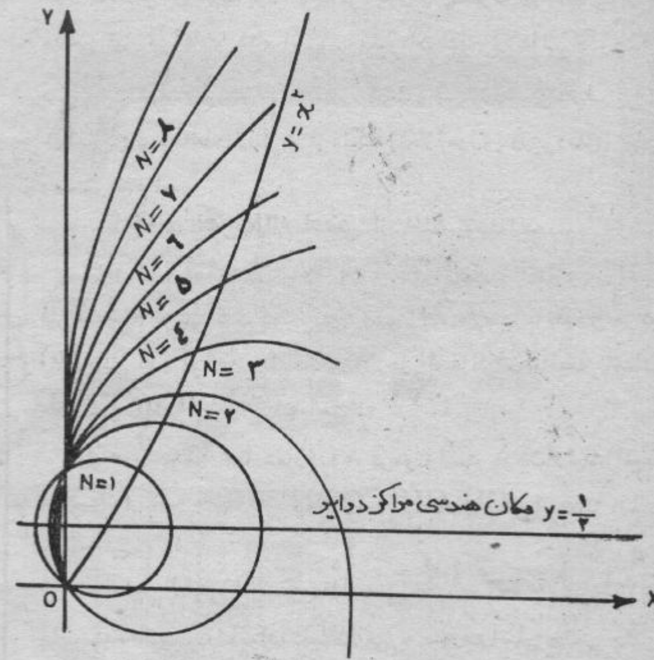
$$۳۷۷۴d=۳۰۸۵x$$

چون ۳۰۸۵ و۳۷۷٤ نسبت به یکدیگر اول هستند پس $x=۳۷۷۴k$ وکوچکترین جواب‌آن به ازاء $k=۱$ به دست آمده وداریم

$$x=۳۷۷۴ \quad و \quad a=۱۹۷۴ \quad و \quad b=۲۲۵۰$$

$$c=۲۵۴۰ \quad و \quad d=۳۰۸۵ \quad و \quad e=۳۱۱۶$$

است و مرکز آن $C\left|\begin{matrix}\frac{N}{2}\\ \frac{1}{2}\end{matrix}\right.$ است .



ش ۶

خط $y=\frac{1}{2}$ مکان‌هندسی مراکز دوایر است . ازحذف y بین دومعادله $y=x^2$ ودایرهٔ حلال حاصل می‌شود.

$$x^4-Nx=0 \quad \text{یا} \quad x(x^3-N)=0$$

$$x^3-N=0 \quad \text{و} \quad x=0 \quad \text{ویا}$$

پس دایره بازاء مقادیر مختلف N سهمی را دردونقطه به‌طولهای صفرو $\sqrt[3]{N}$ قطع می‌کنند.

هزار وپانصد سال‌بعد حکیم‌عمرخیام نیشابوری برای‌حل کلی معادلات درجهٔ سوم و درجهٔ چهارم تقاطع یك‌سهمی و یك دایرهٔ متحرك را پیشنهاد کرد و بخصوص از این راه توانست مسئلهٔ تضعیف مکعب وتثلیث زاویه را حل‌کند .

معادلهٔ درجهٔ چهارم

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$$

را با تبدیل x به $x-\frac{b}{3a}$ به معادلهٔ درجهٔ چهارم ناقص

$$x^4+Ax^2+Bx+C=0$$

می‌توان تبدیل‌کرد . اگر سهمی $y=x^2$ و دایرهٔ

$$x^2+y^2+\alpha x+\beta x+\gamma=0$$

را درنظر گرفته و y رابین معادلات آنها حذف‌کنیم به‌معادلهٔ

$$x^4+(1+\beta)x^2+\alpha x+\gamma=0$$

می‌رسیم وچون معادلهٔ اخیر را با معادلهٔ درجهٔ چهارم مفروض متحد کنیم به‌موجب‌اصل تساوی ضرایب در اتحادها خواهیم‌داشت:

$$1+\beta=A \quad \text{و} \quad \alpha=B \quad \text{و} \quad \gamma=C$$

بدین ترتیب دایرهٔ حلال برحسب ضرایب معادلهٔ درجهٔ چهارم تعیین می‌شود .

