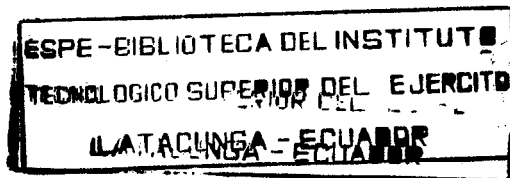


ESTÁTICA

COMMUNICATIONS
SECTION
AIR FORCE
HEADQUARTERS
WASHINGTON, D. C.

1. [Illegible]
2. [Illegible]
3. [Illegible]
4. [Illegible]

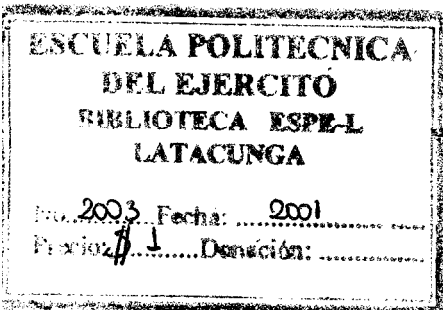
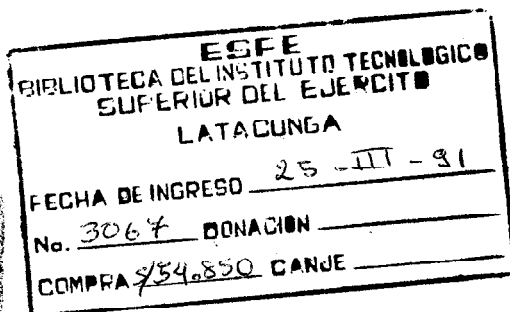
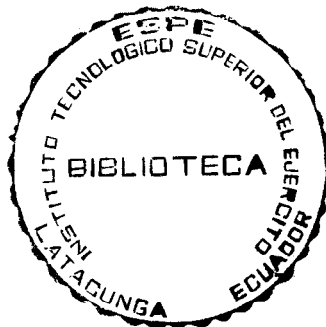


ESTÁTICA

Segunda edición

J. L. Meriam

PROFESOR DE INGENIERÍA MECÁNICA
DECANO DEL COLEGIO DE INGENIEROS
DE LA UNIVERSIDAD DE DUKE



EDITORIAL REVERTÉ, S. A.

Barcelona-Bogotá-Buenos Aires-Caracas-México

531.1
H561
C.2

Título de la obra original:

Statics

Edición original en lengua inglesa publicada por:

John Wiley & Sons, Inc., New York

Copyright © by John Wiley & Sons, Inc.

Versión española por el:

Dr. Julián Fernández Ferrer

Catedrático de Física de la

Universidad Politécnica de Barcelona

Fellow of the Institute of Mathematics

and its Applications

Propiedad de EDITORIAL REVERTÉ, S. A.

Encarnación, 86-88

(08024) Barcelona

Reservados todos los derechos. Ninguna parte del material cubierto por este título de propiedad literaria puede ser reproducida, almacenada en un sistema de informática o transmitida de cualquier forma o por cualquier medio electrónico, mecánico, fotocopia, grabación u otros métodos sin el previo y expreso permiso por escrito del editor.

Edición en español

© Editorial Reverté, S. A., 1988

Impreso en España - Printed in Spain

ISBN - 84 - 291 - 4128 - 6

Prólogo

para el estudiante

Las exigencias y la responsabilidad inherentes a la ingeniería moderna requieren un nivel elevado de actividad creadora, la cual, a su vez, precisa del soporte de una fuerte capacidad analítica. La Mecánica técnica, que contiene la Estática y la Dinámica, constituye una de las piedras angulares de la capacidad analítica y todos los técnicos deberían tener un fundamento de este campo de estudio.

El estudiante de ingeniería de hoy se convierte en el técnico de mañana que deberá, a través del ejercicio de su imaginación creadora y de su conocimiento profesional, combinar satisfactoriamente la teoría y la práctica para desarrollar nuevas estructuras, máquinas, dispositivos y procesos que beneficien a la humanidad. Este proceso del moderno diseño creador depende de la capacidad para visualizar configuraciones nuevas mediante materiales reales, procesos y leyes físicas que rijan a éstos. El máximo progreso para soportar el desarrollo de esta capacidad de diseño, se logrará cuando se aprenda la teoría correspondiente a la técnica junto con el contexto de la realidad de esta última, de manera que pueda percibirse la importancia de la teoría al ir la estudiando. Este libro se ha escrito teniendo presente dicho punto de vista y se espera que el estudiante encuentre interés y estímulo en los muchos problemas tomados de entre una gran variedad de casos actuales de la técnica, con el fin de proporcionar aplicaciones importantes y reales de la teoría.

El fin del estudio de la Mecánica es predecir a través del cálculo el comportamiento de los componentes y sistemas en los que intervienen fuerza y movimiento. La predicción satisfactoria en el diseño técnico exige una formulación precisa de los problemas con ayuda de un doble proceso mental de conocimiento físico y razonamiento matemático. El proceso para formular un problema consiste en construir un modelo matemático que incorpore las hipótesis físicas adecuadas y las aproximaciones matemáticas y analice la situación real con precisión suficiente para el propósito entre manos. Efectivamente, este proceso de adaptación del modelo simbólico a su prototipo físico es, sin duda alguna, una de las experiencias más valiosas del estudio de la inge-

niería y los problemas incluidos intentan dar una oportunidad para el desarrollo de esta capacidad.

El éxito en el análisis depende muchísimo de que se haya seguido un método de ataque bien disciplinado, desde las hipótesis hasta la conclusión, en el que se hayan aplicado de manera rigurosa los principios necesarios. Instamos al estudiante a que desarrolle su capacidad para representar su trabajo de manera clara, lógica y limpia. El entrenamiento fundamental en Mecánica resulta excelente para un primer desarrollo de este método disciplinado que tan necesario es en la mayor parte del trabajo técnico que sigue.

En este texto se ha introducido más materia de la que suele tratarse en un primer curso ordinario de Mecánica técnica, por lo que el libro podrá servir también de introducción a temas más avanzados de Mecánica y como ulterior referencia de los principios fundamentales. Con el fin de advertir al lector, los temas más avanzados se identifican a lo largo de los márgenes de las páginas y para ayudar al estudiante en su estudio inicial de cada cuestión, en esta segunda edición se incluye una colección ampliada de problemas de introducción y de dificultad intermedia. Los problemas que presentan mayor dificultad se señalarán con un triángulo negro y un número de problema rojo, estando situados al final de cada conjunto de problemas.

Extiendo mi aliento a todos los estudiantes de Mecánica y espero que este libro les proporcione una ayuda sustancial para adquirir una base sólida y llena de significado para sus estudios de ingeniería.

J. L. Meriam

Prólogo

para el profesor

En los últimos tiempos, la fuerte tendencia a incrementar la capacidad analítica en ingeniería ha dado lugar a un mayor hincapié en las generalidades matemáticas de la Mecánica. Cuando se mantiene una insistencia adecuada en el conocimiento físico y en la aplicación técnica, dicha tendencia resulta muy beneficiosa para extender la capacidad de descripción analítica de los problemas difíciles. En cambio, cuando se centra primordialmente la atención en el esquema matemático de la Mecánica, dejando en segundo término la realidad física y el tratamiento técnico, la tendencia ya no resulta tan ventajosa. La enseñanza de la Mecánica técnica tiene como misión fundamental el desarrollo de la capacidad para predecir los efectos de la fuerza y del movimiento como ayuda para llevar a cabo el proceso creador del proyecto técnico. Por tanto, habrá que atender primeramente a la importancia técnica de las cantidades físicas, jugando la estructura matemática el papel de servidor. Teniendo bien en cuenta este fin fundamental, puede llevarse a cabo un equilibrio adecuado entre la teoría y la aplicación.

En relación con esto mismo, el profesor de Mecánica, que ha alcanzado un nivel elevado de capacidad teórica, se siente tentado a menudo de olvidar el sistema de referencia de sus estudiantes y presenta el tema insistiendo demasiado en la generalización. Este método resulta muy peligroso para un primer curso fundamental, ya que los estudiantes carecen de la base necesaria para enfrentarse a una generalidad prematura y tampoco pueden sentir parte del desarrollo histórico y natural del tema.

Otra consideración filosófica es la fuerte necesidad de proporcionar un ambiente de realidad técnica atractiva como medio para desarrollar los motivos del estudio de la Mecánica. La mejor manera de establecer una base firme de capacidad analítica es creando un verdadero interés y obligando a la necesidad técnica del empleo eficaz de la teoría.

Este libro de Estática es un texto técnico y se ha escrito teniendo presentes estos puntos de vista. Se ha intentado presentar la teoría de manera

rigurosa, concisa y con una generalidad adaptada a los fundamentos del Cálculo que se supone posee el lector. Para los estudiantes que no tengan una base de Análisis vectorial, se introducen en el texto las explicaciones y conceptos necesarios a medida que hacen falta. A fines de consulta, se incluyen en el Apéndice B una introducción más formal y un resumen del Álgebra y Cálculo vectoriales en la forma en que se utilizan en Mecánica. Tengo la firme convicción de que se adquiere mejor la soltura en Análisis vectorial dentro del contexto de su significativa aplicación en Mecánica, y ésta es la idea que ha guiado el tratamiento de los vectores en este libro.

Para el análisis bidimensional se emplea generalmente el método escalar-geométrico por constituir la descripción más sencilla y directa. Para los problemas tridimensionales se emplea frecuentemente la notación vectorial como descripción más directa y adecuada. Se introducen los tensores en el estudio de los esfuerzos internos, lo que constituye una de las cuestiones optativas y más avanzadas del texto. El empleo exclusivo de la notación escalar, vectorial o tensorial, se ha desechado en favor de la elección de la herramienta matemática que sea más adecuada a la situación que se estudie. Desde el punto de vista del autor es mucho más importante, en el curso fundamental de Mecánica conservar y reforzar la dependencia de la visualización geométrica y del conocimiento físico que hacer resaltar el empleo extensivo o exclusivo de una notación tensorial que reduce esencialmente la geometría al manejo de una notación. Las ideas creadoras que hallan mayor utilización en aquellas ramas de la técnica que se apoyan en la Mecánica, nacen y se desarrollan más a través de la visualización de las configuraciones geométricas que a través del manejo de la notación en el análisis.

La presentación y los problemas de Estática no se han estructurado intencionalmente para proporcionar ejercicios de utilización de calculadora. Si así fuera, el papel de la calculadora sería muy artificial. No obstante, el estudiante que tenga acceso al uso de calculadoras convendrá que las utilice en la resolución de problemas ocasionales en los que una solución por máquina presente claras ventajas.

Estática es un libro destinado principalmente a los estudiantes de los dos primeros cursos de carreras técnicas. Sin embargo, se han incluido introducciones a temas superiores, tales como las ecuaciones diferenciales del equilibrio para tensiones internas en un medio continuo y los criterios de estabilidad para sistemas de dos grados de libertad. Dichos temas superiores son optativos y pueden servir de base para ulteriores estudios y referencias futuras. En Estática se incluye más materia de la que se puede abarcar fácilmente en un curso de introducción cuya duración sea la usual. Se ha organizado de manera que se tenga gran flexibilidad en la elección de temarios, por lo que se puede adaptar el libro a diversas estructuras de cursos. El profesor debe cuidar de no abarcar

demasiada materia en un tiempo limitado a expensas de un tratamiento completo de las cuestiones que se vean y de su buena comprensión.

En esta segunda edición de Estática he ampliado mucho las colecciones de problemas aumentando sustancialmente el número de problemas de introducción y de dificultad intermedia a fin de ayudar al principiante a ganar una confianza inicial y a comprender los métodos y principios fundamentales de la Estática. También se ha incrementado el número de problemas tipo sencillos de introducción, así como el desarrollo de las explicaciones en algunos temas. En la segunda edición se ha suprimido la materia referente a los momentos de inercia de masas, la cual ha pasado al tomo de Dinámica, en donde encuentra aplicación directa. Sigue insistiéndose mucho en la presentación de un gran número de problemas prácticos e interesantes extraídos de un amplio campo de aplicaciones técnicas. Se han tomado numerosos ejemplos de la Mecánica espacial y de otros desarrollos contemporáneos. Los problemas se han ordenado por orden creciente de dificultad. La valoración de la dificultad depende, desde luego, no sólo del reconocimiento de la teoría, sino también de los obstáculos que surjan en la construcción del modelo idealizado y de los cálculos matemáticos inherentes, y estos factores varían considerablemente de un individuo a otro.

En la presente edición se ha continuado haciendo hincapié, como en la primera, en ilustraciones claras y detalladas pretendiendo establecer un sentido de realidad técnica. Ello está de acuerdo con mi firme creencia de que la experiencia en la formulación de problemas que llevan consigo un alto grado de realidad, incluyendo la elección del método de solución, constituye tal vez el aspecto más importante del estudio de la Mecánica técnica. Con este método, la teoría adquiere una importancia que posiblemente no podría tener si el estudiante se hallara ante problemas idealizados desde un principio, y por tanto preformulados. Se ha prestado una atención especial al formato de la presente edición a través de la identificación de los temas optativos y de los problemas difíciles. Se ha introducido el color, lo que facilita grandemente el reconocimiento de las fuerzas exteriores y proporciona una nueva dimensión a la función y apariencia del libro.

Me complace seguir manifestando mi reconocimiento al Dr. A. L. HALE de Bell Telephone Laboratories por su valiosa ayuda en la revisión del manuscrito y por sus numerosas y utilísimas sugerencias. El Dr. HALE rindió un servicio análogo en mis libros anteriores de Mecánica y ha sido un verdadero placer contar con su interés y colaboración continuados en este nuevo volumen. También quiero agradecer las críticas y las numerosas sugerencias del Profesor PAUL JONES de la Universidad de Illinois y del Prof. ANDREW PYTEL de The Pennsylvania State University durante la preparación de esta segunda edición. También agradezco las contribuciones profesionales y la alta calidad del equipo de John Wiley & Sons en la planificación y producción de este libro.

Por último, quiero agradecer el continuo aliento, paciencia y ayuda de mi esposa Julia, durante las muchísimas horas empleadas en la preparación de este manuscrito.

Durham, North Carolina

J. L. Meriam

Índice analítico

1. PRINCIPIOS DE ESTÁTICA	
1 Mecánica.....	1
2 Conceptos fundamentales	1
3 Escalares y vectores	3
4 Leyes de Newton	6
5 Ley de la gravitación	9
6 Precisión, límites y aproximaciones	9
7 Descripción de los problemas de estática	11
2. SISTEMAS DE FUERZA	
8 Introducción	15
9 Fuerza	15
10 Momento	28
11 Par	38
12 Resultantes de sistemas de fuerzas	49
3. EQUILIBRIO	
13 Introducción	63
14 Aislamiento de un sistema mecánico	63
15 Condiciones de equilibrio ■*	74
16 Adecuación de las ligaduras ■	109
4. ESTRUCTURAS	
17 Estructuras	119
18 Armaduras planas.....	119
19 Armaduras espaciales ■	140
20 Entramados y máquinas	148
21 Vigas con cargas concentradas	168
5. FUERZAS DISTRIBUIDAS	
22 Introducción	181
23 Centro de gravedad; Centro de masa.....	181
24 Centroides de líneas, superficies y volúmenes	185
25 Figuras y cuerpos compuestos; aproximaciones	198
26 Teorema de Pappus-Guldin	206
27 Cables flexibles	211
28 Vigas con cargas distribuidas	223
29 Estática de fluidos	232
30 Empuje	251

* El símbolo ■ indica que el apartado contiene conceptos un poco avanzados o especializados.

31 Equilibrio de esfuerzos interiores ■	258
6. ROZAMIENTO	
32 Introducción	269
33 Fenómenos de rozamiento	270
34 Rozamiento seco	273
35 Rozamiento en las máquinas	295
7. TRABAJO VIRTUAL	
36 Introducción	319
37 Trabajo	319
38 Equilibrio de un cuerpo rígido	322
39 Sistemas de cuerpos rígidos	324
40 Sistemas con miembros elásticos	344
41 Sistemas con rozamiento; rendimiento mecánico	356
42 Criterio energético para el equilibrio ■	359
43 Estabilidad del equilibrio ■	364
8. MOMENTOS DE INERCIA DE UNA SUPERFICIE	
44 Definiciones	379
45 Superficies compuestas	393
46 Productos de inercia y rotación de los ejes	398
APÉNDICE A	
Problemas de repaso	409
Apéndice B Análisis vectorial	
B 1 Notación	425
B 2 Adición	426
B 3 Producto escalar	427
B 4 Producto vectorial	429
B 5 Otras relaciones	431
B 6 Derivadas de vectores	432
B 7 Integración de vectores	434
B 8 Gradiente	434
B 9 Divergencia	435
B 10 Rotacional	435
B 11 Otras operaciones	435
APÉNDICE C. TABLAS ÚTILES	
Tabla C1. Propiedades	437
Tabla C2. Constantes del sistema solar	438
Tabla C3. Relaciones matemáticas	438
Tabla C4. Propiedades de las figuras planas	442
Tabla C5. Propiedades de sólidos homogéneos	443
Índice alfabético	447

Guía para la utilización de estática

1 Las *ecuaciones principales* se identifican mediante un triángulo rojo situado a la izquierda y un número de ecuación rojo situado a la derecha, tales como

◄ $\Sigma F = 0 \quad \Sigma M = 0$ (13)

2 Los *temas superiores y especializados* que se incluyen en el texto como optativos están precedidos por una fila de triángulos



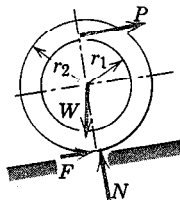
y se identifican mediante una banda gris a lo largo del margen exterior de la página.

3 Problemas tipo

Se destacan del resto del texto identificándolos fácilmente mediante rayas rojas horizontales y una raya roja vertical a lo largo del margen exterior de la página.

4 Los *problemas* de los conjuntos de problemas están *numerados* consecutivamente en cada capítulo, *ordenados* generalmente por orden creciente de dificultad, *identificados* mediante un triángulo negro y un número rojo (◄ 2/43 por ejemplo) cuando entrañen una dificultad o interés especiales.

5 Los *vectores fuerza* se representan en los diagramas por medio de flechas rojas de trazo grueso con el fin de distinguirlos de otros vectores o rectas.



También se utiliza selectivamente el color para aclarar o resaltar otros elementos geométricos de las figuras.

ESTÁTICA

1 Principios de la estática

1. Mecánica. La Mecánica es la ciencia física que estudia el estado de reposo o movimiento de los cuerpos bajo la acción de las fuerzas. En los estudios de ingeniería no existe ninguna materia que juegue un papel más importante que la mecánica. Puede decirse que los primeros estudios de esta materia constituyen los primeros trabajos de ingeniería. La investigación y desarrollo modernos del campo de las vibraciones, de la estabilidad, de la resistencia de estructuras y máquinas de los cohetes y naves espaciales, control automático, fabricación de motores, circulación de fluidos, de los aparatos y maquinaria eléctrica, y del comportamiento molecular, atómico y subatómico, dependen en gran parte de los principios fundamentales de la Mecánica. El conocimiento completo de éstos es requisito previo absoluto para trabajar en éstos y otros muchos campos.

La Mecánica es la más antigua de las ciencias físicas. Los escritos más antiguos que se registran acerca de esta materia son los de ARQUÍMEDES (287-212 a. J. C.) referentes al principio de la palanca y al principio del empuje. A la formulación de las leyes de la combinación vectorial de fuerzas dada por STEVINUS (1548-1620), aguardaba un progreso sustancial, y el mismo autor enunció la mayoría de los principios de la Estática. El primer estudio de un problema dinámico se debe a GALILEO (1564-1642) y se refiere a sus experimentos sobre la caída de los cuerpos. La formulación exacta de las leyes del movimiento, incluyendo la ley de la gravitación, fue realizada por NEWTON (1642-1727), quien también concibió la idea de lo infinito en análisis matemático. También DA VINCI, VARIGNON, D'ALEMBERT, LAGRANGE, LAPLACE y otros, han contribuido de manera sustancial al desarrollo de la Mecánica.

La Mecánica se divide lógicamente en dos partes: la *estática*, que trata del equilibrio de los cuerpos bajo la acción de fuerzas, y la *dinámica*, que trata del movimiento de los cuerpos. La dinámica incluye, a su vez, la *cinemática*, que estudia el movimiento de los cuerpos independientemente de las fuerzas que lo originan, y la *cinética*, que relaciona las fuerzas con los movimientos resultantes.

2. Conceptos fundamentales. Existen ciertas definiciones y conceptos que son fundamentales para el estudio de la Mecánica y que deben comprenderse desde un principio.

Espacio. El espacio es la región geométrica en la cual tienen lugar los sucesos. En este libro utilizaremos la palabra *espacio* para hacer referencia a una región tridimensional. Sin embargo, no es raro hacer referencia a un movimiento a lo largo de una recta o en un plano, diciendo que tiene lugar en un espacio de una o dos dimensiones, respectivamente. El concepto de espacio de n dimensiones constituye un ingenio abstracto para describir la dependencia de n cantidades.

Sistema de referencia. La posición en el espacio se determina con relación a un cierto sistema geométrico de referencia mediante medidas lineales y angulares. El sistema de referencia básico para las leyes de la Mecánica de Newton es el *sistema inercial primario* o *sistema astronómico de referencia*, que es un sistema imaginario de ejes rectangulares que se supone no tienen traslación ni rotación en el espacio. Las mediciones enseñan que las leyes de la Mecánica de Newton son válidas para este sistema de referencia mientras las velocidades que intervengan sean despreciables frente a la de la luz.* Las mediciones realizadas respecto a este sistema de referencia, reciben el nombre de *absolutas* y a este sistema de referencia se le considera "fijo" en el espacio. Un sistema de referencia solidario a la superficie terrestre tiene un movimiento relativamente complicado en el sistema primario, y habrá que aplicar una corrección a las ecuaciones fundamentales de la Mecánica para las medidas realizadas respecto al sistema de referencia de la Tierra. En el cálculo de trayectorias de cohetes y aeronaves, por ejemplo, el movimiento absoluto de la Tierra constituye un parámetro importante. En la mayoría de los problemas técnicos de máquinas y estructuras que permanecen sobre la superficie terrestre, las correcciones son pequeñísimas y pueden despreciarse. Para estos problemas se pueden aplicar directamente las leyes de la Mecánica con las medidas realizadas relativas a la Tierra y, desde un punto de vista práctico, pueden considerarse *absolutas* dichas medidas.

Tiempo. El tiempo es una medida de la sucesión de acontecimientos y en la Mecánica de Newton se considera una cantidad absoluta. La unidad de tiempo es el segundo, que es una fracción conveniente de las 24 horas del día.

Fuerza. La fuerza es la acción de un cuerpo sobre otro. Una fuerza tiende a desplazar un cuerpo en la dirección de su acción sobre dicho cuerpo. En el capítulo 2 se discutirán detalladamente las propiedades de las fuerzas.

Materia. La materia es la sustancia que ocupa el espacio. Un *cuerpo* es materia limitada por una superficie cerrada.

Inercia. La inercia es una propiedad de la materia por la cual se resiste a alterar su movimiento.

Masa. La masa es la medida cuantitativa de la inercia. La masa es, también, una propiedad de todo cuerpo que va siempre acompañada por la atracción mutua con los demás cuerpos.

* Para velocidades del orden de la luz, 300 000 km/s, hay que aplicar la teoría de la Relatividad.

Partícula. Se llama partícula a un cuerpo de dimensiones despreciables. En el aspecto matemático, una partícula es un cuerpo cuyas dimensiones se aproximan a cero, por lo que puede analizarse como una masa puntual. Frecuentemente se toma una partícula como elemento diferencial de un cuerpo. Y también cuando las dimensiones de un cuerpo no influyen en la descripción de su movimiento, puede tratarse el cuerpo como si fuera una partícula. En otros casos, una partícula podrá considerarse como un elemento diferencial de un cuerpo.

Cuerpo rígido. Se conoce por cuerpo rígido el que no tiene deformación relativa entre sus partes. Es esta una condición ideal, ya que todos los cuerpos reales cambian de forma hasta cierto punto cuando se les somete a fuerzas. Cuando dichos cambios de forma sean despreciables frente a las dimensiones totales del cuerpo o frente a los cambios de posición del cuerpo en su conjunto, será permisible la hipótesis de rigidez. Para un cuerpo rígido, pues, se despreciará la diferencia de configuración existente entre sus estados inicial y deformado. Como ejemplo de la hipótesis de rigidez daremos el de un avión en vuelo a través de aire turbulento: La punta del ala sufre un movimiento de unos centímetros a causa de la flexión. Dicho movimiento no afecta a la distribución media de las fuerzas aerodinámicas en sus alas ni a la especificación del movimiento del avión en su conjunto a lo largo de su trayectoria de vuelo. Para estas consideraciones, pues, el tratamiento del avión como cuerpo rígido no ofrece complicación alguna.

Cuerpo deformable. Cuando haya que examinar los efectos de las fuerzas aplicadas exteriormente sobre las deformaciones y esfuerzos internos, habrá que considerar las características de la deformación. Para este fin se considera deformable el cuerpo. Las fuerzas internas inducidas por el movimiento de flexión de las alas del avión, por ejemplo, son de importancia crítica para el proyecto estructural del avión el cual, para este fin, no podrá tratarse como cuerpo rígido.

3. Escalares y vectores. Las cantidades de las que se ocupa la Mecánica son de dos tipos: escalares y vectoriales. Una cantidad *escalar* es la que tiene asociada solamente una magnitud. Son ejemplos de escalares el tiempo, el volumen, la densidad, la celeridad (módulo de la velocidad), la energía y la masa. Una cantidad *vectorial* es la que tiene asociada, además de una magnitud, una dirección y un sentido, y sigue la ley del paralelogramo de la adición. Son ejemplos de cantidades vectoriales el desplazamiento, la velocidad, la aceleración, la fuerza, el momento y la cantidad de movimiento.

Las cantidades físicas vectoriales pueden representarse por uno de los tres tipos siguientes de vectores: libres, deslizantes o fijos.

Un *vector libre* es aquel cuya acción no está confinada a una recta única. Por ejemplo, si un cuerpo se mueve sin rotación, el movimiento o desplazamiento de un punto cualquiera del cuerpo puede representarse como un vector y

éste describirá igualmente bien el movimiento de todo punto del cuerpo. Por tanto, el desplazamiento de dicho cuerpo podrá representarse con un vector libre.

Vector deslizante es aquel para el cual hay que conservar una sola recta en el espacio, a lo largo de la cual actúa la cantidad vectorial. Al considerar la acción exterior de una fuerza sobre un cuerpo rígido, la fuerza puede aplicarse en un punto cualquiera a lo largo de su línea de acción sin que se altere el efecto que produce sobre el cuerpo * y, por lo tanto, puede considerarse como vector deslizante.

Vector fijo es aquel para el cual se especifica un punto único de aplicación y, por lo tanto, el vector ocupa una posición fija en el espacio. La acción de una fuerza sobre un cuerpo no rígido debe especificarse con un vector fijo situado en el punto de aplicación de la fuerza. En este caso, las fuerzas y movimientos internos del cuerpo serán una función del punto de aplicación de la fuerza, así como de su línea de acción e intensidad.

Una cantidad vectorial V se representa por un segmento rectilíneo, figura 1, que tenga la dirección y sentido de la cantidad vectorial, señalando este último con una punta de flecha. La longitud del segmento orientado representa, a una escala conveniente, la magnitud $|V|$ del vector y se escribe en letra cursiva V . Las letras negritas se emplean para representar las cantidades vectoriales cuando el aspecto direccional del vector sea una parte de su representación. Al escribir ecuaciones vectoriales es importante conservar la distinción matemática entre vectores y escalares. Se recomienda que en todo el trabajo manuscrito se emplee una marca distintiva para cada cantidad vectorial, por ejemplo, subrayando con una línea ondulada la letra representativa del vector, con el fin de que en la imprenta utilicen el tipo de letra negrita o con una flecha sobre el símbolo \vec{V} para que haga las veces del tipo de letra negrita. La dirección del vector V puede medirse por un ángulo θ tomado a partir de una dirección conocida de referencia. El opuesto de V es un vector $-V$ dirigido en sentido opuesto al de V según se indica.

Además de poseer las propiedades de magnitud, dirección y sentido, los vectores deben obedecer también a la ley de combinación del paralelogramo. Dicha ley exige que dos vectores V_1 y V_2 , tratados como vectores libres (fig. 2a), pueden sustituirse por su equivalente V que es la diagonal del paralelogramo que tiene por lados V_1 y V_2 , tal como se indica en la figura 2b. Esta combinación o suma vectorial se representa por la ecuación vectorial

$$V = V_1 + V_2$$

donde el signo más, utilizado con las cantidades vectoriales (letras negritas), significa adición *vectorial* y no *escalar*. La suma escalar de los módulos o mag-

* Este es el llamado *principio de transmisibilidad* que se estudia en el apartado 9 del capítulo 2.

nitudes de los dos vectores se escribe de la manera usual $V_1 + V_2$ y de la geometría del paralelogramo resulta inmediato que $V \neq V_1 + V_2$.

Los dos vectores V_1 y V_2 , tratados de nuevo como vectores libres, pueden sumarse también colocando el origen de uno en el extremo del otro por la ley del triángulo, como se indica en la figura 2c, obteniéndose la misma suma vectorial V . En el diagrama se ve que el orden de adición de los vectores no altera la suma, por lo que $V_1 + V_2 = V_2 + V_1$.

La diferencia $V_1 - V_2$ entre los dos vectores se obtiene fácilmente sumando $-V_2$ a V_1 como se indica en la figura 3, pudiéndose utilizar indistintamente el método del paralelogramo o el del triángulo. La diferencia V' entre los dos vectores se expresa mediante la ecuación vectorial

$$V' = V_1 - V_2$$

donde el signo menos denota *sustracción vectorial*.

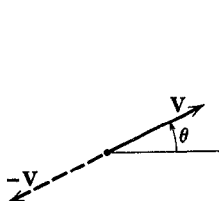


Figura 1

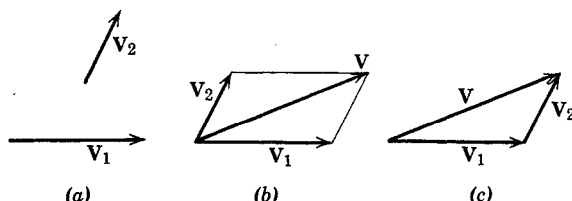


Figura 2

Dos o más vectores cualesquiera cuya suma sea igual a un cierto vector V se dice que son los *componentes* de dicho vector. Luego los vectores V_1 y V_2 de la figura 4a son los componentes de V en las direcciones 1 y 2, respectivamente. Corrientemente es preferible tratar con componentes que sean mutuamente perpendiculares, a los que se da el nombre de *componentes rectangulares*. Los vectores V_x y V_y de la figura 4b son, respectivamente, los componentes x e y de V , e igualmente, en la figura 4c, $V_{x'}$ y $V_{y'}$ son los componentes x' , y' de V .

Al emplear componentes rectangulares, la dirección del vector respecto al eje x , por ejemplo, está especificada claramente por

$$\theta = \tan^{-1} \frac{V_y}{V_x}.$$

En algunos problemas, especialmente en los tridimensionales, es conveniente expresar las componentes rectangulares de V en función de los vectores unitarios i , j , k , según las direcciones x , y , z , respectivamente los cuales tienen magnitud unidad. La suma * vectorial de los componentes se escribe de la manera siguiente:

$$V = iV_x + jV_y + kV_z.$$

* Véase la figura B1, Apéndice B.

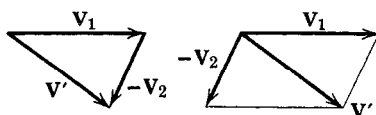


Figura 3

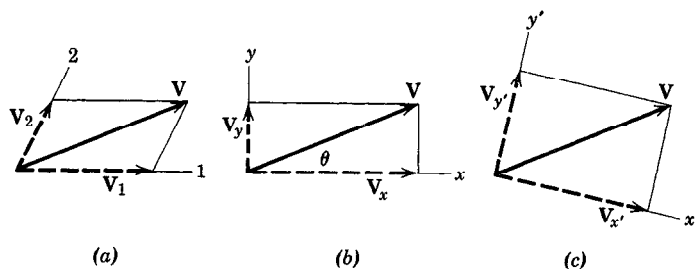


Figura 4

Si son l, m, n , los cosenos directores de \mathbf{V} respecto a los ejes x, y, z , se ve que los componentes tienen las magnitudes

$$V_x = lV, \quad V_y = mV, \quad V_z = nV$$

con

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2.$$

Obsérvese también que $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

4. Leyes de Newton. SIR ISAAC NEWTON fue el primero en enunciar correctamente los principios fundamentales que rigen el movimiento de una partícula y en demostrar su validez.* Modificando ligeramente su enunciado original, dichas leyes dicen:

Primera. Una partícula sobre la cual no actúe ninguna fuerza que no esté equilibrada, o permanece en reposo o sigue un movimiento rectilíneo uniforme.

Segunda. La aceleración de una partícula es proporcional a la fuerza resultante que actúa sobre ella y tiene la dirección y sentido de dicha fuerza.**

Tercera. Cuando un cuerpo ejerce una fuerza, llamada *acción*, sobre otro, éste a su vez, ejerce sobre el primero otra fuerza llamada *reacción*, de igual módulo y dirección, pero de sentido contrario.

La validez de estas leyes se ha comprobado experimentalmente de muchas y muy precisas maneras. La segunda ley de Newton constituye la base de la ma-

* Los enunciados originales de NEWTON pueden verse en la traducción de sus *Principia* (1687), revisados por F. CAJORI, University of California Press, 1934.

** Algunos prefieren interpretar la segunda ley de Newton como significando que la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es proporcional a la variación en unidad de tiempo de su cantidad de movimiento, y esta variación tiene la dirección de la fuerza. Ambos enunciados son correctos.

yoría de los análisis de la Dinámica. Aplicándola a una partícula de masa m puede escribirse en la forma

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \quad (1)$$

donde \mathbf{F} es la fuerza resultante que actúa sobre la partícula y \mathbf{a} es la aceleración resultante. Esta ecuación es *vectorial*, ya que la dirección y sentido de \mathbf{F} son los mismos que los de \mathbf{a} , además de ser iguales los módulos de \mathbf{F} y $m\mathbf{a}$. La primera ley de Newton contiene el principio del equilibrio de las fuerzas, que es la cuestión primordial de la Estática. En realidad, esta ley es consecuencia de la segunda, ya que no habrá aceleración cuando la fuerza sea nula, y la partícula deberá estar en reposo o moverse con velocidad constante. La primera ley no aporta nada nuevo a la descripción del movimiento, si bien se incluye debido a que formaba parte de los enunciados clásicos de Newton.

La tercera ley es fundamental para nuestro conocimiento de las fuerzas. Establece que las fuerzas aparecen siempre por parejas de fuerzas iguales y opuestas. Así, la fuerza ejercida hacia abajo por el lápiz sobre la mesa, está acompañada de otra fuerza igual y hacia arriba, ejercida por la mesa sobre el lápiz. Este principio es válido para todas las fuerzas, constantes o variables, independientemente del sistema que la ejerza, y se cumple en todo instante durante el tiempo en que estén aplicadas las fuerzas. La falta de cuidado en la aplicación de esta ley origina frecuentes errores al principiante. Al estudiar cuerpos sometidos a fuerzas es absolutamente necesario ver claramente cuál de las dos fuerzas de la pareja se está considerando. Antes que nada es necesario *aislar* el cuerpo en cuestión y luego considerar solamente la fuerza de la pareja que actúa *sobre* el cuerpo considerado.

A través de los años se han venido empleando distintos sistemas de unidades para expresar los valores de ciertas cantidades que intervienen en mecánica y en otros campos. Desde hace poco se ha adoptado prácticamente en todo el mundo el Sistema Internacional de Unidades, abreviadamente SI, para todos los trabajos científicos y de ingeniería; principalmente Inglaterra y aquellos otros países que no seguían el sistema métrico.

En la tabla siguiente se resumen las unidades SI que forman la base para los cálculos de mecánica.

Sistema Internacional de Unidades

Cantidad	Símbolo dimensional	Módulo SI y símbolo
Longitud	L	metro (m)
Tiempo	T	segundo (s)
Masa	M	kilogramo (kg)
Fuerza	F	newton (N)

Se toma el kilogramo (1000 g) y no el gramo (g) como unidad de masa. Las primeras tres cantidades son las unidades básicas del SI, y la cuarta, o sea la fuerza, es unidad deducida de las anteriores aplicando la segunda ley de Newton. Por definición, un newton es la fuerza que imprime a una masa de un kilogramo una aceleración de un metro por segundo cuadrado. Así pues, de $F = ma$, la equivalencia entre unidades es:

$$(1 \text{ N}) = (1 \text{ kg}) (1 \text{ m/s}^2) \text{ o } \text{N} = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$$

(a) *Prefijos de las unidades.* Los valores numéricos deben conservarse entre 0,1 y 1000. Los prefijos más usados son:

Cantidad	Múltiplo	Prefijo	Símbolo
1 000 000 000	10^9	giga	G
1 000 000	10^6	mega	M
1 000	10^3	kilo	k
0,001	10^{-3}	mili	m
0,000 001	10^{-6}	micro	μ
0,000 000 001	10^{-9}	nano	n

Por ejemplo, una longitud de 4245 m se expresa por 4,245 km; una masa de 0,0326 kg, por 32,6 g y una fuerza de 0,0068 N por 6,8 mN.

(b) *Denominación de las unidades.* Para evitar confusiones, las unidades que se multiplican se enlazan por el punto de la multiplicación o por un guión. Por ejemplo, la unidad del momento de una fuerza, metro-newton, se indica por m · N para distinguir de mN que significa milinewton. Igualmente, cuando se forman unidades por cociente, como por ejemplo la aceleración, se expresará por m/s² o por m · s⁻² y no por la forma ambigua m/s/s.

(c) *Grupos de números.* En lugar de la puntuación para marcar las unidades de millar, de millón, etc., se emplea ahora el espaciado. Por ejemplo, el número 4 607 321,048 72. Obsérvese que el espaciado se emplea lo mismo en la parte entera como en la parte decimal. En los números de cuatro cifras solamente, no hace falta el espaciado, como por ejemplo 4296.

Nota: Además de las unidades del SI, por lo mucho que se emplea en Física, se dará en muchos de los problemas y ejercicios el kilopond como unidad de fuerza en lugar del newton. Tomando como valor de la gravedad $9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, un kilopond equivale a 9,81 newton.

5. Ley de la gravitación. Además de formular las leyes del movimiento de una partícula, también se debe a NEWTON el enunciado de la ley que rige la atracción mutua entre cuerpos. Esta ley, conocida con el nombre de *ley de la gravitación*, viene expresada por la ecuación.

$$F = K \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (2)$$

donde F es la fuerza mutua de atracción entre las dos partículas,

K es una constante universal llamada constante de la gravitación,

m_1, m_2 son las masas de las dos partículas,

r es la distancia entre los centros de las partículas.

Las fuerzas mutuas F cumplen con la ley de la acción y la reacción, ya que son iguales y opuestas, y están dirigidas a lo largo de la recta que une los centros de las partículas. Experimentalmente se ha obtenido para K el valor $K = 6,673 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$. Entre todo par de cuerpos se ejercen fuerzas gravitatorias. En la superficie terrestre la única fuerza gravitatoria de magnitud apreciable es la fuerza debida a la atracción de la Tierra. Así, por ejemplo, dos esferas de hierro de 100 mm de diámetro son atraídas por la Tierra con una fuerza de 37,9 N cada una. La fuerza de atracción mutua entre ellas cuando estén tangentes es 0,000 000 099 N. Evidentemente, esta fuerza es completamente despreciable frente a la atracción terrestre y, por tanto, la atracción terrestre será la única fuerza gravitatoria de cierta magnitud que habrá que considerar en los experimentos realizados en la superficie terrestre.

El peso de un cuerpo es la fuerza con que la Tierra atrae al cuerpo y depende de la posición de éste respecto a la Tierra. Si la Tierra se considera como una esfera perfecta de igual volumen, un cuerpo con una masa de 1 kg exactamente sería atraído por la Tierra con una fuerza de 9,824 N en la superficie, 9,821 a una altura de 1 km, 9,523 a una altura de 100 km, 7,340 a 1000 km y de 2,456 N a una altura igual al radio medio de la Tierra, de 6371 km. Se ve, pues, en seguida, que habrá que tener en cuenta la variación de peso de los cohetes y de las naves espaciales para grandes altitudes.

A la atracción gravitatoria de la Tierra sobre un cuerpo se le llama "peso" del cuerpo. Esta fuerza existe tanto si el cuerpo está en reposo como si está en movimiento. Puesto que en sentido estricto esa atracción es una fuerza, el peso de un cuerpo debería expresarse en newtons (N) según el SI de unidades.

Todos los cuerpos que se dejen caer en el vacío desde un mismo punto situado sobre la superficie terrestre, tendrán la misma aceleración g , según puede verse combinando las ecuaciones 1 y 2 y suprimiendo el factor (común a ambos miembros) representativo de la masa del objeto que cae. Se tiene, así

$$g = \frac{Km_0}{r^2},$$

donde m_0 es la masa de la Tierra y r el radio terrestre.* La masa m_0 y el radio medio r de la Tierra han sido medidos experimentalmente, resultando ser $5,98 \times 10^{27} \text{ g}$ y $6,37 \times 10^6 \text{ m}$, respectivamente. Estos valores, junto con el valor de K antes citado, dan, al sustituirlos en la expresión de g ,

$$g = 9,824 \text{ m/s}^2$$

* Puede demostrarse que, para estos efectos, se puede considerar la Tierra como una partícula situada en su centro y que tenga toda la masa terrestre concentrada en ella.

La determinación precisa de la aceleración de la gravedad media *respecto a la Tierra* debe tener en cuenta el hecho de que la Tierra es un esferoide achatado por los polos y que gira en torno a su eje. El valor de g en la superficie terrestre ha resultado ser igual a $9,78 \text{ m/s}^2$ en el Ecuador, $9,81 \text{ m/s}^2$ a 45° de latitud y al nivel del mar, y $9,83 \text{ m/s}^2$ en los polos. La proximidad de grandes masas montañosas afectará también al valor local de g en una fracción pequeña, pero detectable. En casi todos los cálculos técnicos para experimentos en la superficie terrestre o próximos a ella suele ser suficientemente preciso emplear el valor de $9,81 \text{ m/s}^2$ para g .

La masa m de un cuerpo se puede calcular a partir de los resultados del simple experimento gravitatorio. Si la fuerza gravitatoria o *peso* es P , entonces, como el cuerpo cae con una aceleración g , la ecuación 1 da

$$\blacktriangleright \quad P = mg \quad \text{o sea} \quad m = \frac{P}{g}. \quad (3)$$

viniendo P en newtons (N), si $m = \text{kg}$ y $g = \text{m/s}^2$.

6. Precisión, límites y aproximaciones. El número de cifras significativas que se consignan en un resultado no debe ser mayor que el que corresponda al mínimo número de cifras significativas de los datos. Así, el área de la sección recta de un eje cuyo diámetro de 25 mm se midió con la aproximación de medio milímetro, deberá escribirse igual a 490 mm^2 y no $490,87 \text{ mm}^2$ como resultaría al multiplicar los números.

Cuando los cálculos conduzcan a pequeñas diferencias entre cantidades grandes, deberá lograrse una precisión lo mayor posible. Así, será necesario conocer los números 4,2503 y 4,2391 con una precisión de cinco cifras significativas a fin de poder dar su diferencia 0,0112 con una precisión de tres cifras significativas. En algunos cálculos largos suele ser difícil saber al principio el número de cifras significativas que deben tener los datos originales para asegurar una cierta precisión en la respuesta.

La precisión de tres cifras significativas se considera satisfactoria para la mayoría de los cálculos técnicos. La coma decimal debe colocarse en todas las cifras obtenidas, lo cual constituye una comprobación del error cometido.

El *orden* de las cantidades infinitesimales suele ocasionar confusión a los estudiantes que aplican por primera vez el cálculo diferencial. Los infinitésimos de orden superior se pueden siempre despreciar frente a los de orden inferior. Por ejemplo, el elemento de volumen ΔV de un cono recto de revolución de altura h y base de radio r puede considerarse como una rebanada circular situada a una distancia x del vértice y de espesor Δx . Puede verificarse que la expresión completa del volumen del elemento se puede escribir en la forma

$$\Delta V = \frac{\pi r^2}{h^2} [x^2 \Delta x + x (\Delta x)^2 + \frac{1}{3} (\Delta x)^3].$$

Puede verse que, al pasar al límite yendo de ΔV a dV y de Δx a dx , los términos en los que figuran $(\Delta x)^2$ y $(\Delta x)^3$ desaparecen, quedando simplemente

$$dV = \frac{\pi r^2}{h^2} x^2 dx,$$

que es una expresión exacta.

Al emplear funciones trigonométricas de cantidades infinitesimales conviene llamar la atención acerca de las siguientes relaciones que son ciertas en el límite:

$$\text{sen } d\theta = \text{tg } d\theta = d\theta,$$

$$\cos d\theta = 1.$$

El ángulo $d\theta$ se supone medido en radianes. Al tratar de ángulos pequeños aunque finitos suele ser conveniente sustituir el seno por la tangente o una de dichas funciones por el propio ángulo. Estas aproximaciones, $\text{sen } \theta = \theta$ y $\text{tg } \theta = \theta$, equivalen a conservar solamente el primer término del desarrollo en serie del seno y de la tangente. Si se desea una aproximación mayor habrá que conservar los dos primeros términos, con lo que se tendrá $\text{sen } \theta = \theta - \theta^3/6$ y $\text{tg } \theta = \theta + \theta^3/3$. Como ejemplo de primera aproximación para el ángulo de 1° ,

$$\text{sen } 1^\circ = 0,0174524 \quad \text{y} \quad 1^\circ \text{ es } 0,0174533 \text{ radianes.}$$

El error al sustituir el seno por el ángulo, en el caso de 1° , es solamente de 0,005 %. Para 5° el error es del 0,13 %, y para 10° el error es solamente del 0,51 %. Análogamente, para ángulos pequeños el coseno podrá expresarse aproximadamente por los dos primeros términos de su desarrollo en serie, lo que da $\cos \theta = 1 - \theta^2/2$.

En la tabla C3 del apéndice C pueden verse algunas relaciones matemáticas útiles en Mecánica.

7. Descripción de los problemas de Estática. El estudio de la Estática está dirigido hacia la descripción cuantitativa de fuerzas que se ejercen sobre estructuras de ingeniería. Las matemáticas establecen las relaciones entre las diversas cantidades que intervienen y permiten predecir, a partir de estas relaciones, los efectos que se producen. El estudiante debe reconocer la necesidad de un proceso dual de pensamiento. Debe pensar con arreglo a la situación física y también de acuerdo con la descripción matemática correspondiente. El estudio de todo problema requerirá la transición repetida del pensamiento del punto de vista físico al punto de vista matemático. No hay duda de que las mayores dificultades que encuentran los estudiantes en Mecánica, es la falta de capacidad para realizar esta transición libremente, vinculando estos dos procesos mentales.

El estudiante deberá realizar un gran esfuerzo para vincular cada concepto físico con su correspondiente expresión matemática. Deberá reconocer que la formulación matemática de un problema físico representa un modelo o descripción límite ideal que se aproxima, pero nunca alcanza por completo, a la situación física real.

Al construir el modelo matemático idealizado para un problema técnico dado, siempre se harán ciertas aproximaciones. Algunas de éstas serán de índole matemática y otras de índole física. Por ejemplo, suele ser preciso desprestigiar distancias, ángulos o fuerzas que sean pequeñas, frente a otras distancias, ángulos o fuerzas mucho mayores. Una fuerza que, en realidad, se halle distribuida sobre una pequeña superficie del cuerpo sobre el que actúa puede considerarse como fuerza concentrada si las dimensiones de la superficie en cuestión son pequeñas frente a otras dimensiones pertinentes. El peso de un cable de acero por metro de longitud puede desprestigiar si la tensión del cable es varias veces mayor que su peso total, mientras que el peso del cable no podrá desprestigiar si el problema pide la determinación de la flecha del cable suspendido, debida a su peso. Así pues, las hipótesis que se hagan dependen de qué información se desee y de la precisión exigida. El estudiante deberá estar constantemente atento a las diversas hipótesis que se hagan para la formulación de los problemas reales, según un modelo matemático. La habilidad de comprender y utilizar las hipótesis apropiadas en la formulación y solución de problemas técnicos es, ciertamente, una de las características más importantes de un buen ingeniero. Uno de los principales fines de este libro es proporcionar un máximo de oportunidades para desarrollar esta habilidad mediante la presentación de muchos problemas prácticos.

Las gráficas constituyen también un medio importante de descripción en Mecánica y son útiles en tres aspectos. Primero, permiten la representación de un sistema físico sobre un papel mediante un esquema o diagrama. La representación geométrica es vital para la interpretación física y ayuda en gran manera a visualizar los aspectos tridimensionales de muchos problemas. Segundo, las gráficas ofrecen a menudo un medio para resolver relaciones físicas sin recurrir a una solución algebraica. Las soluciones gráficas no solamente proporcionan medios prácticos para obtener los resultados, sino que también ayudan mucho a realizar la transición del pensamiento entre la situación física y la expresión matemática, pues ambas están representadas simultáneamente. Un tercer empleo de las gráficas es la representación de resultados sobre diagramas o curvas que constituyen una ayuda de valor incalculable para la interpretación.

Como ocurre con todos los problemas técnicos, es esencial un método de ataque eficaz para los problemas de Estática. El desarrollo de la habilidad para formular problemas y representar sus soluciones constituirá un haber valiosísimo. Cada solución deberá seguir un orden lógico de pasos que llevarán de la hipótesis a la conclusión y su representación deberá incluir una exposición clara de las partes siguientes, identificando cada una de ellas de manera que no deje lugar a dudas:

1. Datos conocidos.
2. Resultados buscados.
3. Diagramas necesarios.
4. Cálculos.
5. Respuestas y conclusiones.

Además convendrá incorporar una serie de comprobaciones de los cálculos en puntos intermedios del proceso de solución. Debe observarse si son o no razonables las magnitudes numéricas y comprobar frecuentemente la precisión y homogeneidad dimensional de los términos. También es importante que la distribución del trabajo sea limpia y ordenada. Las soluciones descuidadas que no puedan ser leídas fácilmente por los demás, carecen de valor o tienen muy poco. La disciplina inherente a una buena presentación será en sí misma una ayuda inestimable para el desarrollo de las capacidades para formular y analizar. Muchos problemas que en un principio parecen difíciles y complicados se hacen claros y fáciles una vez se han abordado con un método lógico y disciplinado.

La Estática se basa en un número sorprendentemente reducido de conceptos fundamentales e implica, principalmente, la aplicación de estas relaciones fundamentales a una diversidad de situaciones. En esta aplicación, el *método* de análisis es de importancia primordial. Al resolver un problema es esencial que las leyes que se apliquen se retengan bien en la mente y que esos principios se apliquen literal y exactamente. Al aplicar los principios que definen los requisitos para fuerzas que actúan sobre un cuerpo, es esencial que el cuerpo en cuestión esté *aislado* de los demás cuerpos, con lo que se podrá hacer una relación completa y precisa de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. Este *aislamiento* existirá en nuestra mente y sobre el papel. El dibujo de dicho cuerpo aislado con la representación de *todas* las fuerzas exteriores que actúan sobre él recibe el nombre de *diagrama del cuerpo libre*. Desde hace tiempo se ha establecido que el *método del diagrama del cuerpo libre* es la clave de la comprensión de la Mecánica. Así ocurre debido a que el *aislamiento* de un cuerpo es la herramienta con la que se separa claramente la *causa* del *efecto* y con la que se fija, en forma precisa, la atención sobre la aplicación literal de un principio. En el capítulo 3 se tratará de la técnica de dibujar diagramas para sólidos libres.

Al aplicar leyes de la Estática a la resolución de un problema, se pueden emplear directamente valores numéricos de las cantidades al ir en busca de la solución. Por otra parte, pueden utilizarse símbolos algebraicos para representar las cantidades que intervienen y dejar la respuesta en forma de fórmula. En el primer procedimiento, en cada etapa del cálculo queda en evidencia la magnitud de todas las cantidades expresadas en sus unidades particulares. Esto suele ser una ventaja cuando se valore el significado práctico de la magnitud de los términos. El segundo método, o solución simbólica, tiene varias ventajas sobre la solución numérica. En primer lugar, la abreviatura lograda con la utilización de símbolos ayuda a concentrar la atención sobre la interconexión entre la situación física y la descripción matemática a ella relacionada. En segundo lugar, una

solución simbólica permite una comprobación dimensional que puede realizarse a cada paso, mientras que cuando se utilizan valores numéricos no puede comprobarse la homogeneidad dimensional. Tercero, una solución simbólica puede ser usada repetidamente para obtener respuestas al mismo problema cuando diferentes juegos y tamaños de unidades son usados. Facilidad en ambas formas de solución es esencial, y mucha práctica con cada una de ellas deberá ser conseguida en el trabajo de problemas.

El alumno encontrará que las soluciones de los problemas de Estática pueden hallarse de una de las tres maneras siguientes. Primera, puede utilizarse una solución matemática directa por cálculo a mano en la que los resultados aparecerán o como símbolos algebraicos o como resultados numéricos. La mayoría de los problemas caen en esta categoría. Segunda, ciertos problemas se tratan fácilmente mediante soluciones gráficas. Tercera, la moderna calculadora digital es de utilidad especial cuando intervienen en forma numérica un gran número de ecuaciones o de datos repetidos. El alumno que tenga acceso a una calculadora digital puede intentar resolver algunos de sus problemas por este método. No obstante, con el fin de reducir el tiempo de cálculo en la elaboración del problema, los datos de la mayoría de los problemas se dan por números sencillos. La elección del método de solución más expeditivo constituye un aspecto importante de la experiencia a ganar con la resolución de problemas.

2 Sistemas de fuerza

8. Introducción. En este capítulo y en los siguientes examinaremos los efectos y propiedades de diversos tipos de fuerzas al ejercerse sobre estructuras y mecanismos de ingeniería. La experiencia adquirida mediante este examen resultará ser de utilización fundamental en el estudio de la Mecánica y en el de otros temas tales como el análisis de los esfuerzos, diseño de elementos de máquinas y movimiento de fluidos. Dentro del tema de la Estática en sí, en este capítulo echamos los cimientos para el conocimiento básico del tema y se estimula al alumno para que domine por completo dicha materia.

9. Fuerza. Antes de enfrentarnos con un grupo o *sistema* de fuerzas conviene examinar las propiedades de una sola fuerza con cierto detalle. Se ha definido la fuerza como la acción que ejerce un cuerpo sobre otro. Es evidente que la fuerza es una cantidad vectorial, ya que su efecto depende de la dirección y sentido de la acción tanto como de su magnitud. Además, es necesario saber dónde actúa. La acción de la tensión P del cable sobre el soporte de la figura 5a, se ha representado en la figura 5b mediante el vector fuerza P . El efecto de esta acción sobre el soporte dependerá de la magnitud de P , del ángulo θ y de la situación del punto de aplicación A . Variando cualquiera de estos tres elementos

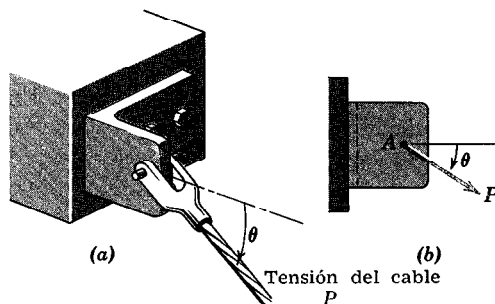


Figura 5

se alterará el efecto sobre el soporte, cosa que podría percibirse, por ejemplo, mediante la fuerza que se ejerce sobre uno de los roblones que fijan el soporte a la base o mediante la deformación del material del soporte en un punto cualquiera. Se ve, por tanto, que la especificación completa de una fuerza exige el conocimiento de su *magnitud, dirección y punto de aplicación*.

La fuerza se aplica por contacto mecánico directo o por acción a distancia. Las fuerzas eléctricas y gravitatorias son dos ejemplos de fuerzas aplicadas por acción a distancia. Las demás fuerzas se aplican por contacto físico directo.

La acción de una fuerza sobre un cuerpo puede descomponerse en dos efectos, *exterior e interior*. Para el soporte de la figura 5, los efectos exteriores de P al soporte son las reacciones o fuerzas ejercidas (no representadas) sobre el soporte por los cimientos y los pernos a consecuencia de la acción de P . Las fuerzas exteriores a un cuerpo son, pues, de dos clases: las fuerzas aplicadas o *activas* y las fuerzas *reactivas*. Los efectos interiores de P al soporte son los movimientos internos resultantes y las fuerzas distribuidas por todo el material del soporte. La relación entre las fuerzas internas y los movimientos internos exige tener en cuenta las propiedades materiales del cuerpo y se estudia en los tratados de resistencia de materiales, elasticidad y plasticidad.

Al estudiar la mecánica de los cuerpos rígidos, en donde solamente se tienen en cuenta los efectos *exteriores* de las fuerzas, la experiencia nos indica que no es necesario restringir a un punto dado la acción de una fuerza aplicada. Así, la fuerza P que actúa sobre el soporte rígido de la figura 6 puede considerarse aplicada en A o en B o en cualquier punto de su línea de acción, con lo que no cambiará el efecto exterior total de P sobre el soporte. Los efectos exteriores son la fuerza ejercida sobre el soporte por el punto de sujeción O y la fuerza ejercida sobre el soporte por el rodillo de apoyo en C . Esta situación viene descrita por el *principio de la transmisibilidad*, que se enuncia diciendo que una fuerza puede considerarse aplicada a un punto cualquiera de su línea de acción sin que se alteren los efectos *exteriores* al cuerpo rígido de la fuerza que sobre él actúa. Cuando se consideran solamente los efectos externos resultantes de una fuerza, ésta se puede considerar como *vector deslizante* y es entonces necesario y suficiente especificar *el módulo, el sentido y la línea de acción* de la fuerza. Como en este libro se estudia esencialmente la mecánica de los cuerpos rígidos, casi todas las fuerzas se considerarán vectores deslizantes respecto al cuerpo rígido sobre el cual actúan.

Las fuerzas pueden estar concentradas o distribuidas. En realidad, toda fuerza de contacto se halla aplicada a una superficie de área finita y, por tanto, está distribuida. Cuando las dimensiones del área sean despreciables frente a las otras dimensiones del cuerpo, se podrá considerar la fuerza como concentrada en un punto. La fuerza puede estar distribuida sobre una superficie, como en el caso del contacto mecánico, o puede estar distribuida por un volumen, como cuando actúa una fuerza gravitatoria o magnética. El "peso" de un cuerpo es la fuerza de la gravedad distribuida por su volumen y se puede también considerar como fuerza concentrada aplicada al centro de gravedad. La posición del centro

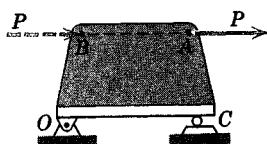


Figura 6

de gravedad puede determinarse, en ocasiones mediante consideraciones acerca de la simetría del cuerpo. Si la posición no queda clara, será preciso realizar un cálculo, que se explicará en el capítulo 5, para localizar el centro de gravedad.

Una fuerza se puede medir por comparación con otras fuerzas conocidas, logrando el equilibrio mecánico, o por deformación calibrada de un resorte elástico. Todas estas comparaciones o calibraciones tienen como base un patrón primario. La unidad patrón de fuerza es el newton (N), definida ya en el apartado 4. Por la ecuación 3 se ve que una masa de 1 kg suspendida de un resorte permanece en reposo, ejerciendo en dicho resorte una tensión de 1 (g). El alargamiento δ del resorte es, por tanto, una medida de g newtons de fuerza. Se desprende, pues, que un newton viene dado por una deformación δ/g . Por ejemplo, si un muelle se alarga 123 mm al estar en reposo una masa de 3 kg que se haya suspendido de él, en un lugar en el que el valor de g es de $9,81 \text{ m/s}^2$, entonces la deformación del resorte correspondiente a 1 N de fuerza resulta ser $123/3 \cdot 9,81 = 4,18 \text{ mm}$ por newton. Por tanto, esta medición permitiría calibrar el resorte para tener un instrumento que midiera la fuerza en newtons.