اگر معادله درجهٔ سوم باشد

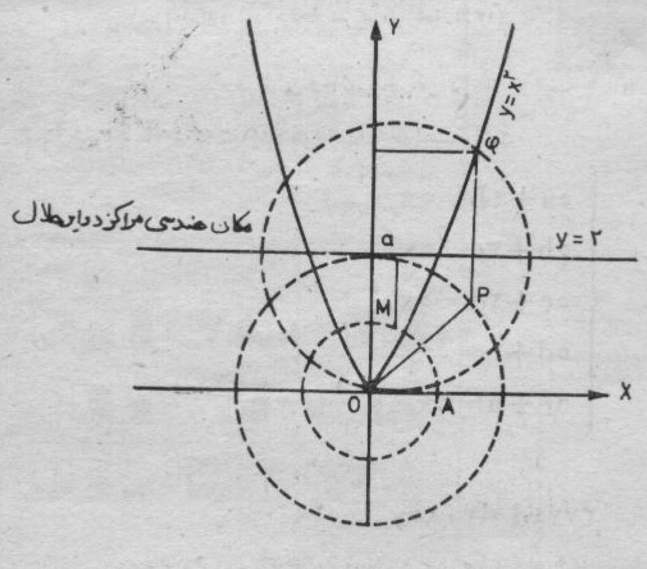
$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

با تبدیل x به $x-\frac{b}{2a}$ به‌معادلهٔ $x^3+px+q=0$ تبدیل‌می‌گردد. این معادله‌را در x ضرب‌کرده بامعادلهٔ‌حاصل از تلاقی سهمی و دایره‌متحد می‌کنیم :

$$p=1+\beta \quad \text{و} \quad q=\alpha \quad \text{و} \quad \gamma=0$$

به‌دست می‌آید. درنتیجه دایرهٔ حلال از مبدأ مختصات خواهد گذشت. بحث مفصل مربوط به‌حل معادلات درجهٔ سوم و درجهٔ چهارم وهمچنین چگونگی تلاش ریاضیدانان برای پیدا کردن طرق سادهٔ حل‌آنها را به‌فرصتی دیگر موکول می‌کنیم. فقط ناگزیر از شرح روش حکیم عمرخیام ریاضیدان بزرگ ایران در تثلیث یك‌زاویهٔ غیرمشخص می‌باشیم.

زاویهٔ مفروض XOM است این زاویه که آن را θ می‌نامیم در دایره‌ای به‌شعاع واحد مقابل به‌قوس AM است و $\cos\theta=a$ می‌باشد (شکل۷).



ش ۷

اما $\cos\theta=4\cos^3\frac{\theta}{3}-3\cos\frac{\theta}{3}$

چون طرفین رابطهٔ فوق را دوبرابر کرده و $x=2\cos\frac{\theta}{3}$ فرض کنیم‌معادلهٔ درجهٔ سوم $x^3-3x-2a=0$ راخواهیم داشت

بەموجب توضیحات بالا دایرهٔ حلال بەمعادله

$$x^2+y^2-2ax-4y=0$$

یا

$$(x-a)^2+(y-2)^3=a^2+4$$

می‌باشد که مرکز آن $C\left|\begin{matrix}x=a\\y=2\end{matrix}\right.$ است. اگر φ نقطه‌ای مشترك بین دایره وسهمی در ربع اول و P تصویر φ بر روی دایرهٔ بەمرکز O و به شعاع ۲ باشد در این صورت زاویهٔ XOP ثلث φ خواهد بود.

طریقهٔ یافتن مقاطع‌مخروطی بەوسیلهٔ منائیخمس نیزقدری بەنظر عجیب می‌آید. وی‌تصور می‌کرد که مقاطع مخروطی از تقاطع سطح مستوی بامخروطی کەاین سطح برمولدآن عمود باشدحادث می‌شوندوسه‌نوع‌مقطع که ظاهراً وی بەهرسه‌تای آنها پی‌برده وآنهاراازیکدیگرتفکیك کرده است‌ازآنجاپیدامی‌شوند. کەزاویهٔ‌رأس مخروط رفته‌رفته‌بزرگترشود تاوقتی که زاویه‌حاده است شکل مقطع بیضی‌است‌وچون این‌زاویهٔ رأس مخروط‌مساوی قائمه شود مقطع بەصورت سهمی درمی‌آید درآن‌صورت کەزاویهٔ رأس منفرجه باشد دوشاخهٔ یك هذلولی درست می‌شود.

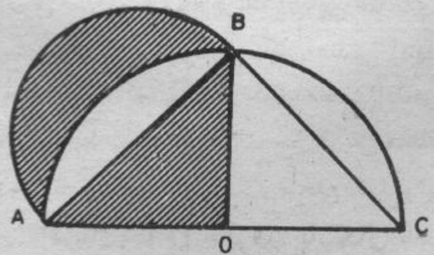
نویگه بوئر (Neugebauer) چنین حدس زدکه ممکن است منائیخموس با استدلال ساعت آفتابی یاشاخص بـه این‌اکتشافات راه یافته‌باشد.

خواص‌عالی این‌مقاطع چنان هندسه‌دانان یونان‌رامفتون کردکه بەزودی این‌منحنی‌ها را بەخاطر خودآنها موردمطالعه قراردادند وآپولونیوس رساله‌ای دربارهٔ مقاطع مخروطی نوشت که درآن مهمترین‌خواص‌آنهاراشرح داده‌وثابت کرد. یونانیان این منحنیها را مکان هندسی (loci) می‌نامیدند.

دیگرازکسانی کەبەخاطرحل‌مسائل‌افسانه‌ای‌شهرتی‌جهانی یافته‌اند بقراط ریاضیدان است. وی که دراواخر قرن‌پنجم‌قبل ازمیلاد بەخاطر مسئلهٔ تربیع‌دایره بەاوج شهرت رسید، درمورد تثلیث‌زاویه کاری نکرده است. اماراه حلهای جالب‌وناتمامی‌از او برای دومسئلهٔ دیگر دردست است.

کوشش‌وی‌برای تربیع دایره سبب اکتشاف شکلهای‌هلالی شدکه می‌توان مربع معادل آنها را بەدست آورد و این عجیب است‌که ازپنج‌نوع هلال اکتشافی بقراط سه‌تای آنها به آسانی تربیع می‌شود واین‌خود ازاین‌نظر اهمیت‌داردکه بەوسیلهٔ آنها معلوم می‌شود کـه لااقل‌پاره‌ای از اشکال منحنی الخط قابل تربیعند.

ساده‌ترین شکل هلالی بقراط چنین است: نیم مربع ABC درنیم‌دایرهٔ بەمرکز O محاط است(شکل۸). نیمدایره‌ای



ش ۸

به قطر AB رسم می‌کنیم. چون نسبت‌بین مساحتهای دودایره مثل‌نسبت مربع قطرهای آنها است لذا $AC^2=2AB^2$. بنابراین نصف‌نیم‌دایرهٔ بزرگ مساوی نیم دایرهٔ کوچك است. اگرقسمت‌مشترك‌بین دوسطح‌آنهارا برداریم مثلث OAB معادل شکل‌هلالی خواهد بود.

بقراط حل‌مسئلهٔ تربیع‌دایره را بدین‌شرح بیان داشت‌که برای تربیع‌دایره قطعاتی ازآن‌را تربیع می‌کنیم. سپس نتایج حاصل‌را باهم جمع می‌کنیم. این‌کار بەسهولت در مورد قطعاتی از دایره بەشکل هلال که آنها را اهلهٔ بقراط نامیدند صورت گرفت امابیهوده درصدد جمع‌کردن آنهابود زیرا همواره‌جزء کوچکی باقی‌بود که اندازه‌گیری آن‌کار ساده‌ای نبودولی بـه هرحال بەخاطر تربیع چند هلال، درآن‌زمان شهرت یافت که بقراط مسئلهٔ تربیع دایره راحل‌کرده است.

راه‌حلی که بقراط برای تضعیف مکعب بیان داشته است حاکی‌است‌که اونیز مانند ارخوتاس مسئله را تبدیل بەپیداکردن دوتا از وسطین ذوار بعهٔ متناسبه میان a و ۲a کرده است ولی‌این خودبەطور ضمنی‌نشان می‌دهد که او از نسبتهای مرکب آگاهی داشته‌وباحسن تشخیص وانتقال خود آنهارا دربارهٔ خطوط‌بەکار برده است.