Debe tenerse cuidado al observar la característica de la fuerza que expresa la tercera ley de Newton. La acción de una fuerza va siempre acompañada de una reacción igual y opuesta. Es esencial ver claramente qué fuerza de esta pareja es la que se considera. La respuesta queda siempre clara si se *aisla* el cuerpo en cuestión y se representa la fuerza ejercida *sobre* el cuerpo (no la ejercida *por* él). Es muy fácil equivocarse y considerar la fuerza de la pareja que no se debe utilizar, a menos que se establezca una distinción precisa entre toda acción y su reacción.

Dos fuerzas concurrentes F_1 y F_2 que actúan sobre un mismo plano se pueden sumar mediante la regla del paralelogramo para obtener su suma o *resultante* R según se indica en la figura 7a. Si las dos fuerzas son coplanarias, pero están aplicadas a dos puntos diferentes, como en la figura 7b, por el principio de transmisibilidad se pueden deslizar a lo largo de sus líneas de acción y obtener su suma R en el punto de concurso. La resultante R podrá sustituir a F_1 y F_2 sin alterar los efectos exteriores ejercidos sobre el cuerpo. También podrá utilizarse la regla del triángulo para obtener R , pero ello exige el desplazamiento de la línea de acción de una de las fuerzas en la forma indicada en la figura 7c. En la figura 7d se han sumado las mismas fuerzas, y aun cuando se obtienen el módulo y dirección correctos de R , se ha perdido su línea de acción, puesto que R no pasa ya por A. Por tanto, se debe evitar este tipo de

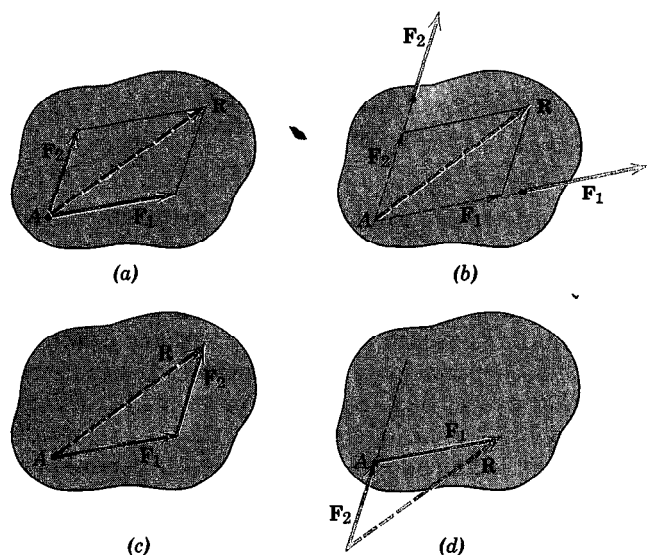


Figura 7

construcción. La suma de las dos fuerzas puede escribirse matemáticamente mediante la ecuación vectorial

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2.$$

Además de ser necesario combinar fuerzas para obtener su resultante, a menudo es preciso sustituir una fuerza por sus *componentes* que actúen en dos direcciones especificadas. Así, la fuerza \mathbf{R} de la figura 7a puede sustituirse o *descomponerse* en dos componentes \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 que tengan dichas direcciones especificadas sin más que completar el paralelogramo en la forma que se indica para obtener las magnitudes de \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 .

En la figura 8 se presenta el caso particular de adición de dos fuerzas paralelas \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 . Pueden combinarse sumando primeramente dos fuerzas opuestas, de igual recta soporte, \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ de magnitud conveniente (la misma para ambas) que tomadas juntas no ocasionarán ningún efecto exterior sobre el cuerpo. Sumando \mathbf{F}_1 y \mathbf{F} y combinando con la suma de \mathbf{F}_2 y $-\mathbf{F}$, se tiene la resultante \mathbf{R} correcta en magnitud, dirección, sentido y línea de acción. Este procedimiento también resulta útil para obtener una combinación gráfica de dos fuerzas que sean casi paralelas y en consecuencia tengan un punto de concurso muy lejano.

Según el apartado 3 del capítulo 1, un vector fuerza \mathbf{F} que se ejerza sobre un punto O , figura 9, puede *descomponerse* en *componentes rectangulares* F_x , F_y , F_z , donde

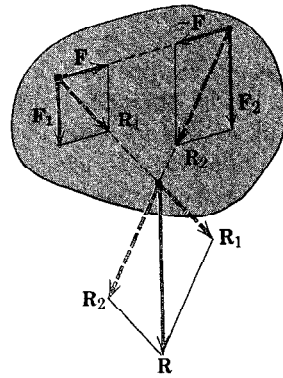


Figura 8

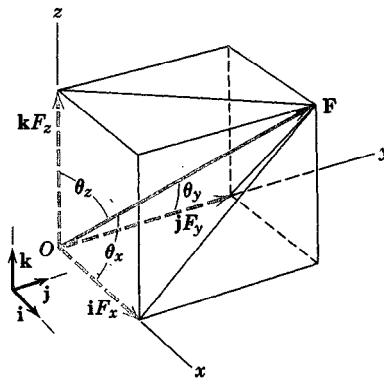


Figura 9

$$\begin{aligned}
 F_x &= F \cos \theta_x, & F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}, \\
 F_y &= F \cos \theta_y, & \mathbf{F} &= iF_x + jF_y + kF_z, \\
 F_z &= F \cos \theta_z, & \mathbf{F} &= F(i \cos \theta_x + j \cos \theta_y + k \cos \theta_z).
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Los vectores unitarios i , j , k están dirigidos según los sentidos positivos de los ejes x , y , z , y la elección de la orientación del sistema de coordenadas es totalmente arbitraria, siendo la consideración principal la de mayor conveniencia. En la representación bidimensional se considera ausente una de las componentes, por ejemplo, la z , y la descomposición da

$$F_x = F \cos \theta_x, \quad F_y = F \sin \theta_x, \quad \operatorname{tg} \theta_x = \frac{F_y}{F_x}.$$

Para eliminar la ambigüedad entre la representación de una fuerza y sus componentes, conviene representar las componentes mediante rectas de trazos y la resultante con trazo continuo (o al revés). Con este convenio quedará siem-

pre claro que se ha representado una sola fuerza y no varias fuerzas por separado.

Las componentes rectangulares de una fuerza \mathbf{F} (o de otro vector) también pueden escribirse con ayuda de la operación vectorial llamada *producto escalar* (para una introducción al Análisis Vectorial véanse los apartados B1, B2 y B3 del Apéndice B). Por definición, el producto escalar de dos vectores \mathbf{P} y \mathbf{Q} (fig. 10a) es el producto de sus módulos multiplicado por el coseno del ángulo α que forman. Este producto puede considerarse como el resultado de multiplicar la proyección (componente) $P \cos \alpha$ de \mathbf{P} en la dirección de \mathbf{Q} por Q , o bien el producto de la proyección (componente) $Q \cos \alpha$ de \mathbf{Q} sobre \mathbf{P} por P . En uno y otro caso, el producto escalar de los dos vectores es una cantidad escalar y se escribe en la forma $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \alpha$. Así, por ejemplo, la componente $F_x = F \cos \theta_x$ de la fuerza \mathbf{F} de la figura 9 podrá escribirse en la forma $F_x = \mathbf{F} \cdot \mathbf{i}$ donde \mathbf{i} es el vector unitario o versor según la dirección x . En términos más generales, si \mathbf{s} es un vector unitario según una dirección especificada, la componente de \mathbf{F} en la dirección \mathbf{s} (fig. 10b) tiene por magnitud $F_s = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$. Si se quiere escribir el vector componente según la dirección \mathbf{s} en forma de cantidad vectorial, deberá multiplicarse su módulo $\mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$ por el versor \mathbf{s} teniéndose entonces $\mathbf{F}_s = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{s})\mathbf{s}$, que puede escribirse, simplemente, en la forma $\mathbf{F}_s = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}\mathbf{s}$.

Si \mathbf{s} tiene por cosenos directores α, β, γ y \mathbf{F} tiene por cosenos directores l, m, n respecto a los ejes de referencia $x-y-z$, la componente de \mathbf{F} según la dirección de \mathbf{s} será

$$\begin{aligned} F_s &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = F(\mathbf{i}l + \mathbf{j}m + \mathbf{k}n) \cdot (\mathbf{i}\alpha + \mathbf{j}\beta + \mathbf{k}\gamma) \\ &= F(l\alpha + m\beta + n\gamma) \end{aligned}$$

ya que

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \quad \text{y} \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = 0.$$

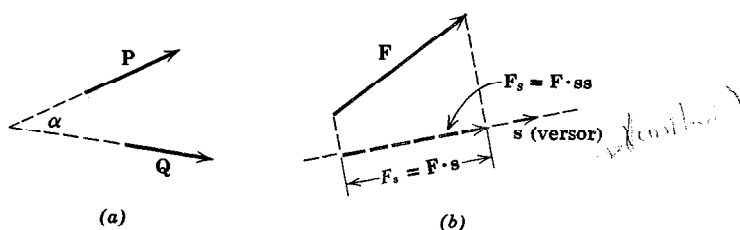


Figura 10

Problemas tipo

2/1. La fuerza F de 100 N está aplicada al soporte en la forma que se indica. Determinar las componentes rectangulares de F según (1) las direcciones x e y ; (2) las direcciones x' e y' . Además (3) hallar las componentes de F según las direcciones x' e y .

Solución. Apartado (1). En la parte *b* de la figura pueden verse las componentes x e y de F que son

$$F_x = F \cos \theta_x = 100 \cos 20^\circ = 94,0 \text{ N}$$

$$F_y = F \cos \theta_y = 100 \cos 70^\circ = 34,2 \text{ N}$$

Resp.

Apartado (2). Las componentes x' e y' de F son las proyecciones sobre estos ejes según se indica en la parte *c* de la figura y son

$$F_{x'} = F \cos \theta_{x'} = 100 \cos 50^\circ = 64,3 \text{ N}$$

$$F_{y'} = F \cos \theta_{y'} = 100 \cos 40^\circ = 76,6 \text{ N}$$

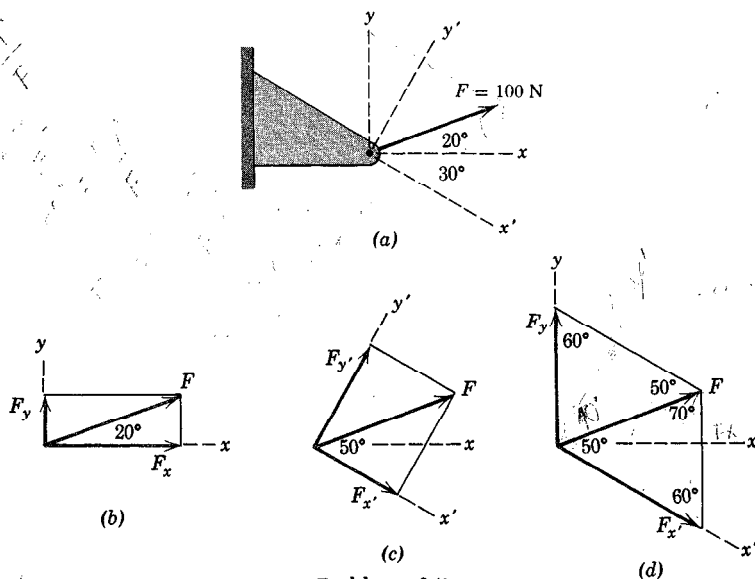
Resp.

Apartado (3). Las componentes de F según las direcciones x' e y no son rectangulares y se obtienen completando el paralelogramo en la forma indicada en la parte *d* de la figura. Pueden calcularse dichas componentes aplicando el teorema del seno, lo cual da

$$\frac{F_{x'}}{\sin 70^\circ} = \frac{F}{\sin 60^\circ} \quad F_{x'} = \frac{0,940}{0,866} 100 = 108,5 \text{ N}$$

$$\frac{F_y}{\sin 50^\circ} = \frac{F}{\sin 60^\circ} \quad F_y = \frac{0,766}{0,866} 100 = 88,5 \text{ N}$$

Resp.



Problema 2/1

2/2. En el origen O del sistema de ejes $x-y-z$ que se indica se aplica una fuerza $F = 100 \text{ N}$. La recta soporte de F pasa por un punto A cuyas coordenadas son 3 m, 4 m y 5 m. Determinar (a) las componentes x , y , z de F , (b) la proyección de F sobre el plano $x-y$, y (c) la componente F_s de F según la recta $O-s$ que pasa por el punto B que se indica.

Solución. Apartado (a). Los cosenos directores de F son

$$l = \frac{3}{7,071} = 0,424 \quad m = \frac{4}{7,071} = 0,566 \quad n = \frac{5}{7,071} = 0,707$$

donde la diagonal al punto A tiene por longitud $\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 7,071 \text{ m}$. Las componentes resultan ser

$$F_x = Fl = 100(0,424) = 42,4 \text{ N}$$

$$F_y = Fm = 100(0,566) = 56,6 \text{ N}$$

$$F_z = Fn = 100(0,707) = 70,7 \text{ N}$$

Resp.

Apartado (b). El coseno del ángulo θ_{xy} que forma F con el plano $x-y$ es

$$\cos \theta_{xy} = \frac{\sqrt{3^2 + 4^2}}{7,071} = 0,707$$

con lo que $F_{xy} = F \cos \theta_{xy} = 100(0,707) = 70,7 \text{ N}$.

Resp.

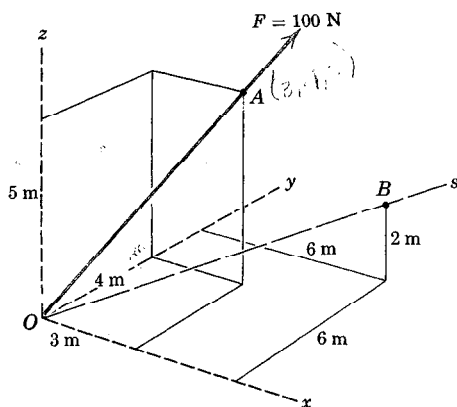
Apartado (c). Los cosenos directores de un versor s dirigido según $O-s$ son

$$\alpha = \beta = \frac{6}{\sqrt{6^2 + 6^2 + 2^2}} = 0,688 \quad \gamma = \frac{2}{\sqrt{6^2 + 6^2 + 2^2}} = 0,229$$

Luego, la componente de F según $O-s$ resulta ser

$$\begin{aligned} F_s &= F \cdot s = 100(0,424\mathbf{i} + 0,566\mathbf{j} + 0,707\mathbf{k}) \cdot (0,688\mathbf{i} + 0,688\mathbf{j} + 0,229\mathbf{k}) \\ &= 100 [(0,424)(0,688) + (0,566)(0,688) + (0,707)(0,229)] \\ &= 84,3 \text{ N} \end{aligned}$$

Resp.



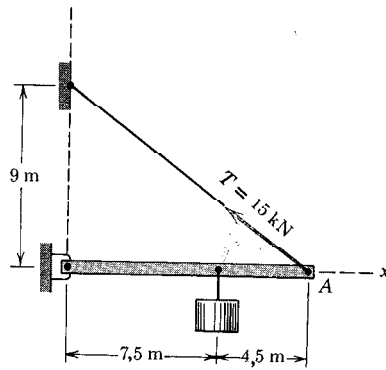
Problema 2/2

$F_x = F \cos \alpha$
 $\cos \alpha = \frac{3}{7,071}$
 $F_x = 100 \cdot \frac{3}{7,071} = 42,4 \text{ N}$

Problemas

2/3. Calcular las componentes x e y de la tensión del cable $T = 15 \text{ kN}$ indicada que se ejerce sobre la viga en A.

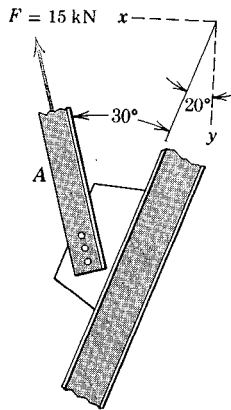
Resp. $T_x = -12 \text{ kN}$, $T_y = 9 \text{ kN}$



Problema 2/3

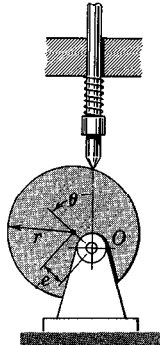
2/4. El miembro estructural A está sometido a una carga tensora de 15 kN . Determinar las componentes x e y de esta fuerza.

Resp. $F_x = 2,60 \text{ kN}$,
 $F_y = -14,77 \text{ kN}$



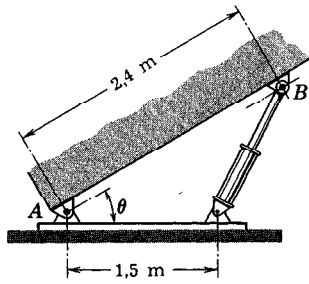
Problema 2/4

2/5. La fuerza de contacto entre el seguidor de leva y la leva circular lisa es normal a la superficie de ésta y está limitada en magnitud a F para $\theta = \pi/2$. Escribir, para esta posición, la expresión de la componente F' de la fuerza según el eje del seguidor. Hay que conocer esta componente para diseñar adecuadamente el resorte.



Problema 2/5

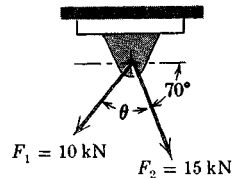
Sistemas de fuerza



Problema 2/6

2/6. El cilindro hidráulico ejerce una fuerza de 40 kN en la dirección de su vástago en contra de la carga que eleva. Determinar las componentes normal F_n y tangencial F_t a AB para la posición de $\theta = 30^\circ$.

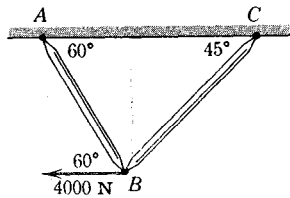
Resp. $F_n = 22,5 \text{ kN}$, $F_t = 33,1 \text{ kN}$



Problema 2/7

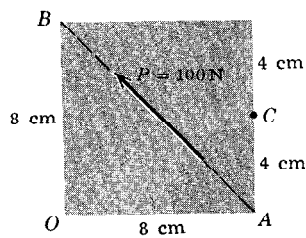
2/7. ¿Bajo qué ángulo θ habrá que aplicar F_1 para que el efecto combinado de F_1 y F_2 sea igual a 20 kN?

Resp. $\theta = 75^\circ 31'$



Problema 2/8

2/8. Para hallar las fuerzas que se ejercen sobre los pasadores A y C, hay que descomponer la fuerza de 4000 N en dos componentes, una según AB y otra según BC. Determinar estas componentes.

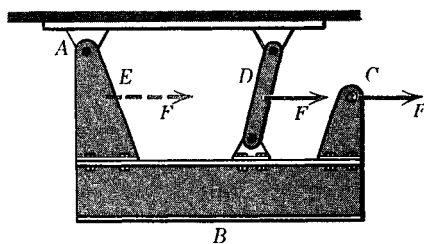


Problema 2/9

2/9. La fuerza $P = 100 \text{ N}$ está dirigida según la diagonal AB del cuadrado de 8 cm de lado. Determinar la magnitud P' de la componente P según OC con el sentido positivo tomado de O a C.

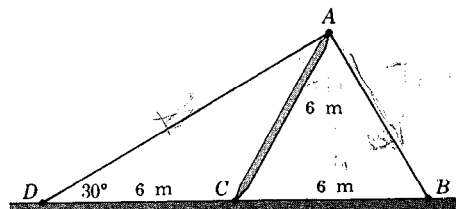
Resp. $P' = -31,6 \text{ N}$

2/10. El miembro rígido ABC está soportado por el pasador A y por la barra articulada D , teniendo aplicada una fuerza F en C . Del principio de transmisibilidad, ¿puede sacarse la conclusión de que la reacción en el pasador A sería la misma si se aplicara F en D o en E , en vez de en C ?



Problema 2/10

2/11. El cable que va de A a B está sometido a una tensión de 15000 N. Descomponer esta tensión que se ejerce en el enganche A en componentes T_n y T_t , respectivamente normal al puntal y dirigida según él.



Problema 2/11

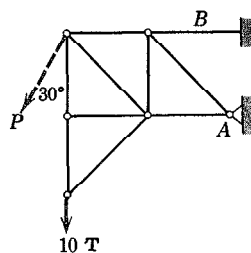
2/12. Descomponer la tensión de 15000 N del cable AB del problema 2/11 en componentes según las direcciones de AC y AD .

Resp. $T_{AD} = 25980$ N,
 $T_{AC} = 30000$ N

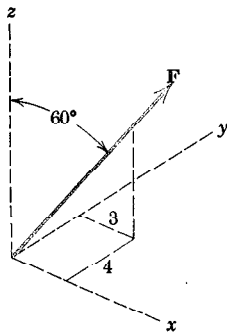
2/13. Se quiere sustituir una fuerza de 1000 kp que forma un ángulo de 45° con el eje horizontal x por dos fuerzas, una fuerza horizontal F y otra de 800 kp de magnitud. Determinar F .

Resp. $F = 333$ kp ó 1081 kp

2/14. La resultante de la carga de 10 toneladas y la tensión T en el miembro B pasa por el punto A y origina una cierta fuerza sobre el pasador que en este punto soporta a la armadura. Si se sustituye la carga de 10 toneladas por una fuerza P aplicada según la recta de trazos, determinar la magnitud de P que ejercería el mismo efecto sobre el pasador en A que la fuerza de 10 toneladas. Especificar el incremento correspondiente ΔT de la tensión del miembro B . Todos los ángulos internos de la armadura son de 45° ó 90° .

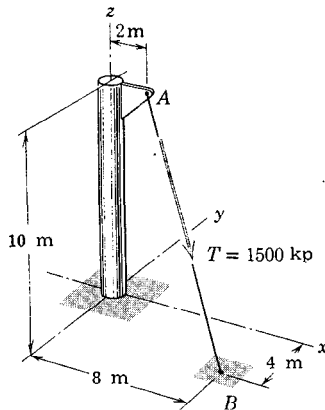


Problema 2/14



Problema 2/15

2/15. Si la componente y de la fuerza \mathbf{F} es 4000 N, escribir \mathbf{F} como vector.

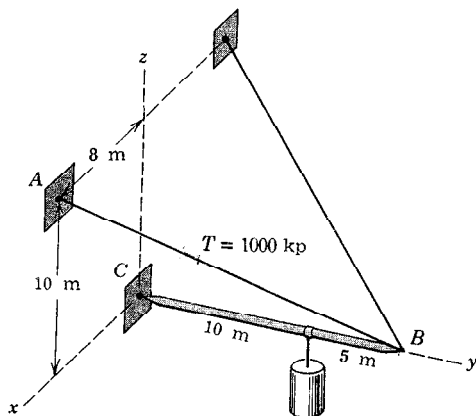


Problema 2, 16

2/16. El cable AB ejerce una tensión $T = 1500$ kp sobre el soporte fijo en A. Escribir la expresión de esta fuerza en forma de vector \mathbf{T} .

2/17. La recta soporte de una fuerza \mathbf{F} forma un ángulo de 60° con el eje x y 70° con el eje y . Si la componente z de \mathbf{F} es 50 kp, escribir la expresión vectorial de \mathbf{F} .

Resp. $\mathbf{F} = 62,8(0,5\mathbf{i} + 0,342\mathbf{j} + 0,796\mathbf{k})$ kp



Problema 2/18

2/18. La tensión en el cable soportante AB es de 1000 kp. Expresar esta tensión en forma de vector fuerza \mathbf{T} que se ejerce sobre BC.

Resp. $\mathbf{T} = \frac{1000}{\sqrt{389}}(8\mathbf{i} - 15\mathbf{j} + 10\mathbf{k})$ kp

2/19. Tres puntos del plano $x-y$ tienen las coordenadas expresadas en metros siguientes: $A(2, 3)$, $B(4, 6)$, $C(6, 5)$. En A se aplica una fuerza $F = 100$ kp dirigida hacia B. Determinar la expresión vectorial de la componente \mathbf{F}_t de la fuerza dirigida hacia C.

2/20. Tres puntos tienen las coordenadas x - y - z siguientes, expresadas en metros: $A(4, 4, 5)$, $B(-2, -4, 3)$, $C(3, -6, -2)$. En A se aplica una fuerza $F = 100$ kp dirigida hacia B . Determinar la expresión vectorial de la componente F_t de la fuerza en la dirección de AC .

Resp. $F_t =$

$80,1(-0,082i - 0,816j - 0,571k)$ kp

2/21. Calcular la magnitud de la proyección F_{CD} de la fuerza de 100 kp sobre la diagonal CD de la cara del cubo que se indica.

2/22. Calcular la magnitud F_{AB} de la proyección de la fuerza $F = 100$ kp sobre la diagonal AB de la cara superior del paralelepípedo rectángulo.

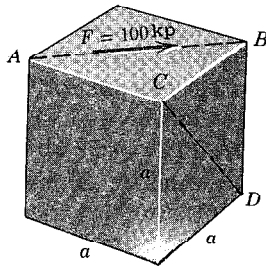
Resp. $F_{AB} = 63,3$ kp

2/23. Determinar una expresión de la magnitud F_{CD} de la componente de la fuerza F según la recta CD .

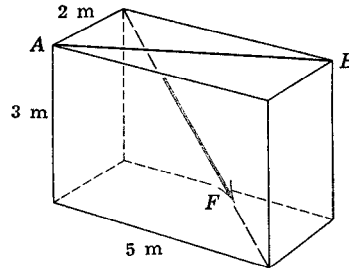
Resp. $F_{CD} = 0,555 F$

2/24. La cadena AB sujeta la trampa articulada en posición abierta. Si la tensión T en la cadena tiene una componente z de 3000 N, determinar la componente x de T .

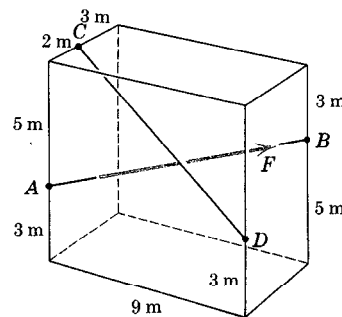
Resp. $T_x = 3465$ N



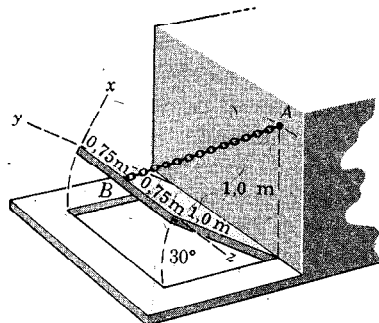
Problema 2/21



Problema 2/22



Problema 2/23



Problema 2/24

10 Momento. Una fuerza tiene, además de la tendencia a mover en su dirección y sentido al cuerpo a que se aplica, otra tendencia a hacerlo girar alrededor de todo eje que no corte a la recta soporte de la fuerza ni sea paralelo a ella. A esta tendencia se le llama *momento* M de la fuerza respecto al eje dado.

En la figura 11a puede verse un cuerpo al que se ha aplicado una fuerza R en uno de sus puntos A . El eje $O-O$ es una recta cualquiera en el cuerpo que no corta a la recta soporte de R . La fuerza R puede descomponerse en dos componentes, una P , paralela a $O-O$, que no tiene tendencia a hacer girar el cuerpo alrededor de $O-O$, y F contenida en un plano a normal al eje $O-O$ y que tendrá tendencia a hacer girar el cuerpo alrededor de $O-O$. La magnitud de esta tendencia es proporcional tanto a la magnitud F como al *brazo de momento*, d , perpendicular. La magnitud escalar del momento es, pues,

$$M = Fd. \quad (5)$$

El sentido del momento depende del sentido en el cual tienda F a hacer girar el cuerpo. Para identificar aquel sentido puede emplearse la regla de la mano derecha (fig. 11b) y el momento de F respecto a $O-O$ podrá representarse por un vector dirigido en el sentido indicado por el pulgar cuando se curvan los demás dedos en el sentido de la tendencia a la rotación. El momento M cumple todas las reglas de composición de vectores y puede considerarse como vector deslizante cuya recta soporte coincida con el eje de momentos. Las unidades de momento son m.kp o m.N y suelen escribirse en este orden para distinguir un momento de una energía que pudiera darse en kp.m o en N.m (J).

Al tratar de fuerzas coplanarias, se suele hablar de momento respecto a un punto. En realidad, queda implícito el momento respecto a un eje normal al plano y que pasa por un punto. Así, el momento de la fuerza F respecto al punto O , en la figura 12, es $M_o = Fd$ y estaría dirigido en el sentido de avance de un tornillo que girase en sentido contrario a las agujas del reloj. La representación vectorial de los momentos para fuerzas coplanarias no es conveniente, ya que los vectores saldrían del papel (sentido directo) o penetrarían en él (sentido inverso). Como la adición de vectores libres paralelos se puede efectuar *escalarmente*, se deberán tener en cuenta los sentidos de los momentos, asignando el signo más (+) a los momentos correspondientes a giros contrarios al de las agujas del reloj, y el signo menos (—) a los de sentido opuesto, o viceversa. Tan sólo hace falta mantener el convenio a lo largo de todo el problema que se resuelva.

Uno de los más importantes principios de la Mecánica es el *teorema de Varignon*, o *principio de los momentos*, que dice que el momento de una fuerza respecto a un punto cualquiera es igual a la suma de los momentos de sus componentes respecto a dicho punto. Para demostrar este teorema consideremos una fuerza R y dos componentes P y Q aplicadas a un punto A , figura 13. El punto O se toma arbitrariamente como centro de momentos. Construyamos la recta AO y proyectemos los tres vectores sobre la normal a esta recta. Constrúyanse también los brazos p , q , r de los momentos de las tres fuerzas respecto al punto O y de-

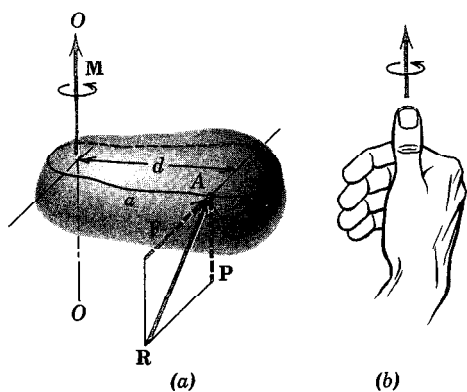


Figura 11

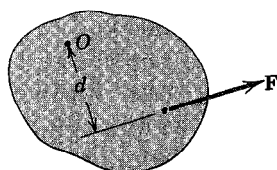


Figura 12

signense los ángulos que forman los vectores con la recta OA por α , β , γ , según se indica en la figura. Como el paralelogramo cuyos lados son P y Q requiere que $\overline{ac} = \overline{bd}$, es evidente que

$$\overline{ad} = \overline{ab} + \overline{bd} = \overline{ab} + \overline{ac},$$

o sea,

$$R \sin \gamma = P \sin \alpha + Q \sin \beta.$$

Multiplicando por la distancia \overline{AO} y sustituyendo los valores de p , q , r , se tiene

$$Rr = Pp + Qq,$$

lo cual demuestra que el momento de una fuerza respecto a un punto es igual a la suma de los momentos de sus dos componentes respecto al mismo punto. El teorema de Varignon demostrado para el caso de solamente dos componentes, se aplica igualmente a tres o más, ya que siempre es posible reducir, por combinación directa, el número de componentes a dos. El teorema puede aplicarse también a los momentos de otros vectores fijos o deslizantes.

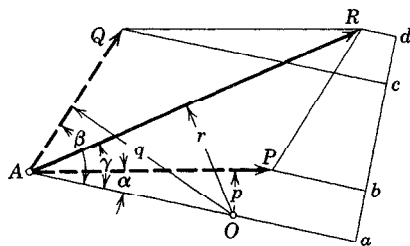


Figura 13

Vamos a desarrollar ahora una formulación algo más general del concepto de momento, la cual es particularmente útil en el análisis de sistemas tridimensionales de fuerzas. Consideremos una fuerza \mathbf{F} con un soporte determinado (fig. 14a) y un punto cualquiera O exterior a este soporte. El punto O y el soporte de \mathbf{F} determinan un plano α . El momento \mathbf{M}_O de \mathbf{F} respecto a un eje normal al plano y que pase por O es $M_O = Fd$, donde d es la distancia del punto O a la recta soporte de \mathbf{F} . A este momento también se le llama momento de \mathbf{F} respecto al punto O . El vector \mathbf{M}_O es normal al plano y está soportado por el eje que pasa por O . Tanto la magnitud como la dirección y sentido de \mathbf{M}_O pueden describirse mediante la operación vectorial llamada *producto vectorial* (v. § B4 del Apéndice B). Se introduce un vector \mathbf{r} que va de O a un punto cualquiera de la recta soporte de \mathbf{F} . Por definición, el producto vectorial de \mathbf{r} por \mathbf{F} se escribe en la forma $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ y tiene por módulo $(r \sin \alpha)F$, que es lo mismo que Fd , que es el módulo de \mathbf{M}_O . La dirección y sentido correctos del momento los establece la regla de la mano derecha, descrita anteriormente en este apartado. Así, tratando \mathbf{r} y \mathbf{F} como vectores libres (fig. 14b), el pulgar señalará el sentido de \mathbf{M}_O cuando los dedos de la mano derecha se curven indicando el sentido de rotación de \mathbf{r} hacia \mathbf{F} . Por tanto, el momento de \mathbf{F} respecto al eje que pasa por O puede escribirse en la forma

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (6)$$

Es obligatorio mantener el orden de los vectores en $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$, ya que $\mathbf{F} \times \mathbf{r}$ daría un vector opuesto a \mathbf{M}_O , es decir, $\mathbf{F} \times \mathbf{r} = -\mathbf{M}_O$.

La expresión del producto vectorial para \mathbf{M}_O puede ponerse en forma de determinante (v. ecs. B 12 y B 12a en el Apéndice B), lo cual da

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Obsérvese atentamente la simetría y orden de los términos.

Podemos ahora escribir el momento \mathbf{M}_λ de \mathbf{F} respecto a cualquier eje λ que

pase por O (fig. 14a). Si es \mathbf{n} un vector unitario en la dirección λ , utilizando la expresión del producto escalar para la componente de un vector descrita en el apartado 9, tendremos para la componente de \mathbf{M}_O según λ , simplemente, $\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{n}$, que es el módulo del momento \mathbf{M}_λ de \mathbf{F} respecto a λ . Para obtener la expresión vectorial del momento de \mathbf{F} respecto a λ habrá que multiplicar el módulo por el versor \mathbf{n} , lo cual da

$$\mathbf{M}_\lambda = (\mathbf{r} \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}, \quad (8)$$

donde se ha sustituido \mathbf{M}_O por $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$. La expresión $\mathbf{r} \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ conocida por el nombre de *producto mixto* (v. B5, Ap. B), no es necesario escribirla en la forma $(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}$, puesto que la asociación $\mathbf{r} \times (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})$ no tendría sentido, ya que no se puede formar un producto vectorial con un vector y un escalar. Según

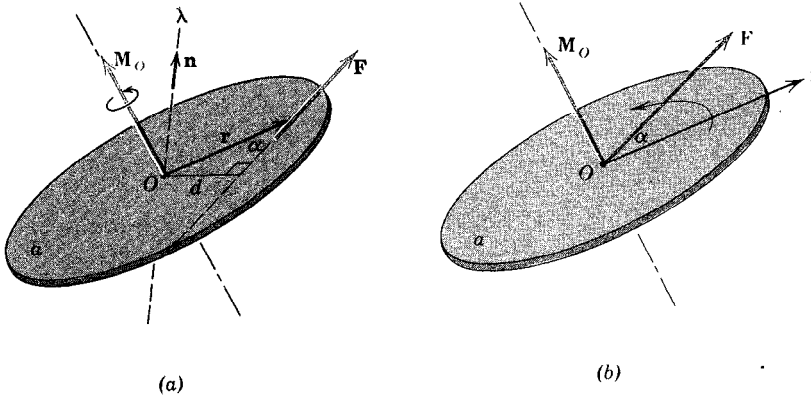


Figura 14

la ecuación B14 del Apéndice B, el producto mixto puede escribirse en forma de determinante, con lo que la ecuación 8 podrá expresarse también en la forma

$$\mathbf{M}_\lambda = \begin{vmatrix} r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} (\mathbf{i}\alpha + \mathbf{j}\beta + \mathbf{k}\gamma) \quad (8a)$$

donde α, β, γ son los cosenos directores del vector unitario \mathbf{n} .

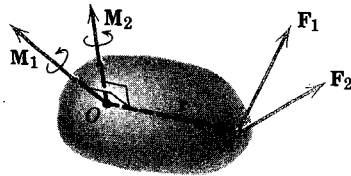
Consideremos ahora dos fuerzas \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 concurrentes en un punto A (fig. 15). El vector de posición de A desde otro punto cualquiera O es \mathbf{r} . Los dos momentos vectoriales respecto al punto O debidos a las dos fuerzas se pueden sumar y dan

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2,$$

y su suma vectorial es

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2).$$

Esta expresión constituye el enunciado del teorema de Varignon para tres dimensiones, el cual dice que la suma \mathbf{M} de los momentos respecto a un punto cualquiera O de dos fuerzas que concurren en otro punto diferente es igual al momento respecto al mismo punto O de su suma $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$. Aun cuando sólo se han representado dos fuerzas, el teorema es aplicable a un número cualquiera de fuerzas concurrentes.



Problemas tipo

2/25. Se aplica una tensión $T = 5000$ N al cable amarrado al extremo superior A del mástil rígido y se fija a tierra en B. Determinar el momento M_z de T respecto al eje z que pasa por la base O del mástil.

Solución (a). Se descompone la fuerza T en las componentes T_z y T_{xy} , esta última contenida en el plano $x-y$ que será, en consecuencia, normal al eje z del momento. Entonces, el momento se deberá solamente a T_{xy} y será $M_z = T_{xy}d$, donde d es la distancia del punto O a T_{xy} . El coseno del ángulo que forman T y T_{xy} es

$$\frac{\sqrt{15^2 + 12^2}}{\sqrt{15^2 + 12^2 + 9^2}} = 0,906$$

y por tanto

$$T_{xy} = 5000(0,906) = 4530 \text{ N}$$

El brazo de momento d es igual a \overline{OA} multiplicado por el seno del ángulo que forman T_{xy} y OA , es decir,

$$d = 15 \frac{12}{\sqrt{12^2 + 15^2}} = 9,37 \text{ m}$$

Luego el momento de T respecto al eje z es

$$M_z = 4530(9,37) = 42\,446 \text{ m} \cdot \text{N}$$

Resp.

y tiene el sentido de giro de las agujas del reloj cuando se mira hacia el plano $x-y$.

Solución (b). También se calcula fácilmente el momento descomponiendo T_{xy} en

sus componentes T_x y T_y . Es evidente que T_y no ejerce momento alguno respecto al eje z ya que lo corta, por lo que el momento buscado se debe solamente a T_x . El coseno director de T respecto al eje x es $12/\sqrt{9^2 + 12^2 + 15^2} = 0,566$ con lo que $T_x = 5000(0,566) = 2830$ N. Así pues

$$M_z = 2830(15) = 42\,450 \text{ m}\cdot\text{N}$$

Resp.

Solución (c). El momento pedido puede obtenerse por métodos vectoriales a partir del momento \mathbf{M}_O de \mathbf{T} respecto al punto O . El vector \mathbf{M}_O es normal al plano definido por \mathbf{T} y el punto O según puede verse en la figura de la derecha. Utilizando la ecuación 6 para hallar \mathbf{M}_O , el vector \mathbf{r} será un vector cualquiera que vaya de O a la recta soporte de \mathbf{T} . La elección más sencilla consiste en tomar el vector que va de O a A , el cual se escribe en la forma $\mathbf{r} = 15\mathbf{j}$ m. La expresión vectorial de \mathbf{T} requiere sus cosenos directores, que son $12/\overline{AB} = 0,566$, $-15/\overline{AB} = -0,707$ y $9/\overline{AB} = 0,424$. Por tanto

$$\mathbf{T} = 5000(0,566\mathbf{i} - 0,707\mathbf{j} + 0,424\mathbf{k}) \text{ N.}$$

De la ecuación 6,

$$\mathbf{M}_O = 15\mathbf{j} \times 5000(0,566\mathbf{i} - 0,707\mathbf{j} + 0,424\mathbf{k})$$

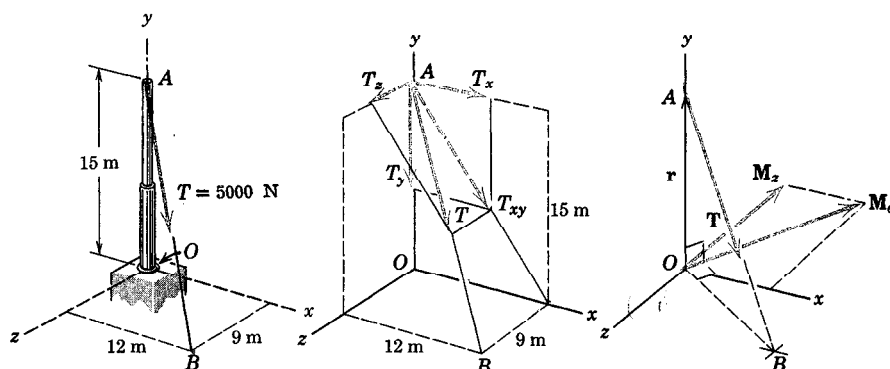
$$\mathbf{M}_O = 75\,000(-0,566\mathbf{k} + 0,424\mathbf{i}) \text{ m}\cdot\text{N}$$

La magnitud M_z del momento buscado es la componente de \mathbf{M}_O en la dirección z , o sea $M_z = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{k}$. Por tanto

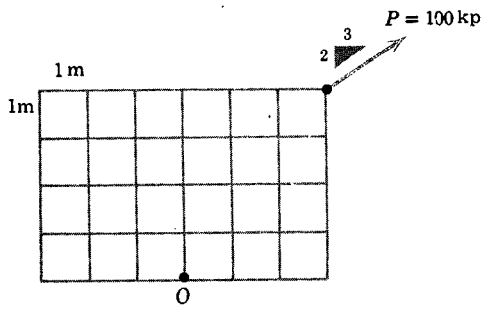
$$M_z = 75\,000(-0,566\mathbf{k} + 0,424\mathbf{i}) \cdot \mathbf{k} = -42\,450 \text{ m}\cdot\text{N} \quad \text{Resp.}$$

El signo menos indica que el vector \mathbf{M}_z está dirigido en el sentido negativo de las z . Expresado en forma de vector, el momento es

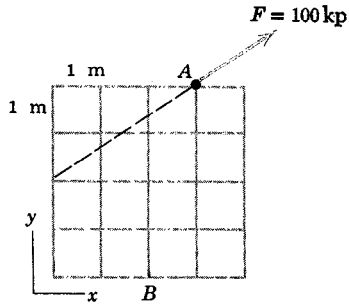
$$\mathbf{M}_z = -42\,450\mathbf{k} \text{ m}\cdot\text{N}$$



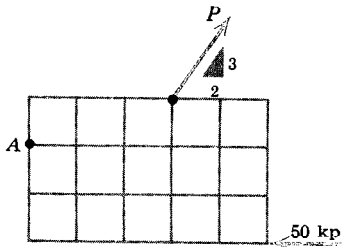
Problema 2/25



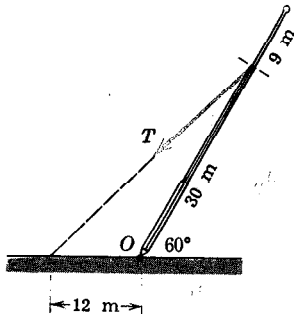
Problema 2/26



Problema 2/27



Problema 2/29



Problema 2/30

Problemas

2/26. Calcular el momento M_O de la fuerza P de 100 kp respecto al punto O de dos maneras, utilizando el principio de transmisibilidad para eliminar, primero, el momento de la componente horizontal de P y segundo, el de la componente vertical. La placa sobre la que se ejerce P está dividida en cuadrados de 1 m de lado.

2/27. La placa rectangular está constituida por cuadrados de 1 m de lado en la forma que se indica. En el punto A se aplica una fuerza $F = 100$ kp en la dirección señalada. Calcular el momento M_B de F respecto al punto B .

Resp. $M = 277$ m·kp, sentido horario

2/28. Determinar la expresión vectorial del momento M_B de la fuerza de 100 kp del problema 2/27 respecto al punto B .

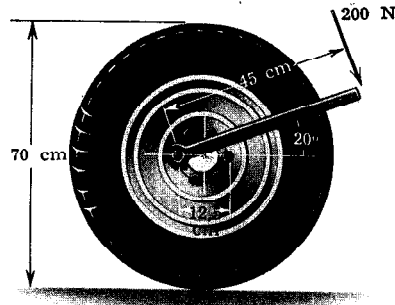
2/29. Si es nulo el momento resultante respecto al punto A del sistema de fuerzas compuesto por la de 50 kp y la P , determinar gráfica y algebraicamente la magnitud de P . La placa sobre la que se ejercen las fuerzas está dividida en cuadrados.

2/30. Para elevar el mástil desde la posición indicada, la tensión T del cable debe proporcionar un momento respecto a O de 30 000 m·N. Determinar T .

Resp. $T = 3602$ N

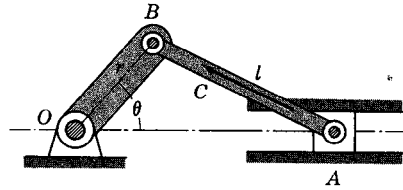
2/31. Se aplica una fuerza de 200 N al extremo de una llave inglesa para apretar el tornillo que fija la rueda al eje. Determinar el momento M de esta fuerza respecto al centro O de la rueda para la posición representada de la llave.

Resp. $M = 78,3 \text{ m}\cdot\text{N}$



Problema 2/31

2/32. En el mecanismo de biela y manivela representado, la biela AB de longitud l soporta una fuerza compresiva variable C . Deducir una expresión del momento de C respecto al eje de la manivela O en función de C , r , l y el ángulo variable θ .



Problema 2/32

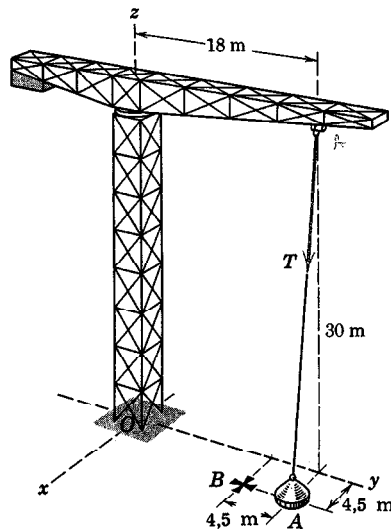
2/33. Al tomar una carga situada en la posición A se desarrolla una tensión T en el cable igual a 2100 kp. Calcular el momento que origina T respecto a cada uno de los ejes de coordenadas que pasan por la base de la estructura de la grúa.

2/34. Utilizar la expresión del producto vectorial para determinar el momento \mathbf{M}_O de la tensión T de 2100 kp del problema 2/33 respecto a la base O situada en el origen de coordenadas.

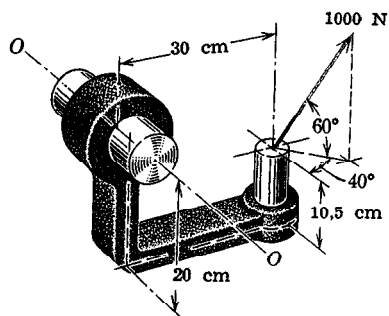
Resp. $\mathbf{M}_O =$
 $= -37\,350\mathbf{i} + 9345\mathbf{j} - 5610\mathbf{k} \text{ m}\cdot\text{kp}$

2/35. Si la grúa del problema 2/33 toma una carga en B en vez de en A y desarrolla en el cable una tensión inicial $T = 2100 \text{ kp}$, determinar el momento \mathbf{M}_O de esta fuerza respecto al origen O .

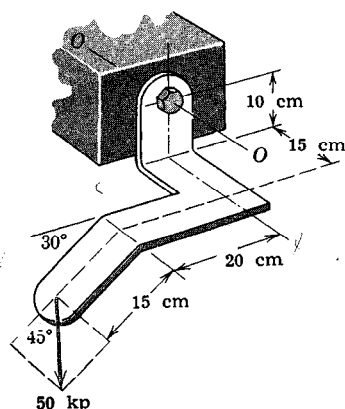
Resp. $\mathbf{M}_O =$
 $= -27\,735\mathbf{i} + 9240\mathbf{j} - 5550\mathbf{k} \text{ m}\cdot\text{kp}$



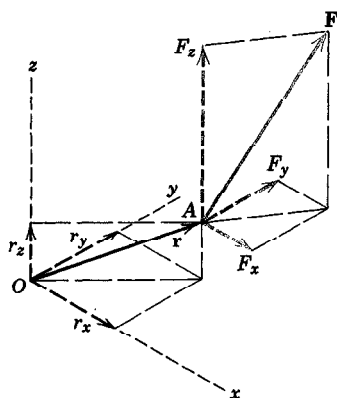
Problema 2/33



Problema 2/36



Problema 2/37



Problema 2/40

2/36. Calcular el momento M_O de la fuerza de 1000 N respecto al eje O-O.

2/37. El roblón resiste el momento respecto a su eje O-O originado por la fuerza de 50 kp que se ejerce sobre el soporte doblado. Determinar este momento M_O .

Resp. $M_O = 45,94 \text{ cm}\cdot\text{kp}$

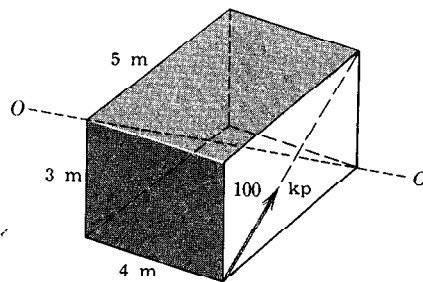
2/38. Una fuerza de 200 N cuyos cosenos directores son proporcionales a 2, 6, 9 pasa por un punto P cuyas coordenadas x - y - z , expresadas en centímetros, son 3, 2, -5. Calcular el momento M de la fuerza respecto a un punto cuyas coordenadas, en centímetros, sean 2, 2, -3.

2/39. Una fuerza de 100 N pasa por los puntos A y B en el sentido de A a B. Las coordenadas x - y - z de A y B, expresadas en metros, son -3, -1, 4 y 3, 4, 5, respectivamente. Calcular el momento M de la fuerza respecto al punto C cuyas coordenadas, en metros, son 2, -2, 1.

Resp. $M = \frac{100}{\sqrt{62}}(-14\mathbf{i} + 23\mathbf{j} - 31\mathbf{k}) \text{ m}\cdot\text{N}$

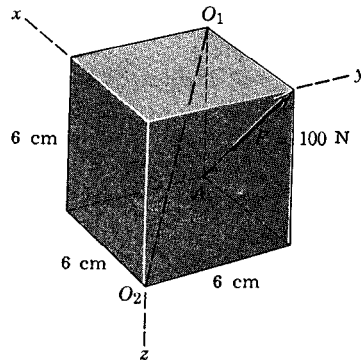
2/40. La fuerza \mathbf{F} está aplicada a un cuerpo en el punto A cuya posición está determinada por el vector \mathbf{r} cuyo origen está en el de coordenadas O de un sistema cartesiano. Desarrollar la expresión $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ relativa al momento de \mathbf{F} respecto a O e identificar cada término observando el correspondiente momento de cada una de las componentes de la fuerza respecto a los ejes de coordenadas que pasan por O.

2/41. Determinar la magnitud M del momento de la fuerza de 100 kp respecto al eje $O-O$ coincidente con la diagonal del paralelepípedo rectángulo. Resp. $M = 145,6 \text{ m}\cdot\text{kp}$



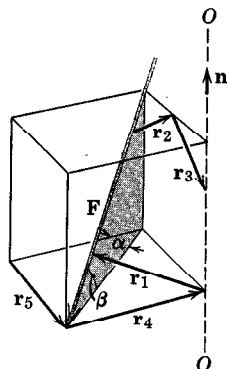
Problema 2/41

2/42. Escribir la expresión vectorial del momento \mathbf{M} de la fuerza de 100 N respecto al eje O_1-O_2 cuyo sentido es el que va de O_1 a O_2 .



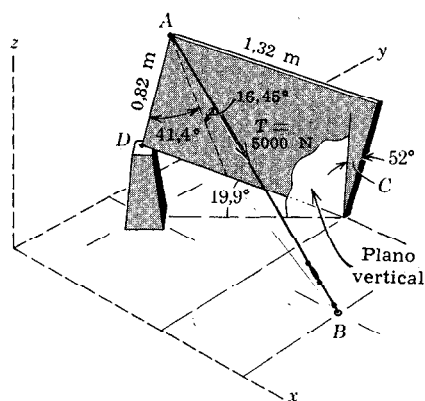
Problema 2/42

2/43. La fuerza \mathbf{F} ejerce cierto momento \mathbf{M} respecto al eje $O-O$. Determinar cuál de las expresiones que se citan describe correctamente a \mathbf{M} . El vector \mathbf{n} es un vector unitario dirigido según $O-O$ y el paralelepípedo es rectángulo.



Problema 2/43

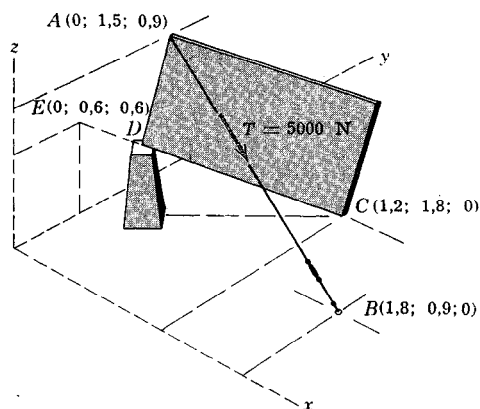
$$\begin{aligned} & \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} & (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \\ & (-\mathbf{r}_4 \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} & [\mathbf{F} \times (\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3) \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n} \\ & & |\mathbf{r}_5| F n \cos \beta \cos \alpha \end{aligned}$$



Problema 2/44

◀ 2/44. Una placa rectangular de acero de 1,32 m de longitud y 0,82 m de anchura se apoya por su vértice C en un plano horizontal x - y y por su vértice D sobre el pedestal que se indica de manera que su borde CD forma un ángulo de $19,9^\circ$ con el plano horizontal. Se inclina hacia atrás la placa de manera que su plano forme un ángulo de 52° con el plano vertical que contiene CD . Para soportar la placa se precisa una tensión de 5000 N en el cable AB . Si el cable forma un ángulo de $16,45^\circ$ con el plano de la placa en la posición angular indicada, determinar el momento M de la tensión T respecto al borde inferior CD .

Resp. $M = 1162 \text{ m}\cdot\text{N}$



Problema 2/45

◀ 2/45. Se tiene una placa análoga a la del problema 2/44, pero ahora se dan las coordenadas de las intersecciones de CD y AB con los planos x - y e y - z , expresadas en metros, en vez de los diversos ángulos del problema 2/44. Determinar el momento de la tensión de 5000 N del cable respecto a CD . Discutir las ventajas y limitaciones de las soluciones de uno y otro problema.

11 Par. El momento producido por dos fuerzas de igual módulo y dirección, pero de sentidos opuestos, cuyas rectas soporte no coincidan, se denomina *par*. Un par presenta ciertas propiedades únicas y tiene importantes aplicaciones en Mecánica.

Consideremos la acción de dos fuerzas tales \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ separadas una distancia d (fig. 16a). Estas dos fuerzas no se pueden combinar en una sola debido a que su suma en cualquier dirección es nula. Su efecto es solamente el de producir una tendencia a la rotación. El momento combinado de las dos fuerzas

respecto a un eje normal a su plano que pase por un punto cualquiera tal como el O es el momento del par \mathbf{M} y su módulo es,

$$M = F(a + d) - Fa,$$

o sea

$$M = Fd,$$

siendo su sentido el directo (contrario a las agujas del reloj). Esta expresión da el momento del par y es completamente independiente de la distancia a que sitúa a las fuerzas respecto al centro O del momento. Se deduce que el momento de un par es el mismo para *todos* los centros de momentos. El momento de un par podrá representarse por un vector *libre* \mathbf{M} , como se indica en la figura 16b, cuya dirección sea normal al plano del par y el sentido del vector queda establecido por la regla de la mano derecha.

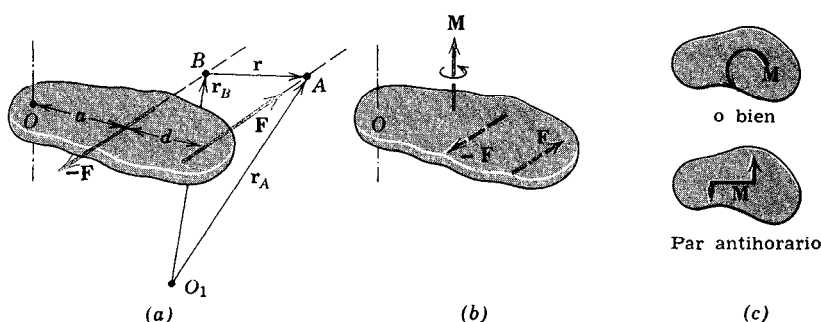


Figura 16

La propiedad que presenta el par de ser un vector libre puede también ponerse de manifiesto de otra manera algo más general, combinando los momentos de las dos fuerzas respecto a un punto de referencia cualquiera O_1 (fig. 16a). Los puntos A y B , de vectores de posición respectivos \mathbf{r}_A y \mathbf{r}_B son dos puntos cualesquiera de las correspondientes rectas soporte de \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$. Con esta notación, el momento resultante de las dos fuerzas respecto a O_1 , utilizando la ecuación 6, resulta ser

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times (-\mathbf{F}) \\ &= (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F} \\ &= \mathbf{r} \times \mathbf{F}.\end{aligned}$$

Como d es la proyección de \mathbf{r} sobre la normal a \mathbf{F} , se observa que la magnitud de esta expresión es $M = Fd$, que es el módulo del par. Se observa también que la dirección de \mathbf{M} es normal al plano de \mathbf{r} y \mathbf{F} como se describió anteriormente. Como $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ no contiene referencia alguna al punto O_1 , se deduce

que M será el mismo para todos los puntos de referencia y, por tanto, puede tratarse como vector libre. El par permanece invariable mientras la magnitud, dirección y sentido de su vector se mantengan constantes. En consecuencia, un par dado no se alterará al variar los valores de F y d mientras se mantenga constante su producto. Análogamente, el par no se verá afectado si las fuerzas pasan a actuar en otro plano paralelo cualquiera. En la figura 17 pueden verse cuatro configuraciones diferentes del mismo par M . En cada uno de estos cuatro casos el par viene descrito por el vector libre idéntico que representa las tendencias idénticas a torcer los cuerpos en la dirección y sentido que se indican.

En el caso de pares debidos a fuerzas que actúen todas en el mismo plano o en planos paralelos, los vectores par serán perpendiculares al plano. En tal caso será más conveniente representar dicho par por uno cualquiera de los convenios representados en la figura 16c, en donde el par antihorario puede tomarse como positivo y el horario como negativo, o al revés.

Los pares que se ejerzan en planos no paralelos se pueden sumar mediante las reglas ordinarias de la adición vectorial. Así, en la figura 18a el par M_1 debido a fuerzas F_1 y el par M_2 debido a fuerzas F_2 , que se ejercen en los planos distintos que se indican, se podrán sustituir por su suma vectorial M representada en la figura 18b. Puede verse esta suma formando el par M a partir de las fuerzas F , que representan la suma vectorial de F_1 y F_2 .