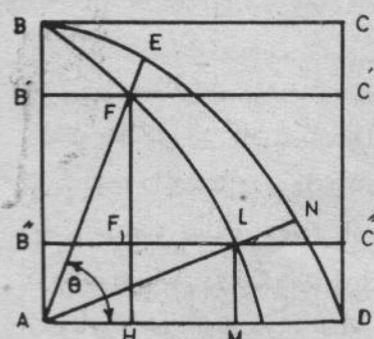
حل مسئلهٔ تثلیث‌زاویه؛ جزدرحالت خاص قائمه بودن، بەوسیلهٔ خط‌کش وپرگار امکان ندارد مگرآنکه بخواهیم بـا تقریب‌نتیجه رابەدست‌آوریم واین‌کاری است‌که تمام دانشمندان ریاضی عهدعتیق وعلمای جدیدتر از دوهزار سال قبل تـاکنون کرده‌اند **هیپیاس دونیکومد (Nico mede)** و بقراط و ارخوتاس و حتی ارشمیدس ، خیام ، خواجه‌نصیرالدین طوسی هریك‌راه‌حلهای مخصوصی برای‌تثلیث زاویه بەطور تقریب‌ارائه داده‌اند.

نیکومد برای حل مسئلهٔ‌تثلیث زاویه منحنی **کونکوئید** (Conchoide) را ابداع کردکـه تعریف‌آن چنین است: اگر ازنقطهٔ O واقع درصفحهٔ یك‌منحنی ، شعاعهای حاملی بـه

تمام نقاط آن منحنی‌وصل کنیم وهریك از این شعاعهای حامل رابه‌طول ثابت ومعین l امتداد دهیم مکان هندسی انتهای این اشعه منحنی جدیدی‌است که‌آن راکونکوئیدمنحنی اول‌می‌نامند. منحنی کونکوئید خط راست که برای حل‌تقریبی مسئلهٔ تثلیث زاویه ابداع شدمنحنی‌درجهٔ سوم است‌و منحنی کونکوئیددایره به ازاء وضع خاصی ازنقطهٔ O **حلزون پاسکال** نام دارد و باز بازاء وضع‌خاص دیگری ازنقطهٔ O و مقدار معینی ازطول l منحنی دیگری‌است که‌آن را **کاردیوئید** (منحنی بشکل‌قلب) می‌نامند . **دیوکلس** (Diocles) که تقریباً معاصر نیکومد بود برای تثلیث زاویـه منحنی **سیسوئید** (Cissoide) را به‌وجود آوردکه تعریف آن چنین است : دایرهٔ C و نقطهٔ A واقع برآن ویکی از مماسهای دایره را درنظر می‌گیریم. اگر از A خطوطی رسم کنیم‌که دایره‌را در Q وخط مماس رادرP قطع کنندمکان نقطهٔ M ازاین‌خطوط‌راکه‌بازاء‌آن $AQ=MP$ باشد سیسوئید می‌نامند ونیز می‌توان آن را منعکس یك سهمی نسبت به‌یکی ازنقاط سهمی دانست .

هیپیاس (Hippias) اهل **الیس** (Elis) درسال ۴۳۵ قبل‌از میلاد برای‌آنکه بتواند زاویه‌را به‌سه‌قسمت متساوی تقسیم‌کند منحنی تازه‌تری اختراع کردکه در تاریخ منحنیهای عالی‌نخستین نمونه است وآن منحنی را با اسباب نمی‌توان‌رسم کرد بلکه راه ترسیم آن نقطه‌یابی و اتصال نقاط به یکدیگر است :

منحنی راکه هیپیاس اکتشاف کرده مربع‌ساز (Quadratrix) می‌نامند زیراهمین منحنی را یك‌قرن بعد **دینوستراتوس** (Deinostratos) (قرن چهارم قبل از میلاد) ودیگران برای تربیع دایره به‌کار بردند راه تولید این منحنی چنین است: مربع ABCD به ضلع a که درآن ربع دایره‌ای بـه مرکز A به‌شعاع a رسم شده‌است‌درنظر می‌گیریم. اگرشعاع دایره باسرعت ثابت ازوضع AB تاوضع BD دوران‌کند و در همان‌حال‌همزمان‌حرکت



ش ۹

آن‌ضلع BC نیز باسرعت ثابت به‌موازات خود حرکت‌انتقالی داشته باشد ودرپایان به‌وضع AD درآید، محلهای تقاطع این دوخط (نقاطی مانند F وL) همان نقاطی است‌که منحنی مربع ساز را می سازند واضح است که ED ق = EAD ز و

BD ق = BAD ز . این دورابطه را برهم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{BD\,\text{ق}}{ED\,\text{ق}}=\frac{BAD\,\text{ز}}{EAD\,\text{ز}}$$