El efecto de una fuerza que se ejerza sobre un cuerpo lo hemos descrito con arreglo a la tendencia a empujar el cuerpo, o tirar de él, en la dirección de la fuerza y a la tendencia a hacer girar el cuerpo alrededor de un eje cualquiera que no corte a la recta soporte de la fuerza. La representación de este efecto doble se suele facilitar sustituyendo la fuerza dada por otra igual y paralela más un par que compense el cambio del momento de la fuerza. En la figura 19 se ilustra esta descomposición de una fuerza en una fuerza y un par, sustituyéndose la fuerza F aplicada en el punto A por la misma fuerza trasladada a un cierto punto O más un par antihorario $M = Fd$. La figura central muestra el paso del sistema inicial al final, consistente en añadir en el punto O dos fuerzas opuestas

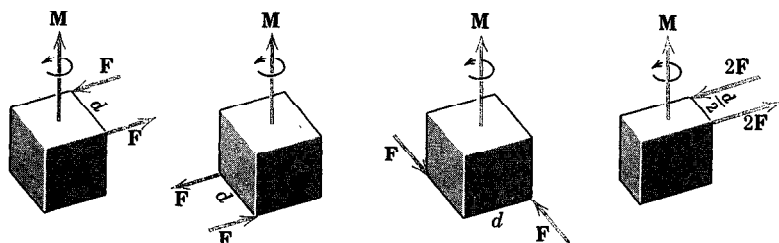


Figura 17

\mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ que no introducen efectos externos sobre el cuerpo. Vemos ahora que la fuerza inicial en A y la igual y opuesta en O constituyen el par $M = Fd$, que en el ejemplo tratado es antihorario, según se indica en la parte derecha de la figura. Así, la fuerza original que estaba en A se ha sustituido por la misma fuerza que se ejerce en un punto distinto O y un par, sin alterar los efectos exteriores sobre el cuerpo de la fuerza original. Se deduce también que un par dado y una fuerza que se halle en el plano del par (normal al vector momento) se pueden combinar para dar una fuerza única. Con la notación vectorial, el momento del par puede representarse mediante la expresión $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, donde \mathbf{r} es un vector cualquiera que vaya del punto O a un punto de la recta soporte de \mathbf{F} , según se indica en la figura 14a. La descomposición de una fuerza en otra equivalente y un par constituye un paso que halla repetida aplicación en Mecánica y que, en consecuencia, debe dominarse.

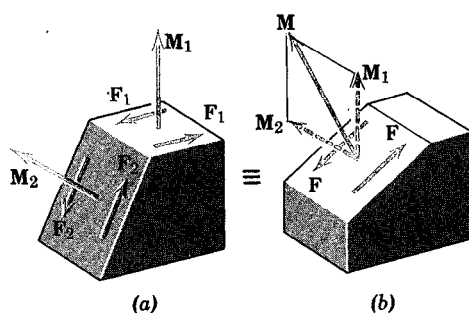


Figura 18



Figura 19

Problemas tipo

2/46. Determinar el módulo y dirección del par \mathbf{M} que sustituya a los dos pares dados y siga produciendo el mismo efecto externo sobre el bloque. Especificar las dos fuerzas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$, aplicadas a las dos caras del bloque paralelas al plano $y-z$, que puedan sustituir a las cuatro fuerzas dadas.

Solución. El par debido a las fuerzas de 30 N tiene por magnitud $M_1 = 30(6) = 180 \text{ cm}\cdot\text{N}$. La dirección de M_1 es normal al plano definido por las dos fuerzas, y el sentido, indicado en la figura central, se establece mediante el convenio de la mano derecha. El par debido a las fuerzas de 25 N tiene por magnitud $M_2 = 25(10) = 250 \text{ cm}\cdot\text{N}$ con la dirección y sentido que se indican en la figura. Los dos vectores momento se combinan para dar las componentes

$$M_y = 180 \sin 60^\circ = 155,9 \text{ cm}\cdot\text{N}$$

$$M_z = -250 + 180 \cos 60^\circ = -160 \text{ cm}\cdot\text{N}$$

Luego

$$M = \sqrt{(155,9)^2 + (-160)^2} = 223 \text{ cm}\cdot\text{N} \quad \text{Resp.}$$

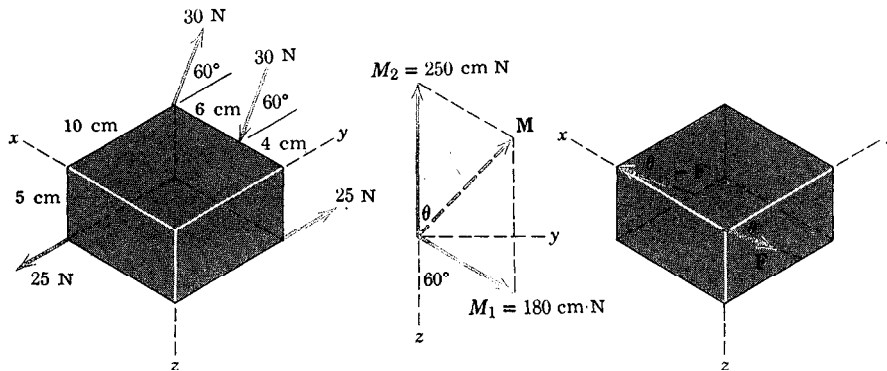
con

$$\theta = \arctan \frac{155,9}{160} = \arctan 0,974 = 44^\circ 15' \quad \text{Resp.}$$

Las fuerzas \mathbf{F} se hallan en un plano normal al par \mathbf{M} , y su brazo de momento, según se ve en la figura de la derecha es de 10 cm. Así pues, cada fuerza tendrá por magnitud

$$F = \frac{223}{10} = 22,3 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

y por dirección $\theta = 44^\circ 15'$.



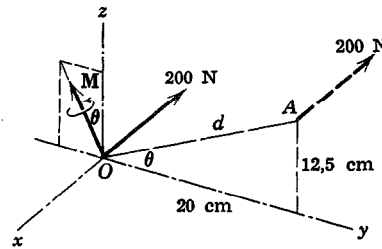
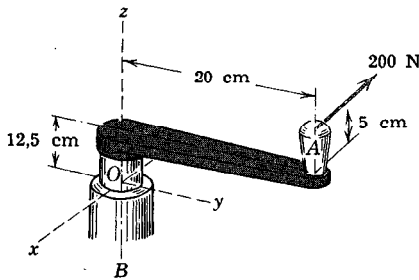
Problema 2/46

2/47. Se aplica una fuerza de 200 N al punto A de la empuñadura de la palanca de mando que está unida al eje fijo OB. Para determinar el efecto de la fuerza sobre el eje en una sección tal como la que pasa por O, podemos sustituir la fuerza por una fuerza equivalente que pase por O y un par. Describir este par en forma de un vector \mathbf{M} .

Solución. Desplazar la fuerza de 200 N una distancia $d = \sqrt{12,5^2 + 20^2} = 23,6$ cm llevándola a una posición paralela que pase por O , exige la adición de un par M cuya magnitud sea

$$M = Fd = 200(23,6) = 4720 \text{ cm}\cdot\text{N}$$

Resp.



Problema 2/47

El vector momento del par es perpendicular al plano sobre el que se ha desplazado la fuerza y su sentido es el del momento de dicha fuerza respecto a O . La dirección de M en el plano y - z viene dada por

$$\theta = \frac{12,5}{20} = \arctan 5/8 = 32^\circ 0'$$

Resp.

De otra manera, el par podría expresarse con notación vectorial en la forma

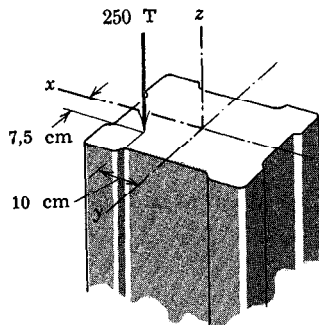
$M = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ donde $\mathbf{r} = \vec{OA} = 20\mathbf{j} + 12,5\mathbf{k}$ cm y $\mathbf{F} = -200\mathbf{i}$ N. Así

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= (20\mathbf{j} + 12,5\mathbf{k}) \times (-200\mathbf{i}) \\ &= -2500\mathbf{j} + 4000\mathbf{k} \text{ cm}\cdot\text{N} \end{aligned}$$

Resp.

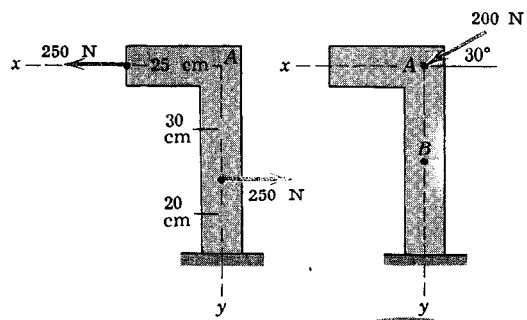
de donde pueden sacarse la magnitud y dirección de M .

Problemas



Problema 2/48

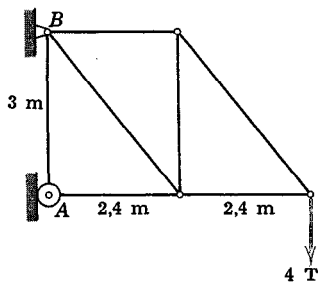
2/48. Una columna de hormigón, cuya sección recta se muestra en la figura, soporta una carga compresiva vertical de 250 toneladas. La carga es excéntrica respecto a la línea central de la columna, siendo su posición la indicada. Sustituir la carga por una soportada por la recta central y un par correspondiente que tienda a flectar la columna. Especificar las componentes x e y de dicho par.



Problema 2/49

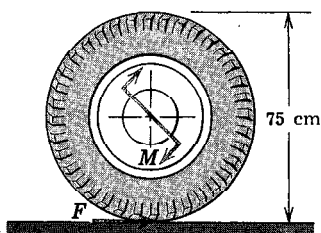
2/49. La placa en L está sometida a las dos fuerzas de 250 N representadas. Se quiere sustituir estas fuerzas por un sistema consistente en la fuerza de 200 N aplicada en A y otra fuerza aplicada en B. Determinar la coordenada y de B.

Resp. $y = 43,30$ cm



Problema 2/50

2/50. La armadura de la figura soporta una carga de 4 toneladas. La pared vertical ejerce una fuerza horizontal contra el rodillo de apoyo en A y la articulación en B ejerce sobre la armadura la fuerza adicional para mantener el equilibrio. La carga de 4 toneladas y la componente vertical de la reacción en B constituyen un par que es igual y opuesto al par debido a las dos fuerzas horizontales. Calcular la magnitud B de la fuerza que se ejerce sobre la articulación en B.

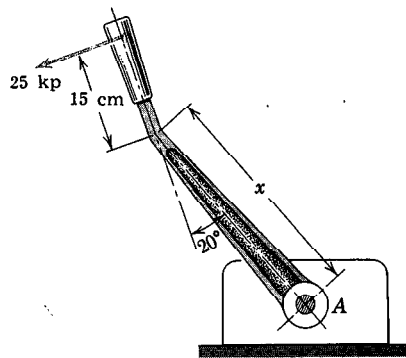


Problema 2/51

2/51. La rueda trasera de un automóvil acelerado está sometida a una fuerza de rozamiento $F = 300$ kp y a un par sobre su eje de momento M . Si fuerza y par pueden sustituirse por una fuerza equivalente que pase por un punto situado a 1,25 cm directamente encima del centro de la rueda, hallar M .

Resp. $M = 11600$ cm·kp

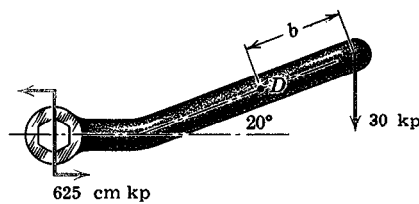
2/52. La palanca de mando está sometida a un par de sentido horario de momento $9 \text{ m}\cdot\text{kp}$ ejercido por su eje en A y hay que proyectarla para que funcione con una tracción de 25 kp en la forma indicada. Si la resultante del par y la fuerza pasa por A, determinar la dimensión apropiada x que debe tener la palanca.



Problema 2/52

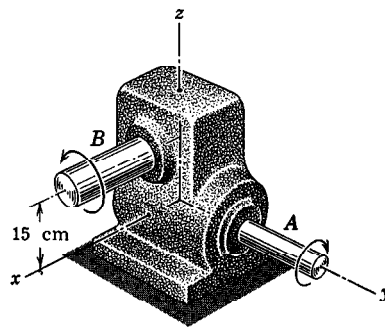
2/53. Sustituir la fuerza y el par indicados por una fuerza única F aplicada en un punto D . Localizar D determinando la distancia b .

Resp. $b = 22,2 \text{ cm}$

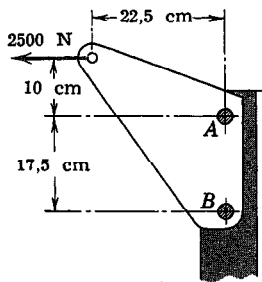


Problema 2/53

2/54. Los sentidos de rotación del árbol de entrada A y del de salida B del reductor de velocidades $10 : 1$ por tornillo sin fin están indicados por medio de las flechas curvadas. Al eje A se le aplica un par de $9 \text{ m}\cdot\text{kp}$ de sentido coincidente con el de la rotación. El eje de salida B proporciona un par de $36 \text{ m}\cdot\text{kp}$ a la máquina que acciona (no está dibujada). El eje de la máquina accionada ejerce un par de reacción igual y opuesto sobre el eje de salida del reductor. Determinar la resultante \mathbf{M} de los dos pares que se ejercen sobre la unidad reductora y calcular el coseno director de \mathbf{M} relativo al eje x .

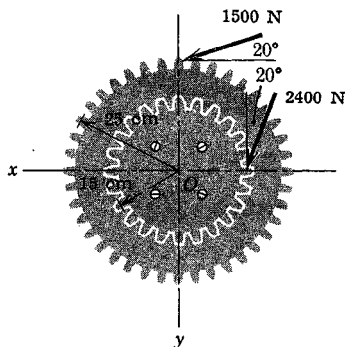


Problema 2/54



Problema 2/55

2/55. Se fija un soporte a una jácena mediante dos remaches A y B . Para que el soporte esté en equilibrio, la resultante de las fuerzas ejercidas por los remaches sobre el soporte debe tener igual módulo y recta soporte, pero de sentido opuesto, que la fuerza de 2500 N aplicada. Hallar la fuerza soportada por cada remache, sustituyendo la carga aplicada por una fuerza cuya recta soporte coincida con la mediatriz del segmento determinado por los remaches y un par, distribuyendo después adecuadamente este sistema resultante entre los remaches.



Problema 2/56

2/56. La figura representa dos ruedas dentadas solidarias sometidas a las fuerzas de contacto en los dientes que se indican. Sustituir las dos fuerzas por una fuerza única equivalente R que pase por el eje de rotación O y un par M . Si las ruedas parten del reposo bajo la acción de las cargas en los dientes que se indican, ¿en qué sentido tendrá lugar la rotación?

Resp. $R = 3555 \text{ N}$, $\theta = 51^\circ 9'$

$M = 1410 \text{ cm}\cdot\text{N}$ en sentido antihorario

2/57. Se aplica la fuerza $\mathbf{F}_1 = 200(14\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \text{ kp}$ a un cuerpo en un punto A cuyas coordenadas, expresadas en metros, son $(2, 2, -3)$. Se aplica al mismo cuerpo la fuerza $\mathbf{F}_2 = 200(2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 9\mathbf{k}) \text{ kp}$ en un punto B cuyas coordenadas, expresadas en metros, son $(4, -3, -1)$. Determinar la fuerza \mathbf{F}_3 que, aplicada en el punto B , haría que las tres fuerzas constituyeran un par \mathbf{M} . Expresar \mathbf{M} como vector.

Resp. $\mathbf{F}_3 = 800(-4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \text{ kp}$

$\mathbf{M} = 600(7\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 22\mathbf{k}) \text{ m}\cdot\text{kp}$

Sistemas de fuerzas coplanarias. El tipo más común de sistema de fuerzas se presenta cuando todas ellas están contenidas en un mismo plano, por ejemplo, el x - y , según se ilustra con el sistema de tres fuerzas \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 y \mathbf{F}_3 en la figura 21a. La fuerza resultante \mathbf{R} se obtiene en magnitud, dirección y sentido formando el *polígono de fuerzas* en la parte b de la figura, donde se suman las fuerzas colocando el origen de una en el extremo de otra en un orden cualquiera para obtener

$$R_x = \Sigma F_x, \quad R_y = \Sigma F_y, \quad R = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2}, \quad (11)$$

$$\theta = \arctan \frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x}.$$

Puede obtenerse gráficamente la recta soporte de \mathbf{R} conservando las rectas soporte de las fuerzas y sumándolas por la regla del paralelogramo como se indica en la parte a de la figura en donde la suma \mathbf{R}_1 de \mathbf{F}_2 y \mathbf{F}_3 se suma con \mathbf{F}_1 para obtener \mathbf{R} . En este proceso se ha hecho uso del principio de transmisibilidad.

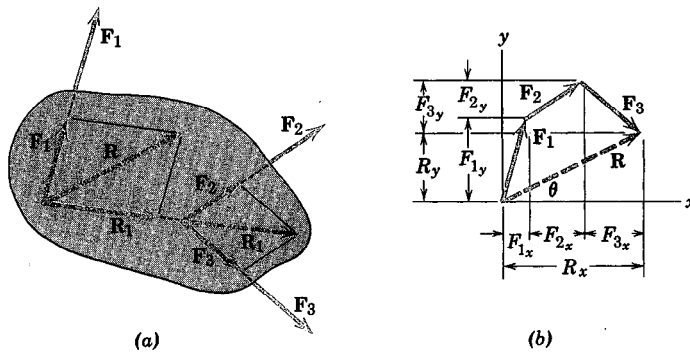


Figura 21

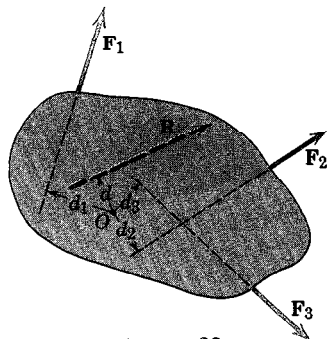


Figura 22

Para determinar la resultante puede utilizarse también la construcción gráfica conocida con el nombre de *polígono funicular* cuya técnica puede hallar el alumno en los tratados de estructuras elementales. La fuerza resultante se puede localizar algebraicamente utilizando el principio de Varignon seleccionando como centro de momentos un punto O conveniente (fig. 22). Así, el brazo d desconocido se calcula a partir de

$$Rd = \Sigma Fd = F_1d_1 - F_2d_2 + F_3d_3.$$

Si R es nula, la resultante del sistema será o un par o nula. Las tres fuerzas de la figura 23, por ejemplo, tienen una fuerza resultante nula, pero dan un par del sentido de las agujas del reloj cuyo momento vale $M = F_3d$. La fuerza resultante de un sistema coplanario puede aplicarse a un punto cualquiera que no esté sobre su recta soporte única, añadiendo el par correspondiente.

Sistema de fuerzas paralelas. La resultante de un sistema de fuerzas paralelas (fig. 24) tiene una magnitud que es claramente igual a la suma escalar de las fuerzas del sistema. La posición de la recta soporte de la resultante se halla mediante el teorema de Varignon, puesto que el momento de la resultante a cualquier eje tiene que ser igual a la suma de los momentos de sus componentes respecto al mismo eje. Así pues, para el caso ilustrado,

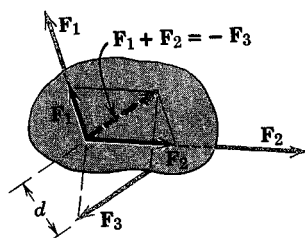


Figura 23

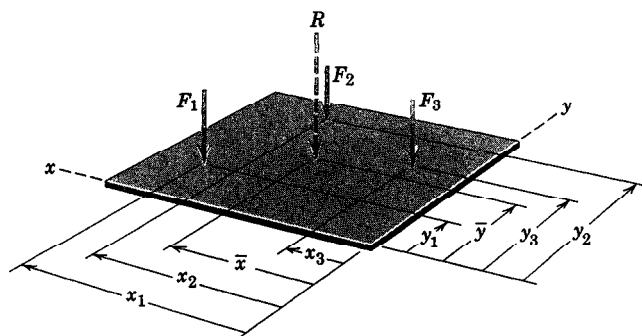


Figura 24

$$R = F_1 + F_2 + F_3$$

$$\bar{x}R = F_1x_1 + F_2x_2 + F_3x_3, \quad \bar{y}R = F_1y_1 + F_2y_2 + F_3y_3,$$

o en general

$$R = \Sigma F, \quad \bar{x} = \frac{\Sigma(Fx)}{R}, \quad \bar{y} = \frac{\Sigma(Fy)}{R}. \quad (12)$$

Sistema de fuerzas concurrentes. Cuando concurren todas las rectas soporte de las fuerzas del sistema, la resultante \mathbf{R} que pasa por dicho punto está dada por las ecuaciones (10), con \mathbf{M} evidentemente nulo.

Torsor. Cuando el momento resultante \mathbf{M} es paralelo a la fuerza resultante (fig. 25), se dice que la resultante es un *torsor*. El torsor se llama positivo si la resultante y el momento tienen el mismo sentido y negativo si tienen sentidos opuestos. Un caso práctico de torsor positivo es el del destornillador, que ejerce un empuje y una torsión en el tornillo en la dirección de su eje.

Todo sistema general de fuerzas puede representarse por un torsor aplicado a lo largo de una recta soporte única. En la figura 26 se ilustra esta reducción,

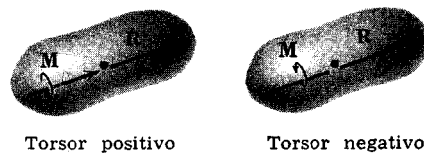


Figura 25

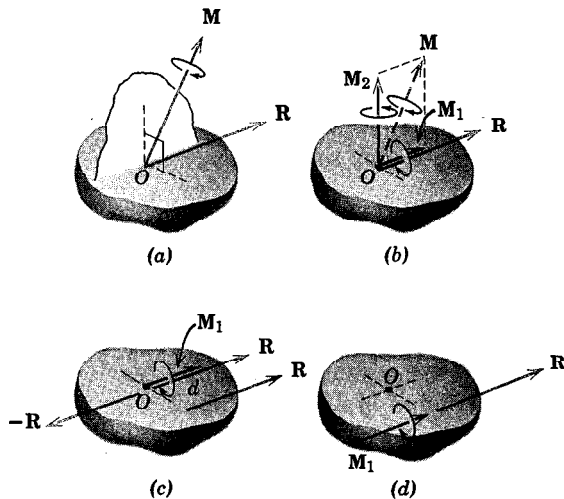


Figura 26

representando la parte *a* de la figura el sistema general de fuerzas mediante la resultante **R** pasando por un cierto punto *O* y el par resultante correspondiente **M**. Aun cuando **M** sea un vector libre, por conveniencia se representa pasando por *O*. En la parte *b* de la figura, **M** se descompone en dos componentes: una **M**₁ de igual dirección que **R** y otra **M**₂ normal a **R**. En la parte *c* de la figura se sustituye el par **M**₂ por su equivalente de dos fuerzas **R** y **-R** separadas una distancia $d = M_2/R$ con **-R** aplicada en *O* para anular la **R** original. Este paso deja la resultante **R**, que se ejerce a lo largo de una nueva y única recta soporte, y el par paralelo **M**₁, que es un vector libre, como se indica en la parte *d* de la figura. Así pues, las resultantes del sistema general de fuerzas del principio se han transformado en un torsor (positivo en este ejemplo) cuyo eje único está definido por la nueva posición de **R**. En la figura 26 se ve que el eje del torsor resultante se encuentra en el plano que pasa por *O*, normal al plano definido por **R** y **M**. El torsor es la forma más sencilla de expresión de la resultante de un sistema de fuerzas general. Sin embargo, esta forma de resultante tiene una aplicación limitada, ya que suele ser más conveniente utilizar como punto de referencia un cierto punto *O* tal como el centro de masa del cuerpo u otro origen de coordenadas conveniente que no se halle sobre el eje único del torsor.

Problemas tipo

2/65. Determinar la resultante de las cuatro fuerzas y el par que se ejercen sobre la placa que se indica.

Solución. Se selecciona arbitrariamente el punto *O* como origen conveniente de coordenadas y centro de momentos. Las componentes R_x y R_y , la resultante *R* y el ángulo θ que forma *R* con el eje *x* serán

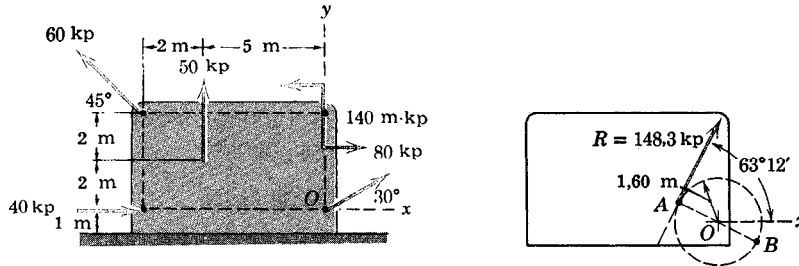
$$\begin{aligned} [R_x = \Sigma F_x] \quad R_x &= 40 + 80 \cos 30^\circ - 60 \cos 45^\circ = 66,9 \text{ kp} \\ [R_y = \Sigma F_y] \quad R_y &= 50 + 80 \sin 30^\circ + 60 \sin 45^\circ = 132,4 \text{ kp} \\ [R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}] \quad R &= \sqrt{(66,9)^2 + (132,4)^2} = 148,3 \text{ kp} \quad \text{Resp.} \\ [\theta = \arctg \frac{R_y}{R_x}] \quad \theta &= \arctg \frac{132,4}{66,9} = 63^\circ 12' \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

Aun cuando el par no tiene influencia alguna sobre la magnitud, ni sobre la dirección, de *R*, sí influye sobre el momento resultante que vamos a determinar a continuación. La posición de la recta soporte de *R* se halla a partir del principio de los momentos (teorema de Varignon). Tomando *O* como centro de momentos y siendo *d* el brazo de momento de *R*, tomando arbitrariamente como positivo el sentido de giro antihorario, dicho principio exige

$$[Rd = \Sigma Mo] \quad 148,3d = 140 - 50(5) + 60 \cos 45^\circ(4) - 60 \sin 45^\circ(7)$$

$$d = -1,60 \text{ m}$$

El signo negativo indica que el momento resultante actúa en sentido horario respecto a O en vez de en sentido antihorario. Por tanto, la resultante podrá aplicarse en un punto cualquiera de una recta que forme un ángulo de $63^\circ 12'$ con el eje x y sea tangente a una circunferencia de radio $1,60 \text{ m}$ centrada en O como se indica en la figura de la derecha. El momento de sentido horario de R exige que la recta soporte de R sea tangente en el punto A y no en el B , como sería en el caso en que el momento actuase en sentido antihorario.



Problema 2/65

Obsérvese que la elección del punto O como centro de momentos elimina los momentos debidos a las dos fuerzas que pasan por O . La selección adecuada de un centro de momentos conveniente que elimine el mayor número de términos posible en las ecuaciones de momentos constituye una importante simplificación en los cálculos de Mecánica.

El sistema dado de fuerzas también puede combinarse gráficamente utilizando la ley del paralelogramo, el principio de transmisibilidad y el método para transformar un par y una fuerza en una fuerza única.

2/66. Sustituir las dos fuerzas y el torsor negativo por una fuerza única R aplicada en A y el par correspondiente M .

Solución. La fuerza resultante tiene las componentes

$$[R_x = \Sigma F_x] \quad R_x = 50 \sin 40^\circ + 70 \sin 60^\circ = 92,8 \text{ N}$$

$$[R_y = \Sigma F_y] \quad R_y = 60 + 50 \cos 40^\circ \cos 45^\circ = 87,1 \text{ N}$$

$$[R_z = \Sigma F_z] \quad R_z = 70 \cos 60^\circ + 50 \cos 40^\circ \sin 45^\circ = 62,1 \text{ N}$$

Luego
$$\mathbf{R} = 92,8\mathbf{i} + 87,1\mathbf{j} + 62,1\mathbf{k} \text{ N}$$

y
$$R = \sqrt{(92,8)^2 + (87,1)^2 + (62,1)^2} = 141,6 \text{ N}$$

Resp.

El par que hay que añadir a consecuencia del traslado de la fuerza de 50 N es

$$[\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}] \quad \mathbf{M}_{50} = (8\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \times 50(\mathbf{i} \sin 40^\circ + \mathbf{j} \cos 40^\circ \cos 45^\circ + \mathbf{k} \cos 40^\circ \sin 45^\circ)$$

donde \mathbf{r} es el vector que va de A a B.

El desarrollo término a término, o por determinación, da

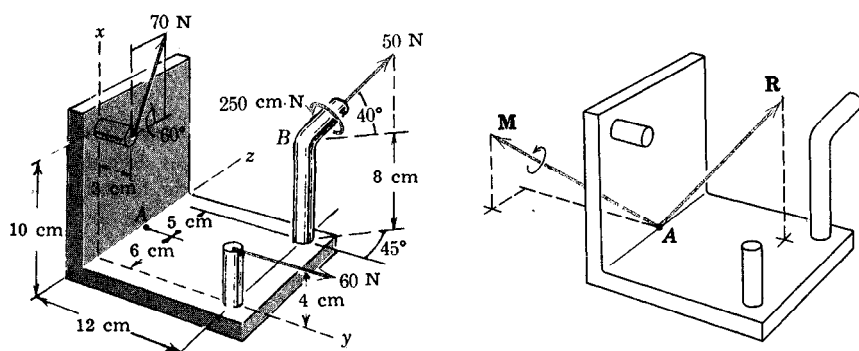
$$\mathbf{M}_{50} = 189,5\mathbf{i} - 55,9\mathbf{j} - 169,0\mathbf{k} \text{ cm}\cdot\text{N}$$

El momento respecto de A de la fuerza de 60 N se escribe por inspección de sus componentes x y z , dando

$$\mathbf{M}_{60} = 360\mathbf{i} + 240\mathbf{k} \text{ cm}\cdot\text{N}$$

El momento respecto de A de la fuerza de 70 N se obtiene fácilmente a partir de los momentos de las componentes x y z de la fuerza. Resulta

$$\mathbf{M}_{70} = 105\mathbf{i} - 713,7\mathbf{j} - 181,9\mathbf{k} \text{ cm}\cdot\text{N}$$



Problema 2/66

Además, el par del torsor puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{M}' &= 250(-\mathbf{i} \sin 40^\circ - \mathbf{j} \cos 40^\circ \cos 45^\circ - \mathbf{k} \cos 40^\circ \sin 45^\circ) \\ &= -160,7\mathbf{i} - 135,4\mathbf{j} - 135,4\mathbf{k} \text{ cm}\cdot\text{N} \end{aligned}$$

Por tanto, el par resultante al sumar los términos en \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} es

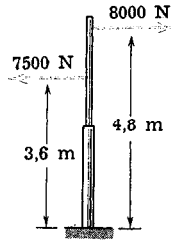
$$\mathbf{M} = 493,8\mathbf{i} - 905,0\mathbf{j} - 246,3\mathbf{k} \text{ cm}\cdot\text{N}$$

$$y \quad M = \sqrt{(493,8)^2 + (905,0)^2 + (246,3)^2} = 1060 \text{ cm}\cdot\text{N}$$

Resp.

Problemas

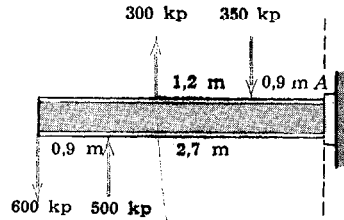
2/67. El mástil soporta las dos tensiones de los cables horizontales que se indican. ¿A qué altura sobre la base del mástil actuará la resultante de estas dos fuerzas?



Problema 2/67

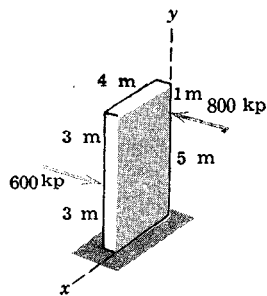
2/68. Determinar la fuerza R que sustituiría a las cuatro fuerzas que se ejercen sobre la viga en voladizo sin alterar la reacción en el extremo de la viga correspondiente a la soldadura en A . Localizar R hallando su distancia b a la izquierda de A .

Resp. $R = 150 \text{ kp}$ hacia abajo,
 $b = 3,3 \text{ m}$



Problema 2/68

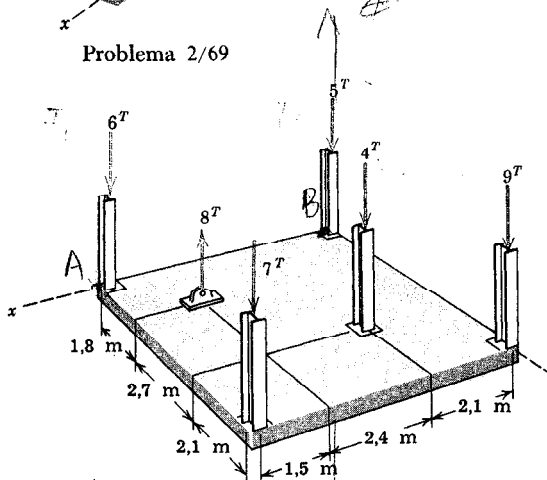
2/69. Las dos fuerzas están aplicadas normalmente al plano de la placa. Calcular las coordenadas del punto de este plano en el que actúe su resultante.



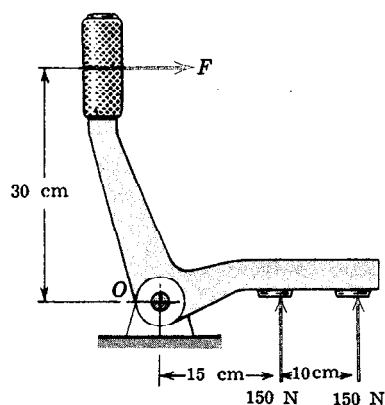
Problema 2/69

2/70. La losa de hormigón soporta las seis cargas verticales representadas. Determinar la resultante de estas fuerzas y las coordenadas x e y de un punto por el que pase.

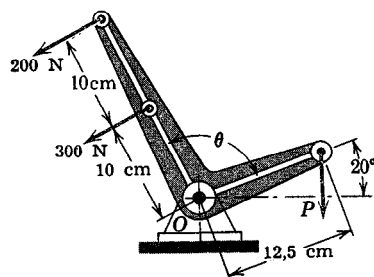
Resp. $x = 2,19 \text{ m}$, $y = 4,75 \text{ m}$



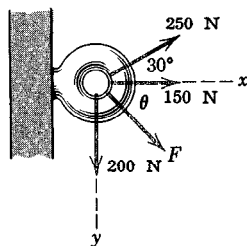
Problema 2/70



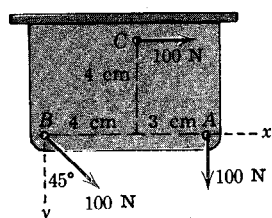
Problema 2/71



Problema 2/72



Problema 2/73



Problema 2/74

2/71. Determinar la magnitud F de la fuerza aplicada a la empuñadura que haga que la resultante de las tres fuerzas pase por O .

2/72. En la posición de equilibrio indicada, la resultante de las tres fuerzas que se ejercen sobre la palanca acodada pasa por el apoyo O . Determinar la fuerza vertical P . ¿Depende este resultado de θ ?

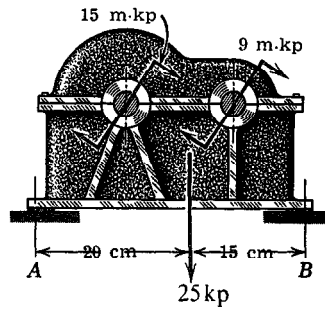
Resp. $P = 596,5 \text{ N}$

2/73. El cáncamo soporta las cuatro fuerzas que se indican. Si la componente x de su resultante es de 425 N y la magnitud de la resultante es de 500 N , determinar F y θ . El ángulo θ está limitado a tener valores positivos menores que 90° .

2/74. La placa fija está sometida a las tres fuerzas de 100 N . Sustituir dichas fuerzas por un sistema equivalente compuesto de una fuerza única F que pase por A y un par M .

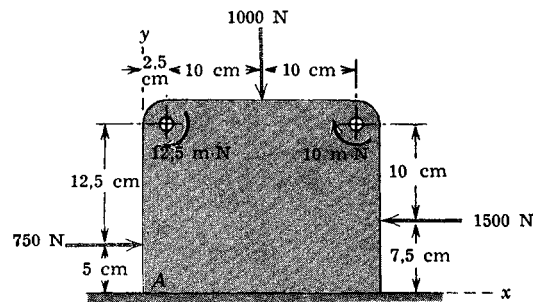
Resp. $F = 241 \text{ N}$, $\theta = 45^\circ$
 $M = 95 \text{ cm N}$ en sentido antihorario

2/75. El reductor de velocidades representado está sometido a los dos pares, a su peso de 25 kp y a una fuerza vertical aplicada a cada una de los anclajes A y B. Si la resultante de este sistema de dos pares y tres fuerzas es cero, determinar las fuerzas en A y B.



Problema 2/75

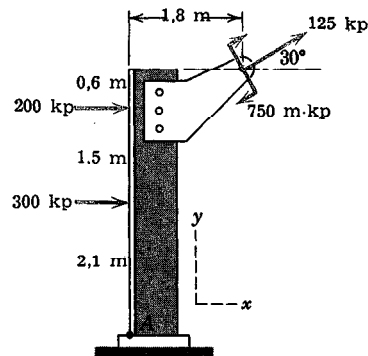
2/76. Determinar la resultante \mathbf{R} de las tres fuerzas y los dos pares que se indican. Hallar la coordenada x del punto del eje x por el que pasa \mathbf{R} .
 Resp. $\mathbf{R} = -750\mathbf{i} - 1000\mathbf{j}$ N,
 $x = 7,25$ cm



Problema 2 76

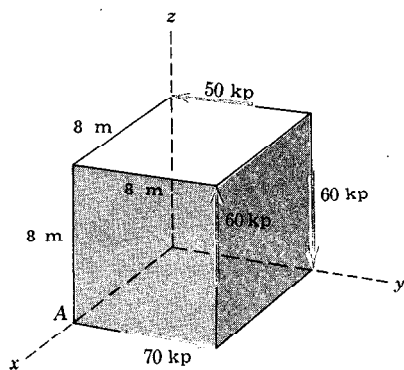
2/77. Representar la resultante de las cargas aplicadas y el par mediante una fuerza \mathbf{R} que pase por A y un par de momento M .

Resp. $\mathbf{R} = 611,5$ kp
 $M = 2442$ m·kp en sentido horario



Problema 2/77

2/78. Demostrar que el sistema de fuerzas más general puede representarse por dos fuerzas que no se corten.

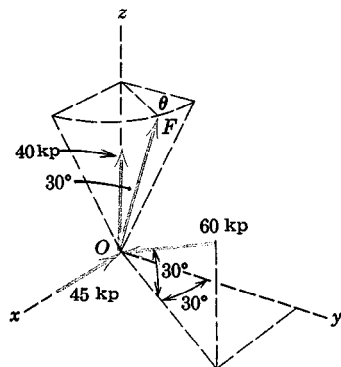


Problema 2/79

2/79. Las cuatro fuerzas se ejercen según las aristas del cubo de 8 m de arista en la forma indicada. Representar la resultante de estas fuerzas por una fuerza \mathbf{R} que pase por el punto A y un par \mathbf{M} .

Resp. $\mathbf{R} = 20 \mathbf{j}$ kp,

$\mathbf{M} = 80(5\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 5\mathbf{k})$ m.kp

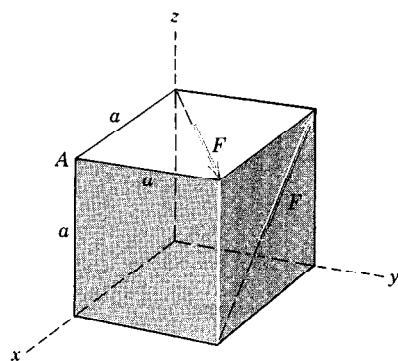


Problema 2/80

2/80. Las cuatro fuerzas concurren en el origen O de coordenadas. Si la componente x de su resultante \mathbf{R} es -50 kp y la componente z es 100 kp, determinar F , θ y R .

Resp. $F = 103,9$ kp, $\theta = 23^\circ 49'$,

$R = 111,8$ kp

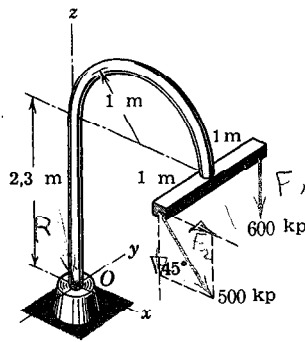


Problema 2/81

2/81. Sustituir las dos fuerzas de igual magnitud F por una fuerza única \mathbf{R} que pase por el punto A y un par \mathbf{M} .

2/82. La acción combinada de las dos fuerzas sobre la base en O puede obtenerse estableciendo su resultante que pase por O . Determinar \mathbf{R} y el momento \mathbf{M} del par anexo.

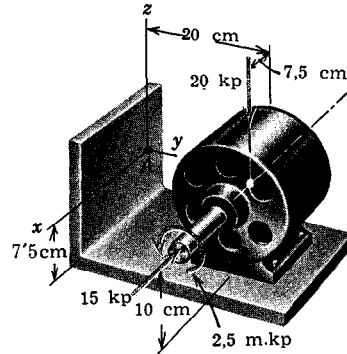
Resp. $\mathbf{R} = 354\mathbf{i} - 954\mathbf{k}$ kp
 $\mathbf{M} = -246\mathbf{i} + 2732\mathbf{j} + 354\mathbf{k}$ m·kp



Problema 2/82

2/83.— El motor de 20 kg está montado sobre el soporte y su eje resiste el empuje de 15 kp y el par de 2,5 m.kp aplicados a él. Determinar la resultante del sistema de fuerzas indicado, en función de una fuerza \mathbf{R} en A y un par \mathbf{M} .

Resp. $\mathbf{R} = -15\mathbf{i} - 20\mathbf{k}$ kp
 $\mathbf{M} = -150\mathbf{i} + 112,5\mathbf{j} + 300\mathbf{k}$ cm·kp



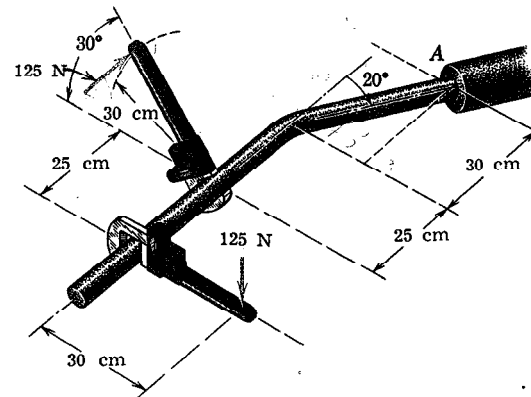
Problema 2/83

2/84. A la tubería acodada se aplican dos llaves inglesas en la forma que se indica para enroscarla al tubo en el extremo A. Si esto tuviera que realizarse con una sola llave, aplicada en A, ¿qué fuerza F habría que aplicar a su mango en un punto de brazo de momento igual a 30 cm?

Resp. $F = 275,5$ N

2/85. La resultante de un sistema de fuerzas general puede expresarse en forma de un torsor de recta soporte única. Para el sistema de fuerzas del problema 2/83 determinar las coordenadas del punto P , intersección de la recta soporte del torsor con el plano $x-y$. (Sugerencia: Los cosenos directores del par resultante del torsor deben ser iguales u opuestos a los de la fuerza resultante).

Resp. $x = 5,625$ cm, $y = 12,0$ cm



Problema 2/84

3 Equilibrio

13. Introducción. La Estática trata principalmente de la descripción de las condiciones de fuerza que sean a un tiempo necesarias y suficientes para mantener el estado de equilibrio de las estructuras de ingeniería. Por tanto, este capítulo dedicado al equilibrio constituirá la parte crucial de la Estática y deberá dominarse al máximo. Utiliza continuamente los conceptos y magnitudes desarrollados en el capítulo 2 y proporciona además una introducción al método utilizado en la solución de innumerables problemas de Mecánica y de otros campos de la ingeniería. Dicho método es básico para el dominio total de la Estática, por lo que se aconseja al estudiante que lea los apartados que siguen con especial atención y esfuerzo.

14. Aislamiento de un sistema mecánico. En el apartado 9 se describieron las características fundamentales de las fuerzas, atendiendo principalmente a las propiedades vectoriales de las fuerzas. Se puso de relieve que las fuerzas pueden ejercerse o por contacto físico directo o por acción a distancia y que las fuerzas pueden ser interiores o exteriores al cuerpo que se considera. También se hizo observar que la aplicación de fuerzas exteriores va acompañada de fuerzas reactivas y que tanto las fuerzas aplicadas como las reactivas pueden ser concentradas o distribuidas. Se introdujo además el principio de transmisibilidad que permite tratar las fuerzas como vectores deslizantes por lo que se refiere a sus efectos exteriores sobre un cuerpo rígido. Utilizaremos estas características de las fuerzas para desarrollar el modelo analítico de un sistema mecánico aislado al cual se aplicarán las ecuaciones del equilibrio.

Se define un sistema mecánico como un cuerpo o grupo de cuerpos que puede aislarse de los demás cuerpos. Dicho sistema puede ser un cuerpo único o una combinación de cuerpos conectados. Los cuerpos pueden ser rígidos o no. El sistema puede ser también una masa definida de fluido, líquido o gas, o una combinación de fluidos y sólidos. En Estática, la atención se dirige principalmente a una descripción de las fuerzas que se ejercen sobre cuerpos rígidos en reposo, si bien también se considera la Estática de fluidos. Una vez decidido qué cuerpo o combinación de cuerpos hay que analizar, se *aisla* este cuerpo o combinación de cuerpos de todos los cuerpos que le rodean. Este aislamiento se logra mediante el *diagrama para sólido libre*, que es una representación esque-

ACCIÓN MECÁNICA DE LAS FUERZAS		
Tipo de contacto y origen de las fuerzas.		Acción sobre el cuerpo que se aísla.
1. Cable flexible, correa, cadena, o cuerda. 		 La fuerza ejercida por un cable flexible es siempre una tensión dirigida hacia afuera del cuerpo en la dirección del cable.
2. Superficies lisas 		 La fuerza de contacto es una compresión normal a la superficie.
3. Superficies rugosas 		 Las superficies rugosas pueden resistir una componente tangencial F (fuerza de rozamiento) de la fuerza de contacto resultante R .
4. Apoyo de rodillo. 		 Los apoyos de rodillo, zapata, o bola, transmiten una fuerza compresiva normal a la superficie de apoyo.
5. Guía de deslizamiento libre. 		 Collar o corredera que puede moverse libremente a lo largo de guías lisas; puede resistir solamente fuerza normal a la guía.
6. Conexión de pasador. 		con giro libre sin giro libre Una conexión de pasador articulada libremente puede resistir una fuerza de cualquier dirección en el plano normal al eje del pasador. Un pasador que no gire libremente podrá resistir también a un par.
7. Empotramiento o apoyo fijo. 		 Un empotramiento o apoyo fijo puede resistir una fuerza axial F , una fuerza transversa V (fuerza cortante), y un par M (momento flector) para impedir la rotación.
8. Articulación de rótula. 		libre soldada Una articulación de rótula libre resiste fuerzas de cualquier dirección. Una articulación soldada puede también resistir un par.

Figura 27

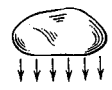

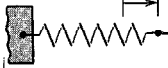
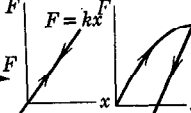

<p>9. Atracción de la gravedad</p> 	 <p>La resultante de la atracción de la gravedad sobre todos los elementos de un cuerpo es el peso P y está dirigido hacia el centro de la Tierra pasando por el centro de gravedad G.</p>
<p>10. Acción de un resorte</p> <p>Posición neutra x</p>  <p>Elástico $F = kx$</p>  <p>Inelástico</p> 	<p>La fuerza del resorte es una tensión si está estirado y una compresión si está comprimido. En un resorte elástico linealmente la rigidez k es la fuerza necesaria para deformar el resorte una distancia unidad.</p>

Figura 27 (continuación)

mática del cuerpo o conjunto de cuerpos aislado en la que figuran todas las fuerzas aplicadas a él por otros cuerpos que se consideran suprimidos. Solamente después de haber trazado con cuidado dicho diagrama se podrán llevar a cabo los cálculos de las diversas fuerzas.

Será necesaria una ulterior descripción de las características de aplicación de las fuerzas antes de intentar trazar diagramas para sólido libre. En la figura 27 pueden verse los tipos corrientes de aplicación de fuerzas a sistemas mecánicos. En cada ejemplo se indica la fuerza ejercida *sobre* el cuerpo que se aísla *por* el cuerpo que se suprime. La tercera ley de Newton, que establece la existencia de una reacción igual y opuesta a toda acción, deberá cumplirse estrictamente.

En el ejemplo 1, se representa la acción de un cable, correa, cuerda o cadena flexibles sobre un cuerpo al cual esté unido. A causa de su flexibilidad, un cable flexible no puede ofrecer resistencia a la flexión, cortadura o compresión, por lo que ejerce una fuerza de tensión tangente al cable en su punto de amarre. La fuerza ejercida *por* el cable *sobre* el cuerpo al que está unido está *siempre* dirigida hacia fuera del cuerpo. Cuando la tensión T es grande frente al peso del cable, éste puede suponerse que adopta forma rectilínea. Cuando el peso del cable no es despreciable frente a su tensión, se hace importante la flecha del cable y la tensión del cable cambia de dirección y magnitud a lo largo de su longitud. En su punto de amarre ejerce una fuerza tangente a sí mismo.

Cuando están en contacto las superficies lisas de dos cuerpos, como en el ejemplo 2, la fuerza que una ejerce sobre otra es *normal* al plano tangente a ambas superficies y compresiva. Aún cuando las superficies reales no son completamente lisas, esta hipótesis está justificada en la práctica en muchos casos.

Cuando las superficies en contacto de los cuerpos son rugosas, ejemplo 3, la fuerza de contacto no será normal al plano tangente a las superficies, sino que se podrá descomponer en una componente *tangencial* o de rozamiento F y una *componente normal* N .

El ejemplo 4 ilustra varias formas de apoyo mecánico que eliminan eficazmente las fuerzas tangenciales de rozamiento; y en este caso la reacción resultante es normal a la superficie de apoyo.

El ejemplo 5 presenta la acción de una guía lisa sobre el cuerpo que soporta. No hay resistencia paralela a la guía.

El ejemplo 6 ilustra la acción de una conexión por pasador. Dicha conexión permite soportar una fuerza cuya dirección sea una cualquiera de las normales al eje del pasador. Esta acción suele representarse en función de dos componentes rectangulares. Si la unión puede girar libremente alrededor del pasador, sólo se podrá soportar la fuerza R . Si la unión no puede girar libremente, también podrá soportarse un par resistente de momento M .

El ejemplo 7 muestra las resultantes de la distribución un tanto compleja de las fuerzas sobre la sección de una barra o viga esbelta en un empotramiento o soldadura.

La contrapartida tridimensional de la conexión por pasador es la unión por rótula, ejemplo 8, que es capaz de soportar las tres componentes de una fuerza. Si la rótula pivota libremente, sólo podrá soportar la fuerza R . Si no puede pivotar libremente, como ocurriría si estuviera soldada por la punta, también podrá resistir un par cuyo momento M tenga las tres componentes.

Una de las fuerzas más corrientes es la debida a la atracción de la gravedad, ejemplo 9. Dicha fuerza afecta a todos los elementos de un cuerpo y está distribuida, en consecuencia, por todo él. La resultante de las fuerzas de la gravedad que se ejercen sobre todos los elementos es el *peso* P del cuerpo; pasa por el centro de gravedad G , y está dirigido hacia el centro de la Tierra en el caso de las estructuras ligadas a la Tierra. La posición de G resulta, por lo general, evidente a partir de la geometría del cuerpo, en particular cuando existen condiciones de simetría. Cuando la posición no resulta aparente de manera inmediata, deberá calcularse la situación de G o determinarse experimentalmente. Son aplicables consideraciones análogas en el caso de la acción a distancia de fuerzas magnéticas y eléctricas. Estas fuerzas de acción a distancia tienen el mismo efecto total sobre un cuerpo rígido que tendrían las fuerzas de igual magnitud, dirección y sentido aplicadas por contacto externo directo.

En el ejemplo 10 se ilustra la acción de un resorte elástico (lineal) y de otro inelástico (no lineal). La fuerza ejercida por un resorte elástico, sea tensión o compresión, está dada por $F = kx$, donde k es la rigidez del resorte y x su deformación medida a partir de la posición neutral o de deformación nula. La linealidad de la relación fuerza-deformación describe igual fuerza para igual deformación durante el proceso de carga y de descarga del resorte. En el caso del resorte inelástico, la fuerza correspondiente a una deformación dada es diferente según se trate del proceso de carga o del de descarga.

Instamos al alumno a que estudie estas diez condiciones y las identifique en la resolución de problemas de manera que puedan trazarse los diagramas para

sólido libre correctos. Las representaciones de la figura 27 *no son* diagramas para sólido libre sino, simplemente, elementos para la construcción de diagramas para sólido libre.

Vamos a describir ahora el procedimiento completo para trazar un diagrama para sólido libre que realice el aislamiento del cuerpo o sistema considerado. Intervienen los pasos siguientes.

Paso 1. Decidir claramente qué cuerpo o combinación de cuerpos hay que aislar. El cuerpo elegido contendrá una o más de las cantidades desconocidas buscadas.

Paso 2. Aislar el cuerpo o combinación elegido mediante un diagrama que represente por completo su contorno. Cuando el problema sea tridimensional, puede dibujarse un esbozo único del contorno, o bien puede ser preferible una representación de dos de las tres vistas ortogonales del cuerpo. El esquema del contorno deberá representar una *superficie cerrada* en el espacio, la cual define el aislamiento del cuerpo de *todos* los demás cuerpos en contacto o que ejerzan atracciones, los cuales se consideran suprimidos. Este paso es, quizá, el más importante de todos. El alumno deberá asegurarse siempre de que ha *aislado por completo* el cuerpo antes de proceder al paso siguiente.

Paso 3. A continuación se representan en sus posiciones apropiadas en el diagrama todas las fuerzas que se ejercen *sobre* el cuerpo aislado *por* los cuerpos suprimidos. El recorrido sistemático de todo el contorno revelará todas esas fuerzas. Se incluirán los pesos donde sean apreciables. Las fuerzas conocidas se representarán mediante flechas con su magnitud, dirección y sentido indicados. Las fuerzas desconocidas se representarán mediante flechas con la magnitud o dirección desconocida indicada con un símbolo. Si también se desconoce el sentido del vector, puede suponersele arbitrariamente. Los cálculos revelarán una magnitud positiva si el sentido supuesto era el correcto y una magnitud negativa si el sentido supuesto era falso. Es necesario mantener las características asignadas a las fuerzas desconocidas a lo largo de todos los cálculos.

Paso 4. Deberán indicarse directamente sobre el diagrama los ejes coordenados elegidos. También pueden representarse a voluntad las dimensiones geométricas pertinentes. Sin embargo, téngase en cuenta que el diagrama para sólido libre está destinado a concentrar nuestra atención sobre la acción de las fuerzas exteriores y por tanto no conviene enredar el diagrama con una información extraña excesiva. Las flechas representativas de las fuerzas deben distinguirse claramente de toda otra flecha que pueda aparecer, para que no haya confusión posible.

Una vez realizados los cuatro pasos anteriores se tendrá un diagrama para sólido libre correcto y se habrá despejado el camino a seguir para aplicar los principios de la Mecánica, tanto en Estática como en Dinámica.

Muchos alumnos se sienten tentados a omitir del diagrama para sólido libre ciertas fuerzas que a primera vista puede parecer que no son necesarias en los cálculos. Caer en esta tentación conduce a cometer un gran error. Solamente con un aislamiento *completo* y una representación sistemática de *todas* las fuerzas exteriores se pueden interpretar adecuadamente los efectos de todas las fuerzas aplicadas y reactivas. Muy frecuentemente, una fuerza que a primera vista parece no tener influencia sobre uno de los resultados buscados, resulta tenerla. Así, pues, el único procedimiento seguro es hacer que en el diagrama figuren todas las fuerzas cuyas magnitudes no sean despreciables.

Hemos explicado con cierto detalle el diagrama para sólido libre a causa de su gran importancia en Mecánica. El método del sólido libre asegura una definición precisa de un sistema mecánico y concentra la atención sobre el significado exacto y la aplicación de las leyes de las fuerzas en Estática y en Dinámica. El método del sólido libre es tan importante que instamos al alumno a que relea este apartado varias veces junto con su estudio de los diagramas tipo para sólido libre presentados en la figura 28 y los problemas tipo que aparecen al final del próximo apartado.

La figura 28 da cuatro ejemplos de mecanismos y estructuras junto con sus diagramas para sólido libre correctos. Para mayor sencillez se han omitido las dimensiones y magnitudes. En cada caso se trata el sistema total como cuerpo único, por lo que no aparecen las fuerzas internas. En la figura 27 se han representado las características de los diversos tipos de fuerzas de contacto que intervienen en los cuatro ejemplos.

En el ejemplo 1 el reticulado está compuesto de elementos estructurales que, tomados en conjunto, constituyen una estructura rígida. Así pues, podríamos sacar la estructura de sus apoyos y tratarla como cuerpo rígido. Además de la carga exterior aplicada F , el diagrama para sólido libre deberá comportar las reacciones que se ejercen en A y B sobre el reticulado. La zapata B sólo puede soportar una fuerza vertical, la cual se transmite a la estructura en B (ej. 4 de fig. 27). El pasador A (ej. 6 de fig. 27) es capaz de comunicar al reticulado tanto una componente horizontal como una vertical de la fuerza. En este ejemplo relativamente sencillo queda claro que la componente vertical A_v debe estar dirigida hacia abajo para evitar que el reticulado gire alrededor de B en el sentido de las agujas del reloj. Además, la componente horizontal A_h estará dirigida hacia la izquierda a fin de evitar que el reticulado se mueva hacia la derecha bajo la influencia de la componente horizontal de F . Si el peso total de los miembros del reticulado fuese apreciable frente a F y a las fuerzas en A y B , se deberían incluir los pesos de los miembros como fuerzas exteriores en el diagrama para sólido libre.

En el ejemplo 2, la pluma AC se halla en equilibrio bajo la acción de fuerzas no coplanarias, por lo que será un problema tridimensional. Se dan dos vistas ortogonales de la pluma aislada, las cuales están relacionadas por su dimen-

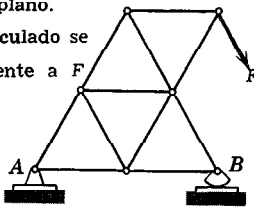
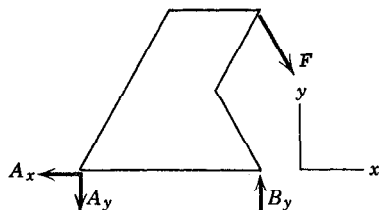
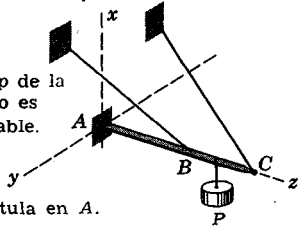
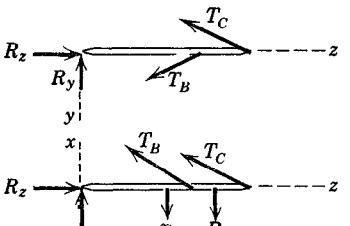
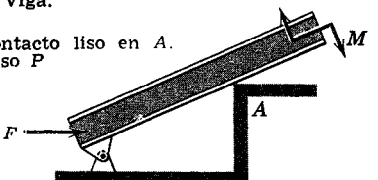
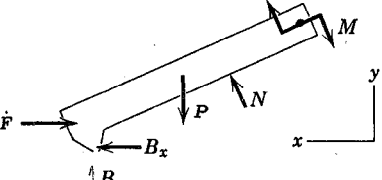
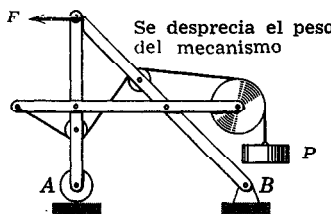
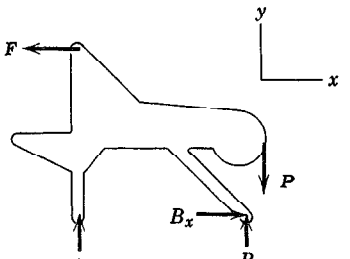
DIAGRAMAS TIPO DE SOLIDO LIBRE	
Sistema mecánico.	Diagrama de sólido libre para el cuerpo aislado.
<p>1. Reticulado plano.</p> <p>El peso del reticulado se supone despreciable frente a F.</p> 	
<p>2. Pluma en el espacio</p> <p>El peso p de la pluma no es despreciable.</p> <p>Rótula en A.</p> 	
<p>3. Viga.</p> <p>Contacto liso en A.</p> <p>Peso P</p> 	
<p>4. Sistema rígido de cuerpos interconectados considerado como una sola unidad.</p> <p>Se desprecia el peso del mecanismo</p> 	

Figura 28

sión z común. La tensión T_B , aplicada por el cable a la pluma en su punto de amarre B , tiene la dirección del cable (ej. 1 de fig. 27) y aparece en cada una de las dos vistas. En la vista x - z , la flecha representa la componente o proyección de T_B en dicho plano, y lo mismo ocurre con la componente y - z en la vista del plano y - z . La componente z de T_B es común a ambas vistas. Análogamente se representa la tensión T_C . La rótula en A (ej. 8 de fig. 27) es capaz de ejercer las tres componentes de la fuerza de apoyo de la pluma tal como se indica. El sentido adecuado de R_x es evidentemente hacia la derecha para equilibrar la acción de las componentes z de T_B y T_C . El sentido positivo de R_x no se puede determinar por simple inspección y lo asignaremos arbitrariamente. También puede asignarse arbitrariamente el sentido positivo de R_y , si bien en este caso particular puede observarse que R_y debe estar dirigida hacia arriba en la vista y - z para evitar que la pluma gire alrededor de B en sentido antihorario. Se completan los diagramas para sólido libre añadiendo los pesos p y P . Si se prefiere, puede dibujarse un solo diagrama para sólido libre tridimensional en vez del par de diagramas bidimensionales.

En el ejemplo 3 se ha trazado el peso P pasando por el centro de gravedad de la viga, el cual se supone conocido (ej. 9 de fig. 27). La fuerza ejercida por la esquina A sobre la viga es normal a la superficie lisa de ésta (ej. 2 de fig. 27). Si las superficies en contacto en la esquina no fuesen lisas, podría aparecer una componente tangencial de la fuerza debida al rozamiento. Además de la fuerza aplicada F y del par M , en B existe una conexión de pasador que ejerce sobre la viga tanto una componente x de la fuerza como una componente y . Los sentidos positivos de dichas componentes se asignan de manera arbitraria.

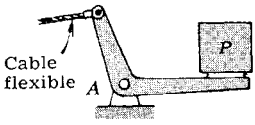
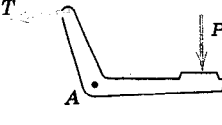
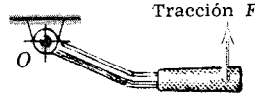
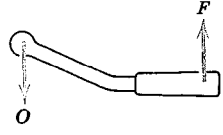
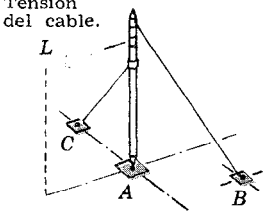
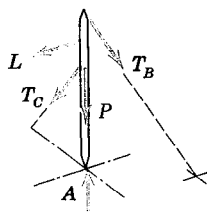
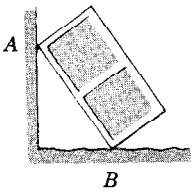
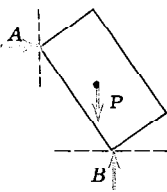
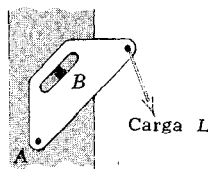
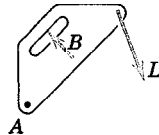
En el ejemplo 4 el diagrama para sólido libre del mecanismo total aislado revela tres cantidades desconocidas para el equilibrio con las cargas dadas P y F . Cualquiera de las múltiples configuraciones internas para fijar el cable que lleva a P sería posible sin afectar a la respuesta exterior del mecanismo en conjunto, y este hecho lo pone de manifiesto el diagrama para sólido libre.

Los sentidos positivos de R_x en el ejemplo 2, B_x y B_y en el ejemplo 3, y B_y en el ejemplo 4 han sido supuestos en los diagramas para sólido libre y la corrección de las suposiciones se verá cuando se realicen los cálculos en los problemas reales, siendo correctas cuando los términos resulten con signo más y erróneas en caso contrario.

El aislamiento del sistema mecánico considerado constituye un paso crucial en la formulación de su modelo matemático. Instamos de nuevo al alumno a que preste una atención especial a este paso. Antes de hacer uso directo del diagrama para sólido libre en la aplicación de los principios del equilibrio de fuerzas en el apartado siguiente, será útil tener cierta práctica inicial en el dibujo de diagramas para sólido libre. A tal fin, los problemas que siguen están destinados a proporcionar tal práctica a través de ejemplos seleccionados sencillos y directos.

Problemas

3/1. En cada uno de los cinco ejemplos siguientes se presenta en el diagrama de la izquierda el cuerpo que hay que aislar, mientras que a la derecha se indica un diagrama para sólido libre (DSL) *incompleto* del cuerpo aislado. Añadir las fuerzas que sea necesario, en cada caso, para formar un diagrama para sólido libre completo. Los pesos de los cuerpos son despreciables a menos que se indique lo contrario. Por razón de sencillez se omiten las dimensiones y los valores numéricos.

	Cuerpo	DSL incompleto
1. Palanca acodada que soporta la carga P .	 Cable flexible A	
2. Palanca de mando que aplica un momento al eje O.	 Tracción F	
3. Mástil de peso P cargado soportado por los dos vientos desde el plano horizontal y por una rótula en A.	 Tensión del cable. L	
4. Cuévano uniforme de peso P que se apoya contra una pared lisa vertical y sobre un suelo horizontal rugoso.	 A B	
5. Soporte cargado fijo mediante una articulación de pasador en A y un pasador fijo B dentro de una ranura lisa.	 Carga L	

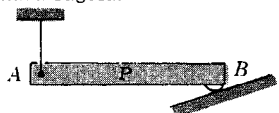
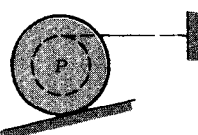
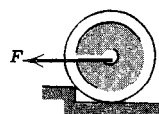
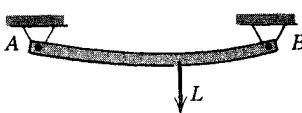
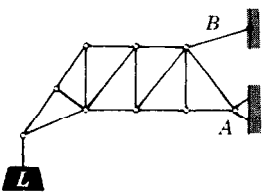
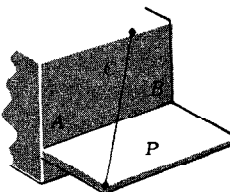
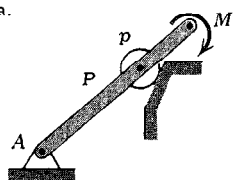
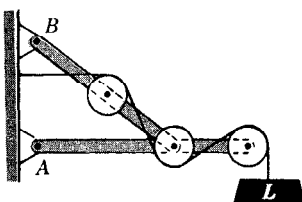
Problema 3/1

3/2. En cada uno de los cinco ejemplos siguientes se presenta en el diagrama de la izquierda el cuerpo que hay que aislar, mientras que a la derecha se muestra un diagrama para sólido libre (DSL) *erróneo o incompleto*. Háganse, en cada caso, los cambios o adiciones que sea necesario para formar un diagrama para sólido libre correcto y completo. Los pesos de los cuerpos son despreciables a menos que se indique lo contrario. Por razón de sencillez se omiten las dimensiones y los valores numéricos.

	Cuerpo	DSL erróneo o incompleto
1. Apisonador de peso P impulsado hacia arriba de un plano inclinado de ángulo θ .		
2. Palanca que levanta la carga P de superficie horizontal lisa. La barra se apoya sobre una superficie horizontal rugosa.		
3. Poste uniforme de peso P elevado a su posición por el torno. La superficie horizontal de apoyo tiene una hendidura que evita el deslizamiento del poste.		
4. Soporte angular de estructura. Articulaciones de pasador.		
5. Varilla doblada soldada al soporte en A y sometida a dos fuerzas y un par		

Problema 3/2

3/3. Dibujar un diagrama para sólido libre completo y correcto de cada uno de los cuerpos designados en los enunciados. Los pesos de los cuerpos sólo se considerarán cuando se indique. Deben rotularse todas las fuerzas, conocidas o no. (Nota: El sentido de algunas componentes de reacción no puede determinarse siempre sin cálculo numérico.)

<p>1. Barra horizontal uniforme de peso P suspendida de un cable vertical en A y apoyada en B sobre una superficie inclinada rugosa.</p> 	<p>5. Carrete uniforme de peso P apoyado sobre una superficie rugosa.</p> 
<p>2. Rueda de peso P a punto de rodar sobre el obstáculo a causa de la tracción F.</p> 	<p>6. Barra inicialmente horizontal pero sometida a flexión por la carga L. Unida por pasador a soportes rígidos por cada extremo.</p> 
<p>3. Estructura cargada soportada por un pasador en A y por un cable en B.</p> 	<p>7. Placa pesada uniforme de peso P mantenida en un plano horizontal por el cable C y los goznes A y B. Todo el apoyo según el eje de los goznes lo proporciona el gozne A.</p> 
<p>4. Barra uniforme de peso P y rodillo de peso p unidos. Sometidos al par M y apoyados en la forma indicada.</p> 	<p>8. Entramado total, poleas y cable que han de aislarse como si constituyeran una sola unidad.</p> 

Problema 3/3

15. Condiciones de equilibrio. El concepto de equilibrio se deriva de la condición en la cual las fuerzas que se ejercen sobre un cuerpo se contrarrestan. Dicho de otra manera, el equilibrio es la condición para la cual la resultante de todas las fuerzas que se ejercen sobre un cuerpo dado es nula. En el apartado 12 se vio que el sistema de fuerzas más general que pueda ejercerse sobre un cuerpo puede expresarse mediante una fuerza resultante \mathbf{R} y un par resultante \mathbf{M} . Luego, para que se contrarresten por completo las fuerzas y el cuerpo esté en equilibrio, deberán satisfacerse las relaciones $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{M} = \mathbf{0}$. Físicamente, estas ecuaciones vectoriales significan que en el caso de un cuerpo en equilibrio hay tanta fuerza actuando sobre él en un sentido como en el opuesto y que hay tanta torsión o momento respecto a un eje actuando en un sentido como en el contrario. Como cada uno de los términos de estas dos relaciones representa, respectivamente, una suma vectorial de todas las fuerzas exteriores ejercidas sobre el cuerpo en cuestión y una suma vectorial de todos los momentos correspondientes, se deduce que los requisitos para el equilibrio de un cuerpo cualquiera se pueden escribir en la forma

$$\blacktriangleright \quad \Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \Sigma \mathbf{M} = \mathbf{0} . \quad (13)$$

Estas ecuaciones vectoriales básicas expresan también el hecho de que el polígono de fuerzas espacial debe ser cerrado, así como el polígono espacial de momentos correspondiente.

Las ecuaciones 13 son condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio completo. Son necesarias porque si no se cumplieran no podría haber compensación de las fuerzas o de los momentos. Son suficientes porque si se satisfacen no puede haber descompensación, con lo que queda asegurado el equilibrio.

En el tomo *Dinámica* se desarrollan las ecuaciones que relacionan fuerza y aceleración para el movimiento de un cuerpo rígido, a partir de la segunda ley de Newton. Estas ecuaciones indican que cuando la resultante de las fuerzas de un sistema está expresada por una fuerza única \mathbf{R} que pase por el centro de masa y un par de momento \mathbf{M} , la aceleración lineal del centro de masa del cuerpo es proporcional a \mathbf{R} y la velocidad de variación del momento cinético respecto al centro de masa es proporcional a \mathbf{M} . Por tanto, la primera de las ecuaciones 13 no sólo será aplicable a cuerpos en reposo, sino también a cualquier cuerpo cuyo centro de masa se mueva con velocidad constante (aceleración nula). Análogamente, la segunda de las ecuaciones 13 no sólo describe a un cuerpo en reposo, sino también a uno que gire alrededor de su centro de masa con velocidad angular constante. Aun cuando el tema de la Estática se refiere, como su nombre indica, a cuerpos que están estáticos, es decir, que no tienen movimiento ni variación de su movimiento, al emplear las ecuaciones del equilibrio de la Estática habrá que admitir el caso de movimiento con velocidad lineal constante del centro de masa y velocidad angular constante alrededor del centro de masa.

Para que un cuerpo esté en equilibrio total es necesario que se cumplan las dos ecuaciones 13. Sin embargo, estas ecuaciones representan dos condiciones

independientes y cada una de ellas puede satisfacerse sin que la otra se satisfaga. Si $\mathbf{R} = 0$ y $\mathbf{M} \neq 0$, el centro de masa del cuerpo o estará en reposo o se moverá con velocidad constante y el cuerpo sufre una variación de su momento cinético. En estas condiciones puede decirse que el cuerpo está en equilibrio sólo en lo que respecta a su movimiento lineal. En cambio, si $\mathbf{R} \neq 0$ y $\mathbf{M} = 0$, el centro de masa del cuerpo tiene aceleración lineal, pero no hay variación de su momento cinético. Dicho cuerpo podría considerarse en equilibrio rotatorio. Si la aceleración lineal de un cuerpo está dirigida según el eje x , el cuerpo puede considerarse en equilibrio en las direcciones y y z , ya que no hay aceleración según estas direcciones. No obstante, el término equilibrio se utiliza más corrientemente para describir un cuerpo que esté totalmente en reposo.

Las dos expresiones vectoriales de las ecuaciones 13 equivalen a seis ecuaciones escalares

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0, & \Sigma M_x &= 0, \\ \Sigma F_y &= 0, & \Sigma M_y &= 0, \\ \Sigma F_z &= 0, & \Sigma M_z &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

que expresan, simplemente, el hecho de que el equilibrio total requiere una suma de fuerzas nula en las tres direcciones y una suma de momentos nula respecto a tres ejes perpendiculares cualesquiera. Las ecuaciones 14 son independientes. Cualquiera de ellas puede satisfacerse independientemente de las otras. La aplicación fidedigna de las ecuaciones del equilibrio se asegura mediante el diagrama para sólido libre, a partir del cual se obtienen las sumas necesarias de fuerzas y momentos.

Las aplicaciones de las ecuaciones 13 y 14 entran de manera natural en ciertas categorías que se reconocen fácilmente. Dichas categorías de sistemas de fuerzas que se ejercen sobre cuerpos en equilibrio son las que se resumen en la figura 29 y se explican de la manera siguiente:

Caso 1. El equilibrio bajo la acción de fuerzas colineales sólo exige, evidentemente, la ecuación de fuerzas en la dirección de éstas (dirección x), ya que las demás ecuaciones se cumplen automáticamente.

Caso 2. El equilibrio de fuerzas coplanarias (que están en un plano que tomaremos como $x-y$) y son concurrentes en un punto O , exige solamente las dos ecuaciones de fuerzas, ya que la suma de momentos respecto a O , es decir, respecto a un eje z que pase por O , es necesariamente nula.

Caso 3. El equilibrio de fuerzas no coplanarias que concurren en un punto O , exige las tres ecuaciones de fuerzas, pero ninguna de momentos ya que su momento respecto a un eje cualquiera que pase por O y respecto a cualquier otro eje, es nulo.

Caso 4. El equilibrio de fuerzas en el espacio que corten a una recta, exige todas las ecuaciones salvo la del momento respecto a dicha recta, la cual se cumple automáticamente.

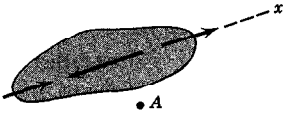
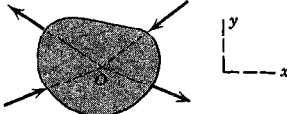
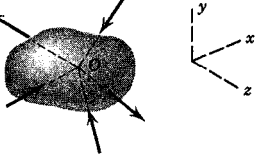
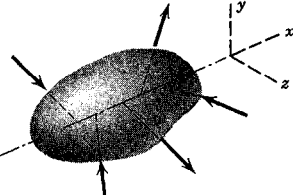

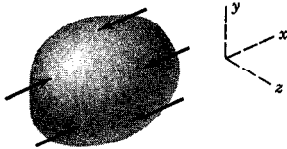
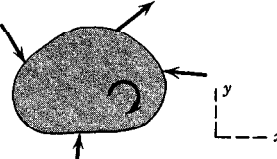
CATEGORÍAS DE SISTEMAS DE FUERZAS EN EQUILIBRIO			
Categoría	Dimen- siones	Figura	Ecuaciones independientes
1. Colineales	1D		$\Sigma F_x = 0$
2. Concurrentes en un punto	2D		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$
3. Concurrentes en un punto	3D		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$ $\Sigma F_z = 0$
4. Que cortan a una recta	3D		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma M_y = 0$ $\Sigma F_y = 0$ $\Sigma M_z = 0$ $\Sigma F_z = 0$
5. Paralelas	2D		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma M_z = 0$
6. Paralelas	3D		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma M_y = 0$ $\Sigma M_z = 0$
7. General	2D		$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma M_z = 0$ $\Sigma F_y = 0$

Figura 29

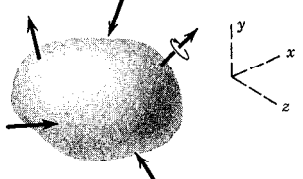
8. General	3D	 <p>The diagram shows a 3D body with several force vectors (arrows) and a moment vector (curved arrow) acting on it. A 3D coordinate system with x, y, and z axes is shown to the right of the body.</p>	$\Sigma F_x = 0$ $\Sigma F_y = 0$ $\Sigma F_z = 0$	$\Sigma M_x = 0$ $\Sigma M_y = 0$ $\Sigma M_z = 0$
------------	----	---	--	--

Figura 29 (continuación)

Caso 5. El equilibrio de fuerzas coplanarias paralelas, exige la ecuación de las fuerzas en su dirección (dirección x) y una ecuación de momentos respecto a un eje (eje z) normal al plano de las fuerzas.

Caso 6. El equilibrio de fuerzas paralelas no coplanarias sólo exige la ecuación de las fuerzas según su dirección (dirección x) y dos ecuaciones de momentos respecto a ejes (y y z) normales a la dirección de las fuerzas.

Caso 7. El equilibrio de un sistema general de fuerzas coplanarias (en el plano $x-y$), exige las dos ecuaciones de las fuerzas en el plano y una ecuación de momentos respecto a un eje (eje z) normal al plano.

Caso 8. El equilibrio de un sistema general de fuerzas en el espacio, exige las tres ecuaciones de las fuerzas y las tres ecuaciones de los momentos.

En cada uno de los casos citados, salvo en el caso más general 8, aquellas de las seis ecuaciones de equilibrio que falten se satisfacen automáticamente en virtud de la naturaleza del sistema de fuerzas particular. No es necesario aprenderse de memoria los resultados consignados en la figura 29, ya que se deducen fácilmente de la comprensión de las seis ecuaciones escalares del equilibrio y de su aplicabilidad ilustrada en la figura 29.

Se presentan frecuentemente dos situaciones de equilibrio ante las cuales ha de estar alerta el alumno. El primer caso es el equilibrio de un cuerpo bajo la acción de dos fuerzas solamente. En la figura 30a pueden verse dos ejemplos y es claro que para tal *miembro de dos fuerzas* las fuerzas deben ser de igual magnitud, recta soporte y sentidos contrarios. La forma del miembro no debe enmascarar este sencillo requisito. En los ejemplos citados se consideran despreciables los pesos de los miembros frente a las fuerzas aplicadas.

El segundo caso es el equilibrio de un cuerpo bajo la acción de tres fuerzas (fig. 30b). Como el triángulo de fuerzas cerrado es plano, el problema es, necesariamente, bidimensional. Además, las rectas soporte de las tres fuerzas deben ser concurrentes. Si no lo fueran, una de las fuerzas ejercería un momento resultante respecto al punto de concurso de las otras dos, con lo que se violaría el requisito de momento nulo respecto a un punto cualquiera. La única excepción se presenta cuando las tres fuerzas son paralelas. En este caso, el punto de concurso está en el infinito. El principio de la concurrencia de tres fuerzas en equilibrio se utiliza mucho al resolver gráficamente las ecuaciones de las fuerzas. En relación con esto, un cuerpo en equilibrio bajo la acción de más de tres fuerzas puede

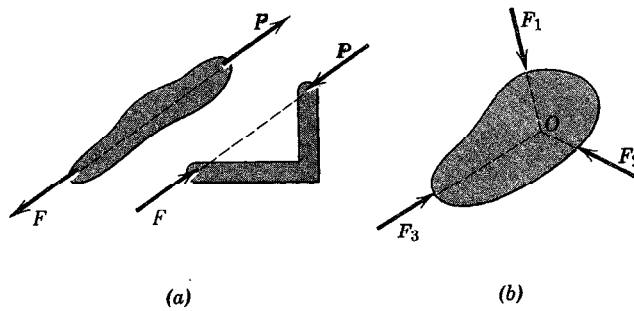


Figura 30

reducirse a menudo a un *miembro de tres fuerzas* por combinación de dos o más fuerzas conocidas.

Dada la frecuencia con que se presentan análisis de equilibrios de fuerzas coplanarias, será útil ampliar el estudio de esta categoría más allá de lo visto en el caso 7 de la figura 29. En el caso de equilibrio de un sistema de fuerzas coplanarias, por ejemplo, en el plano $x-y$, los requisitos de equilibrio se reducen a

$$\Sigma F_x = 0, \quad \Sigma F_y = 0, \quad \Sigma M_O = 0, \quad (15)$$

donde ΣM_O representa la suma algebraica de los momentos de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo respecto a un eje paralelo a la dirección z y que pasa por un punto cualquiera O del cuerpo o exterior al mismo, pero contenido en el plano $x-y$. A esta suma se le llama, más frecuentemente, suma de los momentos respecto al punto O .

Existen otros dos caminos para expresar las condiciones necesarias para el equilibrio de fuerzas en dos dimensiones. Para el cuerpo de la figura 31a, si $\Sigma M_A = 0$ la resultante R , si existe, deberá ser forzosamente una fuerza que pase por A . Si se cumple ahora la ecuación $\Sigma F_x = 0$ donde la dirección x es totalmente arbitraria, se deduce de la figura 31b que la resultante R , si existe, no sólo deberá pasar por A , sino que además deberá ser perpendicular a la dirección x según se indica. Si consideramos $\Sigma M_B = 0$ siendo B un punto cualquiera tal que la recta AB no sea perpendicular a la dirección x , es evidente que R deberá ser nula y por tanto el cuerpo estará en equilibrio. Entonces, otro sistema de ecuaciones que expresa el equilibrio será

$$\Sigma F_x = 0, \quad \Sigma M_A = 0, \quad \Sigma M_B = 0,$$

donde los dos puntos A y B no determinan una recta perpendicular a la dirección x .

Una tercera formulación de las condiciones de equilibrio será la siguiente: si $\Sigma M_A = 0$ para un cuerpo cualquiera, tal como el indicado en la figura 31c, la resultante, si existe, deberá ser una fuerza R que pase por A . Además, si $\Sigma M_B = 0$, la resultante, si existe, deberá pasar por B según se indica en la figura 31d. Sin

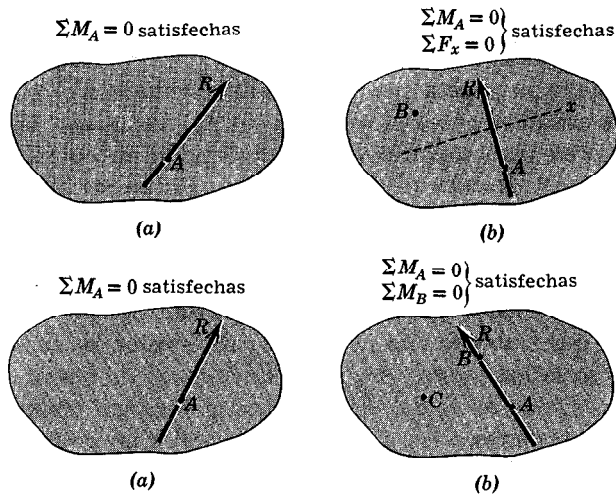


Figura 31

embargo, esta fuerza no podría existir si $\Sigma M_C = 0$, si C no se halla alineado con A y B . Luego, las ecuaciones de equilibrio se podrán escribir en la forma:

$$\Sigma M_A = 0, \quad \Sigma M_B = 0, \quad \Sigma M_C = 0,$$

donde A , B y C son tres puntos que no están en línea recta.

Al final de este apartado, en la parte señalada como de mayor dificultad, se presenta un breve estudio de otros sistemas de ecuaciones de equilibrio correspondientes a otras clases de sistemas de fuerzas.

Aun cuando las ecuaciones del equilibrio desarrolladas en este apartado son condiciones necesarias y suficientes para establecer el equilibrio de un cuerpo, no proporcionan necesariamente suficiente información para calcular todas las fuerzas desconocidas que puedan ejercerse sobre un cuerpo en equilibrio. La suficiencia reside en las características de las restricciones al movimiento posible del cuerpo debidas a sus apoyos. A dichas restricciones les llamaremos ligaduras o vínculos, entendiéndose que impiden el movimiento. En el ejemplo 4 de la figura 27, el rodillo, la bola y la zapata proporcionan una ligadura normal a la superficie de contacto, pero no proporcionan ninguna que sea tangente a dicha superficie. Por tanto no podrán resistir a una fuerza tangencial. En el caso del collar y de la corredera del ejemplo 5 la ligadura sólo es posible normal a la guía. En el ejemplo 6 la conexión por pasador fijo proporciona ligadura en ambas direcciones pero no ofrece resistencia a la rotación alrededor del pasador a menos que éste no pueda girar libremente. En cambio, el apoyo fijo del ejemplo 7 ofrece ligadura contra la rotación así como contra el movimiento lateral. En la rótula libre del ejemplo 8 se tiene ligadura contra el movimiento en las tres direcciones, si bien no existe resistencia a la rotación alrededor del

centro de la bola. En cambio, en el caso de la conexión soldada también hay ligadura contra la rotación.

Si se sustituyera la zapata que soporta el reticulado del ejemplo 1 de la figura 28 por un pasador, como el existente en A, habría una ligadura más de las que se requieren para soportar una configuración de equilibrio sin que se derrumbe. Las tres ecuaciones de equilibrio (ec. 15) no serían suficientes para determinar las cuatro fuerzas desconocidas, pues no podría separarse A_x de B_x . Estas dos componentes de las fuerzas dependerían de la deformación de los miembros del reticulado a causa de la acción de sus correspondientes propiedades elásticas. Las reacciones horizontales dependerían también de cualquier deformación inicial que hubiera sido necesaria para ajustar las dimensiones de la estructura a las de la base entre A y B. Refiriéndonos de nuevo a la figura 28, si se soldara la conexión en A del ejemplo 2, se generarían otros dos momentos desconocidos en A respecto a los ejes x e y , los cuales no podrían determinarse mediante las ecuaciones del equilibrio de que se dispone sin conocer las características de rigidez interna del material de la pluma. Ejemplos análogos de más ligaduras que las necesarias para asegurar una configuración estable de equilibrio los tendríamos con un pasador soldado en B en el ejemplo 3 y con una conexión de pasador fijo en lugar del rodillo A del ejemplo 4.

Un cuerpo, o una combinación rígida de elementos considerada como cuerpo único, que posea más apoyos externos o ligaduras de las necesarias para mantener una posición de equilibrio se dice que es *hiperestático* o que está *estáticamente indeterminado*. Los apoyos que puedan suprimirse sin destruir la posición de equilibrio del cuerpo se dice que son *superabundantes*. El número de elementos soportantes superabundantes presente corresponde al grado de hiperestaticidad o indeterminación estática y es igual al número total de fuerzas exteriores desconocidas menos el número de ecuaciones de equilibrio independientes de que se dispone. En cambio, los cuerpos soportados por el número mínimo de ligaduras necesario para asegurar una configuración de equilibrio se denominan *isostáticos* o *estáticamente determinados* y para dichos cuerpos las ecuaciones del equilibrio son suficientes para determinar las fuerzas exteriores desconocidas.

Los problemas de equilibrio incluidos en este apartado y en todos los del texto se reducen, generalmente, a cuerpos isostáticos en los que las ligaduras son justamente las suficientes para asegurar una posición estable y donde las fuerzas soportantes desconocidas pueden determinarse mediante las ecuaciones independientes del equilibrio de que se dispone. No obstante, con este breve estudio queremos advertir al estudiante de que antes de intentar resolver un problema de equilibrio se asegure de la naturaleza de las ligaduras. Sabremos que un cuerpo es hiperestático cuando hayan más reacciones exteriores incógnitas que ecuaciones independientes de equilibrio disponibles para el sistema de fuerzas que se tenga. Siempre conviene contar el número de fuerzas incógnitas que se ejercen sobre un cuerpo dado y asegurarse de que puede escribirse un

número igual de ecuaciones independientes; de otro modo podríamos desperdiciar tiempo y esfuerzo en intentar una solución imposible con auxilio de las ecuaciones del equilibrio solamente.

En el apartado 16 se desarrolla con mayor detalle la cuestión de la adecuación de las ligaduras. Sin embargo, el desarrollo completo del análisis de cuerpos o estructuras hiperestáticas se sale de los fines de este libro de Estática, por lo que sólo se hará referencia ocasionalmente a dichos problemas.

Una de las observaciones más útiles en la aplicación de las ecuaciones del equilibrio lo constituye una elección expeditiva de los ejes de referencia, especialmente del eje de momentos. En general, la mejor elección de eje de momentos será la que tome como tal aquél por el que pase mayor número de fuerzas desconocidas. Frecuentemente es necesario resolver sistemas de ecuaciones de equilibrio, pero puede reducirse mucho la labor inherente si se elige con cuidado el sistema de ejes.

Los problemas tipo del final del apartado ilustran la aplicación de los diagramas para sólido libre y de las ecuaciones de equilibrio a problemas típicos de la Estática. Se insta al estudiante a que elabore en detalle dichos ejemplos antes de proseguir con la resolución de problemas. Se le recomienda insistentemente que cada aplicación importante de un principio de la Mecánica vaya precedida de un enunciado simbólico del principio o ecuación rectora que intervenga. En los problemas tipo, dichos enunciados se escriben entre corchetes a la izquierda de los cálculos y sirven como recordatorio de la justificación de cada paso importante. Además, las recomendaciones dadas en el apartado 7 serán muy valiosas para el estudiante, especialmente en este momento en que empieza a formar su hábito de abordar la solución de problemas técnicos.



Para el sistema general bidimensional de fuerzas del caso 7 de la figura 29 se desarrollaron otras ecuaciones del equilibrio. También pueden escribirse otras para los demás sistemas de fuerzas consignados en la figura 29 y vamos a citar algunos ejemplos sin efectuar un estudio completo de ellos. El lector podrá formular por sí mismo los métodos y la demostración con mayor detalle.

Para las fuerzas colineales del caso 1, debe quedar claro que en vez de la ecuación única de las fuerzas puede utilizarse una ecuación de momentos respecto a un punto A cualquiera que no esté sobre la recta soporte de las fuerzas.

Para las fuerzas coplanarias concurrentes del caso 2, en vez de las dos ecuaciones de las fuerzas pueden utilizarse ecuaciones de momentos respecto a dos puntos diferentes que no estén en línea recta con el punto de concurso O.

Para el equilibrio de fuerzas concurrentes no coplanarias, caso 3, se pueden escribir ecuaciones de momentos respecto a tres ejes no paralelos elegidos de tal manera que una recta que pase por el punto de concurso O no pueda cortar a los tres ejes.

Para el equilibrio de fuerzas en el espacio que corten a una recta, caso 4, se podrán sustituir las ecuaciones $\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma F_z = 0$, del sistema de cinco ecuaciones citado, por dos ecuaciones de momentos respecto a ejes paralelos al eje x , $\Sigma M_{Ax} = 0$ y $\Sigma M_{Bx} = 0$ y que pasen por dos puntos A y B situados sobre una recta que no corte al eje x .

Para el equilibrio de fuerzas paralelas coplanarias, caso 5, las ecuaciones de las fuerzas y de los momentos se pueden sustituir por ecuaciones de momentos respecto a dos puntos que no determinen una recta paralela a la dirección de las fuerzas.

En el caso 6 del equilibrio de fuerzas paralelas no coplanarias, otro sistema de ecuaciones independientes consistirá en dos ecuaciones de momentos respecto a ejes paralelos al eje y que pasen por dos puntos A y B que no estén en un plano paralelo al $x-y$, más una ecuación de momentos respecto al eje z , o sea, $\Sigma M_{Ay} = 0$, $\Sigma M_{By} = 0$ y $\Sigma M_z = 0$.

En el caso 8 del sistema general de fuerzas en el espacio, los sistemas de ecuaciones, que no sean los citados, suelen ser algo más complicados que los de las categorías anteriores. Podemos describir uno de dichos sistemas con ayuda de la figura 32 en la que se ven tres puntos no alineados A , B y C situados en el interior, en el exterior, o sobre la superficie del cuerpo al cual está aplicado el sistema de fuerzas. Para mayor sencillez, tomemos A como origen de coordenadas y el eje x dirigido según AB , tomando el plano $x-y$ de manera que contenga C . Si existiera resultante, podría representarse mediante una fuerza resultante \mathbf{R} que pase por A y el par correspondiente \mathbf{M}_A . Si se cumplen las ecuaciones $\Sigma M_{Ax} = 0$, $\Sigma M_{Ay} = 0$ y $\Sigma M_{Az} = 0$, eliminarían la posible existencia de \mathbf{M}_A pero no restringirían \mathbf{R} a este punto. Añadiendo los requisitos $\Sigma M_{By} = 0$ y $\Sigma M_{Bz} = 0$ sí se eliminarían todas las posibilidades de existencia de \mathbf{R} salvo para la posición a lo largo de AB . La ecuación $\Sigma M_{Cz''} = 0$ elimina-

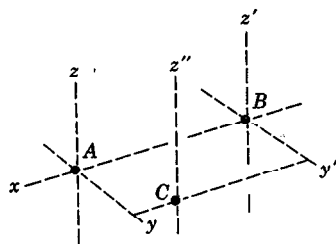


Figura 32

ría esta posibilidad y aseguraría que $\mathbf{R} = 0$. Así pues, el nuevo sistema de ecuaciones sería

$$\begin{array}{lll} \Sigma M_{Ax} = 0 & \Sigma M_{Ay} = 0 & \Sigma M_{Az} = 0 \\ \Sigma M_{By} = 0 & \Sigma M_{Bz} = 0 & \Sigma M_{Cz''} = 0. \end{array}$$

También debemos mencionar que las ecuaciones de equilibrio son válidas para un sistema de ejes coordenados no ortogonales. Para las sumas de fuerzas y de momentos pueden utilizarse tres ejes de coordenadas cualesquiera que no sean paralelos. Sin embargo, para mayor simplicidad geométrica, suele ser más conveniente la utilización de sistemas de ejes coordenados cartesianos rectangulares.

Problemas tipo

3/4. Determinar la tensión T en el cable de soporte y la fuerza que se ejerce sobre el pasador situado en A , de la grúa de la figura. La viga AB es una viga en I de 45 cm que pesa 90 kg/m de longitud.

Solución algebraica. Evidentemente, el sistema es simétrico respecto al plano vertical $O-O$ visto desde un extremo, por lo que podrá analizarse el problema como de equilibrio de un sistema de fuerzas coplanarias. El diagrama para sólido libre de la viga es el indicado en la parte a de la figura con la reacción del pasador en A descompuesta en sus dos componentes rectangulares. El peso de la viga es de $90 \times 5 = 450$ kp y está aplicado a su centro. Al aplicar la ecuación del momento respecto A es más sencillo considerar los momentos de las componentes x e y de T que calcular la distancia de A a T . Así

$$[\Sigma M_A = 0] \quad (T \cos 25^\circ) 0,225 + (T \sin 25^\circ) (5 - 0,10) - 1\,000(5 - 1,35 - 0,10) - 450(2,5 - 0,10) = 0,$$

de donde

$$T = 2\,039 \text{ kp}$$

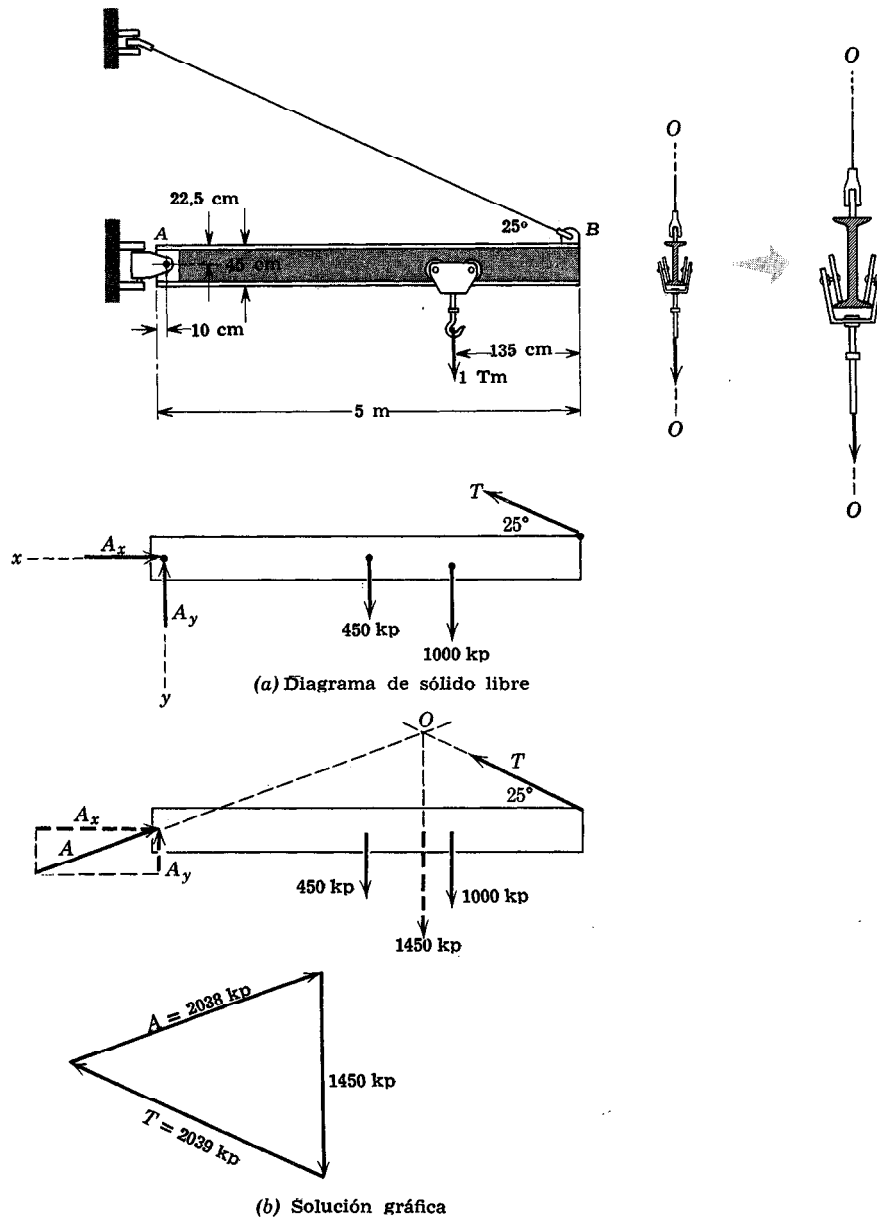
Resp.

Igualando a cero la suma de las fuerzas según las direcciones x e y se tiene

$$\begin{aligned} [\Sigma F_x = 0] \quad A_x - 2\,039 \cos 25^\circ &= 0 & A_x &= 1\,847 \text{ kp} \\ [\Sigma F_y = 0] \quad A_y + 2\,039 \sin 25^\circ - 450 - 1\,000 &= 0 & A_y &= 862,5 \text{ kp} \\ [A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}] \quad A = \sqrt{1\,847^2 + 862,5^2} & & A &= 2\,038 \text{ kp} \end{aligned} \quad \text{Resp.}$$

Solución gráfica. Para la solución gráfica se utiliza el principio de que tres fuerzas en equilibrio deben ser concurrentes, componiendo las dos fuerzas verticales conocidas de 450 kp y 1 000 kp que dan así una fuerza de 1 450 kp colocada en la forma que se indica sobre el diagrama del sólido libre modificado de la viga en la parte b de la figura. La posición de esta carga resultante se puede determinar gráfica o algebraicamente. La intersección de la fuerza de 1 450 kp con la línea de acción de la tensión T desconocida define el punto de concurso O por el que debe pasar la reacción A del pasador. Las magnitudes desconocidas de T y A pueden determinarse ahora construyendo el polígono cerrado de fuerzas en equilibrio. Una vez trazada a escala la carga vertical conocida, como se indica en la parte inferior de la figura, por el extremo del vector representativo de la fuerza de 1 450 kp se traza una recta cuya dirección sea la de T . Análogamente, por el origen de la fuerza de 1 450 kp se traza una recta cuya

dirección sea la de la reacción A del pasador determinada por el concurso establecido por el diagrama del sólido libre. La intersección de las rectas representativas de los



vectores T y A determina las magnitudes de T y A que son necesarias para hacer nula la suma vectorial de las fuerzas. Estas magnitudes pueden medirse directamente del diagrama que está trazado a escala. Las componentes x e y de A se pueden construir, si se quiere, sobre el polígono de fuerzas.

El estudiante debe reconocer que el polígono se inicia con las fuerzas conocidas primeramente y que el orden de adición de los dos vectores restantes es indiferente.

3/5. Se aplica una fuerza de 50 kp a la manivela del torno en la forma que se indica. El cojinete A soporta el empuje (fuerza en la dirección del eje del árbol) mientras que el cojinete B soporta solamente la carga radial (carga normal al eje del árbol). Determinar el peso P que puede soportarse y la fuerza radial total ejercida por cada cojinete sobre el árbol.

Solución. El sistema es claramente tridimensional sin ejes ni planos de simetría, por lo que habrá que analizar el problema como el de un sistema general de fuerzas no coplanarias. Para ilustrar este método utilizaremos una solución con escalares, si bien sería igualmente satisfactoria una solución que utilizase la notación vectorial (v. prob. tipo 3/6). El diagrama para el sólido libre correspondiente al árbol, manivela y tambor considerados como constituyentes de un cuerpo único, se representa mediante sus tres proyecciones ortogonales. La fuerza aplicada de 50 kp se resuelve según sus tres componentes y en cada uno de estos esquemas pueden verse dos de estas componentes. Pueden verse los sentidos correctos de A_x y B_x si se observa que la resultante de las dos fuerzas de 17,7 kp ejerce un momento de sentido opuesto al de las agujas del reloj respecto A . Los sentidos correctos de A_y y B_y no pueden determinarse hasta haber obtenido los módulos de los momentos, por lo que podrán asignarse arbitrariamente. La proyección $x-y$ de las fuerzas de los cojinetes se indica por una flecha ondulada por ser desconocida su dirección. La adición de A_x y P completa los diagramas para sólido libre. Obsérvese que las tres secciones representan tres problemas bidimensionales relacionados por las correspondientes componentes de las fuerzas.

De la proyección $x-y$

$$[\Sigma M_O = 0] \quad 10P - 25 \times 43,3 = 0 \quad P = 108,3 \text{ kp} \quad \text{Resp.}$$

De la proyección $x-z$

$$[\Sigma M_A = 0] \quad 15B_x + 17,5 \times 17,7 - 25 \times 17,7 = 0 \quad B_x = 8,85 \text{ kp}$$

$$[\Sigma F_x = 0] \quad A_x + 8,85 - 17,7 = 0 \quad A_x = 8,85 \text{ kp}$$

La proyección $y-z$ da,

$$[\Sigma M_A = 0] \quad 15B_y + 17,5 \times 43,3 - 25 \times 108,3 = 0 \quad B_y = 130 \text{ kp}$$

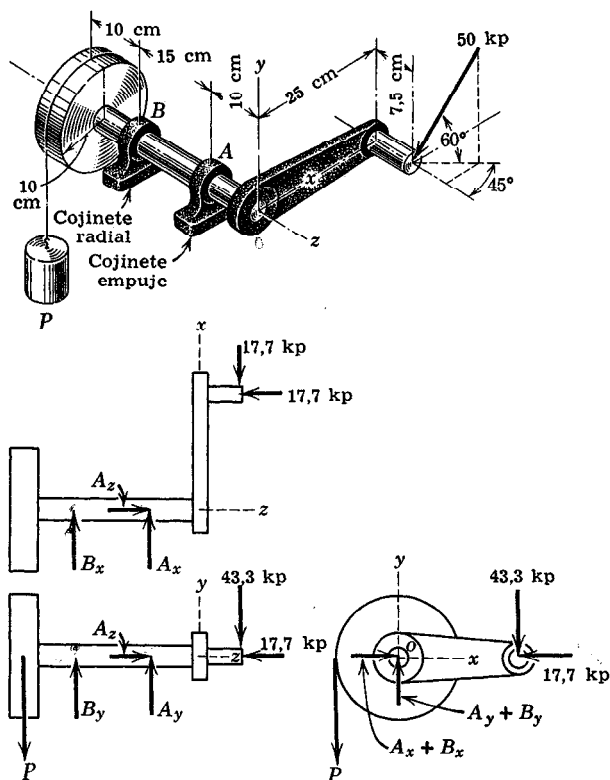
$$[\Sigma F_y = 0] \quad A_y + 130 - 43,3 - 108,3 = 0 \quad A_y = 21,6 \text{ kp}$$

$$[\Sigma F_z = 0] \quad A_z = 17,7 \text{ kp}$$

Las fuerzas radiales totales sobre los cojinetes resultan ser

$$[A_r = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}] \quad A_r = \sqrt{(8,85)^2 + (21,6)^2} = 23,3 \text{ kp} \quad \text{Resp.}$$

$$[B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}] \quad B = \sqrt{(8,85)^2 + (130)^2} = 130,2 \text{ kp} \quad \text{Resp.}$$



Problema 3/5

3/6. La estructura tubular soldada está unida al plano horizontal $x-y$ mediante una rótula situada en A y se apoya en el anillo con holgura situado en B . El cable CD impide la rotación en torno a la recta AB cuando se aplica la carga de 500 kp y la estructura es estable en la posición representada. Despréciense el peso de la estructura frente a la carga aplicada y determínese la tensión T del cable, las reacciones en el anillo y las componentes de la reacción en A .

Solución. El sistema es evidentemente tridimensional sin ejes ni planos de simetría, por lo que habrá que analizar el problema como uno de sistema general de fuerzas en el espacio. Utilizaremos una solución que emplee métodos vectoriales, a fin de ilustrar este método más general, en contraste con el método escalar utilizado en el problema tipo 3/5. Se dibuja el diagrama para sólido libre en el cual se ha representado la reacción del anillo en función de sus dos componentes. Sumando momentos respecto al eje AB pueden eliminarse todas las incógnitas menos T . La dirección de AB está especificada por el vector unitario $\mathbf{n} = \frac{1}{5}(3\mathbf{j} + 4\mathbf{k})$. El momento de T

respecto AB es la proyección sobre AB del momento respecto al punto A . Así pues, el momento de \mathbf{T} respecto AB está dado por $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$. Análogamente, el momento de la carga aplicada \mathbf{F} respecto AB es $\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$. Las expresiones vectoriales de \mathbf{T} , \mathbf{F} , \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 son

$$\mathbf{T} = \frac{T}{\sqrt{185}} (4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 12\mathbf{k}), \quad \mathbf{F} = 500\mathbf{j} \text{ kp},$$

$$\mathbf{r}_1 = -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} \text{ m}, \quad \mathbf{r}_2 = 5\mathbf{i} + 12\mathbf{k} \text{ m},$$

donde $\overline{CD} = \sqrt{185} \text{ m}$.

La ecuación de momentos se convierte ahora en

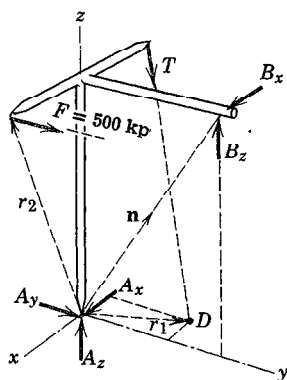
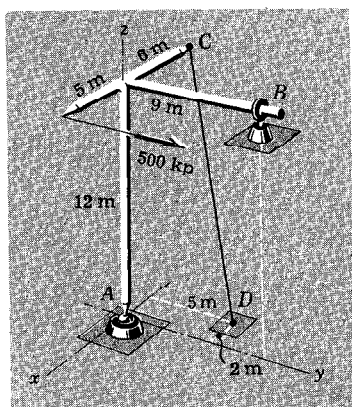
$$[\Sigma M_{AB} = 0] \quad (-2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) \times \frac{T}{\sqrt{185}} (4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 12\mathbf{k}) \cdot \frac{1}{13}(3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \\ + (5\mathbf{i} + 12\mathbf{k}) \times (500\mathbf{j}) \cdot \frac{1}{13}(3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = 0.$$

Efectuando las operaciones se tiene

$$-\frac{192T}{\sqrt{185}} + 10\,000 = 0, \quad T = 708 \text{ kp} \quad \text{Resp.}$$

Las componentes de \mathbf{T} son, pues,

$$T_x = 208 \text{ kp} \quad T_y = 260 \text{ kp} \quad T_z = -625 \text{ kp}$$



Problema 3/6

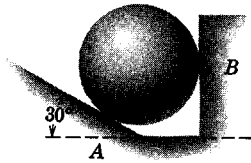
Las incógnitas restantes se encuentran fácilmente por sumas de momentos y sumas de fuerzas, de la manera siguiente.

$$\begin{array}{llll}
 [\Sigma M_z = 0] & 500(5) - 9B_x - 260(6) = 0, & B_x = 104,4 \text{ kp} & \text{Resp.} \\
 [\Sigma M_x = 0] & 9B_z - 500(12) - 260(12) = 0, & B_z = 1013 \text{ kp} & \text{Resp.} \\
 [\Sigma F_x = 0] & A_x + 104,4 + 208 = 0, & A_x = -312 \text{ kp} & \text{Resp.} \\
 [\Sigma F_y = 0] & A_y + 500 + 260 = 0, & A_y = -760 \text{ kp} & \text{Resp.} \\
 [\Sigma F_z = 0] & A_z + 1013 - 625 = 0, & A_z = -388 \text{ kp} & \text{Resp.}
 \end{array}$$

Los signos negativos de las componentes de A indican que tienen sentidos contrarios a los elegidos como positivos.

Al escribir la expresión del momento de \mathbf{T} respecto A , podía haberse empleado el vector de A a C en vez del \mathbf{r}_1 . La ventaja del empleo de la notación vectorial en este problema está en la libertad de tomar momentos directamente respecto a un eje cualquiera. En este problema, esta libertad nos permite elegir un eje que elimina cinco de las incógnitas.

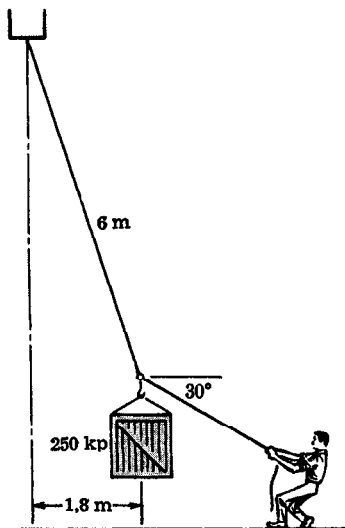
Problemas



Problema 3/7

3/7. La bola lisa homogénea pesa 50 kp y descansa sobre el plano inclinado 30° en A , apoyándose contra la superficie vertical en B . Calcular las fuerzas de contacto en A y B .

Resp. $A = 57,7 \text{ kp}$, $B = 28,9 \text{ kp}$

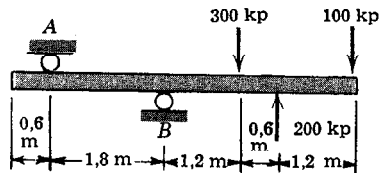


Problema 3/8

3/8. ¿Con qué fuerza F debe tirar el hombre de la cuerda para mantener el peso de 250 kp en la posición de la figura?

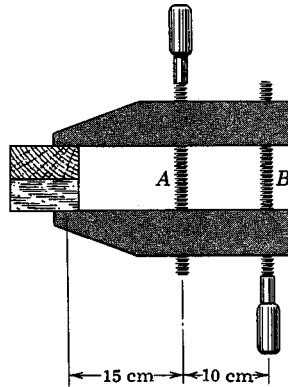
3/9. La viga uniforme de 5,4 m pesa 250 kp y está cargada en el plano vertical por las fuerzas paralelas que se indican. Calcular las reacciones en los apoyos de rodillo A y B.

Resp. $A = 208 \text{ kp}$, $B = 658 \text{ kp}$



Problema 3/9

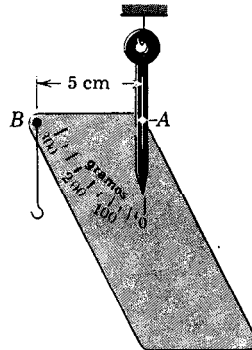
3/10. Si se fija el tornillo B de la mordaza para madera de manera que los dos bloques se hallen sometidos a una compresión de 500 N, determinar la fuerza en el tornillo A.



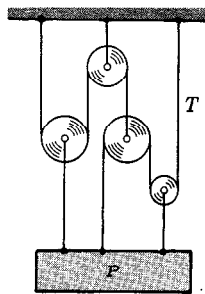
Problema 3/10

3/11. Una basculita está constituida por una placa suspendida en A de un eslabón que actúa de aguja indicadora. La báscula se inclina según sea el peso colgado del gancho situado en B. Cuando está descargada, AB es horizontal. La báscula pesa 113,4 g sin contar la aguja y su centro de gravedad se halla a 5,6 cm de A. El peso del gancho es despreciable. Determinar el ángulo θ que girará la báscula al colgar del gancho un peso de 170 g.

Resp. $\theta = 53^\circ 8'$

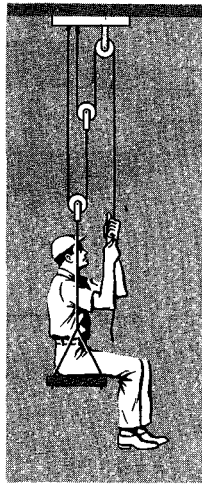


Problema 3/11



Problema 3/12

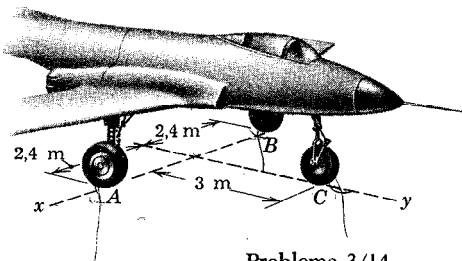
3/12. Determinar la tensión T del cable que se indica en la combinación de poleas que soporta el peso P .



Problema 3/13

3/13. Determinar la fuerza F que debe ejercer sobre la cuerda el obrero de 90 kg para sostenerse a sí mismo. ¿Qué fuerza R ejerce el hombre sobre el asiento?

Resp. $F = 18 \text{ kp}$, $R = 72 \text{ kp}$

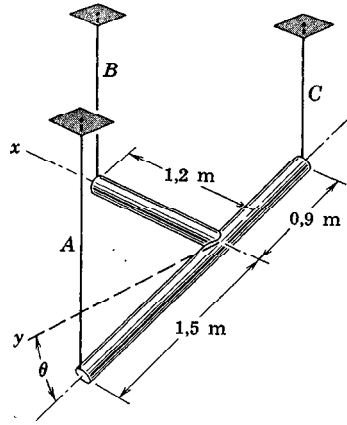


Problema 3/14

3/14. Como comprobación del equilibrio del avión, cada una de sus tres ruedas se coloca sobre una báscula, midiéndose las siguientes fuerzas: $A = 2530 \text{ kp}$, $B = 2565 \text{ kp}$, $C = 395 \text{ kp}$. Calcular las coordenadas x - y del centro de gravedad del avión.

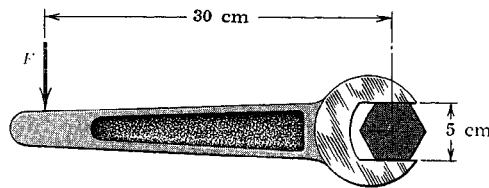
3/15. Las dos varillas están soldadas perpendicularmente una a otra y están soportadas por sus extremos mediante hilos verticales A, B y C, formando la varilla más larga un ángulo θ con el plano horizontal $x-y$. Si el material de las varillas pesa 50 kp por metro de longitud, calcular la tensión de cada hilo.

Resp. $T_A = 71$ kp, $T_B = 30$ kp,
 $T_C = 79$ kp



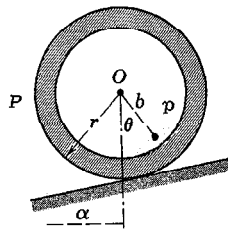
Problema 3/15

3/16. Las mandíbulas de la llave abierta son de acero templado liso y, para el grosor dado de la llave, pueden soportar hasta 750 kp de fuerza concentrada contra la arista de la cabeza exagonal de un tornillo sin que se dañe la superficie. Calcular la fuerza máxima F correspondiente a un brazo de palanca de 30 cm que pueda aplicarse sin peligro a la llave. Supóngase que entre la cabeza del tornillo y las mandíbulas de la llave hay un huelgo muy pequeño. Resp. $F = 69$ kp

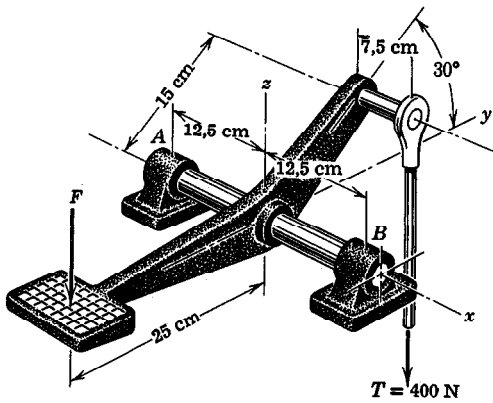


Problema 3/16

3/17. Un anillo uniforme de peso P y radio r lleva un peso excéntrico p situado a una distancia b del centro y está colocado sobre un plano inclinado que forma un ángulo α con la horizontal. Si las superficies son suficientemente rugosas para evitar el deslizamiento, escribir la expresión de θ que defina la posición de equilibrio.



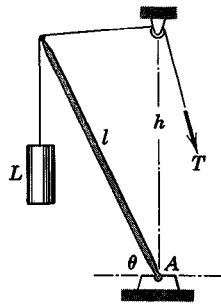
Problema 3/17



Problema 3/18

• 3/18. Para originar una tensión $T = 400 \text{ N}$ en la barra de mando vertical hay que aplicar al pedal de la palanca acodada una fuerza vertical F . Determinar las correspondientes reacciones en los cojinetes A y B .

Resp. $A = 184 \text{ N}$, $B = 424 \text{ N}$



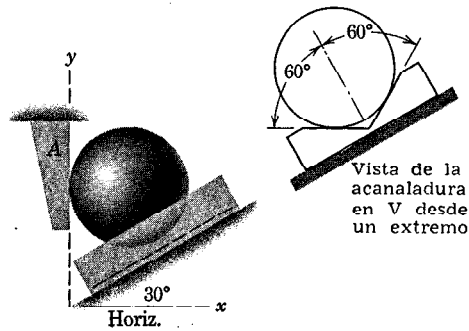
Problema 3/19

3/19. Si es despreciable el peso de la pluma frente a la carga L , hallar la fuerza F que se ejerce sobre la rótula A y demostrar que F es constante para todos los valores de θ . Determinar el valor límite de F cuando θ tienda a 90° .

3/20. Un avión de reacción que pesa 8 toneladas vuela horizontalmente a una velocidad constante de 960 km/h sometido a un empuje de 2000 kp por parte de sus motores. Si el piloto aumenta el consumo de combustible para lograr un empuje de 2500 kp y encabrita el avión para mantener una velocidad constante de 960 km/h respecto al aire, determinar el ángulo θ que forma con la horizontal la nueva línea de vuelo. Nótese que la resistencia del aire en la línea de vuelo a la altura particular considerada sólo es función de la velocidad respecto al aire.

3/21. Una esfera homogénea lisa de peso P descansa sobre la acanaladura en V y no puede rodar a causa del contacto que tiene con la superficie vertical lisa A que es normal al plano $x-y$ de simetría. Determinar la expresión de la fuerza de contacto R entre la esfera y cada cara de la acanaladura.