نسبت بین‌دوقوس‌برابرنسبت بین $\frac{BA}{FH}$ است.اگرطول AF رابه e وزاویهٔ DAF رابه θ نمایش دهیم

از رابطهٔ $\frac{AB}{FH}=\frac{\widehat{BD}}{\widehat{ED}}$ نتیجه می‌شود $\frac{\pi}{2}:\theta=\frac{a}{e\sin\theta}$ زیرا در مثلث AFH که قائم‌الزاویه است $FH=e\sin\theta$ وبنابراین

$e\frac{\pi}{2}\sin\theta=a\theta$ این معادله مکان‌است. هرگاه خط FH را به‌دو جزء برنسبت ۲و۱ قسمت کنیم بدانسان که $FF_1=2F_1H$ باشد وپس ازآن B″C″ رارسم کنیم تاFH را در F_1 ومنحنی را در L قطع‌کند وA رابه L متصل سازیم زاویهٔ NAD برابر ثلث‌زاویهٔ θ خواهدبود.

درخاتمه: چون بنابگفتهٔ ویت ریاضیدان فرانسوی،همان کسی‌که برای نخستین‌بار حروف‌را به‌عنوان علامت واردقلمرو جبرکرد ، حل‌هرمسئلهٔ درجهٔ‌سوم ودرجهٔ چهارم پس‌ازآخرین مرحلهٔ تحلیل به مسئلهٔ تثلیث زاویه یاتضعیف مکعب می‌رسد.در مقاله‌ای دیگر تاریخچهٔ‌پیدایش وطرق مختلف‌مراحل‌وچگونگی حل معادلات درجهٔ‌سوم و درجهٔ چهارم کامل راکه نتیجهٔ‌بسیار مفیدوجالبی ازتلاش مغزبشری درحل مسائل افسانه‌ای‌بوده‌است بیان خواهیم داشت .

تقاضاازاشخاصی‌که
برای‌مجله‌مطلب‌یامسئله‌می‌فرستند

۱ـ مطالب فقط در یك روی صفحهٔ کاغذ و باخط خوانا نوشته‌شود.

۲ـ مطالب مختلف دراوراق جداگانه نوشته‌شود.

۳ـ باهرمسئله حل‌آن همراه‌باشد .

۴ـ برای‌هرمسئله‌ذکرشودکه طرح‌فرستنده است یااینکه ازجای دیگر اخذشده است ومأخذآن معرفی‌شده‌باشد.

۵ـ چنانچه مسئله از مجله‌های خارجی‌نقل شده‌است نام کامل‌وتاریخ وشمارهٔ مجلهٔ‌مزبور معرفی شده باشد.

۶ـ ازارسال مسائلی‌که درحل‌المسائلها وکتابهای درسی چاپ‌ایران مذکور است خودداری شود.

۷ـ مشخصات فرستندهٔ مطالب‌یامسئله به‌وضوح ذکرشود.

۸ـ مطالب‌ومسائل‌رسیده به‌شرط‌رعایت‌نکات‌فوق، به‌ترتیب وصول وباتوجه به‌موضوع ومناسبت سال تحصیلی در مجله درج می‌گردد .

از جمله نامه‌های رسیده (بقیه از صفحهٔ ۵۳)

استقامتند آنگاه از تشابه دو مثلث ACQ و AQM نتیجه گرفت که M وسط AB می‌باشد .

● آقای **هادی خرقانی** دانشجوی رشتهٔ ریاضی ضمن توضیحی که برای «عمل غلط اما جواب صحیح» مذکور در صفحهٔ ۶۱ شمارهٔ ۱۱ داده و راه کلی برای تعیین کسرهای با خاصیت مذکور درمقاله داده‌اند ، ایراد گرفته‌اند که یك چنین عملی نباید غلط ذکرشود بلکه بایدگفت راه غیرعادی»

یکان ـ منظور طراح سؤال این بوده است که عمل از نظر کلی غیر مجاز است یعنی نمی‌توان آن را در مورد همهٔ کسرها به‌کار برد .

● آقای **فیروز بایرامی** دانش‌آموز پنجم ریاضی دبیرستان ادیب برای مشتق تابع تعریف زیررا به عمل‌آورده‌اند :

فرض‌می‌کنیم وقتی‌که x به xdx تبدیل می‌شود y به ydy تبدیل‌گردد دراین صورت مشتق تابع عبارت خواهد بود از:

$$y'=\lim_{dx\to 1}\frac{y(dy-1)}{x(dx-1)}$$

وبا تعبیرهندسی که به‌عمل‌آورده‌اند نتیجه‌گرفته‌اندکه بازهم‌مشتق تابع برابر با ضریب زاویهٔ مماس برمنحنی می‌باشد. آقای‌بایرامی برای مثال مشتق چند تابع را به روش فوق تعیین نموده‌اند.