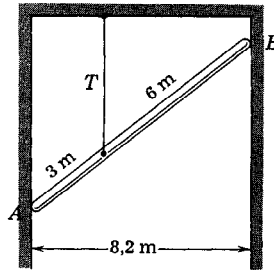
Resp. $R = 2P/3$



Problema 3/21

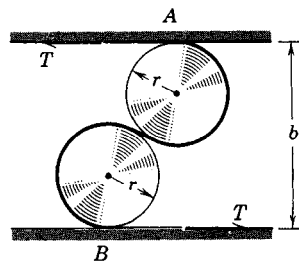
3/22. El poste uniforme de 9 m pesa 75 kp y apoya sus extremos lisos contra las paredes verticales, siendo T la tensión del cable vertical que lo soporta. Calcular las reacciones en A y B.

Resp. $A = B = 16,7$ kp



Problema 3/22

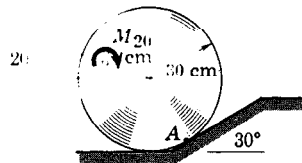
3/23. El dispositivo de la figura consta de dos rodillos de radio r sobre los que pasa una cinta flexible, de espesor despreciable, sometida a las dos tensiones T . Escribir la expresión de la fuerza de contacto R entre la cinta y las superficies planas soportantes en A y B. La acción tiene lugar en el plano horizontal, por lo que no intervienen los pesos de los rodillos y de la cinta.



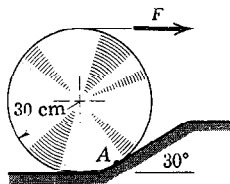
Problema 3/23

3/24. Calcular el momento del par M necesario para hacer que la rueda de 40 kg ruede hacia arriba del plano inclinado. Determinar también la fuerza de contacto R en A. La superficie del plano inclinado es suficientemente rugosa para impedir el deslizamiento.

Resp. $M = 600$ cm·kp, $R = 40$ kp

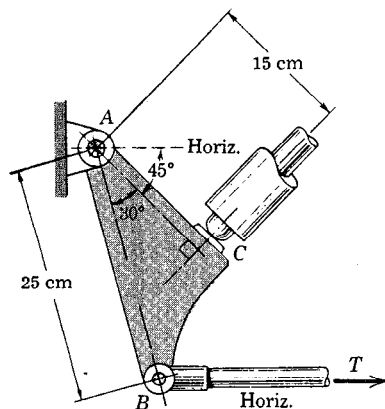


Problema 3/24



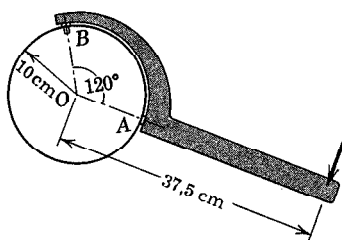
Problema 3/25

3/25. Sustituir el par M del problema 3/24 por la fuerza horizontal F y calcular su valor necesario para hacer rodar la rueda de 40 kg hacia arriba del plano inclinado. Determinar también la fuerza de contacto R en A . No se produce deslizamiento.



Problema 3/26

3/26. El miembro articulado se utiliza para accionar un dispositivo de pasador que fije un gran remolque a su chasis. Si se precisa una tensión $T = 400$ N en la barra de mando horizontal para empujar la varilla de presión en C , estimar mediante una solución vectorial la fuerza que soporta el pasador A .

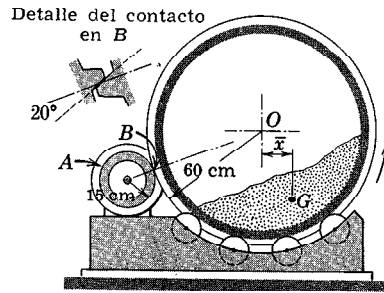


Problema 3/27

3/27. La llave de gancho de la figura se utiliza para hacer girar collares y ejes. Si se precisa un momento de 90 cm N para hacer girar el collar de 20 cm de diámetro alrededor de su centro O bajo la acción de la fuerza aplicada F , determinar la fuerza de contacto R sobre la superficie lisa en A . El encaje del pitón en B puede considerarse efectuado en la periferia del collar.

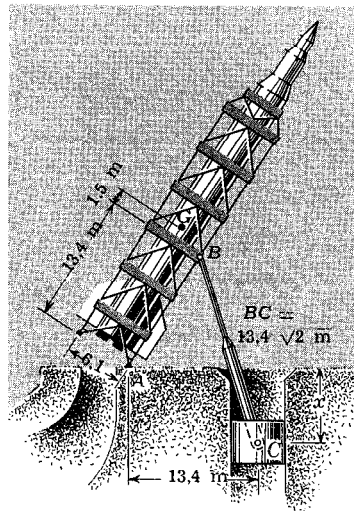
Resp. $R = 1180$ N

3/28. Un gran tambor simétrico para secar arena está accionado por un motor con engranaje tal como el representado en la figura. Si la arena pesa 750 kp y el piñón A del motor suministra al engranaje del tambor una fuerza media entre dientes de 290 kp normal a las superficies en contacto en B, calcular el desplazamiento medio \bar{x} del centro de gravedad de la arena respecto a la línea central vertical. Despreciar todo rozamiento en los rodillos soportantes. Resp. $\bar{x} = 21,8 \text{ cm}$



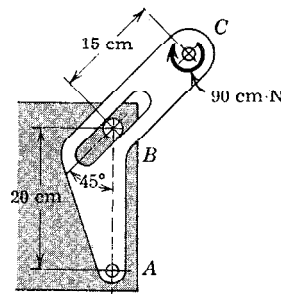
Problema 3/28

3/29. La estructura para el lanzamiento de un cohete de prueba y el cohete de su interior tienen un peso combinado de 700 000 kp con centro de gravedad en G. Determinar el valor de equilibrio de la fuerza que se ejerce sobre el eje del pasador en A para la posición en la cual $x = 6 \text{ m}$. Resuélvase gráficamente.

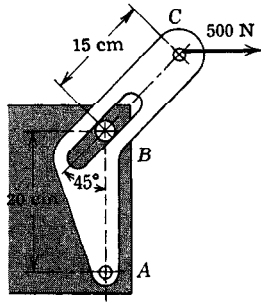


Problema 3/29

3/30. El soporte ligero ABC está articulado libremente en A y está vinculado por el pasador fijo B que penetra en la ranura lisa. Calcular la fuerza R que soporta el pasador A cuando se somete el soporte al par de sentido horario de 90 cm·N en C.



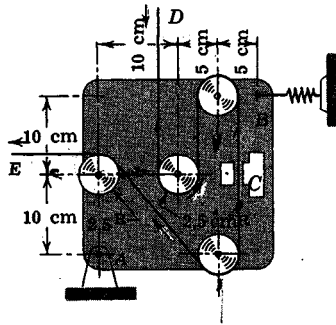
Problema 3/30



Problema 3/31

3/31. Se sustituye el par de 90 cm·N del problema 3/30 por la fuerza horizontal de 500 N aplicada al soporte ranurado en la forma que se indica. Calcular la fuerza que soporta el pasador A. Las superficies de la ranura son lisas.

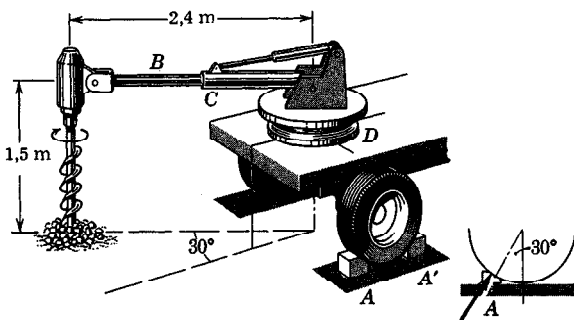
Resp. $A = 810 \text{ N}$



Problema 3/32

3/32. La cinta magnética sometida a una tensión de 10,0 N en D pasa por las poleas guía y por la cabeza borradora C con celeridad constante. A consecuencia de un pequeño rozamiento en los cojinetes de las poleas, la cinta en E se halla sometida a una tensión de 11,0 N. Determinar la tensión T en el muelle soportante B. La placa es horizontal y está montada sobre un soporte de precisión de aguja en A.

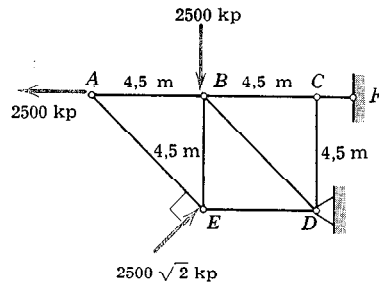
Resp. $T = 10,7 \text{ N}$



Problema 3/33

3/33. El motor de la perforadora para plantar postes suministra un par de 500 m·N a la broca. El brazo B puede deslizar libremente por dentro de la guía cilíndrica C pero no puede girar alrededor del eje horizontal de C. Si el conjunto puede girar alrededor del eje vertical de la montura D, determinar la fuerza ejercida contra la rueda trasera derecha por el bloque A (o A') que impide la rodadura del camión desfrenado.

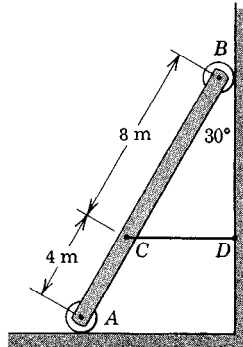
3/34. La armadura rígida $ABCDE$ soporta las cargas aplicadas que se indican. Despréciase el peso de la armadura y determínese la reacción en D y la fuerza en CF .



Problema 3/34

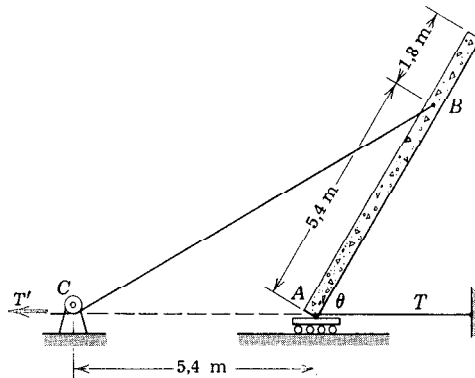
3/35. La barra uniforme con rodillos en sus extremos pesa 100 kp y se mantiene en equilibrio en la posición indicada gracias a la cuerda horizontal CD . Determinar la reacción en B escribiendo una sola ecuación de equilibrio. Hallar la tensión T de CD escribiendo una sola ecuación de equilibrio, sin que intervenga la reacción en B . Obtener la reacción en A por simple inspección.

Resp. $B = 43,3$ kp, $T = 43,3$ kp,
 $A = 100$ kp

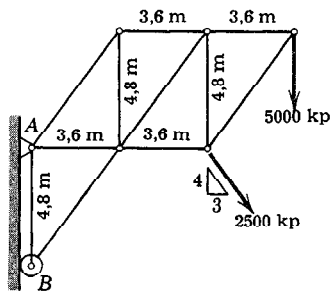


Problema 3/35

3/36. La losa uniforme de hormigón que se ve de perfil pesa 25 toneladas y se lleva lentamente a la posición vertical por acción de la tensión T' del cable elevador. Calcular la tensión T del cable de anclaje horizontal para la posición en que $\theta = 60^\circ$ utilizando una sola ecuación de equilibrio.



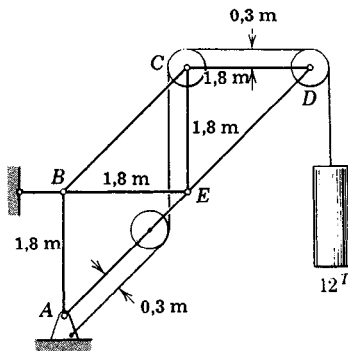
Problema 3/36



Problema 3/37

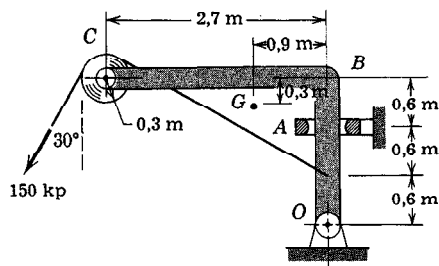
3/37. El reticulado pesa 8000 kp y soporta las dos cargas que se indican. Si la reacción en el soporte de rodillo B es de 25 000 kp, determinar la distancia horizontal a del centro de gravedad del reticulado a AB. Hallar también la fuerza total soportada por el pasador A.

Resp. $a = 6,45$ m, $A = 30\,450$ kp



Problema 3/38

3/38. El peso de la estructura rígida ABCDE es pequeño frente a la carga de 12 toneladas que soporta. Calcular la fuerza en el tirante horizontal de B y la soportada por el pasador A.

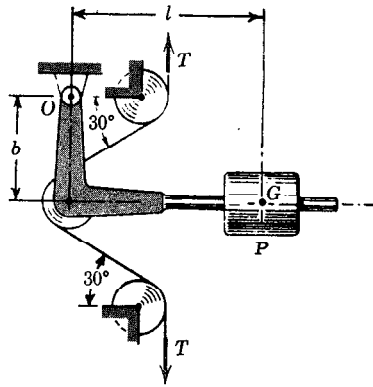


Problema 3/39

3/39. El miembro OBC y la polea C pesan en conjunto 250 kp, teniendo el centro de gravedad en G. Calcular la fuerza soportada por el pasador O cuando se aplica la carga de 150 kp. El collar A sólo puede proporcionar apoyo en la dirección horizontal.

Resp. $O = 672,5$ kp

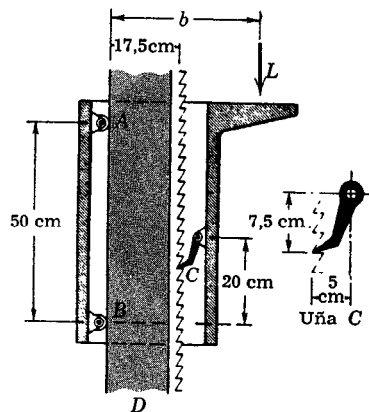
3/40. Determinar la longitud l si el peso P mantiene en la correa una tensión T especificada para la posición que se indica. Despreciar el peso del brazo y de la polea central frente a P . Hallar también la fuerza R que soporta el pasador O .



Problema 3 40

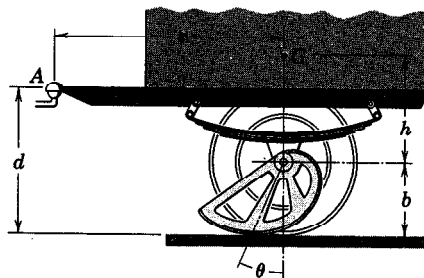
3/41. El dispositivo representado en sección puede soportar la carga L a distintas alturas colocando la uña C en otro diente a la altura deseada en la columna vertical D . Determinar la distancia b a la que habrá que colocar la carga para que los dos rodillos A y B soporten fuerzas iguales. El peso del dispositivo es despreciable frente a L .

Resp. $b = 25,83 \text{ cm}$



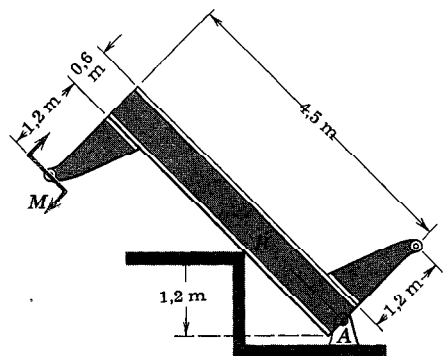
Problema 3 41

3/42. El gato de un remolque consiste en dos segmentos de forma espiral montados uno al eje de cada rueda y que pueden hacerse descender por debajo de dicho eje. Se tira hacia adelante del remolque que rodará sobre el segmento espiral de dimensión radial creciente. El rozamiento con el suelo impide el deslizamiento en el punto de contacto. Determinar, para una espiral de ángulo θ constante entre la línea radial y la tangente a la curva, la expresión de la fuerza F de tracción, que se ejerce sobre el punto de enganche A , necesaria para elevar el remolque sobre los dos segmentos del gato. El peso total del remolque es P y su centro de gravedad está en G .

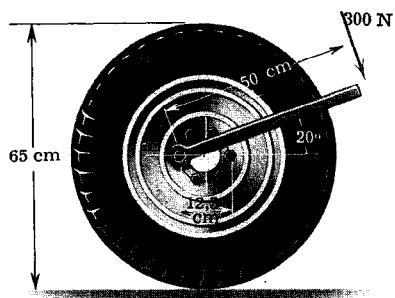


Problema 3/42

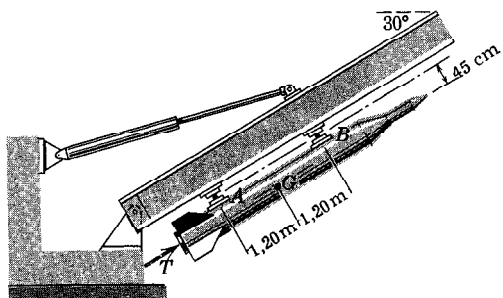
$$\text{Resp. } F = \frac{Pc}{c \operatorname{ctg} \theta + d - b}$$



Problema 3/43



Problema 3/44



Problema 3/45

3/43. La viga en I y los soportes terminales simétricos pesan en conjunto 750 kp y están apoyados en la forma que se indica. Determinar el par M que habría que aplicar para reducir la reacción en B a la mitad del valor que existiría si no se aplicara par alguno. Las superficies de contacto en B son lisas.

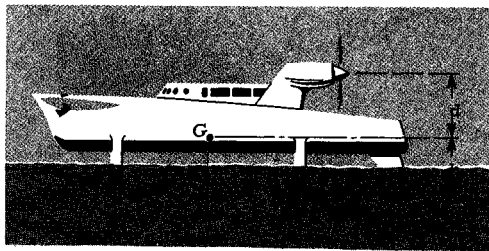
3/44. Cuando a la llave de tuercas de la figura se le aplica una fuerza de 300 N en la forma que se indica, la rueda no gira a causa de la fuerza de rozamiento que se ejerce entre ella y el suelo. Utilizando solamente una ecuación de equilibrio, determinar la componente horizontal O_x de la reacción ejercida sobre la rueda por el cojinete fijo en O . Analizar la llave y la rueda como si constituyeran un cuerpo único.

Resp. $O_x = 510$ N

3/45. Las correderas que mantienen al proyectil en contacto con la rampa de lanzamiento deslizan por las ranuras en T del carril guía. En una prueba estática de un proyectil se fija al carril la corredera A pero no la B . Si el proyectil pesa 1600 kp estando en G su centro de gravedad y si el empuje estático es de 2200 kp, determinar la fuerza que soporta la clavija que une el proyectil a la corredera B .

3/46. Una embarcación experimental está equipada con cuatro hidroalas (hidrofoil), dos a cada lado, en la forma que se indica. La embarcación tiene un peso total P y su centro de gravedad está en G . La hélice aérea proporciona el empuje. La razón de la sustentación al freno es n para cada ala. La sustentación es la fuerza vertical que soporta cada ala y el freno es la resistencia horizontal al movimiento a través del agua. Escribir, para un empuje E dado de la hélice, la expresión del freno F sobre cada una de las dos alas delanteras.

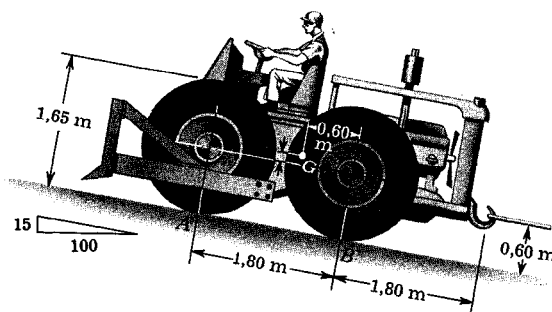
$$\text{Resp. } F = \frac{1}{4n} \left(P + E \frac{d+h}{b} \right)$$



Problema 3/46

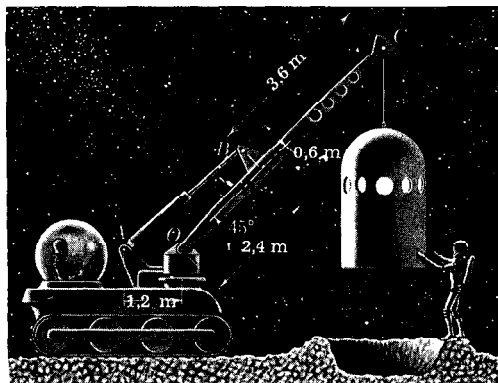
3/47. El tractor con neumáticos de goma de la figura pesa 15 000 kp, su centro de gravedad está en G y se utiliza para empujar o arrastrar cargas pesadas. Determinar la carga P que puede arrastrar a una velocidad constante de 4,75 km/h subiendo una pendiente del 15 %, si la fuerza motriz ejercida junto a la tierra sobre cada una de sus cuatro ruedas es el 80 % de la fuerza normal bajo la rueda correspondiente. Hallar, también, la reacción normal N_B bajo el par de ruedas traseras B .

Resp. $P = 9650 \text{ kp}$, $N_B = 14100 \text{ kp}$

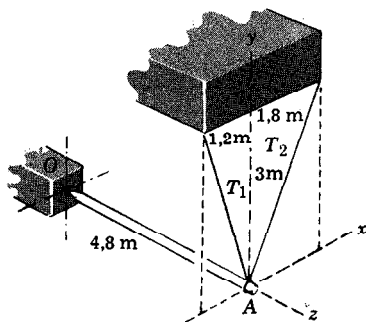


Problema 3/47

3/48. El refugio lunar está fabricado de aluminio y pesa 240 kp al salir de la fábrica de Los Angeles. La pluma OC de la grúa lunar pesa 48 kp en fábrica y su centro de gravedad está a la mitad de su longitud. Determinar la fuerza F en el cilindro hidráulico AB de la grúa en la posición representada en que está colocando el refugio sobre la superficie lunar. Recuérdese que la gravedad lunar es $1/6$ de la terrestre.

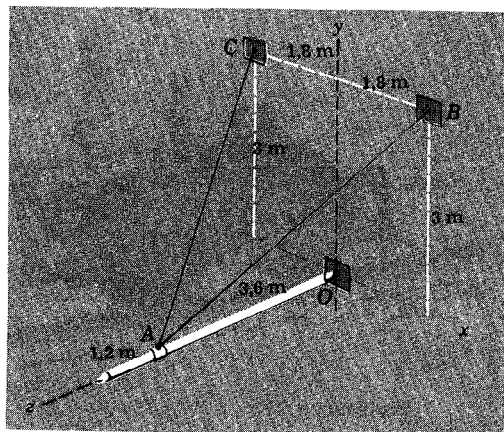


Problema 3/48



Problema 3/49

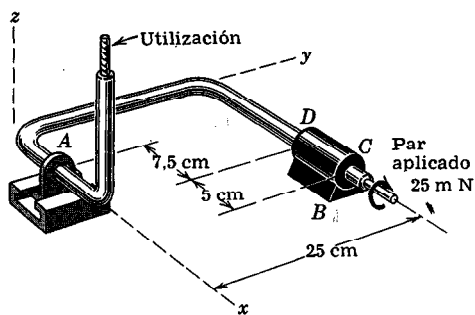
3/49. La pluma horizontal uniforme pesa 160 kp y está soportada por los dos cables contenidos en el plano vertical $x-y$ y por la rótula situada en O . Calcular las tensiones T_1 y T_2 de los cables.



Problema 3/50

3/50. La pluma horizontal uniforme pesa 160 kp y está soportada por los dos cables anclados en B y C y por la rótula en O . Calcular la tensión T del cable AC .

Resp. $T = 89,25$ kp



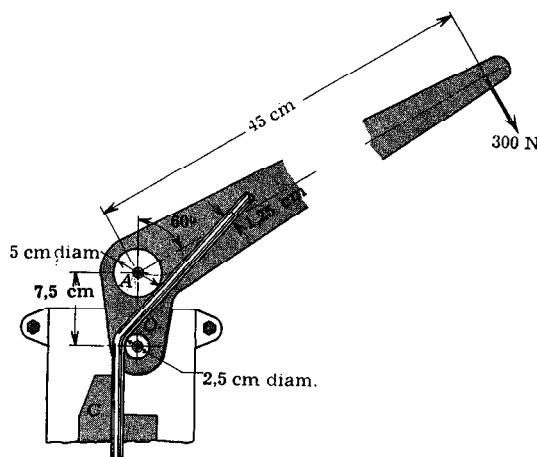
Problema 3/51

3/51. Un eje flexible funciona en el interior de un tubo rígido doblado de la manera que se indica y soportado en A y B . En A , el soporte puede deslizarse libremente en la dirección y pero puede ejercer una fuerza de ligadura contra el tubo en la dirección z . El orificio del soporte B es algo mayor que el tubo, de forma que tiene contacto en los extremos C y D . Determinar las fuerzas de contacto en C , D y A mientras funciona el eje a velocidad constante bajo la acción del par indicado de momento 25 m·N. Una revolución en el extremo de aplicación origina una revolución en el extremo de utilización, y con rozamiento despreciable el momento del par útil es igual al del par aplicado. Despréciense los pesos del eje y del tubo.

Resp. $A = 100$ N, $C = 522$ N,
 $D = 559$ N

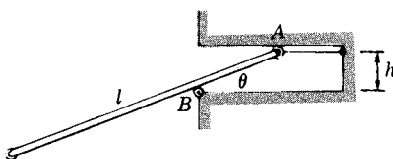
• 3/52. El doblador de barras consiste en una palanca accionada a mano que gira alrededor del eje O y que lleva dos rodillos curvadores en A y O que pueden girar libremente alrededor de sus ejes. La barra de 1,25 cm se sujeta entre las mordazas C . Si para la posición indicada hay que aplicar a la empuñadura una fuerza de 300 N, calcular las fuerzas correspondientes que se ejercen sobre la palanca en A y en O . Para la configuración especificada, el valor de θ es $48^\circ 11'$.

Resp. $A = 2615 \text{ N}$, $O = 2335 \text{ N}$



Problema 3/52

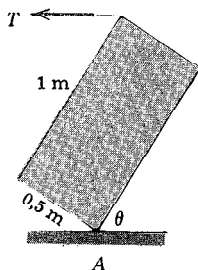
3/53. La barra esbelta uniforme de longitud l tiene un peso P y está soportada en el plano vertical por los dos rodillos y el hilo horizontal en la forma que se indica. Determinar, para una posición dada definida por θ , la tensión T del hilo y las reacciones de los rodillos sobre la barra en A y B expresadas en función de l , h , θ y P . Despreciar la anchura de la barra y el radio del rodillo B . El centro de gravedad de la barra está más al exterior que el rodillo B .



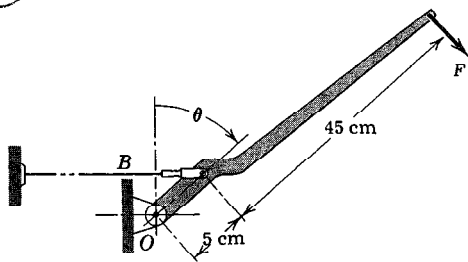
Problema 3/53

3/54. El bloque rectangular uniforme se apoya sobre su arista A y está soportado por la tensión horizontal T de la cuerda amarrada a la arista diagonalmente opuesta. Si la componente tangencial (horizontal) de la fuerza de contacto en A no puede superar el 20 % de la componente normal de ésta sin que se produzca deslizamiento, calcular el valor mínimo de θ que pueda mantenerse, habiendo equilibrio, al ir aflojando gradualmente la cuerda conservándola siempre horizontal.

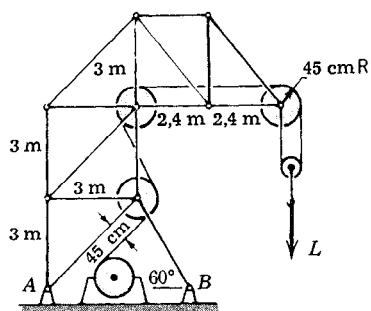
Resp. $\theta_{\min.} = 41^\circ 38'$



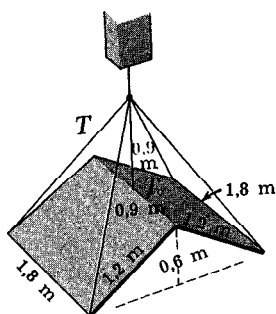
Problema 3/54



Problema 3/55



Problema 3/56



Problema 3/57

3/55. Se utiliza la palanca para estirar un alambre largo B sin superar su límite de elasticidad. La rigidez total del alambre es $k = EA/l$ donde E es el módulo de Young (fuerza/alargamiento del material del alambre), A es el área de la sección recta del mismo y l es su longitud total cuando no está estirado. Si la longitud l del alambre es grande, se puede suponer que éste permanece horizontal durante el movimiento de la palanca. Si se quiere estirar 30 m de alambre de acero de galga N.º 10 (diámetro 2,59 mm y área de la sección recta $52,7(10^{-8}) \text{ cm}^2$), determinar el valor máximo de la fuerza F y el valor correspondiente de θ si comienza el estiramiento en $\theta = 0$. Calcular la fuerza cortante Q que ha de soportar el pasador O en esta condición de máximo.

Resp. $F_{\text{máx.}} = 87,8 \text{ N}$ a $\theta = \pi/4$,
 $Q = 1153 \text{ N}$

3/56. Si se aumenta en 4 toneladas la carga L de la grúa, calcular el correspondiente incremento ΔA de la fuerza a que se halla sometido el pasador A .

Resp. $\Delta A = 5,66$ toneladas

3/57. Dos placas rectangulares, cada una de las cuales pesa 400 kp están articuladas por su arista común y soportadas por un cable central y cuatro cables simétricos amarrados a los vértices de la manera indicada. Calcular la tensión T_0 en el cable central de 90 cm y la tensión T en cada uno de los cables que van a los vértices.

3/58. Si el anclaje B del cable AB del problema 3/50 se colocase a 1,2 m del plano vertical $y-z$ en vez de a 1,8 m, manteniéndose invariables las demás condiciones, calcular la tensión T del cable AC .

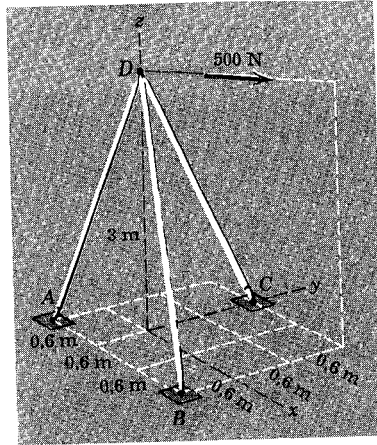
Resp. $T = 71,4 \text{ kp}$

3/59. Determinar la fuerza en cada uno de los miembros del trípode. Cada uno de ellos está sujeto por sus extremos mediante rótulas y puede soportar tensión o compresión. Pueden despreciarse los pesos de los miembros.

Resp. $A = 1020,5 \text{ N}$ tensión

$B = 430,5 \text{ N}$ compresión

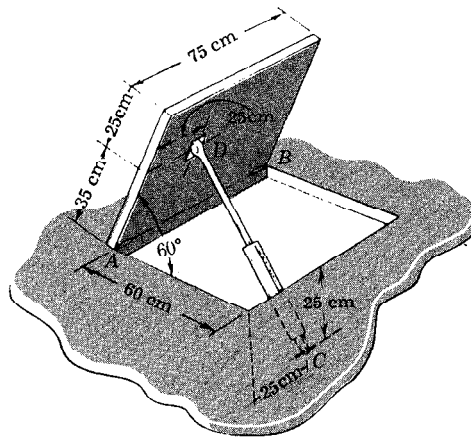
$C = 634,5 \text{ N}$ compresión



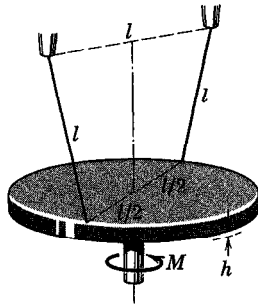
Problema 3/59

3/60. La trampa de acceso en el piso horizontal es una placa rectangular uniforme que pesa 90 kp y está engoznada por sus vértices A y B . El cilindro hidráulico CD abre y cierra la trampa. Determinar la fuerza soportada por cada gozne para la posición de 60° representada.

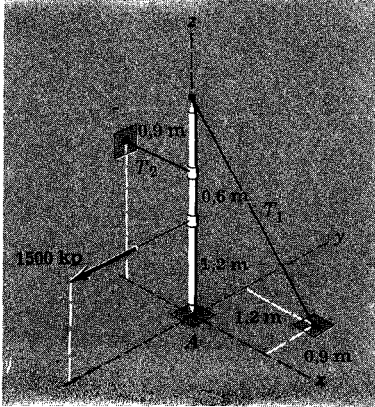
Resp. $A = 28,5 \text{ kp}$, $B = 35,5 \text{ kp}$



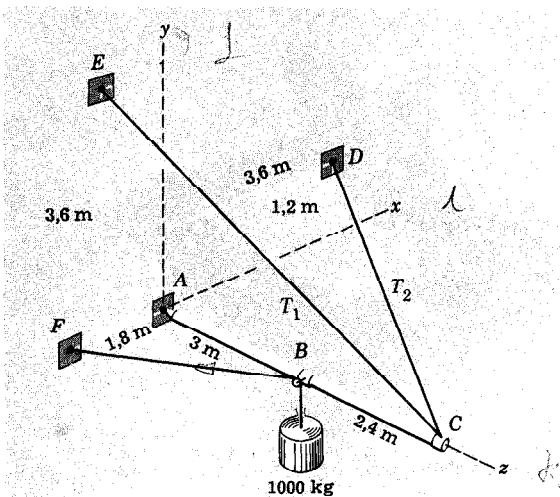
Problema 3/60



Problema 3/61



Problema 3/62



Problema 3/63

3/61. El disco circular uniforme de radio $l/2$ está suspendido por dos hilos de longitud l unidos a dos puntos de un plano horizontal separados una distancia l . El disco y el pequeño eje que pasa por su centro tienen en conjunto un peso P . Determinar la altura h que debe elevarse el disco para alcanzar la posición de equilibrio correspondiente al par M aplicado al eje. ¿Cuál es el valor de M cuando h tiende a l ?

$$\text{Resp. } h = l \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{2M}{Pl} \right)^2} \right)$$

$$\text{Para } h \rightarrow l, \quad M = \frac{Pl}{2}$$

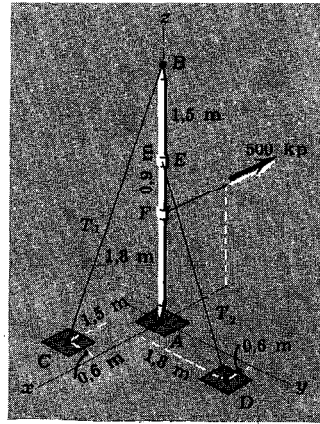
3/62. Si el peso del mástil es despreciable frente a la carga aplicada de 1500 kp, determinar las dos tensiones T_1 y T_2 de los cables y la fuerza A que se ejerce en la rótula A .

$$\begin{aligned} \text{Resp. } T_1 &= 2290 \text{ kp} \\ T_2 &= 1333,5 \text{ kp} \\ A &= 2210 \text{ kp} \end{aligned}$$

3/63. La pluma de acero de 5,4 m pesa 300 kp y tiene su centro de gravedad en su punto medio. Está soportada por una rótula en A y por los dos cables sometidos a las tensiones T_1 y T_2 . El cable que soporta la carga de 1000 kg pasa por una polea situada en B y está amarrado en F al plano vertical $x-y$. Calcular la tensión T_1 utilizando una sola ecuación de equilibrio.

$$\text{Resp. } T_1 = 1007 \text{ kp}$$

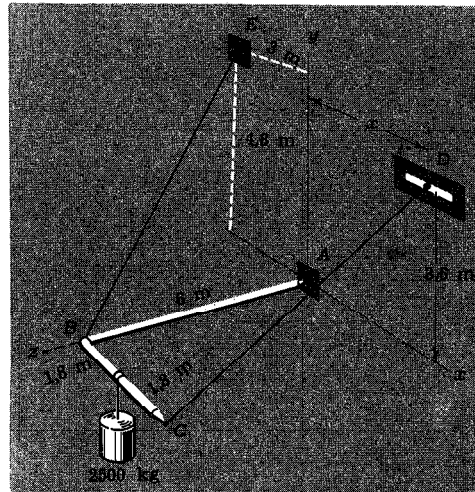
3/64. El mástil pesa 150 kp y está soportado en A por una rótula. Calcular la tensión T_1 cuando se aplica a F la fuerza horizontal de 500 kp.



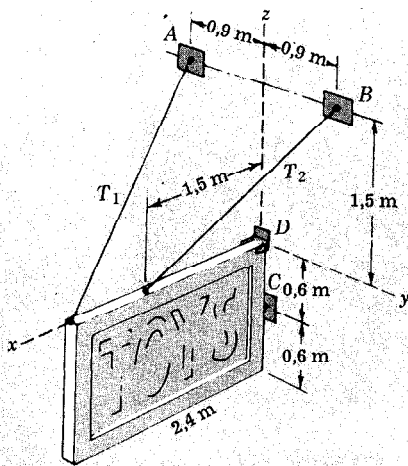
Problema 3/64

3/65. El miembro rígido ABC está unido a la superficie vertical $x-y$ mediante una rótula en A y está soportado por los cables BE y CD. Podemos despreciar el peso del miembro frente a la carga de 2500 kp que soporta. Existe una posición D en la ranura horizontal por la que debe pasar y fijarse el cable para que el miembro mantenga la posición indicada. Hallar x .

Resp. $x = 2,25$ m



Problema 3/65



Problema 3 66

◀ 3/66. Un anuncio rectangular de bandera pesa 100 kp, estando el centro de gravedad en el centro del rectángulo. El apoyo contra la pared en el punto C puede tratarse como rótula. En el vértice D se tiene apoyo solamente en la dirección y . Calcular las tensiones T_1 y T_2 de los cables soportantes, la fuerza total que se soporta en C y la fuerza lateral R que se soporta en D.

Resp. $T_1 = 35,35 \text{ kp}$ $T_2 = 43,9 \text{ kp}$
 $R = 6,45 \text{ kp}$ $C = 78,3 \text{ kp}$

◀ 3/67 Desarrollar otro sistema de ecuaciones independientes que sean necesarias y suficientes para establecer el equilibrio de un sistema de fuerzas concurrentes en un punto y no coplanarias. (V. caso 3 de fig. 29.)

◀ 3/68. Desarrollar otro sistema de ecuaciones independientes que sean necesarias y suficientes para establecer el equilibrio de un sistema de fuerzas no coplanarias que corten todas a una recta. (V. caso 4 de figura 29.)

16. Adecuación de las ligaduras. En el apartado anterior se aplicaban las ecuaciones de equilibrio a diversos cuerpos isostáticos, es decir, que sólo tenían el número mínimo de apoyos necesarios para establecer o mantener una posición de equilibrio, permitiendo en consecuencia el cálculo de todas las fuerzas exteriores incógnitas a partir de las ecuaciones de equilibrio. Se indicó que la introducción de más soportes de los necesarios para mantener una posición de equilibrio fija daba lugar a una condición de superabundancia de los apoyos, en cuyo caso las ecuaciones de equilibrio ya no constituían criterios suficientes para la determinación de todas las reacciones de apoyo desconocidas. La determinación de la adecuación o inadecuación de los apoyos para mantener un cuerpo en una posición de equilibrio suele poderse hacer por simple inspección, pero en muchas ocasiones será necesario plantear la cuestión de la adecuación por medio de criterios analíticos. Por tanto, habrá que examinar más detalladamente la naturaleza de las ligaduras soportantes.

La posición de un cuerpo en el espacio está descrita por sus coordenadas, medidas respecto a una cierta base de referencia conveniente. El número de coordenadas independientes necesarias para especificar por completo la posición de un cuerpo se conoce con el nombre de *grados de libertad* del cuerpo. Así, una corredera confinada a moverse en una ranura fija tiene un solo grado de libertad, ya que para determinar su posición la única cantidad que necesitamos es la medida de su distancia a lo largo de la ranura. Un cuerpo que gire alrededor de un eje fijo tiene un solo grado de libertad que es su posición angular alrededor del eje. Un cuerpo rígido confinado a moverse en un plano dado puede tener como máximo tres grados de libertad, representados por dos coordenadas lineales en el plano que definan la posición de un punto particular cualquiera del cuerpo y por un ángulo que especifique la posición rotatoria del cuerpo respecto a dicho punto. Un cuerpo rígido en el espacio tiene seis grados de libertad correspondientes a sus seis movimientos posibles: movimiento lineal en las direcciones x , y , z , por ejemplo, y movimiento angular alrededor de ejes de direcciones x , y , z .

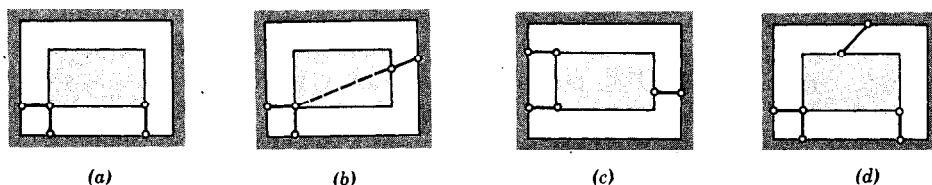
Para llevar un cuerpo al equilibrio deberá haber al menos una fuerza de ligadura, o su equivalencia, para cada grado de libertad que tenga el cuerpo a fin de fijar el cuerpo contra posibles movimientos debidos a desequilibrios de fuerzas impuestos. Sin embargo, una posición de equilibrio no queda asegurada simplemente por la existencia de un número de ligaduras igual al número de grados de libertad, porque la disposición geométrica de las ligaduras es también un factor determinante, según vamos a ver. En el caso bidimensional, en donde la posición del cuerpo está confinada a un plano dado, será necesario tener al menos tres reacciones de ligadura para asegurar la fijeza completa del cuerpo. Se ilustra esta condición en la figura 33a, en donde el cuerpo rectangular está inmovilizado por dos enlaces que fijan un vértice y por un tercer enlace que evita que el cuerpo gire alrededor del vértice fijo. Se

impiden así todos los movimientos posibles en el plano resultante de fuerzas aplicadas cualesquiera (no representadas) y queda asegurada su inmovilización. Cada uno de los enlaces se trata como miembro de dos fuerzas capaz de aplicar fuerza al cuerpo solamente en la dirección del enlace. La ligadura que proporcionan los dos enlaces del vértice es el modelo equivalente a una articulación de pasador o gozne, la cual puede ofrecer ligadura en las dos direcciones normales al eje del pasador.

No hay límite para el número de configuraciones de los enlaces restrictivos que mantengan la inmovilización del cuerpo. Sin embargo, existen dos casos particulares en los que la configuración de los tres enlaces sólo produce inmovilización parcial y por tanto la posición de equilibrio no es perfectamente rígida. El primer caso lo tenemos cuando los enlaces son concurrentes (fig. 33b) y se ve que esta disposición permite una pequeña rotación inicial del cuerpo antes de que la oblicuidad inducida del tercer enlace respecto a su posición inicial en que no actúa proporcione las fuerzas de ligadura necesarias para evitar el movimiento ulterior. El segundo caso de ligadura parcial lo tenemos cuando los tres enlaces sean paralelos (fig. 33c). En este caso se podrá producir un pequeño movimiento vertical sin resistencia inicial. Cada uno de los cuerpos parcialmente vinculados que acabamos de presentar es hiperestático.

Si se añade un cuarto enlace para vincular un cuerpo bidimensional que ya esté en condición de inmovilización total con tres enlaces (fig. 33d), habrá entonces más apoyos de los necesarios para mantener la posición de equilibrio y el enlace 4 resulta superabundante. Con el cuarto enlace colocado, el cuerpo es hiperestático.

En el caso tridimensional, el modelo esquemático es el bloque rectangular presentado en la figura 34a, el cual representa una configuración del número ilimitado de posibles configuraciones de seis enlaces restrictivos que producirán una inmovilización total del cuerpo cuando esté sometido a cargas aplicadas (no representadas). En este caso el vértice A está inmovilizado por los tres enlaces 1, 2 y 3, que corresponderían a la inmovilización que proporciona una articulación de rótula. El enlace 4 impide la rotación alrededor del eje AB; el 5 impide la rotación alrededor de AC; y la pequeña rotación posible restante



(a) Inmovilización total Ligaduras adecuadas (b) Inmovilización incompleta Ligaduras parciales (c) Inmovilización incompleta Ligaduras parciales (d) Inmovilización excesiva Ligadura superabundante

Figura 33

alrededor de AD la impide el enlace 6. No es posible inmovilizar por completo el cuerpo con menos de seis enlaces restrictivos o de sus equivalentes.

Al igual que en el caso bidimensional, existen dos situaciones especiales en las cuales la configuración de los enlaces restrictivos sólo proporciona inmovilización parcial y por tanto la posición de equilibrio no es perfectamente rígida. En la figura 34b puede verse un ejemplo del primer caso en el cual los enlaces o sus prolongaciones cortan todos a la recta común AE . Como las fuerzas inducidas en los enlaces restrictivos pasan todas por AE , este sistema de ligaduras no ofrecerá inicialmente resistencia contra el momento respecto a AE que pudieran inducir las cargas aplicadas. Por tanto se podrá producir una pequeña rotación inicial alrededor de AE y el cuerpo sólo estaría parcialmente vincula-

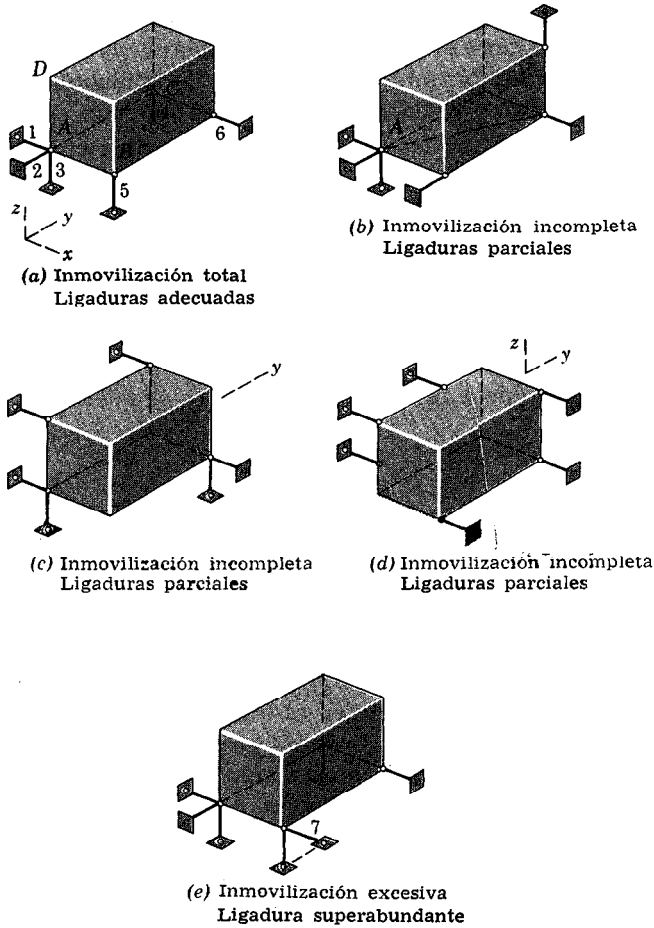


Figura 34

do. En las figuras 34c y d se presentan dos ejemplos del segundo caso de ligadura parcial, en donde los enlaces restrictivos están en planos paralelos. En la parte c de la figura el bloque puede experimentar en la dirección y un pequeño movimiento sin ligadura. En la parte d de la figura, en donde todas las fuerzas de ligadura son paralelas, el cuerpo podría efectuar pequeños movimientos no restringidos según las direcciones y y z , normales a los enlaces, antes de que la angularidad inducida en éstos sea suficiente para evitar el ulterior movimiento. Con seis ligaduras, los cuerpos representados por las figuras 34b, c y d son hiperestáticos.

Si a un sistema de seis ligaduras adecuadamente situadas para inmovilizar totalmente en el espacio un cuerpo rígido se le añadiera una séptima ligadura, como se indica en la figura 34e, se habrían proporcionado más apoyos de los necesarios para mantener la posición de equilibrio y el enlace 7 sería superabundante. Con dicho séptimo enlace colocado, el cuerpo sería hiperestático.

Teniendo presente los anteriores ejemplos de configuraciones de ligaduras que determinan la inmovilización, vamos a desarrollar un criterio analítico que determine la adecuación de las ligaduras. Consideremos el cuerpo rígido genérico en el espacio, con seis enlaces restrictivos, representado esquemáticamente en la figura 35. Según se ha señalado, la posición de dicho cuerpo se puede determinar especificando la situación de un punto conveniente cualquiera del cuerpo, tal como el P , y la orientación angular del cuerpo respecto a P . Vamos a utilizar este concepto para expresar el movimiento posible de cada uno de los puntos en donde se unen al cuerpo los enlaces restrictivos. La situación respecto a la referencia fija x - y - z del punto de amarre A del enlace n , que representa a uno cualquiera de los seis enlaces, es simplemente

$$\rho = \mathbf{R} + \mathbf{r}_n .$$

Supongamos que el cuerpo gira un pequeño ángulo $\Delta\theta$ alrededor de un eje que pase por P . Esta rotación puede expresarse por medio del vector $\Delta\theta = \mathbf{i}\Delta\theta_x + \mathbf{j}\Delta\theta_y + \mathbf{k}\Delta\theta_z$ donde se toma como dirección del vector la del eje de rotación y su sentido está determinado por la regla de la mano derecha.* A consecuencia de dicha rotación, el punto A sufrirá un pequeño movimiento según un arco al que corresponde $\Delta\mathbf{r}_n$, representado en el dibujo de la derecha de la figura 35, de magnitud igual al radio $r_n \sin \alpha$ multiplicado por el ángulo $\Delta\theta$ expresado en radianes, o sea $\Delta\theta(r_n \sin \alpha)$, donde $\Delta\theta$ tiende a cero en el límite. En forma vectorial, este movimiento se escribe $\Delta\mathbf{r}_n = \Delta\theta \times \mathbf{r}_n$. Si P sufriera, además, un pequeño corrimiento dado por el vector $\Delta\mathbf{R} = \mathbf{i}\Delta x +$

* Las rotaciones finitas no pueden escribirse en forma de vector, pero sí las infinitesimales. Como $\Delta\theta$ es una rotación pequeña que, en el límite, podemos considerarla infinitesimal, será permisible su representación por un vector.

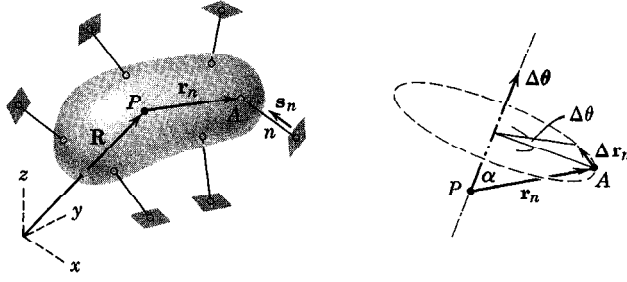


Figura 35

$+j\Delta y + k\Delta z$, el cambio de posición correspondiente del punto A resultante de ambos movimientos en conjunto sería

$$\Delta \rho = \Delta \mathbf{R} + \Delta \theta \times \mathbf{r}_n.$$

Pero el punto A está vinculado por el enlace n de manera que, si A tuviera algún movimiento, éste debería ser perpendicular al enlace n , cuya longitud permanece invariable. Si es $\mathbf{s}_n = i s_{nx} + j s_{ny} + k s_{nz}$ un vector unitario de la dirección del enlace n , el movimiento $\Delta \rho$ no podrá tener componente alguna en la dirección de \mathbf{s}_n .

Así pues

$$\Delta \rho \cdot \mathbf{s}_n = 0.$$

La restricción de todo posible movimiento de A resulta ahora ser

$$(\Delta \mathbf{R} + \Delta \theta \times \mathbf{r}_n) \cdot \mathbf{s}_n = 0.$$

Sustituyendo los anteriores vectores por sus componentes i, j y k , desarrollando y reagrupando términos, resulta:

$$s_{nx} \Delta x + s_{ny} \Delta y + s_{nz} \Delta z + (r_{ny} s_{nz} - r_{nz} s_{ny}) \Delta \theta_x + (r_{nz} s_{nx} - r_{nx} s_{nz}) \Delta \theta_y + (r_{nx} s_{ny} - r_{ny} s_{nx}) \Delta \theta_z = 0 \quad (16)$$

donde

$$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

En el caso general, habrán seis ecuaciones lineales homogéneas de este tipo, una para cada uno de los puntos de amarre de los seis enlaces restrictivos equivalentes. Estas ecuaciones contienen los seis corrimientos incógnita $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta \theta_x, \Delta \theta_y, \Delta \theta_z$. Evidentemente, el cuerpo se hallará totalmente vinculado en una posición fija si se anulan los seis corrimientos, es decir, si

$$\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta \theta_x = \Delta \theta_y = \Delta \theta_z = 0.$$

De la teoría de ecuaciones lineales homogéneas sabemos que si el determinante D de los coeficientes de las incógnitas de las ecuaciones 16 no es nulo, todas

las incógnitas son cero. Recíprocamente, si el determinante fuese nulo las incógnitas no deberían tener todas el valor cero y serían posibles los corrimientos. En consecuencia, el ensayo para la adecuación de las ligaduras que proporcionen una inmovilización total podemos enunciarlo de la manera siguiente:

Ligaduras adecuadas para inmovilización total si $D \neq 0$.

Ligaduras inadecuadas para inmovilización total si $D = 0$.

Rara vez será necesario resolver un determinante de sexto orden, ya que suele ser posible la simplificación de las ecuaciones. Por ejemplo, si fuera evidente que un punto del cuerpo estuviera fijo, como sería el caso de una articulación de rótula, podría utilizarse este punto como punto de referencia P , lo que eliminaría automáticamente Δx , Δy , y Δz , reduciéndose en consecuencia el determinante a uno de tercer orden.

En el caso de cuerpos no inmovilizados por ligaduras fijas, otras fuerzas actuantes son equivalentes a las de ligadura. Por ejemplo, en un avión que vuela con velocidad constante, las fuerzas reactivas aerodinámicas, en contraste con las fuerzas propulsoras aplicadas, serían equivalentes a las ligaduras soportantes de una estructura fija.

Problemas tipo

3/69. Determinar si las ligaduras impuestas al bloque cúbico son adecuadas para asegurar una posición completamente fija.

Solución. Como origen de coordenadas y como punto de referencia P se toma la intersección de los enlaces 1 y 2. Como Δx y Δy son necesariamente cero en las seis ecuaciones (16) y como $s_{1z} = s_{2z} = 0$ en el punto P , los únicos términos no nulos que aparezcan se hallarán en las ecuaciones escritas para $n = 3, 4, 5$ y 6 .

Por simple inspección de la figura se ve que las componentes de \mathbf{s}_n y \mathbf{r}_n son

$$(n = 3) \quad s_{3x} = 0 \quad s_{3y} = 0 \quad s_{3z} = -1 \quad r_{3x} = 0 \quad r_{3y} = 0 \quad r_{3z} = b$$

$$(n = 4) \quad s_{4x} = 0 \quad s_{4y} = -1 \quad s_{4z} = 0 \quad r_{4x} = 0 \quad r_{4y} = b \quad r_{4z} = b$$

$$(n = 5) \quad s_{5x} = 0 \quad s_{5y} = -1 \quad s_{5z} = 0 \quad r_{5x} = b \quad r_{5y} = b \quad r_{5z} = 0$$

$$(n = 6) \quad s_{6x} = -1 \quad s_{6y} = 0 \quad s_{6z} = 0 \quad r_{6x} = b \quad r_{6y} = 0 \quad r_{6z} = b.$$

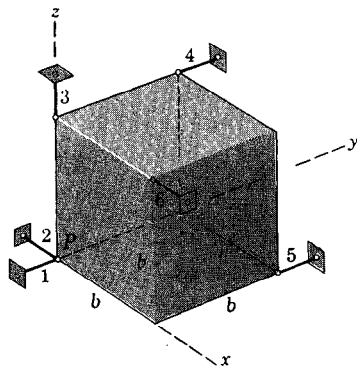
En las ecuaciones (16) vemos que el determinante de los coeficientes de las cuatro ecuaciones restantes será

$$D = \begin{vmatrix} (\Delta z) & (\Delta \theta_x) & (\Delta \theta_y) & (\Delta \theta_z) \\ (n = 3) & -1 & 0 & 0 & 0 \\ (n = 4) & 0 & b & 0 & 0 \\ (n = 5) & 0 & 0 & 0 & -b \\ (n = 6) & 0 & 0 & -b & 0 \end{vmatrix}$$

en donde se ha indicado la identidad de los términos de cada fila y de cada columna. Simplificando este determinante se tiene

$$D = -b \begin{vmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{vmatrix} = -b(-b^2) = b^3.$$

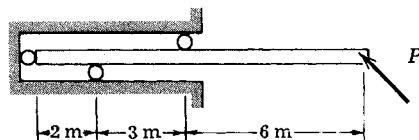
Como $D \neq 0$, las incógnitas Δz , $\Delta\theta_x$, $\Delta\theta_y$, y $\Delta\theta_z$ son idénticamente nulas además de Δx y Δy , con lo que podemos afirmar que el cubo se encuentra soportado en una posición fija. Por tanto, los soportes están situados adecuadamente para asegurar una inmovilización total.



Problema 3/69

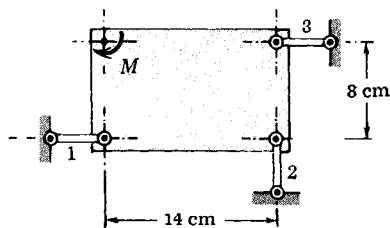
Problemas

3/70. Demostrar formalmente que la viga está vinculada adecuadamente para soportar la carga que se indica.

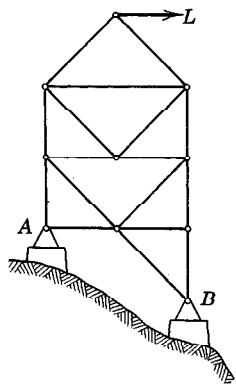


Problema 3 70

3/71. La placa plana se halla confinada al plano representado y está sometida al par $M = 100 \text{ cm}\cdot\text{N}$. Demostrar formalmente que los tres enlaces soportantes mantienen la placa en una posición fija.

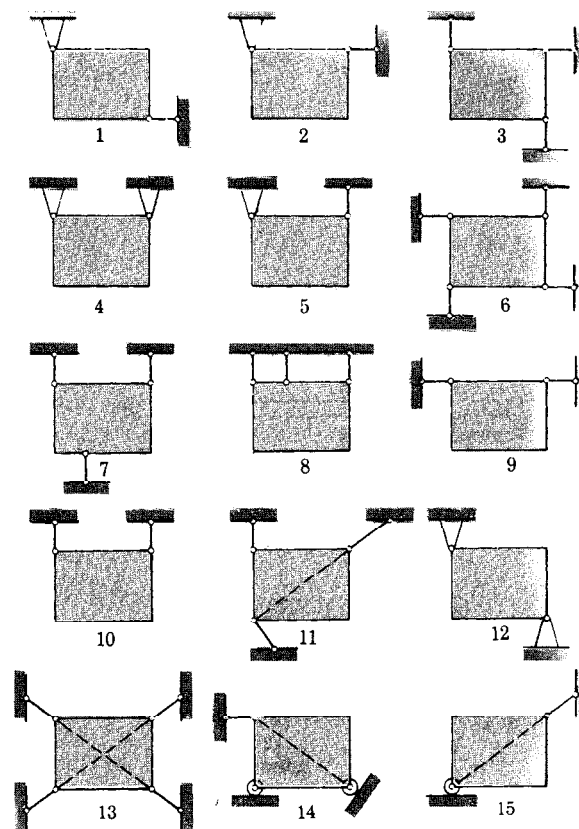


Problema 3/71



Problema 3/72

3/72. Si se conocieran la carga L y las dimensiones de la estructura, indicar qué cálculos podrían hacerse referentes a las fuerzas de ligadura en A y B , utilizando solamente ecuaciones de equilibrio.



Problema 3/73

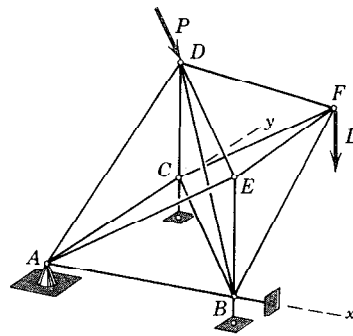
3/73. En la figura puede verse una colección de placas rectangulares y sus ligaduras, todas confinadas al plano de representación. Las placas podrían someterse a diversas cargas conocidas aplicadas en el plano de la placa. Identificar las placas que pertenecen a cada una de las categorías siguientes.

- (A) Inmovilización total con el número mínimo de ligaduras adecuadas.
- (B) Inmovilización parcial con ligaduras inadecuadas.
- (C) Inmovilización total con ligaduras superabundantes.
- (D) Inmovilización parcial con ligadura superabundante.
- (E) Inmovilización parcial transformada en inmovilización total tras un pequeño movimiento debido a la carga.
- (F) Inmovilización parcial con un gran movimiento posible.

3/74. La armadura espacial $ABCDEF$, consistente en un conjunto de 13 barras interconectadas, está sometida a las cargas L y P . Probar si las ligaduras son adecuadas o inadecuadas para mantener la armadura en su posición.

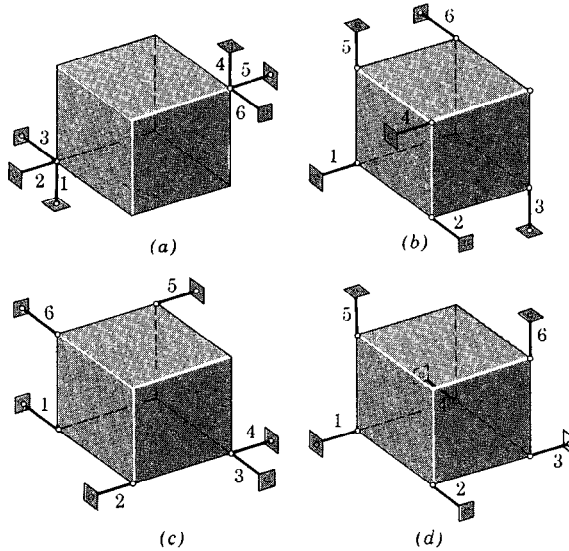
3/75. Resolver el problema 3/74 habiendo eliminado el enlace en B de dirección x y sustituyéndolo por un enlace soportante en B de dirección y .

Resp. Apoyo adecuado



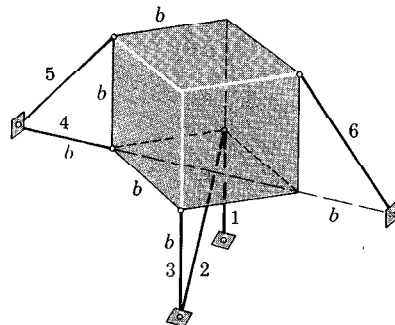
Problema 3/74

3/76. Demostrar por simple inspección que cada uno de los bloques cúbicos no está vinculado totalmente. Identificar el movimiento que podría producirse al someterlos a cargas e indicar una nueva colocación posible de una de las ligaduras que asegure la inmovilización total.



Problema 3/76

◀ **Examinar analíticamente la adecuación o inadecuación de las ligaduras del bloque cúbico que se indica. *Resp.* Apoyo inadecuado.**



Problema 3/78

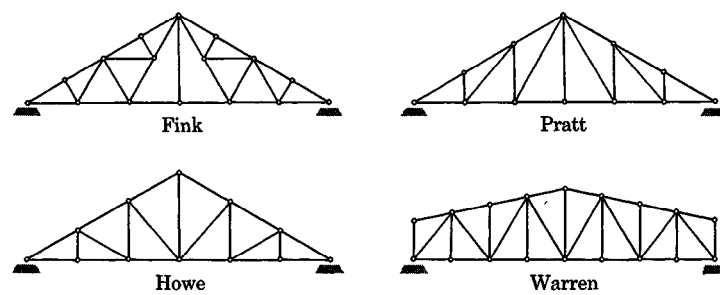
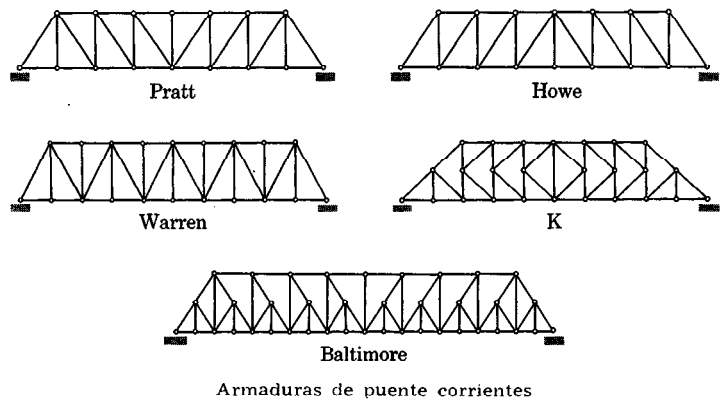
4 Estructuras

17. Estructuras. En el capítulo 3 centramos nuestra atención en el equilibrio de un solo cuerpo rígido o en un sistema de miembros conectados que, al considerarlo en conjunto, se analizaba como un solo cuerpo rígido. En tales problemas, se empezaba por trazar un diagrama del sólido libre para este cuerpo único en el que se pusieran de manifiesto todas las fuerzas exteriores al cuerpo y luego se aplicaban las ecuaciones del equilibrio para fuerzas y momentos. En el capítulo presente se enfoca la atención hacia la determinación de los esfuerzos interiores en una estructura, es decir, a las fuerzas de acción y reacción entre los elementos o miembros enlazados. Se llama estructura a todo sistema de miembros unidos entre sí y construido para soportar con seguridad las cargas a él aplicadas. En el análisis de esfuerzos de las estructuras, es necesario desmembrar la estructura y analizar por separado los diagramas del sólido libre de los distintos miembros o combinaciones de miembros a fin de determinar los esfuerzos interiores en la estructura. Este análisis requiere la aplicación cuidadosa de la tercera ley de Newton, que establece que cada acción va acompañada de una reacción igual y de sentido opuesto. Trataremos sobre el análisis cargas en vigas y de tres tipos de estructuras: armaduras, entramados y máquinas. En este estudio sólo consideraremos estructuras *estáticamente determinadas*, o *isostáticas*, es decir, estructuras para las cuales las ecuaciones estáticas de equilibrio, ecuaciones 13 ó 14, son condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio.

El alumno que domine el procedimiento básico desarrollado en el capítulo 3 para definir sin ambigüedad el cuerpo que se considera, construyendo un diagrama para sólido libre correcto, no tendrá dificultad en el análisis de las estructuras isostáticas. El análisis de armadura, entramados y máquinas y de vigas sometidas a cargas concentradas constituye una aplicación directa de la materia desarrollada en el capítulo anterior.

18. Armaduras planas. Un entramado de miembros unidos por sus extremos de manera que constituyan una estructura rígida recibe el nombre de armadura. Los puentes, los soportes de techos, las grúas y otras estructuras semejantes son ejemplos corrientes de armaduras. Los elementos estructurales utilizados son

vigas en I, vigas en U, ángulos, barras y formas especiales que se unen por sus extremos mediante juntas remachadas, soldadas, o grandes pasadores o tornillos. Cuando los miembros de la armadura se hallen todos en un plano esen-



Cerchas corrientes

Figura 36

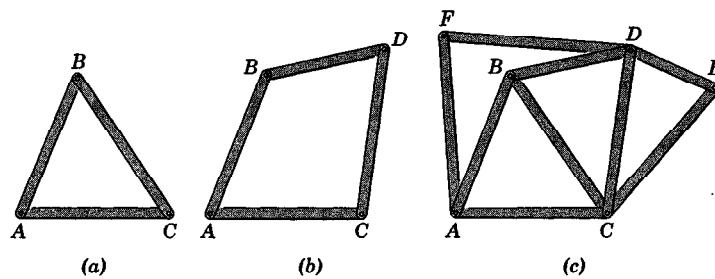


Figura 37

cialmente, diremos que se trata de una *armadura plana*. Las armaduras planas, como las utilizadas en los puentes, suelen proyectarse por parejas, poniendo una armadura a cada lado del puente y uniéndolas mediante vigas transversales que soporten la calzada y transmitan las cargas aplicadas a los miembros de la armadura. En la figura 36 pueden verse varios ejemplos de armaduras utilizadas corrientemente que pueden analizarse como armaduras planas.

El elemento fundamental de una armadura plana es el triángulo. Tres barras unidas por sus extremos mediante pasadores, figura 37a, constituyen un conjunto indeformable. Por otra parte, cuatro o más barras articuladas formando un polígono de otros tantos lados, constituyen un conjunto no rígido. El conjunto no rígido de la figura 37b puede hacerse indeformable o rígido mediante una barra diagonal adicional que una A y D o B y C que forma, por tanto, dos triángulos. La estructura puede extenderse añadiendo unidades adicionales de barras articuladas por sus dos extremos, tales como DE y CE o AF y DF , figura 37c, que están unidas a dos juntas fijas, y de esta manera toda la estructura permanecerá rígida. La palabra "rígida" se emplea en el sentido de que no se pierde la conformación y también en el sentido de deformación despreciable de los miembros debida a los esfuerzos internos producidos. Las estructuras construidas a partir de un triángulo básico en la forma descrita, reciben el nombre de *armaduras simples*. Cuando existan más miembros de los necesarios para que eviten que la estructura pierda su forma, ésta es hiperestática. Una estructura hiperestática no puede analizarse mediante las ecuaciones del equilibrio, solamente. Los miembros o apoyos adicionales que no son necesarios para mantener la posición de equilibrio se llaman *superabundantes*.

El diseño de una armadura exige la determinación de los esfuerzos en los diversos miembros y la selección de dimensiones apropiadas y de formas estructurales adecuadas para soportar las fuerzas. En el análisis de los esfuerzos de las armaduras simples se establecen varias hipótesis. En primer lugar, se supone que todos los miembros son *de dos fuerzas*. Un miembro de dos fuerzas es aquél que se halla en equilibrio bajo la acción de dos fuerzas solamente, según se definió de manera general en la figura 30a del apartado 15. En las armaduras cada miembro es un enlace recto que une los dos puntos de aplicación de las fuerzas. Estas están aplicadas a los extremos del miembro y son necesariamente iguales, opuestas y *colineales* (de igual recta soporte) para que ocasionen equilibrio. El miembro puede hallarse bajo tensión o compresión, según se indica en la figura 38. Obsérvese que al representar el equilibrio de una porción del miembro, la tensión T o la compresión C que actúan sobre la sección transversal es la misma para todas las secciones. Se supondrá que el peso del miembro es pequeño frente a la fuerza que soporta. Si así no fuera, o si hubiera necesidad de tomar en cuenta el pequeño efecto del peso P del miembro, en el caso de ser homogéneo, podrá sustituirse dicho peso por dos fuerzas, cada una de valor $P/2$, aplicadas en uno y otro extremo del miembro. Estas fuerzas, en realidad, se tratan como cargas aplicadas exteriormente a los pasadores de unión. El to-

mar en cuenta, de esta manera, el peso de un miembro, conduce al resultado correcto de la tensión o compresión medias a lo largo del miembro, pero no explicará su efecto sobre la flexión del miembro.

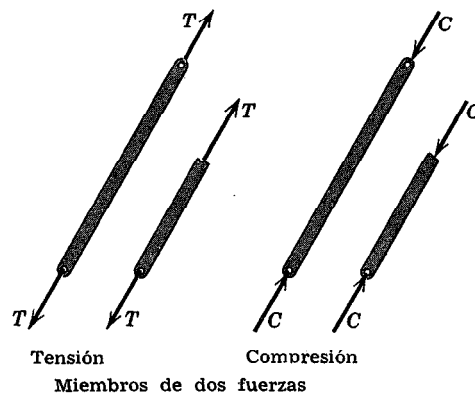


Figura 38

Cuando se unen miembros estructurales utilizando juntas remachadas o soldadas, suele ser satisfactoria la hipótesis de unión de pasador si concurren en el nudo (unión) los ejes geométricos de los miembros, tal como se indica en la figura 39.

Además, se supone en el análisis de armaduras simples que todas las fuerzas exteriores están aplicadas en los nudos. Esta condición se satisface en la mayoría de las armaduras. En armaduras de puentes, el tablero suele apoyarse sobre vigas transversales soportadas en las uniones.

En el caso de armaduras grandes, la provisión para los efectos de dilatación y contracción debidos a las variaciones de temperatura y a las deformaciones producidas por las cargas aplicadas, suele hacerse en uno de los apoyos. Se coloca un rodillo, zapata u otra clase de apoyo deslizante. Las armaduras y entramados en los que no se realiza dicha provisión son hiperestáticos, según se explica en los apartados 15 y 16.

Para el análisis de los esfuerzos de armaduras simples daremos dos métodos y haremos referencia a la armadura simple de la figura 40a en cada uno de ellos. El diagrama del sólido libre de la armadura, en conjunto, es el de la figura 40b. Las reacciones exteriores suelen determinarse por cálculo a partir de las ecuaciones de equilibrio aplicadas a la armadura en conjunto, antes de proceder al análisis de las fuerzas del resto de la armadura.

(a) *Método de los nudos.* Este método consiste en satisfacer las condiciones de equilibrio de las fuerzas que se ejercen sobre el pasador de cada articulación. El método, pues, trata del equilibrio de fuerzas concurrentes y sólo intervendrán dos ecuaciones de equilibrio independientes. Se inicia el análisis

en cualquier nudo en el cual haya al menos una carga conocida y no más de dos fuerzas incógnitas. Puede comenzarse la resolución por el pasador de la izquierda, cuyo diagrama del sólido libre se ha representado en la figura 41. Indicando las articulaciones mediante letras, la fuerza que se ejerce en cada miembro se designará por las dos letras que definen los extremos del miembro. En este caso sencillo, los sentidos adecuados de las fuerzas resultan evidentes por simple inspección. También se indican los diagramas de sólido libre de las porciones AF y AB de los miembros para indicar claramente el mecanismo de la acción y la reacción. El miembro AB hace contacto en realidad con la parte izquierda del pasador, aun cuando se haya dibujado la fuerza AB en el lado derecho ejerciéndose hacia afuera del pasador. Así pues, si se dibujan sistemáticamente los vectores fuerza al *mismo* lado del pasador que el miembro, una tensión (como la AB) se indicará siempre mediante una flecha hacia *afuera* del pasador, y una compresión (como la AF) se indicará siempre por medio de una flecha dirigida *hacia* el pasador. La magnitud de AF se obtiene de la ecuación $\Sigma F_y = 0$, y luego se halla AB a partir de $\Sigma F_x = 0$.

A continuación debe analizarse el nudo F , ya que ahora sólo contiene dos incógnitas: EF y BF . Después se analizarán los nudos B , C , E y D , en este

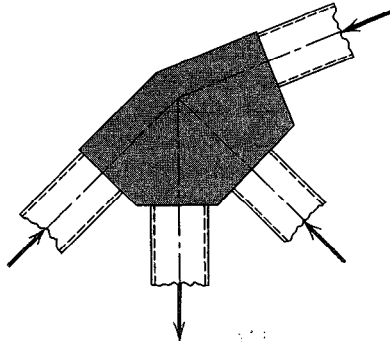


Figura 39

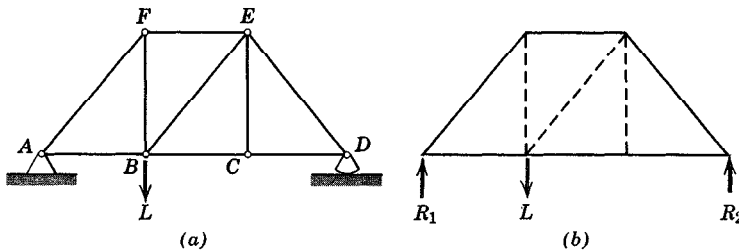


Figura 40

orden. En la figura 42 puede verse el diagrama de sólido libre de cada nudo y el correspondiente polígono de fuerzas que representa gráficamente las dos condiciones de equilibrio $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$. Los números indican el orden en que se analizan los nudos. Debe observarse que, cuando por último se llega al nudo D , la reacción calculada R_2 deberá estar en equilibrio con las fuerzas de los miembros CD y ED , determinadas anteriormente a partir de los dos nudos contiguos. Este requisito proporcionará una comprobación de la validez de lo hecho. También debe notarse que el aislamiento del nudo C revela rápidamente el hecho de que la fuerza en CE es nula, al aplicar la ecuación $\Sigma F_y = 0$. Desde luego, si a C se aplicara una carga exterior, la fuerza en este miembro no sería nula.

Es, a menudo, conveniente indicar la tensión T y la compresión C en los distintos miembros directamente sobre el diagrama original de la armadura, trazando vectores que divergen de los nudos en el caso de las tensiones y dirigidos hacia los nudos en el caso de las compresiones. En la parte inferior de la figura 42 puede verse un ejemplo de esta designación.

En algunos casos no es posible asignar inicialmente el sentido correcto de una o de ambas fuerzas actuantes sobre un nudo dado. En este caso puede asignarse arbitrariamente el sentido y si se obtiene del cálculo un valor negativo, ello nos indicará que hay que tomar el sentido contrario al que se había supuesto.

Si una armadura simple tiene más apoyos exteriores de los necesarios para asegurar una configuración de equilibrio estable, la armadura es hiperestática en un conjunto y los apoyos sobrantes constituyen una superabundancia *exterior*. Si la armadura tiene más miembros internos que los que son necesarios para evitar su derrumbamiento, los miembros sobrantes constituyen la superabundancia *interior*. Para una armadura que sea isostática exteriormente, existe una relación definida entre el número de sus miembros y el número de sus nudos nece-

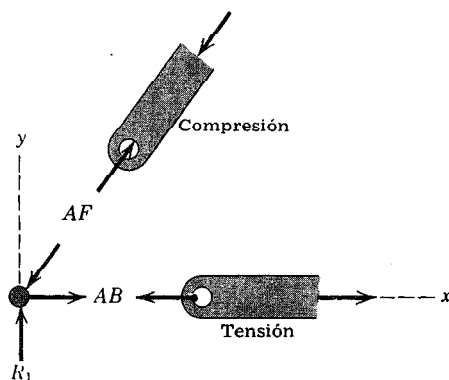


Figura 41

sarios para la estabilidad interior sin superabundancia. Como el equilibrio de cada nudo está especificado por dos ecuaciones de fuerzas escalares, existen, para una armadura simple que tenga n nudos, $2n$ de dichas ecuaciones. Para la armadura completa compuesta de m miembros de dos fuerzas y un máximo de tres reacciones de apoyo incógnitas, hay un total de $m + 3$ incógnitas. Así, pues, para una armadura plana simple compuesta por elementos triangulares, si la armadura es isostática interiormente, deberá satisfacerse la ecuación $m + 3 = 2n$.

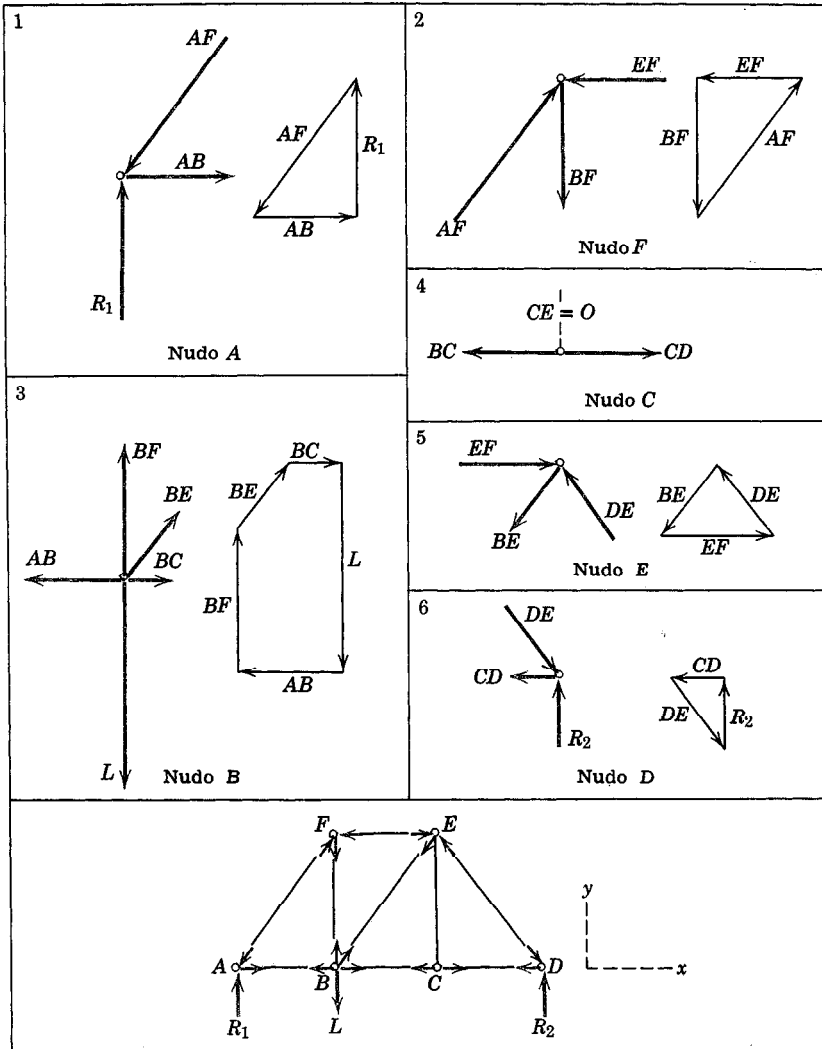


Figura 42

Esta relación es condición necesaria para la estabilidad, pero no es condición suficiente, ya que uno o varios de los m miembros se pueden disponer de manera que no contribuyan a la configuración estable de la armadura total. Si $m + 3 > 2n$, habrán más miembros que ecuaciones independientes y la armadura será hiperestática interiormente, existiendo miembros superabundantes. Si $m + 3 < 2n$ habrá un defecto de miembros interiores y la armadura será inestable y se derrumbará al someterla a carga.

El polígono de fuerzas de cada nudo, representado en la figura 42, se puede construir gráficamente para obtener las fuerzas incógnitas de los miembros, lo cual da otro procedimiento de solución o una comprobación de los cálculos algebraicos realizados al utilizar las ecuaciones de equilibrio de las fuerzas. Si para la adición de éstas se hubiera seguido siempre un mismo orden alrededor de cada uno, p.e. en el sentido de las agujas del reloj, podrían superponerse dichos polígonos de fuerzas formando una gráfica compuesta llamada *diagrama de Maxwell* o de Cremona.* La fuerza y su sentido pueden obtenerse directamente del diagrama. El estudiante interesado en estructuras que quiera una descripción más detallada del diagrama de Maxwell puede consultar otros libros que tratan de manera más completa el análisis estructural.

(b) *Método de las secciones*. En el método de los nudos se aprovechan sólo dos de las tres ecuaciones del equilibrio ya que los procedimientos sólo tratan fuerzas concurrentes en cada nudo. Puede utilizarse el principio del equilibrio de momentos para progresar en el cálculo considerando toda una sección de la armadura como sólido libre en equilibrio bajo la acción de un sistema de fuerzas no concurrentes. Este *método de las secciones* tiene la ventaja de que los esfuerzos, en casi todos los miembros, pueden hallarse directamente mediante el análisis de una sección que corte a dicho miembro. Por tanto, no es necesario efectuar el cálculo nudo a nudo hasta alcanzar el miembro en cuestión. Al elegir la sección de la armadura habrá que tener en cuenta que en general no pueden cortarse más de tres miembros cuyas fuerzas sean desconocidas, ya que sólo se dispone de tres relaciones de equilibrio que son independientes.

Ilustraremos ahora el método de las secciones con la armadura de la figura 40, que se utilizó para la explicación de los dos métodos anteriores. Para facilitar la comprensión del método se ha repetido en la figura 43a la armadura en cuestión. Las reacciones externas se calculan como antes en primer lugar, considerando la armadura en conjunto. Supongamos que se desea determinar el esfuerzo en el miembro BE . Una sección imaginaria, indicada por la línea de trazos, atraviesa la armadura cortándola en dos partes, figura 43b. Esta sección ha cortado tres miembros cuyos esfuerzos se desconocen inicialmente. Para que cada parte de la armadura, a uno y otro lado de la sección, permanezca en equilibrio, es necesario aplicar a cada miembro cortado el esfuerzo que ejercía sobre éste el miembro se-

* El método fue publicado por JAMES CLERK MAXWELL en 1864.

parado. Estas fuerzas, de tensión o compresión, deberán tener siempre la dirección de los miembros respectivos en el caso de armaduras simples compuestas por miembros de dos fuerzas. La sección de la izquierda se halla en equilibrio bajo la acción de la carga aplicada L , la reacción R_1 en el extremo y las tres fuerzas ejercidas sobre los miembros cortados por la sección de la derecha que se ha separado. Las fuerzas suelen trazarse con sus sentidos apropiados mediante una estimación visual de los requisitos de equilibrio. Así, para equilibrar los momentos respecto al punto B de la sección de la izquierda, la fuerza EF deberá estar evidentemente dirigida hacia la izquierda, lo cual origina una compresión, ya que actúa hacia el corte del miembro EF . La carga L es mayor que la reacción R_1 , por lo que la fuerza BE deberá estar dirigida hacia arriba y hacia la derecha a fin de suministrar la componente hacia arriba necesaria para el equilibrio vertical. La fuerza BE es, pues, una tensión porque actúa en sentido tal que se aleja del corte. Teniendo en cuenta los valores aproximados de R_1 y L , el equilibrio de los momentos respecto al punto E exige que BC esté dirigida hacia la derecha. Una ojeada a la armadura nos llevaría a la misma conclusión al ver que el miembro horizontal inferior se alargaría por efecto de la tensión originada por la flexión. La ecuación de los momentos respecto al nudo B elimina tres fuerzas de la relación y puede determinarse EF directamente. La fuerza BE se calcula a partir de la ecuación de equilibrio para la dirección y . Por último, se puede determinar BC equilibrando momentos respecto al punto E . De esta manera se ha determinado cada una de las incógnitas independientemente de las otras dos.

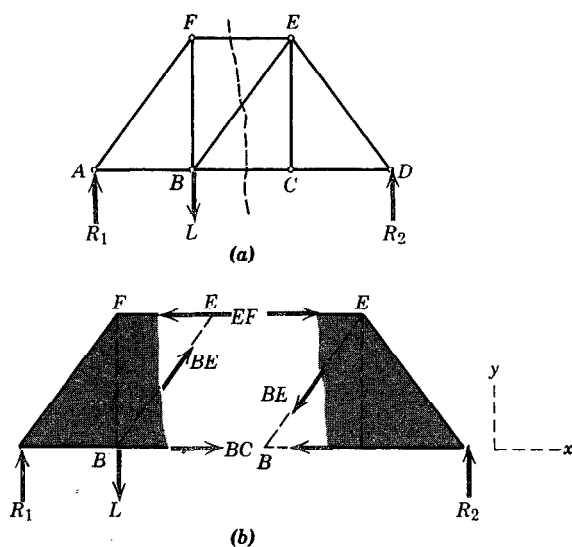


Figura 43

La sección de la derecha de la armadura, figura 43b, se halla en equilibrio bajo la acción de R_2 y de las mismas tres fuerzas de los miembros cortados aplicadas en los sentidos opuestos a los correspondientes de la sección de la izquierda. El sentido adecuado de las fuerzas horizontales puede verse fácilmente a partir del equilibrio de momentos respecto a los puntos E y B .

Para los cálculos puede utilizarse cualquier sección de la armadura, si bien la solución más sencilla suele darla la sección que entrañe menor número de fuerzas.

Es esencial comprender que en el método de las secciones se considera toda una parte de la armadura como un solo cuerpo en equilibrio. Así, en el análisis de la sección en conjunto no se consideran los esfuerzos en los miembros interiores a la sección. A fin de observar con claridad el sólido libre y las fuerzas que actúan exteriormente sobre él, es preferible seccionar la armadura cortando los miembros y no los nudos.

Puede ser muy ventajoso utilizar las ecuaciones de momentos en el método de las secciones, y habrá que buscar un centro de momentos por el cual pase el mayor número posible de fuerzas. Al trazar el diagrama de sólido libre de una sección, no siempre es posible asignar a una fuerza determinada el sentido apropiado. Cuando se asignan los sentidos en forma arbitraria, un resultado positivo confirmará el sentido supuesto y un resultado negativo indicará que la fuerza tiene sentido opuesto al que se le asignó. Puede emplearse cualquier sistema de notación, si bien resulta conveniente, por lo corriente, colocar letras en los nudos y designar un miembro y su esfuerzo por las dos letras que definen los extremos del mismo.

Problemas tipo

4/1. Calcular la fuerza en cada miembro de la armadura cargada en voladizo por el método de los nudos.

Solución. Si no se quisieran calcular las reacciones exteriores en D y E , el análisis de una armadura en voladizo podría iniciarse en el nudo del extremo en que se aplica la carga. Sin embargo, deseamos resolver esta armadura por completo, y el primer paso será calcular las fuerzas exteriores en D y E mediante el diagrama de sólido libre correspondiente a la armadura en conjunto y que aparece en la parte b de la figura. Las ecuaciones del equilibrio dan

$$T = 4000 \text{ kp} \quad E_x = 3465 \text{ kp} \quad E_y = 500 \text{ kp}$$

En la parte c de la figura, se han trazado los diagramas para sólido libre que indican las fuerzas que actúan sobre cada uno de los nudos. La exactitud de los sentidos asignados a las fuerzas se comprueba al considerar cada nudo en el orden asignado.

No habrá duda acerca del sentido correcto de las fuerzas que actúan sobre el nudo A. El equilibrio exige

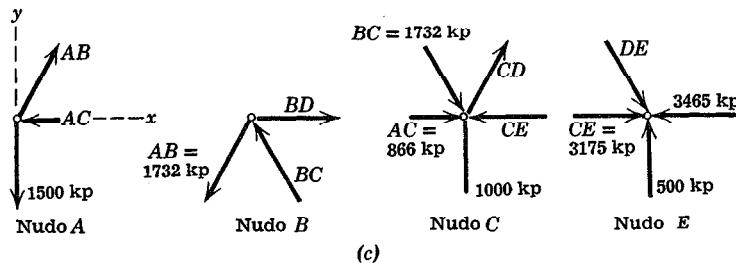
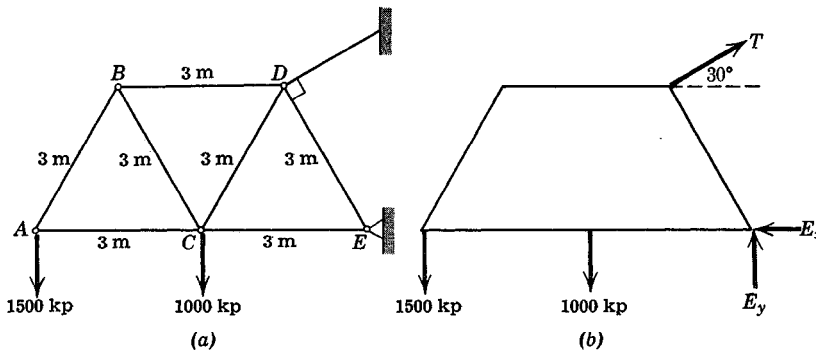
$$\begin{aligned} [\Sigma F_y = 0] \quad & 0,866AB - 1500 = 0, \quad AB = 1732 \text{ kp } T, \quad \text{Resp.} \\ [\Sigma F_x = 0] \quad & AC - 0,5(1732) = 0, \quad AC = 866 \text{ kp } C, \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

donde T significa tensión y C compresión.

A continuación se debe analizar el nudo B, ya que sobre el nudo C actúan más de dos fuerzas desconocidas. La fuerza BC debe tener una componente hacia arriba a fin de equilibrar la acción de AB en el sentido vertical; consecuentemente, la fuerza BD deberá ser hacia la derecha para equilibrar, en el sentido horizontal, la acción de BC y AB . Nuevamente las fuerzas se obtienen de

$$\begin{aligned} [\Sigma F_y = 0] \quad & 0,866BC - 0,866 \times 1732 = 0, \quad BC = 1732 \text{ kp } C, \quad \text{Resp.} \\ [\Sigma F_x = 0] \quad & BD - 0,5 \times 2 \times 1732 = 0, \quad BD = 1732 \text{ kp } T. \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

El nudo C contiene ahora sólo dos incógnitas que se determinan como antes:



Problema 4/1

$$\begin{aligned}
 [\Sigma F_y = 0] \quad & 0,866 CD - 0,866 \times 1732 - 1000 = 0, \\
 & CD = 2387 \text{ kp } T, \quad \text{Resp.} \\
 [\Sigma F_x = 0] \quad & CE - 866 - 0,5 \times 1732 - 0,5 \times 2387 = 0, \\
 & CE = 3175 \text{ kp } C. \quad \text{Resp.}
 \end{aligned}$$

Por último, del nudo *E* se obtiene:

$$[\Sigma F_y = 0] \quad 0,866 DE = 500, \quad DE = 577 \text{ kp } C, \quad \text{Resp.}$$

y la ecuación $\Sigma F_x = 0$ sirve de comprobación.

4/2. Utilizando el método de las secciones, calcular la fuerza en el miembro *DJ* de la cercha Howe de la figura. Despréciense las componentes horizontales de las fuerzas en los apoyos. Las cargas se expresan en toneladas métricas (Tm).

Solución. No es posible hacer pasar una sección por *DJ* sin cortar cuatro miembros cuyos esfuerzos sean desconocidos. Aun cuando tres de los cuatro miembros cortados por la sección 2 concurren en *J* y, por tanto, podría utilizarse la ecuación de los momentos respecto a *J* para obtener el cuarto *DE*, el esfuerzo en *DJ* no puede obtenerse de los dos principios de equilibrio restantes. Es preciso considerar, en primer lugar, la sección adyacente 1 antes de considerar la sección 2.

Se traza el diagrama para el sólido libre correspondiente a la sección 1 y se incluye la reacción de 1,835 Tm en *A*, la cual se calcula previamente a partir del equilibrio de la armadura en conjunto. Al asignar los sentidos apropiados a las fuerzas que actúan en los tres miembros cortados, el equilibrio de momentos respecto a *A* elimina los efectos de *CD* y *JK* y exige, evidentemente, que *CJ* esté dirigida hacia arriba y hacia la izquierda. El equilibrio de momentos respecto a *C* elimina el efecto de las tres fuerzas concurrentes en *C*, lo que indica que *JK* debe estar dirigida hacia la derecha para que su momento corresponda al sentido contrario al de las agujas del reloj. Nuevamente, resulta fácil ver que la cuerda inferior se halla sometida a tensión debido a la tendencia a la flexión de la armadura. Aun cuando también se vería que la cuerda superior está sometida a compresión, a la fuerza *CD* la consideraremos arbitrariamente como una tensión. No hay peligro alguno al considerar el sentido opuesto al real a una o más fuerzas, siempre que los cálculos se realicen de acuerdo con la hipótesis. Un resultado negativo indicará la necesidad de invertir el sentido de la fuerza.

Analizando la sección 1, se obtiene *CJ* de

$$[\Sigma M_A = 0] \quad (0,707 CJ) 9 - 1 \times 3 - 1 \times 6 = 0 \quad CJ = 1,414 \text{ Tm.}$$

En esta ecuación se calcula el momento de *CJ* considerando sus componentes horizontal y vertical aplicadas al punto *J*. El equilibrio de los momentos respecto a *J* requiere

$$\begin{aligned}
 [\Sigma M_J = 0] \quad & (0,894 CD) 4,5 + 1,835 \times 9 - 1 \times 3 - 1 \times 6 = 0 \\
 & CD = -1,868 \text{ Tm.}
 \end{aligned}$$

Calcularemos el momento de CD respecto a J considerando sus dos componentes aplicadas en D . El signo menos indica que CD se había considerado con sentido opuesto al verdadero. Entonces

$$CD = 1,87 \text{ Tm } C$$

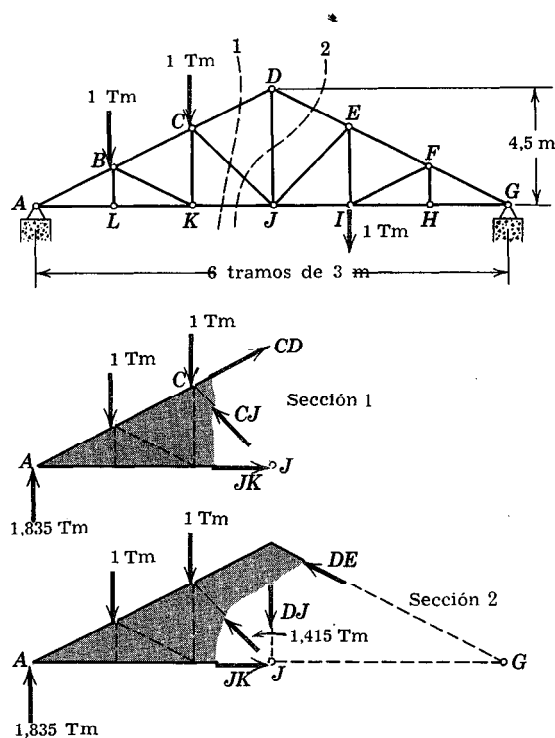
Resp.

Si se desea, puede invertirse el sentido de CD en el diagrama del sólido libre e invertir el signo algebraico de CD en los cálculos, o bien puede proseguirse la labor tal como está con una nota que indique el sentido adecuado.

Del diagrama para el sólido libre correspondiente a la sección 2, que ahora contiene el valor conocido de CJ , pueden eliminarse DE y JK mediante un equilibrio de momentos respecto a G . Esto es

$$[\Sigma M_G = 0] \quad 9 DJ + 1 \times 12 + 1 \times 15 - 1,835 \times 18 - 1,415 \times 0,707 \times 9 = 0, \\ DJ = 1,67 \text{ Tm } T. \quad \text{Resp.}$$

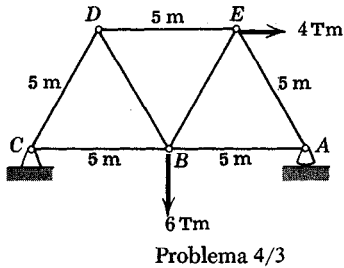
Nuevamente se determina el momento de CJ a partir de sus componentes aplicadas en J . El resultado para DJ es positivo, de donde se desprende que el sentido de tensión que se le asignó es el correcto. El análisis del nudo D verifica también esta conclusión.



Problema 4/2

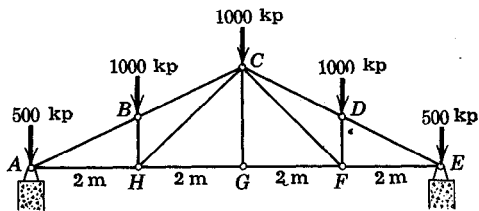
Aun cuando el procedimiento que acabamos de seguir es, indudablemente, el más corto para obtener DJ , el estudiante debe considerar otras posibilidades. Puede observarse que si en algún otro problema no existiera la carga de una tonelada aplicada a I permaneciendo invariables las otras cargas, las fuerzas en IE y JE (así como en HF y en IF) serían nulas. En tal caso, una sección que cortara los miembros CD , DJ , JE e IJ sólo contendría tres fuerzas desconocidas y podría obtenerse el valor de DJ con una sola ecuación de momentos respecto A .

Problemas

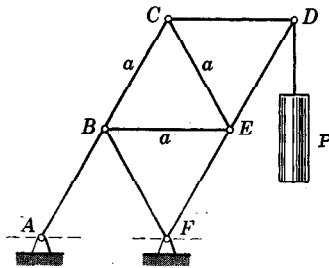


4/3. Calcular la fuerza en cada miembro de la armadura que se indica.

Resp. $AE = 5,46 \text{ Tm C}$
 $BE = 5,46 \text{ Tm T}$
 $BD = 1,46 \text{ Tm T}$
 $AB = 2,73 \text{ Tm T}$
 $DE = 1,46 \text{ Tm C}$
 $CD = 1,46 \text{ Tm C}$
 $BC = 4,73 \text{ Tm T}$



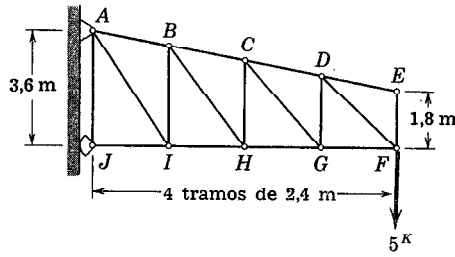
4/4. Una carga de nieve transmite las fuerzas que se indican a los nudos superiores de una cercha Pratt. Despreciar las reacciones horizontales en los apoyos y calcular las fuerzas en los miembros BH , BC y CH .



4/5. Calcular las fuerzas en los miembros BE y BC de la armadura compuesta por triángulos equiláteros. Despejar cada fuerza de una ecuación de equilibrio que la contenga como única incógnita.

Resp. $BE = P/\sqrt{3}, T$
 $BC = P/\sqrt{3}, T$

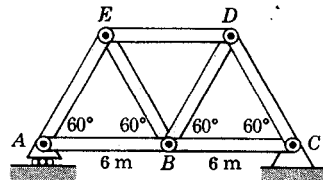
4/6. Calcular la fuerza que soporta el miembro BH de la armadura en voladizo cargada. Utilizar un solo diagrama de sólido libre y una ecuación de equilibrio.



Problema 4/6

4/7. Para la armadura del problema 4/6, calcular las fuerzas en los miembros EF , DF y GF .

4/8. Cada miembro de la armadura es una barra uniforme de 6 m que pesa 200 kp. Calcular la tensión o compresión media en cada miembro debidas a sus pesos.



Problema 4/8

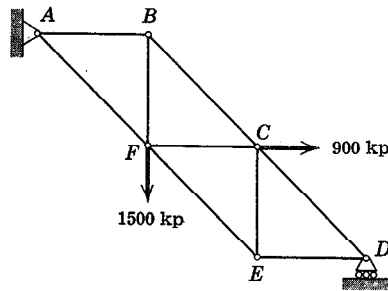
Resp. $AE = CD = 1000/\sqrt{3}$ kp C

$AB = BC = 500/\sqrt{3}$ kp T

$BE = BD = 400/\sqrt{3}$ kp T

$DE = 700/\sqrt{3}$ kp C

4/9. Calcular la fuerza en cada miembro de la armadura compuesta por triángulos rectángulos isósceles y cargada de la manera que se indica.



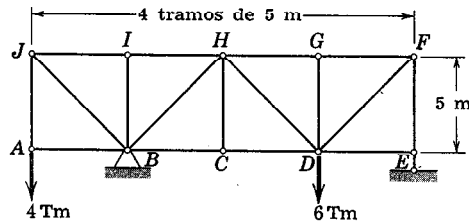
Problema 4/9

4/10. Calcular las fuerzas en los miembros BH , CD y GD de la armadura cargada por las fuerzas de 4 y 6 toneladas.

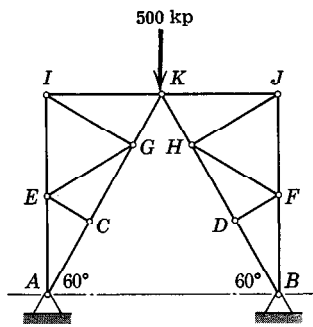
Resp. $BH = 4,71$ Tm C

$CD = 0,67$ Tm C

$GD = 0$

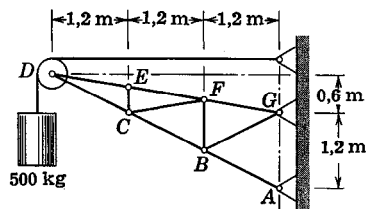


Problema 4/10



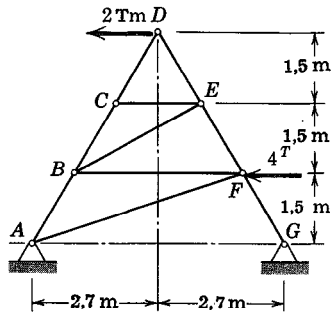
Problema 4/11

4/11. Determinar la fuerza en cada miembro de las dos armaduras que soportan la carga de 500 kp en su pasador común K.



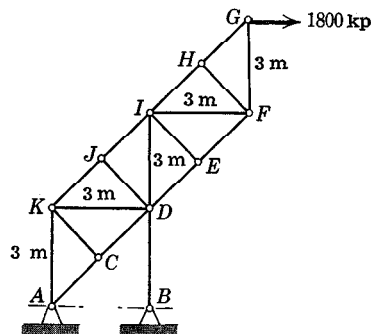
Problema 4/12

4/12. Calcular las fuerzas en los miembros CF, BF, BG y FG de la armadura simple de grúa.



Problema 4/13

4/13. Determinar las fuerzas en los miembros BF y AF de la armadura sometida a la acción de las cargas horizontales de 2 y 4 toneladas.
Resp. $BF = 0$, $AF = 3,51$ toneladas C

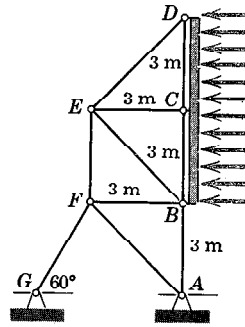


Problema 4/14

4/14. Calcular la fuerza en los miembros DI, DE y EI de la armadura cargada de la figura.

4/15. Calcular la fuerza en los miembros BE , BC , BF y BA de la armadura de cartel, debidas a una fuerza horizontal de 4000 N ejercida por el viento. El estudio del cartel considerado como viga enseña que $5/8$ de esta carga los soporta el punto medio C .

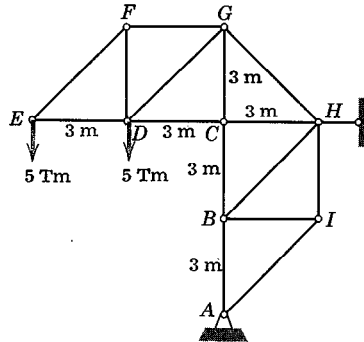
Resp. $BE=4595 \text{ N T}$, $BC=750 \text{ N T}$
 $BF=4000 \text{ N C}$, $BA=4000 \text{ N T}$



Problema 4/15

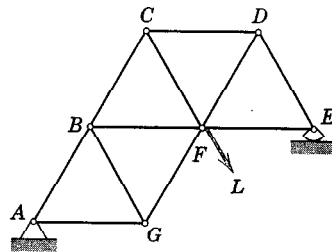
4/16. Calcular la fuerza en los miembros CH , CB y GH de la armadura en voladizo. Obtener cada fuerza de una ecuación de momentos que contenga dicha fuerza como única incógnita.

Resp. $CH = 15 \text{ Tm C}$,
 $CB = 25 \text{ Tm C}$,
 $GH = 21,2 \text{ Tm T}$



Problema 4/16

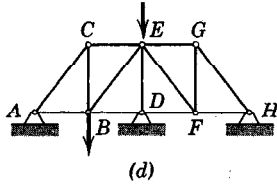
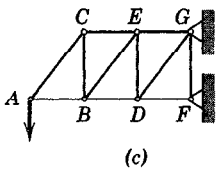
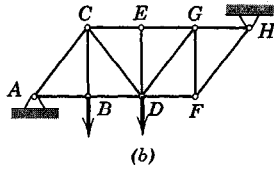
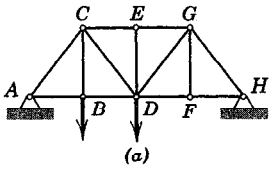
4/17. Obtener la fuerza en el miembro CF de la armadura en función de la carga L . Todos los triángulos son equiláteros.



Problema 4/17

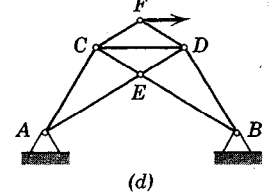
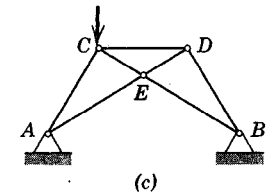
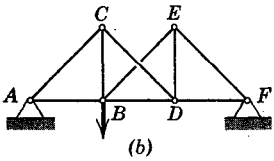
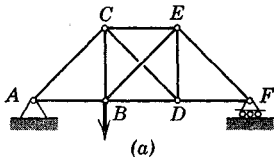
4/18. Tras obtener la reacción exterior en E de la armadura del problema 4/17, determinar la fuerza en el miembro BF por medio de una sola ecuación de equilibrio adicional aplicada a un diagrama de sólido libre adicional.

Resp. $BF = 3L/5, T$



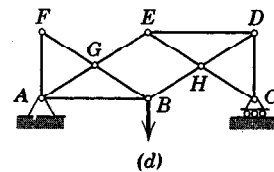
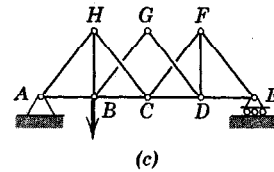
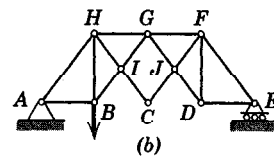
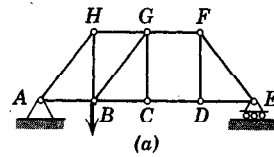
Problema 4/19

4/19. Cada una de las armaduras cargadas tiene ligaduras de apoyo que son hiperestáticas. Consignar los miembros de cada armadura cuyas fuerzas no se ven afectadas por la hiperestaticidad de los apoyos y que pueden calcularse directamente utilizando solamente las ecuaciones de equilibrio. Suponer conocidas las cargas y dimensiones de las armaduras.



Problema 4/20

4/20. Verificar el hecho de que cada una de las armaduras contiene uno o más elementos superabundantes y proponer dos cambios separados, cada uno de los cuales suprima la superabundancia y origine isostaticidad completa. Todos los miembros pueden soportar compresión y tensión.

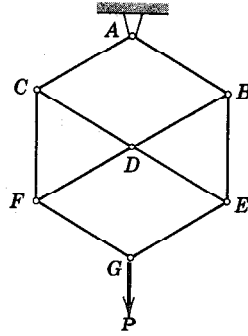


Problema 4/21

4/21. Verificar el hecho de que cada una de las armaduras cargadas que se indican es inestable interiormente (no rígida) e indicar al menos dos maneras de asegurar la estabilidad interna (rigidez) de cada armadura por adición de uno o más miembros sin introducir superabundancia.

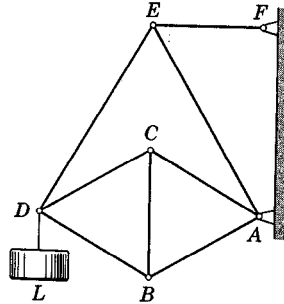
4/22. Obtener las fuerzas en los miembros BE y BD de la armadura que soporta la carga P . Todos los ángulos interiores son de 60° ó 120° .

Resp. $BE = P, T$; $BD = P, C$



Problema 4/22

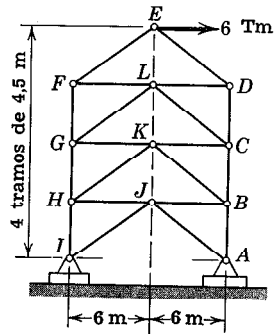
4/23. Determinar la fuerza en el miembro AC en función de la carga L soportada por la armadura. Todos los ángulos agudos interiores son de 30° ó 60° .



Problema 4/23

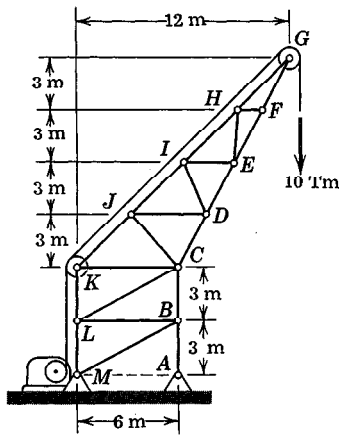
4/24. Obtener la fuerza en el miembro GL de la armadura de torre cargada, por el método de los nudos.

Resp. $GL = 3,75 \text{ Tm } T$



Problema 4/24

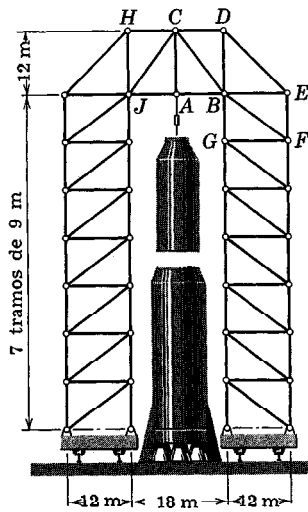
4/25. En la armadura de torre del problema 4/24 existen tanto componentes horizontales como verticales de las reacciones en los apoyos exteriores A e I . ¿Es hiperestática la armadura? Explíquese.



Problema 4/26

4/26. Determinar por examen la fuerza en el miembro CJ de la armadura de grúa. Calcular la fuerza en los miembros CL y CB .

Resp. $CL = 0$, $CB = 20$ toneladas C



Problema 4/27

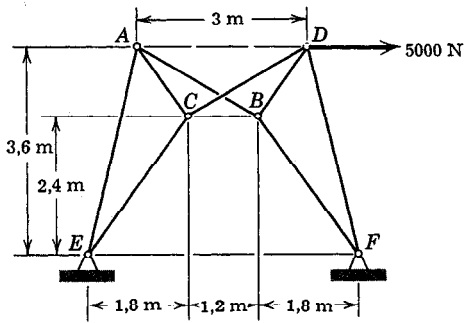
4/27. La grúa de pórtico móvil se utiliza para levantar un cohete de 500 toneladas y prepararlo para el disparo. La estructura primaria de la grúa de pórtico puede aproximarse a la armadura plana simétrica que se indica, la cual es hiperestática. Cuando la grúa está colocando una sección de 60 toneladas del cohete suspendida de A , las medidas extensométricas indican una fuerza compresiva de 5 toneladas en el miembro AB y una fuerza tensora de 12 toneladas en el miembro CD debidas a la carga de 60 toneladas. Calcular la fuerza correspondiente en los miembros BF y EF .

Resp. $BF = 19,38$ toneladas C ,
 $EF = 12$ toneladas T

Diagram of a mechanical system with pulleys and cables. A horizontal cable is fixed to a wall at point H, passes under a pulley at A, and then up to a pulley at B. A vertical cable is fixed to a wall at point C, passes under a pulley at B, and then up to a pulley at D. A weight of 10 toneladas is suspended from the bottom of the vertical cable. The horizontal distance between the wall and the pulleys is 3 m. The vertical distances between the pulleys are 3 m. The weight is 0.6 m from the pulley at D. The angle at H is 45 degrees.

The diagram shows a Warren truss with a horizontal bottom chord and a horizontal top chord. The bottom chord has joints labeled A, B, C, D, E, F, G, H, J, K, L, M, and N. The top chord has joints labeled U, V, W, X, and Y. Vertical members connect the bottom and top chords at joints B-U, C-V, D-W, E-X, F-Y, G, H, J, K, L, and M. Diagonal members connect the joints as follows: T-U (A-B), S-V (B-C), R-W (C-D), Q-X (D-E), P-Y (E-F), and O-N (F-G). There are also horizontal members connecting U-V, V-W, W-X, and X-Y. Two vertical downward loads of 10 Tm are applied at joints H and J. The truss is supported by a pin support at joint A and a roller support at joint N.

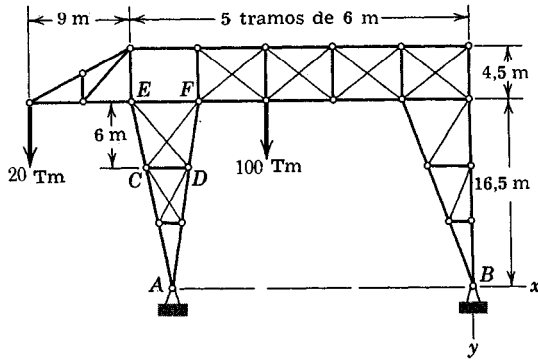
Problema 4/31



Problema 4/32

◀ 4/32. Los entramados articulados ACE y DFB están conectados mediante dos barras articuladas, AB y CD, que se cruzan sin conectarse entre sí. Calcular la fuerza en AB.

Resp. $AB = 1885 \text{ N}$, C



Problema 4/33

◀ 4/33. En la grúa puente representada todos los miembros cruzados son tirantes delgados incapaces de soportar una compresión. Determinar la fuerza en los miembros DF y EF y hallar la reacción horizontal aplicada a la armadura en A. Demostrar que si $CF = 0$, también $DE = 0$.

Resp. $DF = 76,8 \text{ toneladas C}$
 $EF = 36,4 \text{ toneladas C}$
 $A_x = 10,1 \text{ toneladas hacia la derecha}$



19. Armaduras espaciales. La armadura espacial es la contrapartida tridimensional de la estructura plana descrita en el apartado anterior. La armadura espacial idealizada consta de barras rígidas conectadas por sus extremos mediante articulaciones rótula. Hemos visto que la unidad indeformable de la armadura plana está formada por un triángulo de barras conectadas por pasador. En cambio, una armadura espacial requiere seis barras unidas por sus extremos que constituyen las aristas de un tetraedro, para formar una unidad fundamental indeformable. En la figura 44a, las dos barras AD y BD unidas en D requieren un tercer soporte CD para impedir que el triángulo ABD gire en torno a AB. En la figura 44b, la base soportante ha sido reemplazada por otras tres barras AB, BC y AC para formar un tetraedro cuya rigidez sea independiente de la base. Pueden agregarse a la estructura otras unidades formadas con tres barras concurrentes adicionales cuyos extremos estén unidos a tres

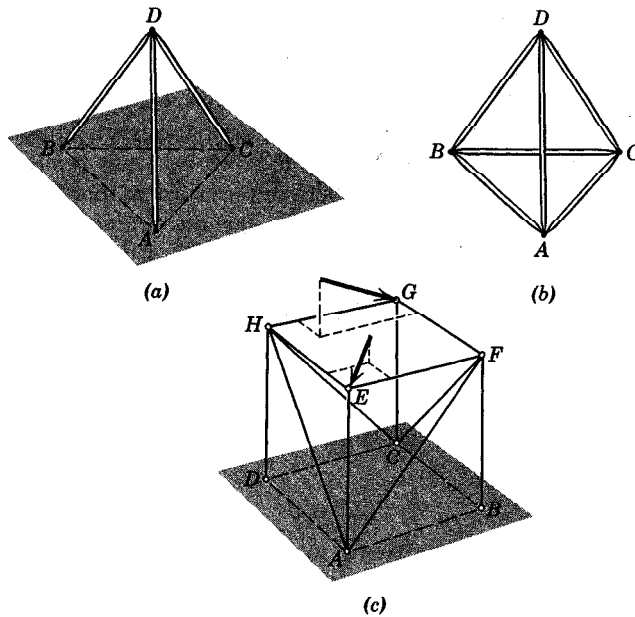


Figura 44

nudos fijos de la estructura existente. Así, en la figura 44c, las barras AF , BF y CF están unidas a la base y por tanto sitúan el punto F en el espacio. Análogamente queda establecido en el espacio el punto H mediante las barras AH , DH y CH . Las tres barras adicionales CG , FG y HG están unidas a tres puntos fijos C , F y H y por tanto sitúan a G en el espacio. De manera análoga se fija el punto E . La estructura es enteramente rígida y las dos cargas aplicadas que se indican originarán esfuerzos en todos los miembros.

Idealmente, las juntas de una armadura espacial deben ser de soporte puntual, como el representado por una articulación de rótula, a fin de que no se produzca flexión en los miembros. Nuevamente, como en el caso de juntas remachadas y soldadas en armaduras planas, si los ejes geométricos de los miembros articulados se cortan en un punto, podrá justificarse la hipótesis de miembros de dos fuerzas sometidos a simple tensión o compresión.

En el caso de una armadura espacial apoyada exteriormente de manera que sea isostática en su conjunto, existe una relación entre el número de sus nudos y el número de sus miembros, la cual es necesaria para la estabilidad interior sin superabundancia. Como el equilibrio de cada nudo está especificado por tres ecuaciones escalares de fuerzas, para una armadura espacial simple con n nudos habrá $3n$ de dichas ecuaciones. Para la armadura total compuesta de m miembros hay m incógnitas más seis reacciones incógnitas en los apoyos en el caso general de una estructura espacial isostática. Así, en el caso de una

armadura espacial simple compuesta de elementos tetraédricos, se cumplirá la ecuación $m + 6 = 3n$ si la armadura es isostática interiormente. De nuevo, como en el caso de la armadura plana, esta relación es una condición necesaria para la estabilidad, pero no es suficiente, ya que se pueden disponer uno o varios de los m miembros de manera que no contribuyan a la configuración estable de la armadura en conjunto. Si $m + 6 > 3n$, hay más miembros que ecuaciones independientes y la armadura será hiperestática interiormente teniendo miembros superabundantes. Si $m + 6 < 3n$, hay un defecto de miembros interiores y la armadura será inestable y estará expuesta a derrumbarse al cargarla. La relación anterior entre el número de nudos y el de miembros en una armadura espacial es muy útil para el diseño preliminar de una tal armadura, ya que la configuración no es tan evidente como en el caso de una armadura plana, donde la geometría para isoestatismo suele ser casi inmediata.