● آقای **غلامحسین پور تندرست** دانش‌آموز پنجم ریاضی دبیرستان نوربخش رشت ضمن ایراد به فرمولی‌که برای محاسبهٔ مجموع جمله های یك تصاعد حسابی مرکب در صفحهٔ ۳۲ شمارهٔ ۶ یکان ذکر شده است فرمول زیر را برای این مجموع ارائه داده‌اند .

$$S=n(a-b+c)+\frac{1}{6}n(n+1)(nc-4c+3b)$$

که درآن a جملهٔ اول ، b تفاضل جمله‌های اول و دوم و c قدر نسبت تصاعد تفاضلها وn عدهٔ جمله‌ها می‌باشد.

● آقای **حسین گوکی‌زاده** دانش آموز ششم ریاضی دبیرستان شاهپور کرمان با روش‌هندسی ثابت کرده‌اندکه درمعادلهٔ مثلثاتی کلاسیك نوع اول اگرمجموع ضریبها برابرصفرباشد معادله حتماً دارای دوریشهٔ متمایز می‌باشد .

یکان ـ امید است موردی پیش‌آید ودربارهٔ کارهای ابتکاری آقایان بایرامی، پورتندرست وگوکی‌زاده توضیح مفصلتر بیان گردد .

● عدهٔ کثیری از خوانندگان‌گرامی ضمن نامه‌های خود راههایی برای تعیین قابلیت تقسیم اعداد بربعضی اعداد اول دو رقمی ازقبیل ۱۷ و۲۳ و۲۹ و... ارائه داده‌اند چون دراین‌مورد کتابی هم چاپ شده است ازذکر این راههای‌ارائه شده‌که درضمن مشابه یکدیگر نیزمی‌باشد خودداری می‌گردد .

قابل توجه نمایندگان محترم شهرستانها

بدین وسیله به اطلاع نمایندگان مجله در شهرستانها می‌رساند که‌کلیهٔ نسخه‌های مجلات شماره‌های ۲ـ۳و۴ـ۶ به فروش رفته است ودر حال‌حاضر ازاین سه‌شماره در ادارهٔ‌مجله موجودنیست وعلت نفرستادن این‌شماره‌ها برای متقاضیان همین بوده است .

نکتهٔ دیگری که‌لازم است یادآوری شود این است که مجلات‌بعضی ازنمایندگان که‌برگشت داده‌می‌شود به‌مهرمخصوص ایشان ممهور گشته است . این امر ارسال این مجلات رابه شهرستانهای دیگر بااشکال مواجه می‌سازد، بنابراین خواهش می‌شودکه از مهرزدن به‌نسخه‌هائی‌که احتمال فروش آنهابرای نمایندگان محترم درمیان نیست خودداری فرمایند. از قبول اینگونه مجلات برگشتی معذور خواهیم بود.

ادارهٔ مجله

فنّ ترجمهٔ انگلیسی

نگارش

دکتر علاء الدین پازارگادی

استاد دانشگاه تهران

کتاب فن ترجمهٔ انگلیسی در حقیقت جلد سوم از رشته کتبی است که برای راهنمائی دانش آموزان ودانشجویان درمورد مطالعهٔ زبان انگلیسی تألیف شده‌و «دستور زبان انگلیسی» و «انشاء انگلیسی» جلد اول و دوم آن محسوب می‌شوند.

در تنظیم این کتاب مطالب طوری طبقه‌بندی شده و به مراحل تدریجی تقسیم گشته و در هر مرحله امثلهٔ کافی و تمرین فراوان و پس‌ازهر تمرین معانی لغات مورد احتیاج برای ترجمهٔ آن‌داده شده‌که کاردانش آموز ودانشجو را در ترجمه سهل‌کرده و امکان پیشرفت سریعتری را برای او بوجود آورده است.

N.I.L

انتشارات نیل

انتشارات نیل را بخوانید و ذهن خود را از گنجینهٔ دانش امروزی غنی سازید

تهران ـ میدان مخبرالدوله تلفن ۳۰۴۱۲۸