Los métodos de los nudos desarrollados en el apartado 18 para las armaduras planas pueden extenderse directamente a las armaduras espaciales satisfaciendo la ecuación vectorial

$$\Sigma \mathbf{F} = 0$$

para cada nudo. Es necesario partir de un nudo en el cual se ejerza una fuerza conocida, por lo menos, y no hayan más de tres fuerzas desconocidas. A continuación pueden analizarse los nudos contiguos sobre los que no se ejerzan más de tres fuerzas desconocidas.

El método de las secciones desarrollado en el apartado anterior, es también aplicable a armaduras espaciales. Para una sección cualquiera de la armadura deberán aplicarse las dos ecuaciones vectoriales

$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \quad \text{y} \quad \Sigma \mathbf{M} = 0$$

en donde la suma nula de momentos deberá cumplirse para cualquier eje de momentos. Como las dos ecuaciones vectoriales equivalen a seis ecuaciones escalares, se deduce que la sección no deberá pasar por más de seis miembros desconocidos. Sin embargo, el método de las secciones no se emplea mucho para armaduras espaciales porque rara vez puede hallarse un eje de momentos que elimine todas las incógnitas menos una, como ocurre en las armaduras planas.

Suele ser ventajoso el empleo de la notación vectorial para expresar los términos de las ecuaciones de fuerzas y momentos en las armaduras espaciales y la emplearemos en el problema tipo siguiente.

Problemas tipo

4/34. La armadura espacial representada en la parte *a* de la figura se fija a una pared vertical mediante una articulación de rótula en A, mediante barras en F según las direcciones x e y , y mediante una barra de dirección y en E, proporcionando así

seis ligaduras isostáticas. Los nudos B , D y C , citados en este orden, resultan estar fijos. La armadura soporta una carga vertical L en D y una carga vertical $2L$ en C . Determinar la fuerza en los miembros ED y FB .

Solución. Primeramente se observa que la armadura en conjunto tiene $n = 6$ nudos y $m = 12$ miembros, con lo que se cumple la relación $m + 6 = 3n$. Por tanto, hay un número suficiente de miembros para proporcionar una configuración estable, según lo indica la disposición representada.

Por simple examen se puede asignar fácilmente el sentido correcto a las reacciones en los apoyos A_y , A_x , E_y y F_y . También pueden asignarse correctamente los sentidos a las reacciones F_x y A_x observando el requisito de los momentos respecto a ejes que pasan por F y A en la dirección y . Estas reacciones están indicadas en el diagrama para sólido libre de una sección de la armadura en la parte b de la figura. Las reacciones en los apoyos se obtienen de la armadura en conjunto de la manera siguiente.

$$[\Sigma M_{FE} = 0] \quad A_y \frac{a\sqrt{3}}{2} - La - 2La = 0, \quad A_y = 2\sqrt{3}L,$$

$$[\Sigma M_{F_x} = 0] \quad 2\sqrt{3}L \frac{a}{2} - E_y a = 0, \quad E_y = \sqrt{3}L,$$

$$[\Sigma F_y = 0] \quad \sqrt{3}L + F_y - 2\sqrt{3}L = 0, \quad F_y = \sqrt{3}L,$$

$$[\Sigma M_{AB} = 0] \quad L \frac{a}{4} - 2L \frac{a}{4} + F_x \frac{a\sqrt{3}}{2} = 0, \quad F_x = \frac{L}{2\sqrt{3}},$$

$$[\Sigma F_x = 0] \quad A_x = \frac{L}{2\sqrt{3}},$$

$$[\Sigma F_z = 0] \quad A_z = 3L.$$

El análisis nudo a nudo de la armadura puede iniciarse en el nudo A o en el C , sobre los cuales sólo se ejercen tres fuerzas desconocidas. En el caso del nudo C , puede hacerse la observación incidental de que $2L$, DC y BC se hallan las tres en un mismo plano vertical, por lo que F_{EC} debe ser nula. Determinada F_{DC} a partir del nudo C , podrá obtenerse la fuerza en ED por el equilibrio de las fuerzas que se ejercen sobre el nudo D . Sin embargo, la geometría de esta armadura en particular permite una determinación de la fuerza F_{ED} a partir de una ecuación única de momentos tomados respecto al eje AB en el diagrama para sólido libre de la sección de la armadura representada en la parte b de la figura. Todas las fuerzas desconocidas en los miembros cortados de la sección aparecen en sentido positivo como fuerzas tensoras. Así, pues, un signo negativo significará una fuerza compresiva.

Las líneas de acción de F_{FB} , F_{EB} , F_{FD} y F_{EC} cortan todas al eje de momentos AB , por lo que los únicos momentos respecto a AB se deben a F_{ED} y F_x . La distancia \overline{ED} es $a\sqrt{(3/4)^2 + 1^2 + 3/4^2} = a\sqrt{7}/2$ y los cosenos directores de \mathbf{F}_{ED} son $l = 3/(2\sqrt{7})$, $m = 2/\sqrt{7}$, $n = \sqrt{3}/(2\sqrt{7})$. Así, pues, la fuerza en ED es

$$\mathbf{F}_{ED} = \frac{F_{ED}}{2\sqrt{7}}(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \sqrt{3}\mathbf{k}),$$

y el vector que va de A a E es

$$\mathbf{r}_{AE} = -\frac{a}{2}(\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{k}).$$

La ecuación de momentos resulta ser

$$[\Sigma M_{AB} = 0] \quad \mathbf{r}_{AE} \times \mathbf{F}_{ED} \cdot \mathbf{j} + F_z \frac{a\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Así pues

$$-\frac{a}{2}(\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{k}) \times \frac{F_{ED}}{2\sqrt{7}}(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \sqrt{3}\mathbf{k}) \cdot \mathbf{j} + \frac{L}{2\sqrt{3}} \frac{a\sqrt{3}}{2} = 0,$$

que desarrollándola da

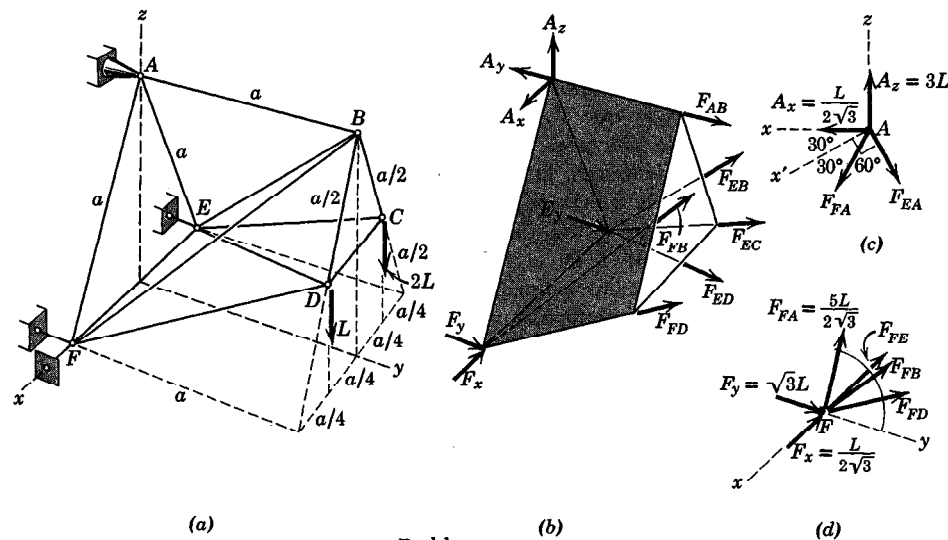
$$F_{ED} = \frac{\sqrt{7}L}{2\sqrt{3}}.$$

Resp.

Para reducir a tres el número de incógnitas en el nudo F, se obtiene la fuerza F_{FA} por análisis del nudo A en el plano x-z. Así, el diagrama para sólido libre del nudo A en la parte c de la figura da

$$[\Sigma F_x = 0] \quad F_{FA} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{L}{2\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3L}{2} = 0, \quad F_{FA} = \frac{5L}{2\sqrt{3}}.$$

Las fuerzas incógnitas que se ejercen sobre el nudo F representadas en la parte d de la figura se expresan vectorialmente en la forma siguiente



Problema 4, 34

$$\mathbf{F}_{FD} = \frac{F_{FD}}{2\sqrt{5}}(-\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \sqrt{3}\mathbf{k}), \quad \mathbf{F}_{FB} = \frac{F_{FB}}{2\sqrt{2}}(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \sqrt{3}\mathbf{k}),$$

$$\mathbf{F}_{FA} = \frac{5L}{4\sqrt{3}}(-\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{k}), \quad \mathbf{F}_{FE} = F_{FE}(-\mathbf{i}).$$

El equilibrio del nudo F exige

$$[\Sigma \mathbf{F} = 0] \quad \left(-\frac{F_{FD}}{2\sqrt{5}} - \frac{F_{FB}}{2\sqrt{2}} - \frac{5L}{4\sqrt{3}} - F_{FE} - \frac{L}{2\sqrt{3}} \right) \mathbf{i} \\ + \left(\frac{2F_{FD}}{\sqrt{5}} + \frac{F_{FB}}{\sqrt{2}} + L\sqrt{3} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\sqrt{3}F_{FD}}{2\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{3}F_{FB}}{2\sqrt{2}} + \frac{5L}{4} \right) \mathbf{k} = 0.$$

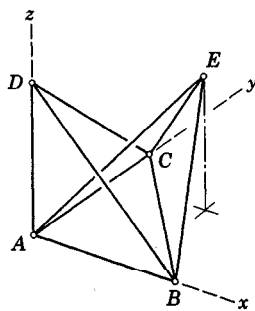
Los coeficientes de \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} deben ser nulos y la solución del sistema de ecuaciones da

$$F_{FD} = -\frac{\sqrt{5}L}{2\sqrt{3}}, \quad F_{FE} = -\frac{L}{2\sqrt{3}}, \quad \text{y} \quad F_{FB} = -\frac{2\sqrt{2}L}{\sqrt{3}}. \quad \text{Resp.}$$

Los signos negativos indican compresión ya que se eligieron como sentidos positivos los correspondientes a las tensiones (hacia afuera del nudo). Las restantes fuerzas incógnitas se podrán determinar continuando el análisis con el nudo B .

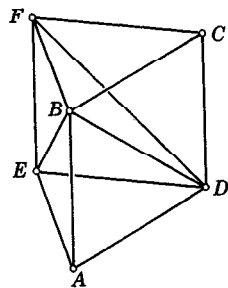
Problemas

4/35. La armadura espacial está montada sobre la base triangular ABC . Las posiciones de los nudos D y E las establecen los enlaces indicados. Demostrar que esta configuración es estable interiormente. Sustituir el enlace AE por otro que conserve la rigidez de la armadura.

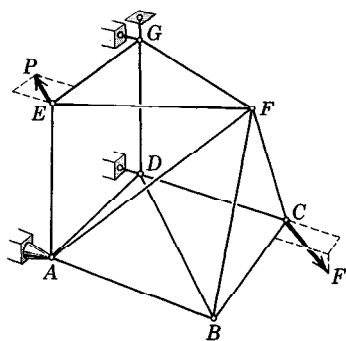


Problema 4/35

4/36. La armadura espacial prismática tiene una base horizontal ADE y una cara superior paralela BCF cuyas formas son triángulos equiláteros iguales conectados por tres brazos verticales iguales y enlazados por tres miembros diagonales en la forma que se indica. Demostrar que esta armadura representa una configuración estable.

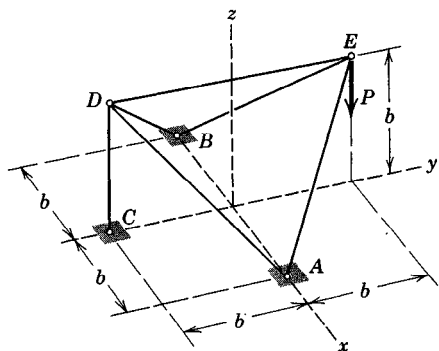


Problema 4/36



Problema 4/37

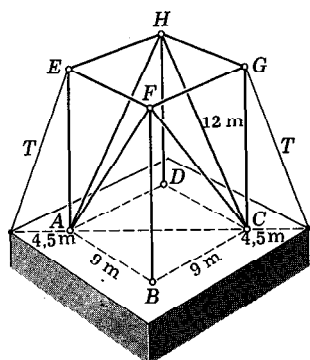
4/37. Se representa la armadura espacial en una fase intermedia del montaje. Las ligaduras exteriores que se indican son suficientes para mantener el equilibrio exterior. ¿Cuántos miembros adicionales se precisarán para impedir la inestabilidad interior y dónde pueden colocarse?



Problema 4/38

4/38. La armadura espacial tetraédrica se apoya sobre rótulas en sus puntos base A y B y está impedida de girar alrededor de AB por la barra vertical CD. Tras notar las componentes verticales de las reacciones bajo la armadura simétrica en A y B, dibujar un diagrama para sólido libre de la configuración triangular de enlaces BDE y determinar la componente x de la fuerza que ejercen los cimientos sobre la armadura en B.

Resp. $B_x = P$



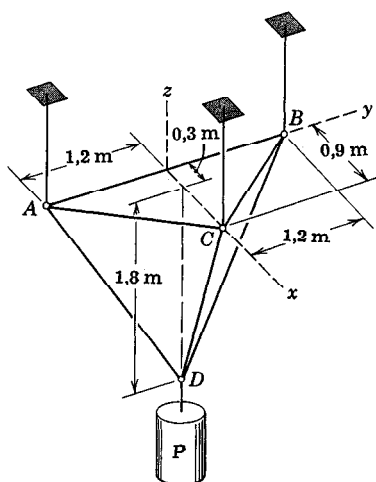
Problema 4/39

4/39. La armadura espacial rectangular de 12 m de altura está erigida sobre una base cuadrada horizontal de 9 m de lado. A los puntos E y G de la estructura se amarran tirantes en la forma que se indica y se tensan hasta que la tensión T en cada tirante es de 9000 N. Calcular la compresión C en cada uno de los miembros diagonales iguales.

Resp. $C = 3725 \text{ N}$

4/40. La armadura espacial tetraédrica tiene una base horizontal ABC de forma triangular isósceles y brazos AD , BD y CD que soportan el peso P situado en el punto D . Cada vértice de la base pende de un hilo vertical atado a un soporte más elevado. Calcular la fuerza inducida en el miembro AC .

$$\text{Resp. } F_{AC} = \frac{5P}{54}, C$$

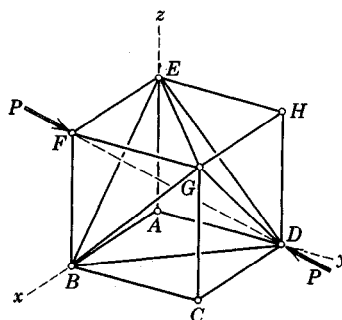


Problema 4/40

4/41. Se construye una armadura espacial en forma de cubo con los seis miembros diagonales que se indican. Verificar que la armadura es estable interiormente. Si se somete la armadura a las fuerzas compresivas P aplicadas en F y D según la diagonal FD , determinar la fuerza en los miembros FE y EG .

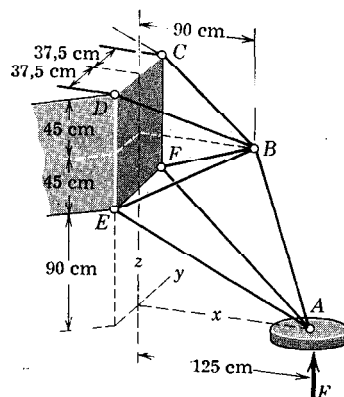
$$\text{Resp. } F_{FE} = P/\sqrt{3}, C;$$

$$F_{EG} = P/\sqrt{6}, T$$

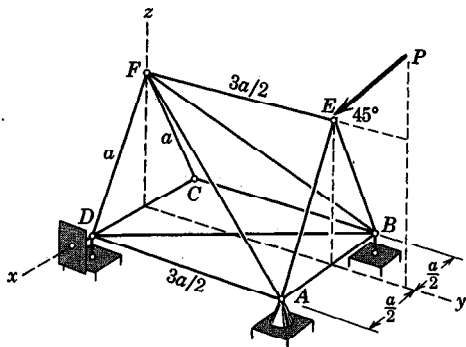


Problema 4/41

4/42. Cada uno de los puntales de alunizaje de una astronave es una armadura espacial simétrica respecto al plano vertical $x-z$ que se indica. Para una fuerza de alunizaje de $F = 2400$ N, calcular la fuerza correspondiente en el miembro BE . Es permisible la hipótesis de equilibrio estático de la armadura si es muy pequeña su masa. Suponer cargas iguales en los miembros situados simétricamente. Resp. $F_{BE} = 1530$ N, T



Problema 4/42

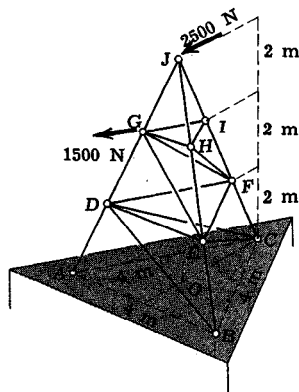


Problema 4/43

4/43. Comprobar la suficiencia de los apoyos de la armadura espacial de la figura y también el número y disposición de los miembros para asegurar el isostatismo tanto exterior como interior. Determinar, por simple inspección, las fuerzas en DC , CB y CF . Calcular la fuerza en el miembro AF y la componente x de la reacción sobre la armadura en D .

$$\text{Resp. } F_{AF} = \frac{\sqrt{13}}{3\sqrt{2}} P, T;$$

$$D_x = \frac{P}{3\sqrt{2}} (\text{sentido } -x)$$



Problema 4/44

4/44. Se erige una torre espacial sobre una base triangular equilátera y forma una pirámide simétrica con sus tres secciones de armadura de 2 m. La torre soporta la fuerza horizontal de 2500 N que es paralela a la diagonal de la base OC , y la fuerza horizontal de 1500 N aplicada según GI . Comprobar la rigidez interna de la armadura y calcular la fuerza en el miembro GF . Determinar por simple examen de una sección aislada adecuada, las fuerzas en los miembros GI , HI , GE y HF .

$$\text{Resp. } F_{GF} = 1605 \text{ N T}$$

20. Entramados y máquinas. Las estructuras y mecanismos compuestos de miembros articulados cualquiera de los cuales tenga más de dos fuerzas a él aplicadas, no pueden analizarse por los métodos descritos para las armaduras simples. Dichos miembros son miembros multifuerza (tres o más fuerzas) y en general las fuerzas *no* estarán dirigidas según los miembros. En el capítulo anterior se estudió e ilustró el equilibrio de cuerpos sobre los que actúan varias fuerzas, si bien se concentró la atención en el equilibrio de *un solo* cuerpo rígido. En el presente apartado concentraremos nuestra atención en el equilibrio de cuerpos rígidos *interconectados* que contengan miembros multifuerza. Aun cuando la mayoría de dichos cuerpos pueden analizarse como sistemas

bidimensionales, existen numerosos ejemplos de entramados y máquinas tridimensionales.

Las fuerzas que actúan sobre cada miembro de un sistema articulado se hallan aislando el miembro con un diagrama para sólido libre y aplicando las ecuaciones de equilibrio establecidas. Debe observarse con cuidado el *principio de la acción y la reacción* al representar las fuerzas de interacción sobre los diferentes diagramas para el sólido libre. Si la estructura contiene más miembros o apoyos de los necesarios para evitar que se deforme, entonces, como en el caso de las armaduras, el problema será estáticamente indeterminado y los principios del equilibrio, aun cuando son necesarios, no son suficientes para obtener la solución.

Si el entramado o máquina constituye una unidad rígida por sí mismo, se inicia mejor el análisis estableciendo todas las fuerzas exteriores a la estructura considerada como un solo cuerpo rígido. Se desmiembra entonces la estructura y se considera el equilibrio de cada una de sus partes. Las ecuaciones del equilibrio para las distintas partes estarán relacionadas mediante los términos que contienen las fuerzas de interacción. Si la estructura no es rígida por sí misma, sino que su rigidez depende de sus apoyos exteriores, generalmente es necesario considerar primeramente el equilibrio de una parte del sistema que sea verdaderamente rígida de por sí.

En la mayoría de los casos se encontrará que el análisis de entramados y máquinas se facilita mucho representando las fuerzas en función de sus componentes cartesianas rectangulares. Ocurre así, en particular, cuando se dan las dimensiones de las partes según direcciones perpendiculares entre sí. La ventaja de esta representación es que simplifica grandemente el cálculo de los brazos de momentos. En algunos problemas tridimensionales, particularmente cuando se calculan momentos respecto a ejes que no son paralelos a los de coordenadas, resulta ventajosa la notación vectorial. Al trazar los diagramas de sólido libre, no siempre es posible asignar de antemano el sentido adecuado a todas las fuerzas o a sus componentes, y suele hacerse necesario asignarles un sentido arbitrario. En este caso, es *absolutamente necesario* que se represente una fuerza en forma *sistemática* en los diagramas de cuerpos interactuantes que contengan la fuerza en cuestión. Así, para dos cuerpos unidos por el pasador A, figura 45a, al ser separados, los componentes deberán representarse sistemáticamente en los sentidos *opuestos*. En una articulación por rótula entre miembros de una armadura espacial, el principio de la igualdad de acción y reacción deberá aplicarse a las tres componentes como se indica en la figura 45b. Los sentidos asignados podrán resultar falsos cuando se determinen matemáticamente los signos algebraicos de las componentes. Por ejemplo, si A_x resulta negativa, estará actuando en realidad en sentido opuesto al considerado inicialmente. En consecuencia, será preciso invertir el sentido de la fuerza en *ambos* miembros e invertir el signo del término de esta fuerza en las ecuaciones. O bien puede dejarse la representación como se hizo inicialmente, y el sentido de la fuerza deberá comprenderse a partir del signo negativo.

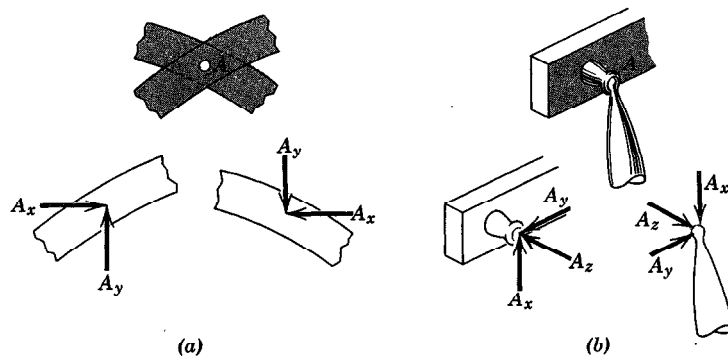


Figura 45

Por último, surgen ocasionalmente situaciones en las que es necesario resolver un sistema de dos o más ecuaciones para separar las incógnitas. Sin embargo, en la mayoría de los casos se podrá evitar la resolución de sistemas de ecuaciones eligiendo convenientemente el miembro o grupo de miembros para el diagrama del sólido libre y eligiendo en forma adecuada los centros de momentos que eliminan términos molestos en las ecuaciones. En los problemas tipo siguientes se ilustra el método de resolución descrito en los párrafos anteriores.

Problemas tipo

4/45. El entramado soporta la carga de 200 kp en la forma indicada en la parte *a* de la figura. Despreciar los pesos de los miembros frente a las fuerzas inducidas por la carga y calcular las componentes vertical y horizontal de todas las fuerzas que se ejercen sobre cada uno de los miembros.

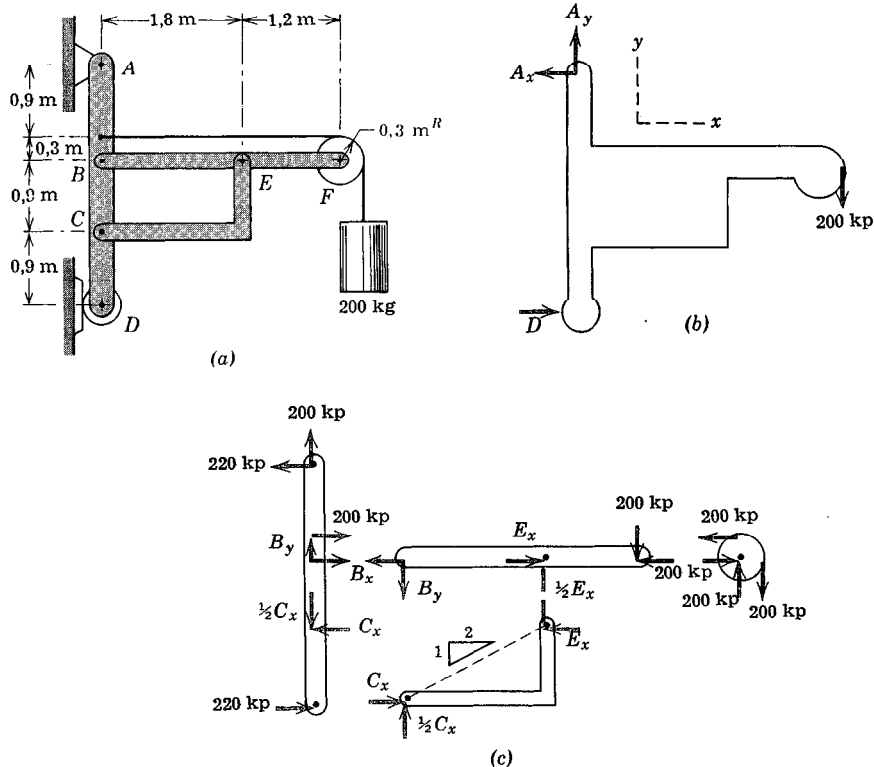
Solución. Primeramente se observa que los tres miembros soportantes que constituyen el entramado forman un conjunto rígido que puede analizarse como si fuera un solo cuerpo. También se observa que la disposición de los apoyos exteriores hace isostático al entramado.

En la parte *b* de la figura se ha dibujado el diagrama de sólido libre del conjunto del entramado y se determinan las reacciones exteriores. Así

$$[\Sigma M_A = 0] \quad 3,3(200) - 3,0D = 0, \quad D = 220 \text{ kp}$$

$$[\Sigma F_x = 0] \quad A_x - 220 = 0, \quad A_x = 220 \text{ kp}$$

$$[\Sigma F_y = 0] \quad A_y - 200 = 0, \quad A_y = 200 \text{ kp}$$



Problema 4/45

A continuación, desmembraremos el entramado y dibujaremos el diagrama de sólido libre de cada uno de los miembros (parte c de la figura). Los diagramas se han dispuesto en sus posiciones relativas aproximadas a fin de ayudar a seguir la pista a las fuerzas de interacción comunes. En los puntos A y D del diagrama se introducen las reacciones exteriores que acabamos de calcular. Otras fuerzas conocidas son las fuerzas de 200 kp que ejerce el eje de la polea sobre el miembro BF, obtenidas del diagrama del sólido libre de la polea. También se representa la tensión de 200 kp del cable ejerciéndose sobre AD en su punto de amarre.

A continuación se indican sobre los diagramas las componentes de todas las fuerzas incógnitas. Se observa aquí que CE es un miembro de dos fuerzas, por lo que no será la forma del miembro sino la dirección de la recta que une los dos puntos de aplicación de las fuerzas quien determine la dirección de éstas y por tanto el cociente entre las componentes de las fuerzas que se ejercen en C y E. Dichas componentes tienen reacciones iguales y opuestas que se han representado sobre BF en E y sobre AD en C. A primera vista no puede conocerse el sentido positivo de las componentes en B, por lo que se podrá asignar arbitrariamente y lo mantendremos de manera sistemática.

Podemos proseguir utilizando la ecuación de momentos respecto a B o E para el miembro BF seguida de las dos ecuaciones de fuerzas. Así

$$[\Sigma M_B = 0] \quad 200(3,0) - \frac{1}{2} E_x(1,8) = 0, \quad E_x = 667 \text{ kp} \quad \text{Resp.}$$

$$[\Sigma F_y = 0] \quad B_y + 200 - 667/2 = 0, \quad B_y = 133 \text{ kp} \quad \text{Resp.}$$

$$[\Sigma F_x = 0] \quad B_x + 200 - 667 = 0, \quad B_x = 467 \text{ kp} \quad \text{Resp.}$$

Los valores numéricos positivos de las incógnitas significan que en los diagramas de sólido libre se han tomado correctamente los sentidos. El valor de $C_x = E_x = 667 \text{ kp}$ obtenido por inspección del diagrama de sólido libre de CE se introduce ahora en el diagrama de AD , junto con los valores de B_x y B_y que acabamos de determinar. Se pueden aplicar ahora al miembro AD las ecuaciones de equilibrio a fines de comprobación, ya que todas las fuerzas que se ejercen sobre este miembro han sido ya calculadas. Las ecuaciones dan

$$[\Sigma M_C = 0] \quad 220(2,1) + 220(0,9) - 200(1,2) - 467(0,9) = 0$$

$$[\Sigma F_x = 0] \quad 220 - 667 + 467 + 200 - 220 = 0$$

$$[\Sigma F_y = 0] \quad -667/2 + 133 + 200 = 0$$

lo que verifica los cálculos anteriores.

4/46. La pala mecánica tiene una capacidad de 3 m^3 y transporta barro que pesa 1280 kg/m^3 . En la posición representada en la figura, en la cual el brazo EB está horizontal, hallar la fuerza compresiva en el vástago JL del émbolo del cilindro hidráulico y la fuerza cortante total que soporta el pasador situado en A . La máquina es simétrica respecto a un plano vertical central longitudinal y tiene dos juegos de conexiones iguales, uno de los cuales es el representado. Pueden despreciarse los pesos de los miembros frente a las fuerzas a que están sometidos.

Solución. El peso de la carga transportada que soporta el juego de conexiones de la figura es la mitad del total, o sea $\frac{1}{2}(1280)(3) = 1920 \text{ kp}$. En la parte b de la figura pueden verse los diagramas para sólido libre de los distintos miembros, en los cuales los sentidos de las componentes de las fuerzas están o asignados correctamente por la observación o se supone que son los señalados. En todos los casos se observa correctamente el principio de la igualdad en la acción y la reacción. Los cilindros hidráulicos BK y JL actúan como miembros de dos fuerzas con lo cual

$$B_y = B_x \operatorname{tg} \alpha = \frac{175}{100} B_x = 1,75 B_x, \quad L_y = L_x \operatorname{tg} \beta = \frac{30}{160} L_x = 0,1875 L_x.$$

La fuerza L en JL y la reacción en A precisan una determinación de las demás fuerzas indicadas en los diagramas para sólido libre. Para la cuchara

Para la palanca DF se ve fácilmente que

Análogamente, para la palanca LH ,

y

En el diagrama para sólido libre de *EBA* se ve que se pueden eliminar B_x y B_y sumando momentos respecto a *K* y *B*. Luego

$$[\Sigma M_B = 0] \quad 100A_y + 360(60) - 6572(45) - 1920(200) = 0$$

y

La fuerza en el cilindro JL es

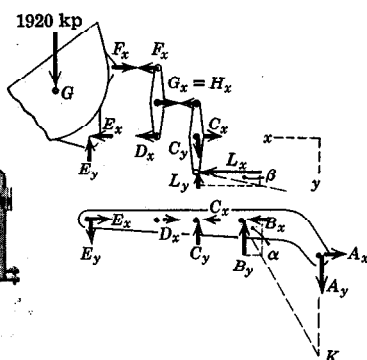
A detailed diagram of a wheel loader with various dimensions and force labels. The dimensions are as follows:

- Horizontal dimensions from the front of the bucket to the rear axle: 45 cm, 90 cm, 50 cm, 60 cm, 100 cm.
- Vertical dimensions:
 - 45 cm (height from ground to the top of the bucket's rim).
 - 45 cm (height from the pivot point of the bucket to its rim).
 - 45 cm (height from the ground to the pivot point of the bucket).
 - 45 cm (height from the ground to the center of the wheel).
 - 20 cm (height from the center of the wheel to the seat).
 - 60 cm (height from the ground to the top of the seat).

Force labels include:

- F (upward force at the top of the bucket).
- G (downward force at the pivot point of the bucket).
- H (horizontal force at the pivot point of the bucket).
- B (upward force at the pivot point of the wheel).
- D (downward force at the pivot point of the wheel).
- C (horizontal force at the pivot point of the wheel).
- E (upward force at the front of the bucket).
- L (downward force at the rear axle).
- K (upward force at the center of the wheel).

(a)



(b)

Problema 4/46

Si se deseara conocer la fuerza en B , podría calcularse ahora de la manera siguiente

$$[\Sigma F_x = 0] \quad 960 + 960 - 3840 - B_x + 6572 = 0, \quad B_x = 4652 \text{ kp}$$

$$y \quad B_y = 1,75B_x, \quad B_y = 1,75(4652) = 8141 \text{ kp}$$

4/47. El entramado en A de la parte a de la figura está articulado según el eje y en los puntos E y F , que no pueden ofrecer resistencia según la dirección y . Las conexiones en A , B , C , D y G pueden tratarse como rótulas. La barra CG es el único miembro de dos fuerzas. Calcular las componentes x , y y z de todas las fuerzas que se ejercen sobre cada miembro del entramado. Los pesos de los miembros pueden despreciarse frente a las cargas transmitidas.

Solución. El diagrama para sólido libre del entramado en conjunto es el presentado en la parte b de la figura y se emplea para calcular las reacciones exteriores.

$$[\Sigma M_y = 0] \quad G \frac{1,2}{\sqrt{2}} - 2500(1,2) = 0 \quad G = 2500 \sqrt{2} \text{ N}$$

$$[\Sigma M_{F_x} = 0] \quad 2500(1,2) - 2,4E_z = 0 \quad E_z = 1250 \text{ N}$$

$$[\Sigma F_z = 0] \quad F_z + 1250 - 2500 = 0 \quad F_z = 1250 \text{ N}$$

$$[\Sigma M_{F_z} = 0] \quad 2500(1,2) - 2500(0,6) - 2,4E_x = 0 \quad E_x = 625 \text{ N}$$

$$[\Sigma F_x = 0] \quad 2500 + F_x - 625 - 2500 = 0 \quad F_x = 625 \text{ N}$$

En la parte c de la figura se ha aislado, con su diagrama para sólido libre, cada uno de los tres miembros multifuerza, incluyendo las reacciones en los apoyos calculadas. El sentido correcto de todas las componentes no se ve necesariamente desde un principio y no pasa nada, si no se da el sentido correcto a las componentes, si no se vulnera el principio de la igualdad de la acción y la reacción. Por simple examen, el equilibrio del miembro BD exige

$$B_x = D_x = 1250 \text{ N}, \quad B_z = D_z = 1250 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

Conocidas dos de las tres componentes de D , pueden analizarse los miembros ADF y ABE . Luego para ADF

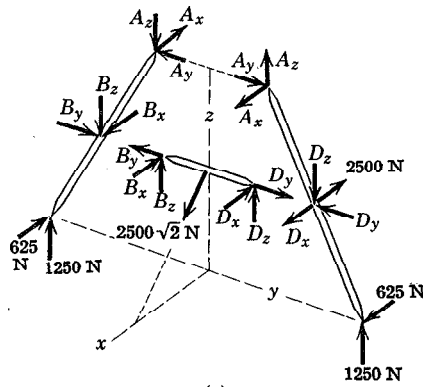
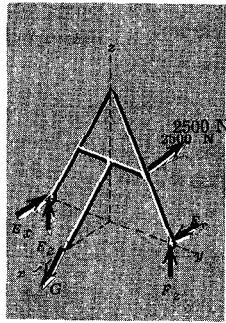
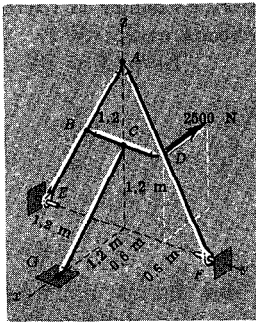
$$[\Sigma F_z = 0] \quad A_z + 1250 - 1250 = 0 \quad A_z = 0 \quad \text{Resp.}$$

$$[\Sigma F_x = 0] \quad A_x + 1250 + 625 - 2500 = 0 \quad A_x = 625 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

$$[\Sigma M_{D_x} = 0] \quad 1250(0,6) - 1,2A_y = 0 \quad A_y = 625 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

$$[\Sigma F_y = 0] \quad 625 - D_y = 0 \quad D_y = 625 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$

$$\text{De } BD \text{ resulta claro ahora que} \quad B_y = 625 \text{ N} \quad \text{Resp.}$$



(c)

Problema 4/47

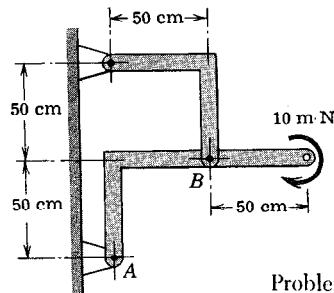
Como comprobación, puede verificarse el equilibrio de ABE con las componentes conocidas de las fuerzas.

Obsérvese que el proceso resolutivo se ha seguido de manera que se eliminen ecuaciones acopladas que requieran la resolución de un sistema de ecuaciones. Pensando un poco puede hallarse el proceso más favorable en cada problema. En problemas más complicados no siempre es posible evitar la solución de un sistema de ecuaciones de equilibrio.

Problemas

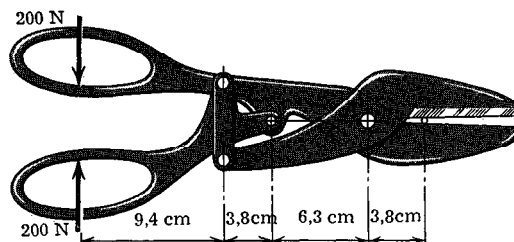
4/48. Calcular la fuerza que soporta el pasador A del entramado sometido al par de momento de $10 \text{ m}\cdot\text{N}$.

Resp. $A = 10\sqrt{2} \text{ N}$

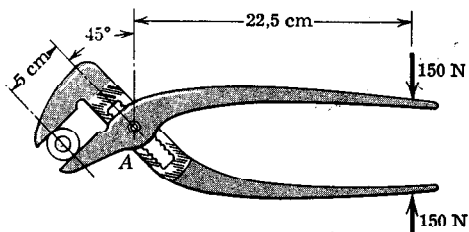


Problema 4/48

4/49. Las tijeras de doble palanca que se muestran en la figura suelen emplearse en lugar de las tijeras de hojalatco corrientes cuando se requiera ejercer grandes fuerzas de corte. Si se aplica una fuerza de compresión de 200 N . ¿cuál es la fuerza de corte P en un lugar del filo de la hoja situado a una distancia de $3,8 \text{ cm}$ del pasador A?



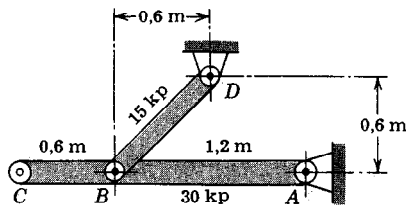
Problema 4, 49



Problema 4/50

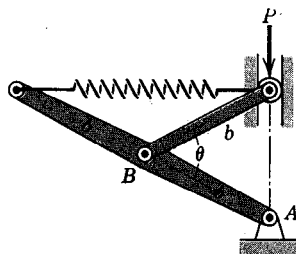
4/50. Calcular la fuerza que soporta el pasador A cuando la fuerza compresiva aplicada es de 150 N.

Resp. $A = 788 \text{ N}$



Problema 4/51

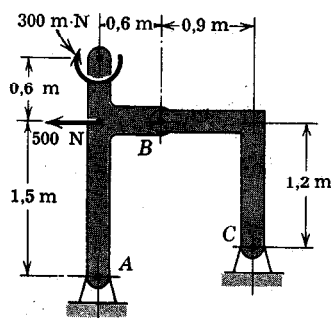
4/51. Las dos barras uniformes están soportadas en el plano vertical en la forma que se indica. Si AC pesa 30 kp y BD pesa 15 kp, teniendo cada una su centro de gravedad en su punto medio, calcular la fuerza que se ejerce sobre el pasador A.



Problema 4/52

4/52. La fuerza P mantiene en la posición de equilibrio que se indica al entramado cargado por resorte. Determinar, para esta posición, la expresión de la tensión T del resorte y la fuerza que soporta el pasador B.

Resp. $T = P \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}$, $B = P \operatorname{cosec} \frac{\theta}{2}$

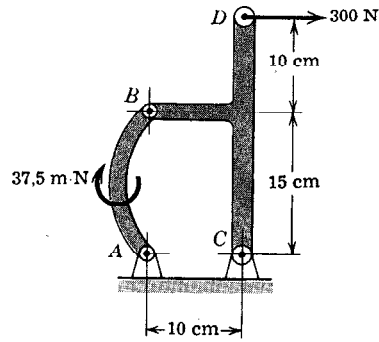


Problema 4/53

4/53. Calcular la fuerza total que soporta el pasador A bajo la acción de la fuerza de 500 N y del par de 300 m·N.

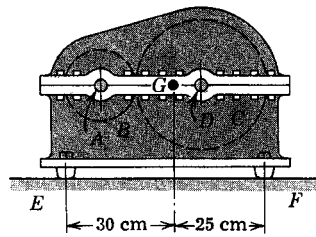
Resp. $A = 401 \text{ N}$

4/54. Calcular la fuerza que soporta el pasador C del entramado sometido a la fuerza de 300 N y al par de $37,5\text{ m}\cdot\text{N}$.



Problema 4/54

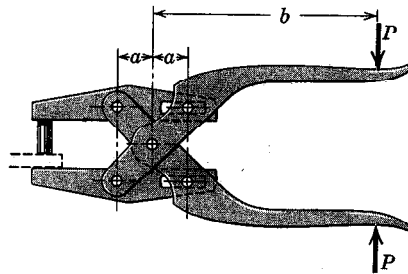
4/55. El reductor de velocidades consta del eje de entrada A con un piñón solitario B , que acciona el engranaje C y su eje de salida D con una reducción 2:1. El centro de gravedad de la unidad de 30 kg está en G . Si se aplica al eje A un par de entrada de sentido horario y momento $500\text{ cm}\cdot\text{kp}$ y si el eje de salida D acciona una máquina a velocidad constante, determinar las fuerzas resultantes que se ejercen sobre el reborde de la base del reductor en E y F por la acción combinada de los roblones y los cimientos.



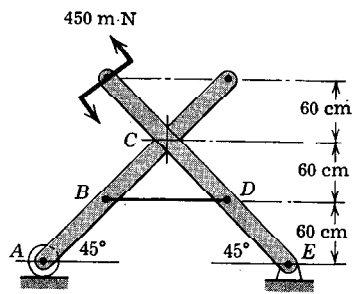
Problema 4/55

Resp. $E = 13,65\text{ kp}$ hacia abajo,
 $F = 43,65\text{ kp}$ hacia arriba

4/56. Para la punzonadora de papel de la figura, hallar la fuerza punzante Q que corresponde a una fuerza de presión manual P .



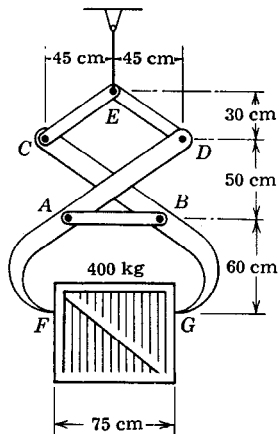
Problema 4/56



Problema 4/57

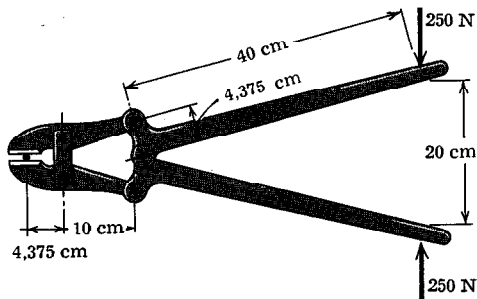
4/57. Calcular la fuerza que soporta el pasador C del entramado sometido al par de 450 m-N .

Resp. $C = 419,5 \text{ N}$



Problema 4/58

4/58. Calcular la fuerza que se ejerce sobre la barra AB que une las mordazas elevadoras que se cruzan sin tocarse.

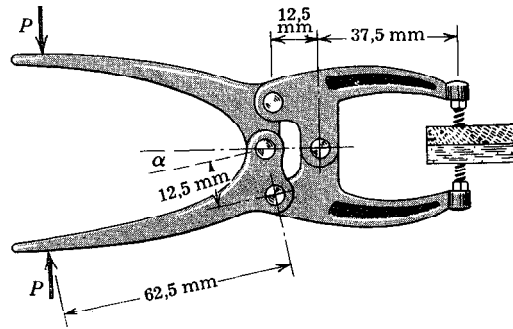


Problema 4/59

4/59. Determinar la fuerza Q que ejercen sobre cada lado del perno las cuchillas cuando se someten las agarraderas a fuerzas de 250 N .

Resp. $Q = 20\,250 \text{ N}$

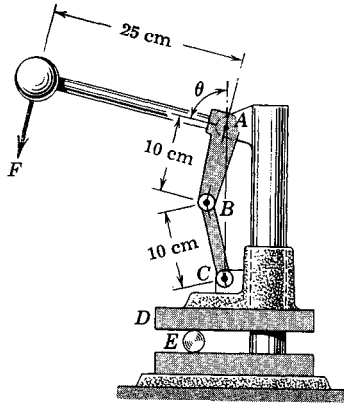
4/60. Las tenazas de la figura se utilizan para muchos fines de sujeción. Para la posición de las agarraderas dada por $\alpha = 10^\circ$ y para una fuerza aplicada $P = 150 \text{ N}$, calcular la fuerza de sujeción originada.



Problema 4/60

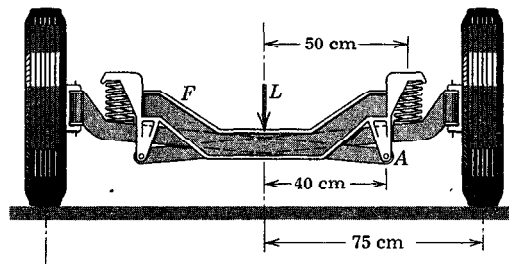
4/61. La mandíbula D de la prensa desliza con rozamiento despreciable a lo largo de la columna vertical fija. Calcular la fuerza de compresión R que ejerce sobre el cilindro E y la fuerza que soporta el pasador A al aplicar una fuerza $F = 200 \text{ N}$ a la empuñadura de la palanca cuando el ángulo θ es de 75° .

Resp. $R = 966 \text{ N}$, $A = 833,5 \text{ N}$

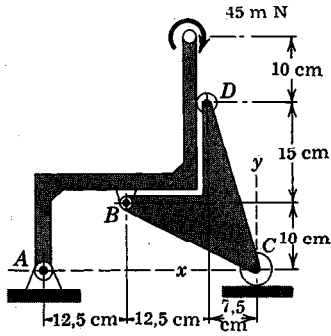


Problema 4/61

4/62. En la figura se ha representado una suspensión de doble eje para camiones pequeños. El peso del bastidor central F es de 40 kp y el peso de cada rueda con la barra a ella unida es de 35 kp , estando el centro de gravedad situado a $67,5 \text{ cm}$ de la vertical central. Para una carga de $L = 1200 \text{ kp}$ transmitida al bastidor F , calcular la fuerza cortante total que soporta el pasador en A . Si cada muelle tiene una longitud natural de 25 cm y una rigidez de 128 kp/cm , ¿cuál es la longitud l del muelle comprimido a causa de las cargas especificadas?

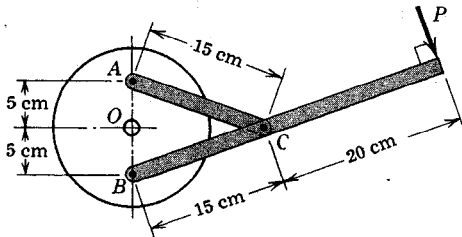


Problema 4/62



Problema 4/63

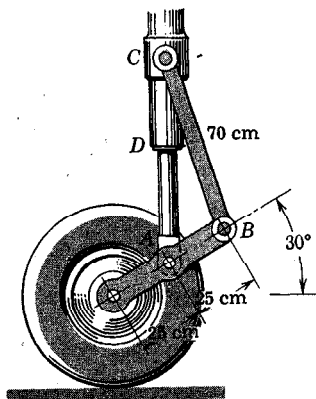
4/63. Despreciar los pesos de los miembros y calcular las componentes x e y de todas las fuerzas que se ejercen sobre cada uno de los miembros de la máquina a causa de la aplicación del par de 45 m·N.



Problema 4/64

4/64. El dispositivo representado es una forma ajustable de llave de tornillo en la cual los espárragos de A y B encajan en los agujeros de la cara del disco que se quiere atornillar sobre su eje fijo O. Si para apretar el disco sobre el eje se necesita un momento de 75 m·N respecto a O, calcular la fuerza que soportan cada uno de los espárragos A y B cuando la fuerza P tenga el valor requerido.

Resp. $A = 835,5 \text{ N}$, $B = 715,5 \text{ N}$

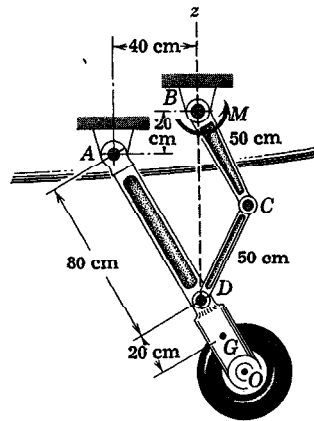


Problema 4/65

4/65. El tren de aterrizaje consiste en un cuerpo de bomba D cargado hidráulicamente y por muelle, más las dos barras articuladas OB y CB. Si el tren de aterrizaje se mueve a lo largo de la pista a velocidad constante, soportando la rueda una carga constante estabilizada de 2400 kp, calcular la fuerza total que soporta el pasador A.

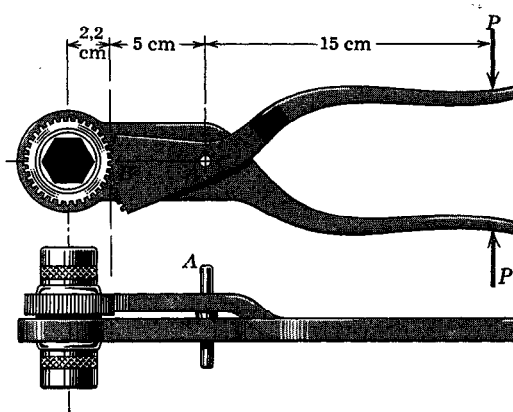
4/66. La rueda delantera de un tren de aterrizaje se eleva aplicando un par de momento M a la barra BC mediante el árbol en B . Si el brazo y rueda AO tuvieran un peso combinado de 48 kp con centro de gravedad en G , hallar el valor necesario de M para elevar la rueda cuando D esté directamente debajo de B . Despreciar los pesos de BC y DC .

Resp. $M = 14,1 \text{ m} \cdot \text{kp}$

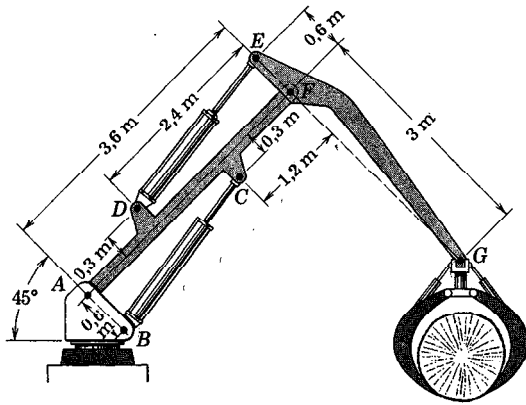


Problema 4/66

4/67. Se diseña una llave anti-momento para ser utilizada por un tripulante de una nave espacial en la cual no dispone de ninguna plataforma estable contra la que apoyarse cuando aprieta un tornillo. El pasador A ajusta en un agujero adyacente practicado en la estructura que contiene el tornillo que se quiere apretar. Mediante oscilaciones sucesivas de la unidad engranaje-mango, el zócalo gira en un sentido por acción de un mecanismo de trinquete. La reacción contra el pasador A proporciona la característica "anti-momento" de la herramienta. Para una fuerza compresiva de $P = 150 \text{ N}$ determinar el momento M transmitido al tornillo y la reacción exterior R contra el pasador A normal a la recta AB . (Un lado de la herramienta se emplea para apretar tornillos y el opuesto para aflojarlos.)



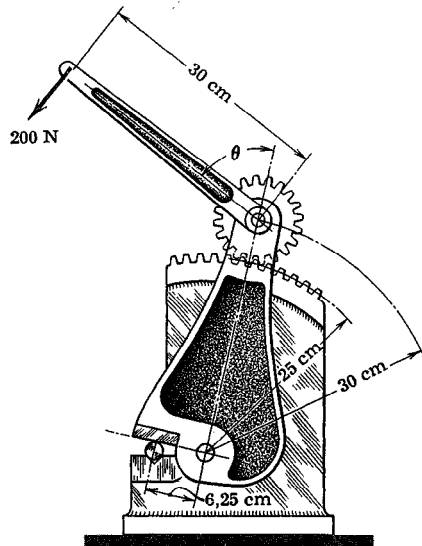
Problema 4/67



Problema 4/68

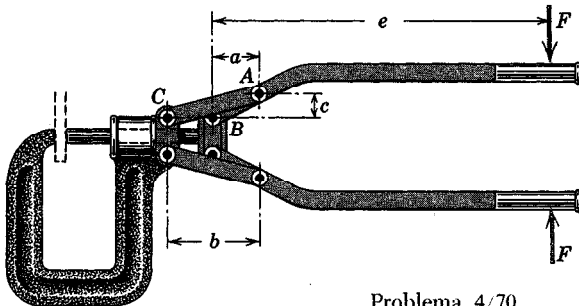
4/68. En la posición particular indicada de la grúa para troncos, las plumas AF y EG son perpendiculares entre sí y AF es perpendicular a AB . Si la grúa está manejando un tronco de 2400 kg, calcular la fuerza soportada por los pasadores en A y D en esta posición, a causa del peso del tronco.

Resp. $A = 17\,000\text{ kp}$, $D = 8550\text{ kp}$



Problema 4/69

4/69. Determinar la fuerza cortante Q aplicada a la barra si se aplica a su empuñadura una fuerza de 200 N cuando $\theta = 30^\circ$. Para una fuerza aplicada dada, ¿qué valor de θ da la mayor fuerza cortante?

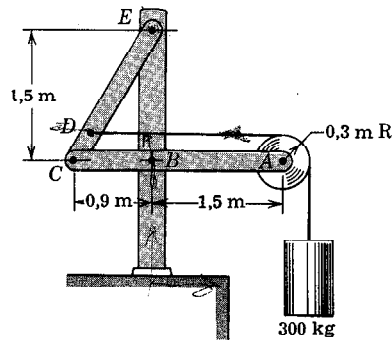


Problema 4/70

4/70. Determinar la fuerza de puncción P en función de las fuerzas F aplicadas a las empuñaduras.

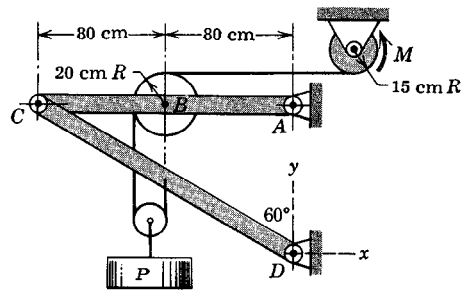
$$\text{Resp. } P = \frac{2Fe}{c\left(1 - \frac{a}{b}\right)}$$

4/71. El poste fijo soporta los dos miembros CE y AC junto con la polea y su carga. Determinar la fuerza que se ejerce sobre el pasador en B cuando esté aplicado el peso de 300 kp. Resp. $B = 877,5$ kp



Problema 4/71

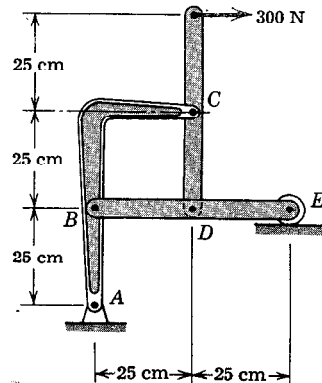
4/72. Al eje del tambor que acciona la grúa hay que aplicar un par de momento $M = 30$ m·kp para soportar el peso P suspendido en la forma que se indica. Calcular las componentes x e y de todas las fuerzas que se ejercen sobre los miembros AC y CD . Los pesos de los miembros y poleas son despreciables frente a P .



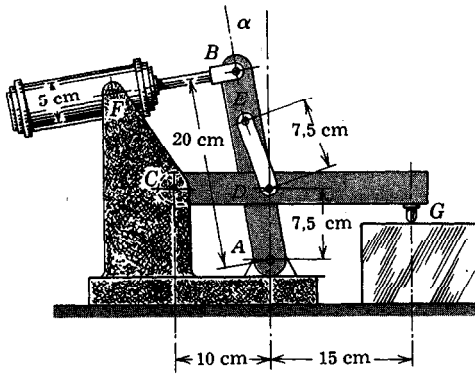
Problema 4/72

4/73. Determinar la fuerza que soporta el pasador en C del entramado sometido a carga.

Resp. $C = 1080$ N

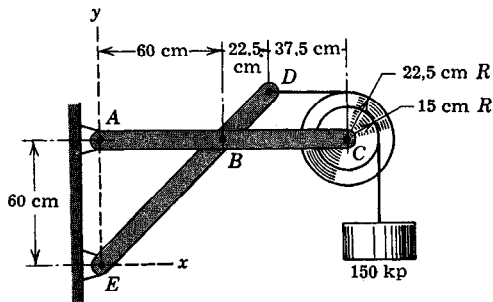


Problema 4/73



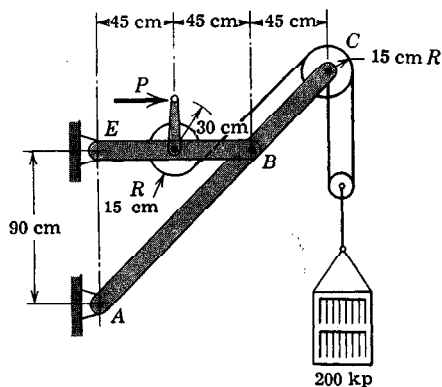
Problema 4/74

4/74. Un cilindro neumático que puede girar alrededor del eje horizontal F acciona la palanca AB del sujetador de acción rápida para mantener en posición la pieza que se trabaja. Si se tiene una presión de aire de 4 kp/cm^2 por encima de la presión atmosférica ejerciéndose sobre el émbolo de 5 cm de diámetro, determinar la fuerza de sujeción en G para la posición $\alpha = 10^\circ$. Para esta posición, el vástago del émbolo es perpendicular a AB .



Problema 4/75

4/75. Calcular las componentes x e y de todas las fuerzas que se ejercen sobre los miembros AC y DE al aplicar la carga de 150 kp . Las dos poleas son solidarias.



Problema 4/76

4/76. Calcular la fuerza que soporta el pasador A cuando la manivela de la grúa esté en la posición vertical indicada. La configuración geométrica es tal que el cable que va del torno D a la polea C es muy aproximadamente paralelo a BC y puede considerarse como tal. La fuerza P que se ejerce sobre la empuñadura de la manivela es exactamente la necesaria para soportar la carga.

Resp. $A = 407 \text{ kp}$

4/77. El azadón trasero se gobierna mediante los tres cilindros hidráulicos y, en la posición que se indica, puede aplicar una fuerza horizontal $P = 1000 \text{ kp}$. Despreciar los pesos de los miembros y calcular las fuerzas que soportan los pasadores en A y E.

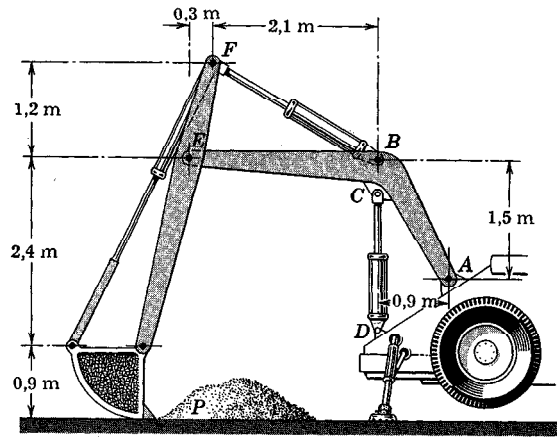
Resp. $A = 2235 \text{ kp}$, $E = 3675 \text{ kp}$

4/78. La pala mecánica pesa $10\,000 \text{ kp}$ vacía y contiene $1,53 \text{ m}^3$ de basura con centro de gravedad en G. Existe una doble conexión mecánica a uno y otro lado de la máquina. Si la pala contiene basura de densidad $1,28 \text{ g/cm}^3$, determinar, para la posición particular indicada, la fuerza P que actúa sobre el émbolo de cada cilindro hidráulico AB y la fuerza que se ejerce sobre los pasadores C y E de un lado de la máquina.

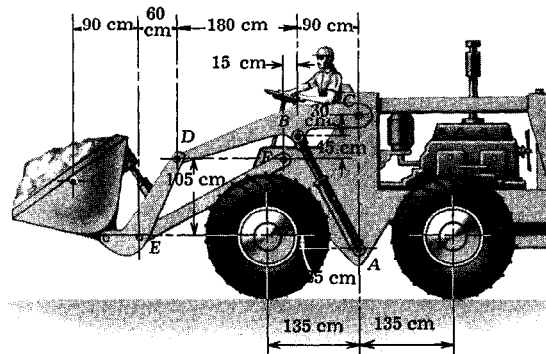
Resp. $P = 4260 \text{ kp}$
 $C = 4400 \text{ kp}$
 $E = 2325 \text{ kp}$

4/79. La tapa del gran autoclave está articulada en D y la sube y baja el cilindro hidráulico CE. Una ranura lisa y corta situada en A en la dirección de AC (v. detalle) permite que exista la pequeña diferencia de radio de los arcos que recorre A al rodear de D y B al girar la tapa y el brazo de mando. En la posición de 15° que se indica, la cara inferior de la tapa y el brazo AC son paralelos. La tapa pesa 440 kp , estando su centro de gravedad en G. Los pesos del brazo y del cilindro son pequeños en comparación y pueden despreciarse. Calcular la fuerza que soporta cada uno de los pasadores en D y B para la posición de 15° . (Para la configuración geométrica dada, el ángulo $\theta = 41^\circ 49'$.)

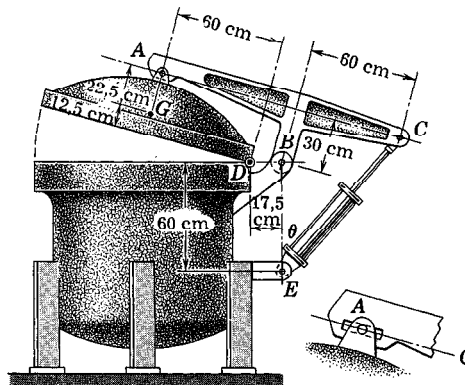
Resp. $D = 116 \text{ kp}$, $B = 1145 \text{ kp}$



Problema 4 77



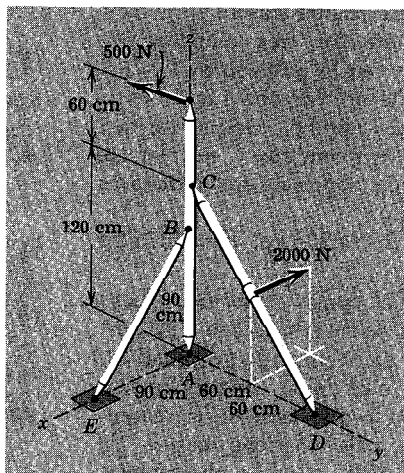
Problema 4 78



Detalle de A

Problema 4/79

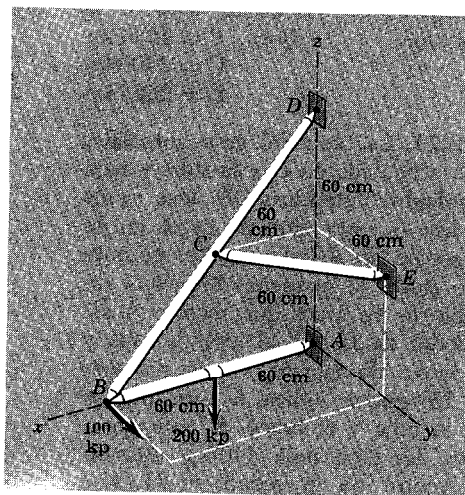
4/80. Determinar la fuerza que se ejerce sobre el miembro ABC en la conexión A para el entramado espacial cargado que se indica. Cada conexión puede tratarse como rótula.



Problema 4/80

4/81. Calcular la fuerza total que se ejerce sobre el miembro BD en D para el entramado espacial cargado por las dos fuerzas indicadas. Cada una de las conexiones puede tratarse como rótula.

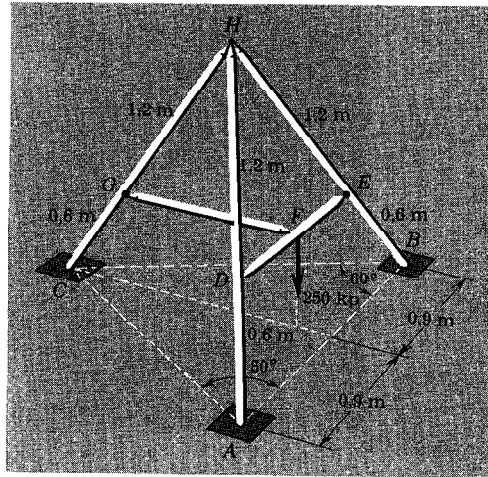
Resp. $D = 245 \text{ kp}$



Problema 4/81

◀4/82. El entramado de la figura descansa sobre una superficie lisa horizontal y las juntas en D, E, F, G y H actúan como articulaciones de rótula. Determinar la fuerza total que actúa sobre la unión D debida a la carga de 250 kp aplicada en F .

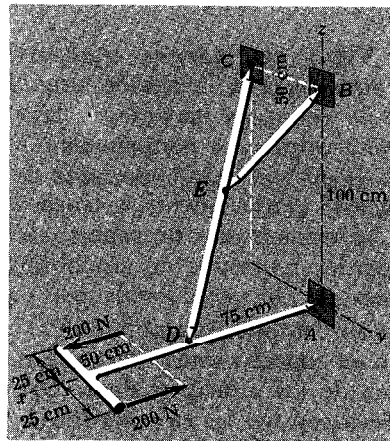
Resp. $D = 129 \text{ kp}$



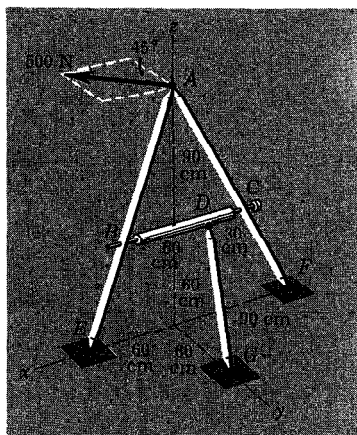
Problema 4/82

◀4/83. Determinar la fuerza en el miembro EB debida a la acción del par aplicado a la armadura espacial. Calcular también las componentes de la fuerza que se ejerce en D sobre CD . El punto E es el punto medio del segmento CD y los apoyos A, B, C, D y E pueden considerarse articulaciones de rótula.

Resp. $F_{EB} = 359 \text{ N}$ compresión;
 $D = D_y = 133,5 \text{ N}$



Problema 4/83



Problema 4/84

◀ 4/84. El miembro transversal BC del entramado en A tiene limitado su movimiento en la dirección x por medio de un collar en C , mientras que en B no existe limitación alguna al movimiento en la dirección x . Las demás uniones en A , D , E , F y G actúan como articulaciones de rótula. Calcular la fuerza en DG mediante una sola ecuación de equilibrio. Determinar también las componentes x , y , z de la fuerza que se ejerce en E sobre AE . Supóngase que los sentidos positivos de estas componentes concuerdan con los sentidos positivos de los ejes de coordenadas. Despréciense los pesos de los miembros.

Resp. $F_{DG} = 1300 \text{ N}$, $E_x = -283 \text{ N}$
 $E_y = -177 \text{ N}$, $E_z = 884 \text{ N}$

21. Vigas con cargas concentradas. Los miembros estructurales que ofrecen resistencia a la flexión originada por las cargas aplicadas reciben el nombre de vigas. La mayoría de las vigas son barras prismáticas largas y las cargas suelen aplicarse normalmente a los ejes de dichas barras. La viga es, indudablemente, el más importante de todos los miembros estructurales, y hay que entender perfectamente la teoría básica que fundamenta su diseño. El análisis de las capacidades de soporte de carga de las vigas consiste, primero, en establecer los requisitos de equilibrio de la viga en conjunto y de una parte cualquiera de ella considerada por separado. Segundo, se establecen las relaciones entre las fuerzas resultantes y la correspondiente resistencia interna de la viga para soportar estas fuerzas. La primera parte de este análisis requiere la aplicación de los principios de la Estática, mientras la segunda parte del problema lleva consigo las características de resistencia del material y suele tratarse en el estudio de la resistencia de materiales. En este apartado se estudia solamente la primera parte del problema.

Las vigas soportadas de tal manera que las reacciones en los apoyos pueden calcularse con auxilio solamente de los métodos de la Estática reciben el nombre de vigas *isostáticas*. Una viga que tenga más apoyos de los necesarios para proporcionar el equilibrio se dice que es *hiperestática* y será necesario considerar las propiedades de la deformación de la viga bajo condiciones de carga además de las ecuaciones del equilibrio estático para determinar las reacciones de los

apoyos. En la figura 46 pueden verse ejemplos de ambos tipos de vigas. En este apartado solamente se estudiarán vigas isostáticas.

En el análisis de armaduras simples, la resultante de las fuerzas que se ejercen sobre una sección de un miembro cortado era una fuerza única, de tensión o compresión, en la dirección de la barra. La flexión, la cortadura y la torsión de la barra eran despreciables o nulas. En el análisis de vigas, la resultante de las fuerzas que se ejercen sobre una sección transversal de la viga no pueden, en general, representarse mediante una fuerza \mathbf{F} y un par de momento \mathbf{M} según se indica en la figura 47a. Recuérdese del capítulo 2 que la resultante de un sistema cualquiera de fuerzas coplanarias puede expresarse como una fuerza resultante aplicada en un punto cualquiera y un par correspondiente. En algunas vigas la dis-

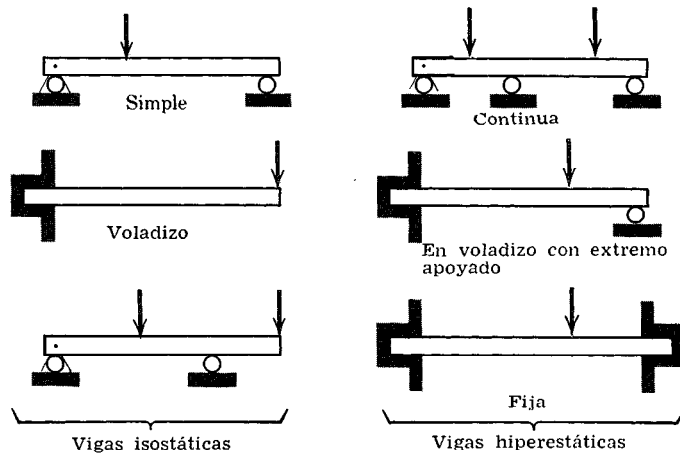


Figura 46

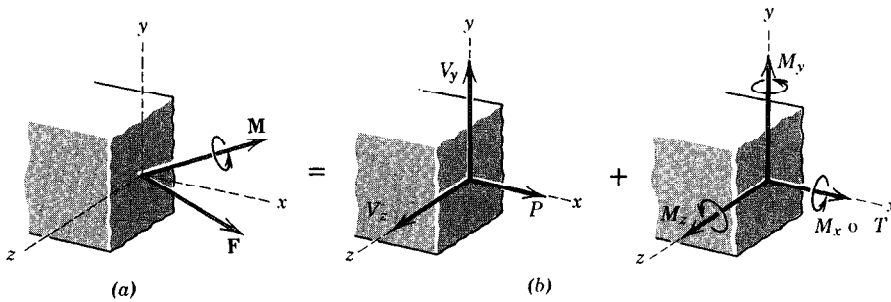


Figura 47

tribución real de las fuerzas en una sección recta es extraordinariamente compleja y su descripción completa requiere un extenso análisis que incluya las propiedades de la deformación bajo condiciones de carga de los materiales de las vigas. En el presente estudio sólo se considerará el *sistema equivalente* de la distribución de fuerzas para una sección cualquiera de una viga isostática.

En la figura 47b se presentan por separado la fuerza \mathbf{F} y el momento \mathbf{M} en función de sus tres componentes. Las componentes de \mathbf{F} son una fuerza tensora P y dos fuerzas cortantes V_y y V_z . Las componentes de \mathbf{M} son un momento torsor T y dos momentos flectores M_y y M_z . El momento flector M_y se debe a fuerzas aplicadas en el plano $x-z$ y M_z se debe a fuerzas aplicadas en el plano $x-y$. El momento torsor T o M_x se debe a momentos aplicados a la viga respecto al eje x que tienden a torcer la viga alrededor de este eje.

Obsérvese que las componentes de \mathbf{F} y \mathbf{M} en la figura 47 se toman en los sentidos positivos de los ejes de coordenadas de un triedro $x-y-z$ ortogonal dextrógiro. Esta notación para las fuerzas interiores se está utilizando cada vez más en la designación y análisis de esfuerzos en los sólidos y es la que utilizamos en este libro.

Si las fuerzas aplicadas a la viga fueran coplanarias, por ejemplo en el plano $x-y$ de la figura 47, entonces $V_z = 0$, $M_y = 0$ y $T = 0$. Las vigas representadas en la figura 46 son de este tipo en donde sólo interviene la flexión en el plano de la figura.

En la figura 48 se muestran dos porciones contiguas de una viga sometida a fuerzas coplanarias en el plano $x-y$ del papel. Sólo quedan la fuerza cortante $V_y = V$, la tensora P y el momento flector $M_z = M$. Las fuerzas se representan ejerciéndose sobre el centro de la sección recta. El *esfuerzo cortante medio* en la sección es V/A , donde A es el área de la sección recta. La fuerza P es una fuerza tensora, según se indica, y el *esfuerzo tensor medio* en la sección recta es P/A . En el capítulo 5 volveremos sobre las fuerzas o esfuerzos distribuidos.

Nótese que los sentidos positivos de V , P y M están invertidos en las dos secciones de la figura 48 en virtud del principio de acción y reacción. Esta designación de los sentidos positivos de las acciones concuerda con la notación adoptada en la figura 47 y deberá utilizarse de manera sistemática en la resolución de

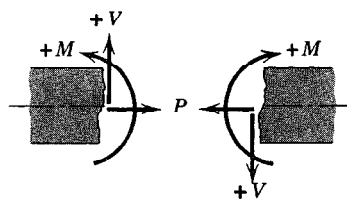


Figura 48

problemas.* Frecuentemente es imposible ver a simple vista si el esfuerzo cortante y el momento flector en una sección determinada de una viga cargada son positivos o negativos. Por esa razón convendrá representar V y M con sus sentidos positivos en los diagramas de sólido libre y dejar que los signos algebraicos de los valores calculados indiquen el sentido adecuado.

Como una ayuda para la interpretación física del momento flector M , consideremos la viga indicada en la figura 49 flexionada por los dos momentos iguales y opuestos aplicados a los extremos. La sección recta de la viga se toma como la de una viga en doble T (también llamada a veces sección H) con un nervio central muy estrecho y bordes superior e inferior de gran peso. Para esta viga puede despreciarse la carga que lleva el pequeño nervio frente a la de los dos bordes. Es casi evidente que el borde superior de la viga se acorta y se halla sometido a compresión, mientras que el inferior se alarga y se halla sometido a tensión. La resultante de las dos fuerzas, una tensión y la otra compresión, actuando sobre una sección cualquiera es un par y su momento es el momento flector que actúa sobre la sección. Si se hubiera cargado de igual manera una viga de sección recta diferente, la distribución de la fuerza sobre la sección hubiera sido diferente, pero la resultante hubiera sido el mismo par.

La variación de la fuerza cortante V y del momento flector M a lo largo de la viga suministra una información necesaria para el análisis de la viga. En particular, el valor máximo del momento flector suele ser lo que primero se considera en el diseño o selección de una viga, y deberá determinarse su valor y posición. Las variaciones del corte y del momento se presentan mejor gráficamente, y la representación gráfica de las expresiones de V y M en función de la longitud de la viga dan lugar a los *diagramas de fuerza y momento flector* de la viga.

El primer paso en el cálculo de las relaciones del corte y del momento consiste en establecer los valores de todas las reacciones exteriores sobre la viga aplicando las ecuaciones del equilibrio a un diagrama para el sólido libre de toda la viga. A continuación, se aísla mediante un diagrama para el sólido libre

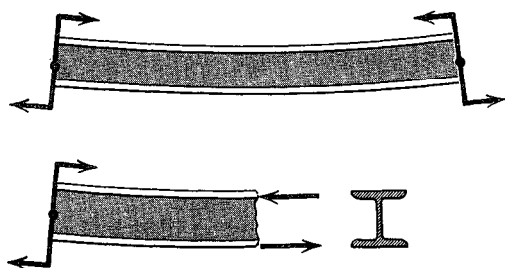


Figura 49

* En la literatura antigua es corriente encontrar una notación en la que se toma para el esfuerzo cortante el sentido opuesto al que hemos adoptado aquí.

una parte de la viga, la de la derecha o la de la izquierda de un corte transversal arbitrario, y se aplican a esta parte aislada de la viga las ecuaciones del equilibrio. Estas ecuaciones darán expresiones para la fuerza cortante V y el momento flector M que actúan en la sección sobre la parte aislada de la viga. La parte de la viga que lleve consigo el menor número de fuerzas, bien a la derecha o a la izquierda de la sección arbitraria, suele dar la solución más sencilla. No deberá tomarse una sección transversal que coincida con la localización de una carga concentrada, ya que tal posición representa un punto en discontinuidad en la variación del esfuerzo cortante y del momento flector. Por último, es sumamente importante hacer notar que los cálculos de V y M de cada sección elegida deben siempre estar de acuerdo con el convenio acerca del sentido positivo que se ilustra en la figura 48. En el caso de vigas horizontales en que no se especifiquen los ejes de coordenadas, se supondrá que el sentido positivo del eje horizontal es hacia la derecha y el del eje vertical hacia arriba.

Existen muchas combinaciones posibles de cargas y apoyos. En cada caso será siempre válido el método y el procedimiento que acabamos de describir y que se ilustran en los problemas tipo siguientes.

Problemas tipo

4/85. Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flector correspondientes a la viga de la parte *a* de la figura y determinar el valor máximo del momento flector, indicando el lugar en que se encuentra.

Solución. Del diagrama de sólido libre de la viga, representado en la parte *b*, las reacciones resultan ser:

$$[\Sigma M_{R_1} = 0] \quad 2,1 R_2 - 1,2(200) - 3(100) = 0, \quad R_2 = 257,1 \text{ kp}$$

$$[\Sigma F_y = 0] \quad R_1 + 257,1 - 200 - 100 = 0, \quad R_1 = 42,9 \text{ kp}$$

El diagrama de sólido libre de la parte de la viga a la izquierda de la sección *A* es el indicado en la parte *c* de la figura. La fuerza cortante V y el momento M aparecen con sus sentidos positivos. El equilibrio exige

$$[\Sigma F_y = 0] \quad V = -42,9 \text{ kp}$$

$$[\Sigma M_A = 0] \quad M = 42,9x$$

Estos valores son válidos entre $x = 0$ y $x = 1,2$ m.

El siguiente intervalo se analiza mediante el diagrama de sólido libre de la parte entera de la viga situada a la izquierda de la sección *B*. Nuevamente se representan V y M con sus sentidos positivos (parte *d*). El equilibrio da:

$$[\Sigma F_y = 0] \quad V - 200 + 42,9 = 0, \quad V = 157,1 \text{ kp}$$

$$[\Sigma M_B = 0] \quad M + 200(x - 1,2) - 42,9x = 0, \quad M = 240 - 157,1x$$

$$M = 240 - 157,1x$$

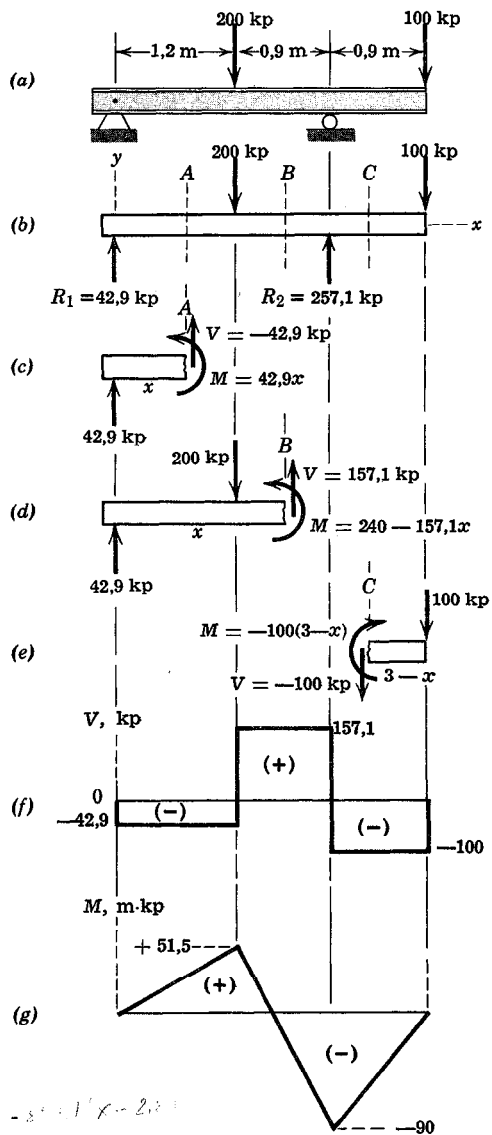
Por último, del más sencillo de los dos diagramas correspondientes a la sección *C*, indicado en la parte *e* de la figura, la aplicación literal de las ecuaciones de equilibrio da:

$$[\Sigma F_y = 0]$$

$$V = -100 \text{ kp}$$

$$[\Sigma M_C = 0]$$

$$M + 100(3 - x) = 0, \quad M = -100(3 - x)$$



Problema 4/85

Obsérvese que M y V se han representado con sus sentidos positivos sobre el diagrama de sólido libre.

En las partes f y g se han representado gráficamente los diagramas de fuerza cortante y momento flector correspondientes a la viga entera. El valor máximo del momento y su posición son, evidentemente

$$|M| = 90 \text{ m}\cdot\text{kp} \quad \text{en} \quad x = 2,1 \text{ m} \quad \text{Resp.}$$

4/86. La viga está empotrada en un fundamento en A y soporta las tres fuerzas y el par que se indican. Construir los diagramas de momento flector en los planos $x-z$ y $x-y$ y determinar el momento flector resultante en $x = 5 \text{ cm}$. ¿Cuál es el momento torsor T respecto al eje x ?

Solución. Primeramente se establece el sentido positivo de la fuerza cortante y del momento como se indica en los distintos diagramas. A continuación se aísla una porción de viga en las dos vistas representadas. En cada vista se representan el momento flector y la fuerza cortante ejerciéndose en sentido positivo. En la vista $x-z$, una ecuación de momentos respecto a la sección cortada nos da para $x < 17,5 \text{ cm}$, expresando las distancias en metros:

$$[\Sigma M = 0] \quad M_y - 500(0,075) + 300(0,275 - x) = 0, \quad M_y = -45 + 300x \text{ m}\cdot\text{N}$$

Para $x > 0,175 \text{ m}$ una porción aislada de la viga da $M_y = -300(0,275 - x) \text{ m}\cdot\text{N}$. En la figura puede verse la variación de M_y con x , que pone de manifiesto la discontinuidad en $x = 17,5 \text{ cm}$. También se ve en la figura que la fuerza cortante es constante e igual a $V_z = -300 \text{ N}$ y que la fuerza axial es $P = -500 \text{ N}$ (compresión) en la parte de la viga del lado del fundamento.

Para la vista $x-y$ del diagrama de sólido libre, la suma de momentos respecto a la sección cortada da para $x < 0,175 \text{ m}$

$$[\Sigma M = 0] \quad M_z + 250(0,275 - x) - 37,5 = 0, \quad M_z = -31,25 + 250x \text{ m}\cdot\text{N}$$

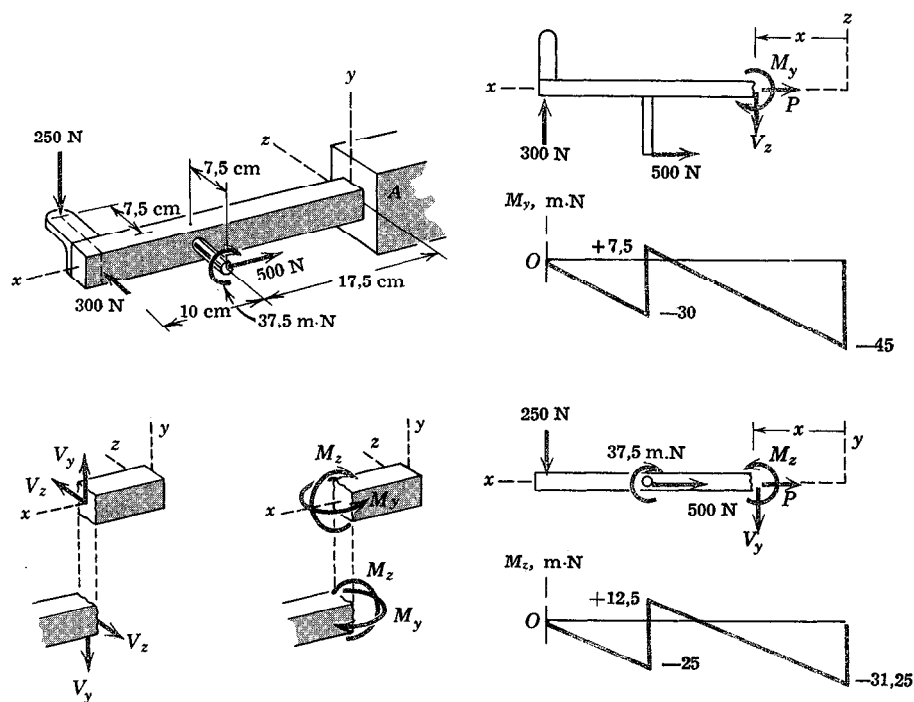
Para $x > 0,175 \text{ m}$, una porción aislada de la viga da $M_z = -250(0,275 - x) \text{ m}\cdot\text{N}$. En la figura inferior puede verse la variación de M_z con x , y se observa una discontinuidad del momento flector en el punto en que está aplicado el par de $37,5 \text{ m}\cdot\text{N}$. Se ve que la fuerza cortante es $V_y = -250 \text{ N}$ a lo largo de toda la viga. El momento torsor (no indicado en los diagramas de sólido libre) es $T = 250(0,075) = 18,75 \text{ m}\cdot\text{N}$ a lo largo de toda la viga.

En $x = 5 \text{ cm}$, los momentos flectores son

$$M_y = -30 \text{ m}\cdot\text{N} \quad M_z = -18,75 \text{ m}\cdot\text{N}$$

con lo que el momento flector resultante es

$$M = \sqrt{(-30)^2 + (-18,75)^2} = 35,5 \text{ m}\cdot\text{N} \quad \text{Resp.}$$

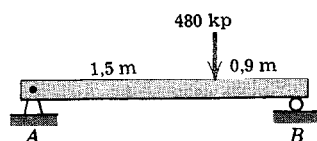


Problema 4/86

Problemas

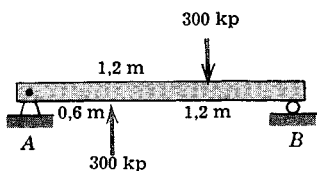
4/87. Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flector de la viga simplemente apoyada y determinar el momento máximo M .

Resp. $M_{\text{máx.}} = 270 \text{ m.kp}$

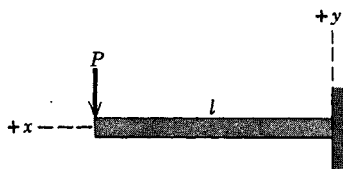


Problema 4/87

4/88. Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flector de la viga de la figura.

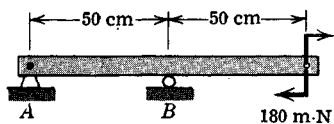


Problema 4/88



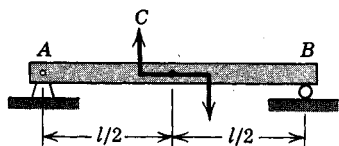
Problema 4/89

4/89. Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flector de la viga en voladizo. Observar el convenio de signos que corresponde a los ejes que se indican.



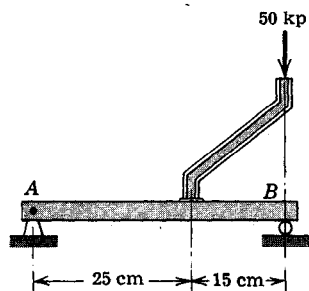
Problema 4/90

4/90. Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flector de la viga sometida a un par en su extremo. ¿Cuál es el momento M en una sección, 12,5 cm a la derecha de B ? Resp. $M = -18000 \text{ cm}\cdot\text{N}$



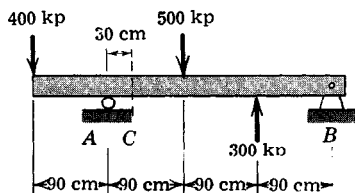
Problema 4/91

4/91. Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flector de la viga cargada en su centro por el par C .



Problema 4/92

4/92. El codal está soldado a la viga AB y soporta la carga de 50 kp. Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flector de la viga.



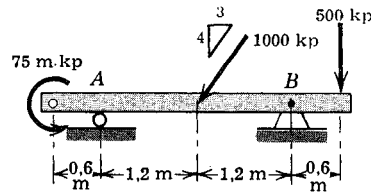
Problema 4/93

4/93. Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flector de la viga representada y hallar el momento flector M en la sección C .

Resp. $M = -250 \text{ m}\cdot\text{kp}$

4/94. Dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flector de la viga cargada en la forma que se indica. Determinar el momento flector M de magnitud máxima.

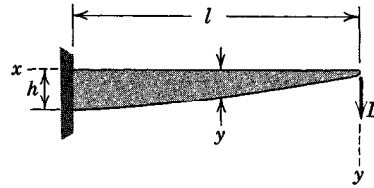
Resp. $M = -300 \text{ m}\cdot\text{kp}$



Problema 4/94

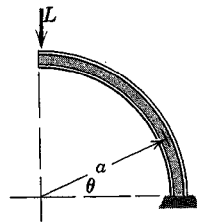
4/95. La resistencia a la flexión de una viga de anchura uniforme es proporcional al cuadrado de la altura y de la viga. En la viga en voladizo representada, su altura en el empotramiento es h . Hallar la altura y en función de la longitud x que haga que todas las secciones ofrezcan la misma resistencia a la flexión que la sección en el empotramiento.

Resp. $y = h\sqrt{x/l}$



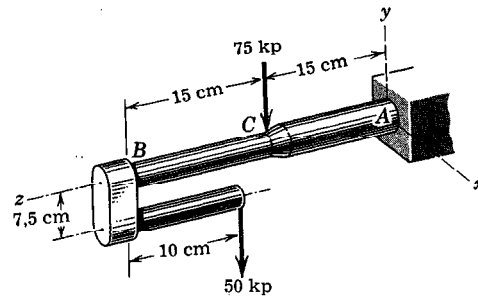
Problema 4/95

4/96. Una viga curva en voladizo tiene forma de cuadrante de circunferencia. Determinar las expresiones de la fuerza cortante V (perpendicular al cuadrante) y del momento flector M en función de θ .



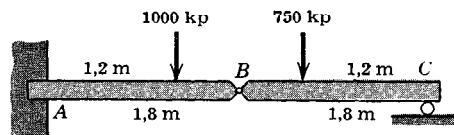
Problema 4/96

4/97. Construir el diagrama de momento flector del árbol en voladizo AB de la unidad rígida que se indica.

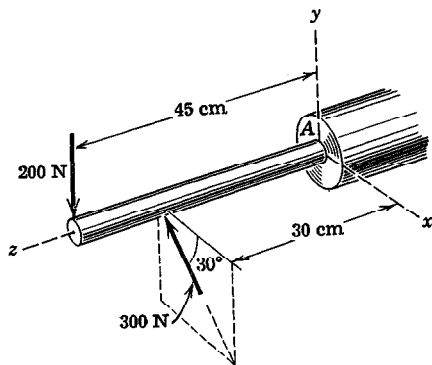


Problema 4/97

4/98. Construir el diagrama de momento flector de las dos vigas cargadas de la manera que se indica y unidas por una articulación de pasador en B.



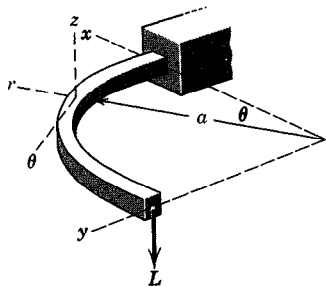
Problema 4/98



Problema 4/99

4/99. El árbol de 45 cm está sujeto rigidamente en el collar fijo en A y soporta las dos cargas que se indican. Determinar el momento flector resultante en el árbol en A y expresarlo con notación vectorial.

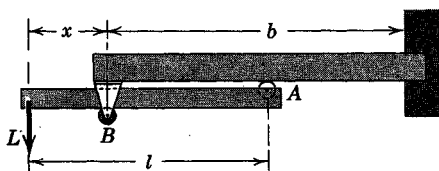
Resp. $M_A = 45i - 78j \text{ m}\cdot\text{N}$



Problema 4/100

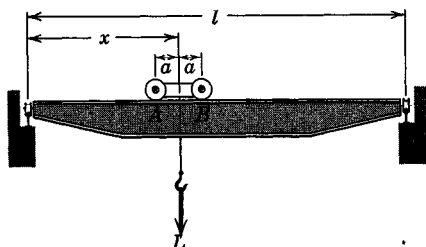
4/100. Escribir las expresiones del momento torsor T y del momento flector M de la viga curva en forma de cuadrante de circunferencia sometida a la carga L en su extremo. Utilizar una notación acorde con el sistema de coordenadas dextrorsum r - θ - z .

Resp. $M_r = -La \cos \theta$,
 $T = -La(1 - \sin \theta)$



Problema 4/101

4/101. Dibujar la familia de diagramas de momento flector de la viga soportante superior correspondientes a los distintos valores de x siendo $l < b$.



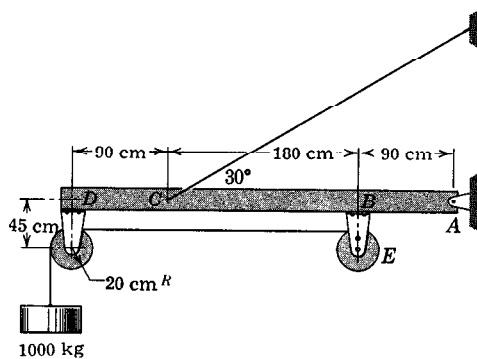
Problema 4/102

4/102. Determinar el momento flector máximo M y el valor correspondiente de x en el puente de la grúa e indicar en qué sección se ejerce dicho momento.

Resp. $M_A = \frac{L}{4l}(l-a)^2$, $x = \frac{a+l}{2}$

4/103. La viga AD está soportada y cargada de la manera que se indica. El cable que soporta la carga de 1000 kg está arrollado en torno al tambor situado en E y el tambor está trabado a su soporte y no puede girar. Despréciense las dimensiones de las bridas que sujetan los soportes a la viga en B y en D y constrúyanse los diagramas de fuerza cortante y momento flector de la viga. Determinar el momento flector máximo M y la distancia x al pasador A a la cual se tiene M .

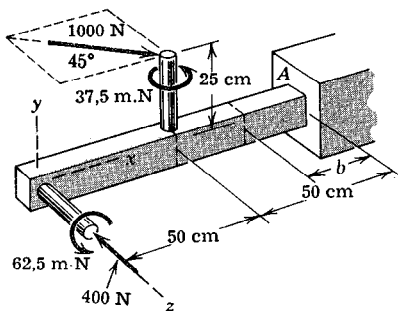
Resp. $M = -1350\text{ m}\cdot\text{kp}$ a $x = 2,7\text{ m}$



Problema 4/103

4/104. Dibujar los diagramas de momento flector de la viga en cada uno de los planos coordenados x - y y x - z y escribir la expresión vectorial del momento total (torsor más flector) \mathbf{M} que se ejerce sobre la porción izquierda de la viga en la sección $b = 25\text{ cm}$.

Resp. $\mathbf{M} = -176,75\mathbf{i} + 85,75\mathbf{j} + 114,25\mathbf{k}\text{ m}\cdot\text{N}$



Problema 4/104

5 Fuerzas distribuidas

22. Introducción. En los capítulos anteriores se ha supuesto que todas las fuerzas estaban concentradas y se han representado mediante simples vectores con punto de aplicación determinado o situados sobre las líneas de acción de las fuerzas. En realidad, no existen fuerzas “concentradas”, ya que toda fuerza real aplicada a un cuerpo se distribuye sobre un área o volumen finitos. En el caso de una fuerza aplicada a una superficie es evidente que, cuando las dimensiones del área sobre la que se distribuye la fuerza son despreciables frente a las demás dimensiones del cuerpo, el concepto de fuerza concentrada no introduce ninguna complicación. Por otra parte, la fuerza puede estar aplicada sobre una superficie de extensión considerable y deberá tenerse en cuenta la variación de la distribución de la fuerza sobre la superficie. También existen fuerzas que se distribuyen sobre el volumen de un cuerpo, por ejemplo, las fuerzas del campo gravitatorio terrestre, o de los campos eléctrico y magnético. Cuando una fuerza está distribuida sobre una región, a la distribución se le llama *campo de fuerzas*. El campo puede estar representado por la distribución de la fuerza a lo largo de una línea, sobre una superficie, o en todo un volumen.

Una fuerza distribuida viene medida en cada punto por su intensidad. Así, una fuerza distribuida sobre una superficie recibe el nombre de *presión* o *esfuerzo* y se mide como fuerza por unidad de superficie sobre la cual actúa. La unidad básica para la presión o esfuerzo es el newton por metro cuadrado (N/m^2), llamada también *un pascal* (Pa). Esta unidad es sin embargo demasiado pequeña para la mayoría de las aplicaciones y resultan más útiles los múltiplos kilo-pascal (kPa) igual a 1000 Pa, y el megapascal (MPa) igual a 1 000 000 Pa. Otra unidad de presión o esfuerzo aceptada es el *bar* (b) igual a 10^5 Pa o 10^2 kPa. La palabra *presión* suele emplearse para designar la intensidad de fuerza distribuida debida a la acción de fluidos, mientras que la palabra *esfuerzo* se emplea más generalmente para designar la fuerza distribuida interiormente en los sólidos. Las fuerzas distribuidas sobre el volumen de los cuerpos reciben el nombre de *fuerzas másicas* y se miden como fuerzas por unidad de volumen (N/m^3) o por unidad de masa (N/kg). Cuando la fuerza másica se debe a la atracción de la gravedad, la intensidad se escribe ρg , donde ρ representa

el peso específico (peso por unidad de volumen) y g la aceleración de la gravedad. La unidad de ρg es, pues $(\text{kg}/\text{m}^3)(\text{m}/\text{s}^2) = (\text{N}/\text{m}^3)$.

En este capítulo se describen los sistemas equivalentes y el equilibrio de diversos sistemas de fuerzas distribuidas. Los problemas de este tipo contienen siempre una variación continua en la región que se considera, por lo que la herramienta analítica adecuada es el Cálculo Infinitesimal.

23. Centro de gravedad; centro de masa. La fuerza distribuida más conocida es la fuerza de atracción de la Tierra. Esta fuerza másica se distribuye por todas las partes de todos los objetos situados en el campo de influencia de la Tierra. La resultante de esta distribución de fuerza másica se conoce con el nombre de *peso* del cuerpo, y es necesario determinar su magnitud y posición en el caso de cuerpos cuyo peso sea apreciable.

Consideremos un cuerpo tridimensional de tamaño, forma y peso cualesquiera. Si se le suspende, como se indica en la figura 50, de un punto cualquiera tal como el A mediante una cuerda, el cuerpo se hallará en equilibrio bajo la acción de la tensión de la cuerda y la resultante de las fuerzas másicas o de gravedad que actúan sobre sus partículas. Es evidente que esta resultante tendrá por línea de acción la recta definida por la cuerda, y se supondrá que puede señalarse su posición, por ejemplo, practicando en el cuerpo un hueco de tamaño despreciable a lo largo de su línea de acción. Se repite este experimento suspendiendo el cuerpo por otros puntos tales como el B y el C, y en todos los casos se marca la línea de acción de la resultante. Para todos los fines prácticos estas líneas de acción concurrirán en un punto al que se da el nombre de *centro de gravedad* o *centro de masa* del cuerpo. No obstante, un análisis preciso tendría en cuenta el hecho de que las direcciones de las fuerzas de gravedad correspondientes a

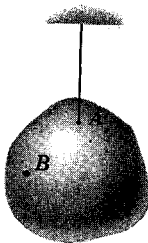


Figura 50

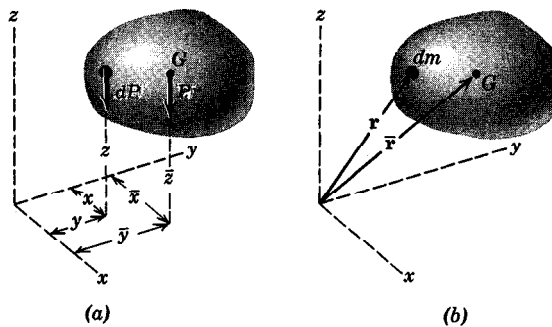


Figura 51

las distintas partículas que constituyen el cuerpo son ligeramente diferentes a causa del hecho de que convergen hacia el centro de atracción de la Tierra. Además, como las partículas se hallan a diferentes distancias de la Tierra, la intensidad del campo de fuerzas de la Tierra no se mantiene exactamente constante sobre todo el cuerpo. Estas consideraciones llevan a la conclusión de que las líneas de acción de las resultantes de las fuerzas de gravedad, en los experimentos antes mencionados, no serán exactamente concurrentes y por tanto no existirá, en el sentido exacto, un centro de gravedad. Esta condición carece de importancia práctica mientras tratemos con cuerpos cuyas dimensiones sean pequeñas frente a las de la Tierra. Por tanto, supondremos un campo uniforme de fuerzas (paralelas) debido a la atracción gravitatoria terrestre y esta condición da como resultado el concepto de un centro de gravedad único.

Para determinar matemáticamente la posición del centro de gravedad G de un cuerpo cualquiera, figura 51a, deberá escribirse una ecuación que establezca, por el teorema de Varignon, que el momento respecto a un eje de la resultante P de las fuerzas de gravedad es igual a la suma de los momentos respecto al mismo eje de las fuerzas de gravedad dP que se ejercen sobre todas las partículas consideradas como elementos infinitesimales del cuerpo. La resultante de las fuerzas de gravedad que se ejercen sobre todos los elementos es el peso del cuerpo y viene dado por la suma $P = \int dP$. Si se aplica el principio de los momentos respecto al eje y , por ejemplo, el momento respecto a este eje del peso elemental será $x dP$ y la suma de dichos momentos para todos los elementos del cuerpo es $\int x dP$. Esta suma de momentos debe ser igual al momento de la suma $P\bar{x}$. Así pues, las expresiones de los momentos respecto a los tres ejes darán:

$$\bar{x} = \frac{\int x dP}{P}, \quad \bar{y} = \frac{\int y dP}{P}, \quad \bar{z} = \frac{\int z dP}{P}. \quad (17)$$

El numerador de cada expresión representa la *suma de momentos* y el producto de P por la coordenada correspondiente de G representa el *momento de la suma*. La tercera ecuación se obtiene girando el cuerpo y el sistema de referencia 90° alrededor de un eje horizontal de manera que el eje z quede horizontal.

Las ecuaciones 17 pueden expresarse en forma vectorial con ayuda de la figura 51b, en donde la masa elemental y el centro de gravedad G están localizados por sus vectores de posición respectivos $\mathbf{r} = i x + j y + k z$ y $\bar{\mathbf{r}} = i \bar{x} + j \bar{y} + k \bar{z}$. Así, las ecuaciones 17 son las componentes de la ecuación vectorial única

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{\int \mathbf{r} dP}{P} \quad \text{o} \quad \bar{\mathbf{r}} = \frac{\int \mathbf{r} dm}{m} \quad (18)$$

donde, en la segunda ecuación, la masa ha sustituido al peso en virtud de la relación $P = mg$.

Esta segunda ecuación define la posición del *centro de masa*, que coincide, evidentemente, con el centro de gravedad mientras el campo de la gravedad pueda considerarse uniforme y paralelo. Carece de sentido hablar de centro de gravedad de un cuerpo que se saque del campo gravitatorio terrestre, ya que sobre dicho cuerpo no se ejercerían fuerzas de gravedad. En cambio, seguiría teniendo su centro de masa único. Es totalmente adecuado utilizar el término centro de gravedad siempre que se haga referencia al efecto de las fuerzas de la gravedad sobre un cuerpo. En cambio, el término centro de masa se utiliza más adecuadamente cuando se hace referencia a la influencia de la distribución de la masa sobre la respuesta dinámica de un cuerpo a fuerzas no equilibradas. Esta clase de problemas se estudiará detenidamente en el tomo compañero de éste, titulado *Dinámica*.

En la mayoría de los problemas se podrán simplificar los cálculos del centro de gravedad mediante una elección inteligente de los ejes de referencia. En general, los ejes se deberán colocar de manera que simplifiquen todo lo posible las ecuaciones de los contornos. Así, las coordenadas polares simplificarán, en general, aquellos problemas que tengan contornos circulares. Otro indicio importante surgirá de las cuestiones de simetría. Siempre que exista un eje o un plano de simetría, con él deberá hacerse coincidir un eje o plano coordenado. El centro de gravedad se hallará siempre sobre dicho eje o plano, ya que los momentos debidos a elementos situados simétricamente se compensarán y el cuerpo podrá considerarse constituido por pares de elementos de este tipo. Así, el eje de un cono recto de revolución es un tal eje de simetría y el plano central vertical en la dirección de popa a proa del casco de un buque es un tal plano de simetría.

Es importante la elección adecuada del elemento diferencial para el proceso de integración. Siempre que sea posible se tomará un elemento diferencial de primer orden de manera que pueda cubrirse toda la figura con una sola integración. Independientemente del elemento empleado, la coordenada x , y o z que multiplica a dP en el numerador de las ecuaciones 17 es la coordenada del *centro de gravedad del elemento*. Cuando no convenga un elemento de primer orden, se tomará una cantidad de segundo orden preferentemente a una de tercero. Como ejemplo de estas observaciones, consideremos el cálculo del centro de gravedad de un cono recto de revolución. Podría tomarse un elemento $dx dy dz$ y realizar una triple integración. El proceso sería relativamente laborioso. Por otra parte, si se tomara un elemento de primer orden definido por una rebanada cilíndrica coaxial de altura diferencial, sólo se requeriría una integración simple, desplazando el elemento desde el vértice hasta la base. Otras consideraciones acerca de la selección del elemento y los límites de integración se verán mejor con ejemplos reales, varios de los cuales se hallan a continuación del apartado siguiente.

El peso específico γ de un cuerpo es su peso por unidad de volumen. Así pues, el peso de un elemento diferencial de volumen dV será $dP = \gamma dV$. En el caso en que γ no sea constante en todo el cuerpo pero pueda expresarse como función de las coordenadas de sus puntos, será necesario tener en cuenta dicha variación en el cálculo de los numeradores y denominadores de las ecuaciones 17. Estas expresiones se escribirían entonces en la forma

$$\bar{x} = \frac{\int x\gamma dV}{\int \gamma dV}, \quad \bar{y} = \frac{\int y\gamma dV}{\int \gamma dV}, \quad \bar{z} = \frac{\int z\gamma dV}{\int \gamma dV}. \quad (19)$$

24. Centroides de líneas, superficies y volúmenes. Siempre que el peso específico γ de un cuerpo tenga el mismo valor en todos sus puntos, será un factor constante existente en los numeradores y denominadores de las ecuaciones 19 y por lo tanto se suprimirá. Las expresiones definen entonces una propiedad puramente geométrica del cuerpo, ya que no hay referencia alguna a sus propiedades físicas. Cuando el cálculo se refiera solamente a una forma geométrica se utiliza el término *centroide*. Cuando se hable de un cuerpo físico real, se utilizará el término *centro de gravedad* o *centro de masa*. Si el peso específico es el mismo en todos los puntos, las posiciones del centroide y del centro de gravedad coinciden, mientras que si el peso específico varía de unos puntos a otros, aquéllos no coincidirán, en general.

En el caso de una varilla delgada o un alambre de longitud L , sección recta de área A y peso específico γ (fig. 52a), el cuerpo puede aproximarse a un segmento de línea y $dP = \gamma A dL$. Si γ y A son constantes a lo largo de la varilla, las coordenadas del centro de gravedad coincidirán con las del centroide C del segmento de línea, las cuales, según las ecuaciones 17, podrán escribirse en la forma

$$\bar{x} = \frac{\int x dL}{L}, \quad \bar{y} = \frac{\int y dL}{L}, \quad \bar{z} = \frac{\int z dL}{L}. \quad (20)$$

Obsérvese que, en general, el centroide no será un punto de la línea. Si la varilla se encuentra en un solo plano, que podemos considerar como plano $x-y$, sólo se precisará de dos coordenadas en el cálculo.

Cuando un cuerpo de peso específico γ tenga un grosor pequeño t y pueda aproximarse a una superficie de área A (fig. 52b), tendremos $dP = \gamma t dA$. También ahora, si γ y t son constantes en toda la superficie, las coordenadas del centro de gravedad del cuerpo coincidirán con las del centroide C de la superficie y podremos escribir, en virtud de las ecuaciones 17,

$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{A}, \quad \bar{y} = \frac{\int y dA}{A}, \quad \bar{z} = \frac{\int z dA}{A}. \quad (21)$$

Si la superficie es curva, como se indica en la figura 52b mediante el segmento

de cáscara, intervendrán las tres coordenadas. El centroide C de la superficie curva tampoco se hallará, en general, sobre ella. Si la superficie fuese plana, tomando su plano como plano x - y , por ejemplo, sólo serían incógnitas las coordenadas en dicho plano.

En el caso general de un cuerpo de volumen V y peso específico γ , el elemento tendrá un peso $dP = \gamma dV$. El peso específico γ desaparecerá de las ecuaciones si es constante en todo el volumen y las coordenadas del centro de gravedad serán las del centroide C del cuerpo. De las ecuaciones 17 ó 19 tenemos, entonces,

$$\bar{x} = \frac{\int x dV}{V}, \quad \bar{y} = \frac{\int y dV}{V}, \quad \bar{z} = \frac{\int z dV}{V}. \quad (22)$$

En las Tablas C4 y C5 del Apéndice C se da un resumen de las coordenadas de centroides de algunas de las formas más corrientes empleadas.

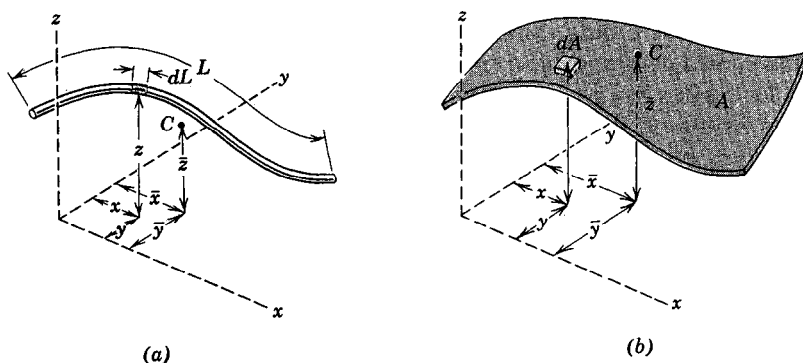


Figura 52

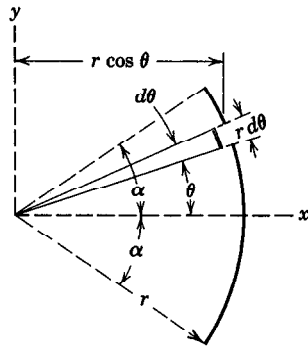
Problemas tipo

5/1. Centroide de un arco de circunferencia. — Localizar el centroide de un segmento lineal en forma de arco de circunferencia como el indicado en la figura.

Solución. Tomando como eje x un eje de simetría se tiene $\bar{y} = 0$. Un elemento diferencial de arco tiene una longitud $dL = r d\theta$, y la coordenada x del elemento es $r \cos \theta$. Aplicando la primera de las ecuaciones 20 da

$$\begin{aligned} [L\bar{x} = \int x dL] \quad (2ar)\bar{x} &= \int_{-\alpha}^{\alpha} (r \cos \theta) r d\theta, \\ 2ar\bar{x} &= 2r^2 \sin \alpha, \\ \bar{x} &= \frac{r \sin \alpha}{\alpha}. \quad \text{Resp.} \end{aligned}$$

Para $2\alpha = \pi/2$, $\bar{x} = 0,900r$; para un arco semicircular $2\alpha = \pi$, lo cual da $\bar{x} = 2r/\pi$.



Problema 5/1

5/2. Centroide de una superficie triangular. — Localizar el centroide de la superficie de un triángulo de base b y altura h .

Solución. El eje x se toma coincidente con la base. Se toma una faja diferencial de área $x dy$. Por triángulos semejantes $x/(h-y) = b/h$. La segunda de las ecuaciones 21 da para este caso

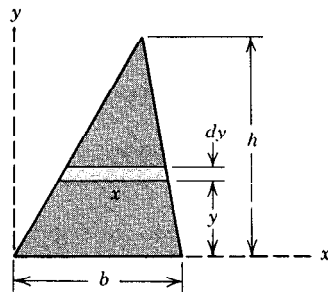
$$[A\bar{y} = \int y dA] \quad \frac{bh}{2}\bar{y} = \int_0^h y \frac{b(h-y)}{h} dy = \frac{bh^2}{6},$$

y

$$\bar{y} = \frac{h}{3}.$$

Resp.

Este mismo resultado se cumplirá para cualquiera de los otros dos lados del triángulo considerado como nueva base y con la nueva altura correspondiente. Así, puede decirse que el centroide se halla en la intersección de las medianas, ya que la distancia de este punto a uno cualquiera de los lados es un tercio de la altura del triángulo en el que se considere dicho lado como base.



Problema 5, 2

Obsérvese que la faja diferencial es un trapecio y su área valdrá $x dy$ solamente en el límite, cuando dy tiende a cero. Al establecer, pues, la expresión del elemento de superficie se han omitido las pequeñas secciones triangulares de los extremos, pues constituyen el infinitésimo de orden superior $dx dy$.

5/3. Centroide de la superficie de un sector circular. — Localizar el centroide de la superficie de un sector circular.

Solución I. Se elige como eje x el eje de simetría, con lo que \bar{y} se anula automáticamente. La superficie puede barrerse desplazando un elemento de forma de segmento de corona circular (véase la figura) desde el centro hasta el arco que limita al sector. El radio de la corona es r_0 y su anchura dr_0 . En la primera de las ecuaciones 21 la coordenada x es la coordenada del *centroide* del elemento dA . Según el problema 5/1 esta distancia vale $\frac{r_0 \operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$, donde r_0 sustituye a r . Así, la primera de las ecuaciones 21 da

$$[A\bar{x} = \int x dA] \quad \frac{2\alpha}{2\pi}(\pi r^2)\bar{x} = \int_0^r \left(\frac{r_0 \operatorname{sen} \alpha}{\alpha} \right) (2r_0 \alpha dr_0),$$

$$r^2 \alpha \bar{x} = \frac{2}{3} r^3 \operatorname{sen} \alpha,$$

$$\bar{x} = \frac{2}{3} \frac{r \operatorname{sen} \alpha}{\alpha}. \quad \text{Resp.}$$

Para un área semicircular $2\alpha = \pi$ y $\bar{x} = 4r/3\pi$.

Solución II. La superficie también puede ser barrida por un triángulo de área diferencial con vértice en el centro del círculo, que gire barriendo el ángulo total del sector. Este triángulo, que puede verse en la figura, tiene un área $dA = (r/2)(r d\theta)$ en donde se han despreciado los términos de orden superior. De nuevo se toma como coordenada x la del centroide del elemento, y en el problema 5/2 se ha visto que esta coordenada es $2r/3$ multiplicada por $\cos \theta$. Aplicando la primera de las ecuaciones 21 se tiene

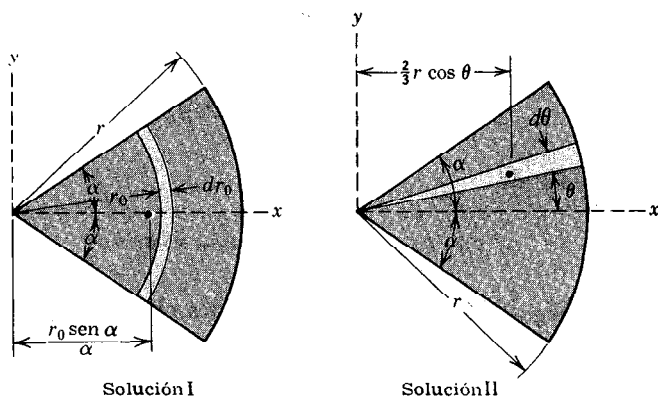
$$[A\bar{x} = \int x dA] \quad (r^2 \alpha) \bar{x} = \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(\frac{2}{3} r \cos \theta \right) \left(\frac{1}{2} r^2 d\theta \right),$$

$$r^2 \alpha \bar{x} = \frac{2}{3} r^3 \operatorname{sen} \alpha,$$

y como antes

$$\bar{x} = \frac{2}{3} \frac{r \operatorname{sen} \alpha}{\alpha}. \quad \text{Resp.}$$

Obsérvese que si se toma un elemento de segundo orden $r dr d\theta$ la integración respecto a θ daría la corona circular con la que se inició la *Solución I*. Por otra parte, la integración respecto a r_0 primeramente daría el elemento triangular con el que se inició la *Solución II*.



Problema 5/3

5/4. Localizar el centroide de la superficie situada bajo la curva $x = ky^3$ entre $x = 0$ y $x = a$.

Solución I. Se toma un elemento vertical de área $dA = y dx$ tal como se indica en la parte izquierda de la figura. La coordenada \bar{x} del centroide se halla a partir de la primera de las ecuaciones 21. Así

$$[A\bar{x} = \int x dA] \quad \bar{x} \int_0^a y dx = \int_0^a xy dx.$$

Sustituyendo $y = (x/k)^{1/3}$ y $k = a/b^3$ e integrando se tiene

$$\frac{3ab}{4} \bar{x} = \frac{3a^2b}{7}, \quad \bar{x} = \frac{4}{7}a. \quad \text{Resp.}$$

Al despejar \bar{y} de la segunda de las ecuaciones 21, la coordenada y no es la coordenada de la curva $x = ky^3$ sino la distancia y al centroide del elemento dA . Así, pues, deberá utilizarse el valor $y/2$, que localiza el centroide del elemento rectangular. El principio de los momentos se escribirá, pues,

$$[A\bar{y} = \int y dA] \quad \frac{3ab}{4} \bar{y} = \int_0^a \left(\frac{y}{2}\right) y dx.$$

Sustituyendo $y = b(x/a)^{1/3}$ e integrando, se tiene

$$\frac{3ab}{4} \bar{y} = \frac{3ab^2}{10}, \quad \bar{y} = \frac{4}{5}b. \quad \text{Resp.}$$

Solución II. En lugar del elemento vertical puede utilizarse el elemento horizontal que se indica en la parte derecha de la figura. Al calcular $\int x dA$ deberá emplearse

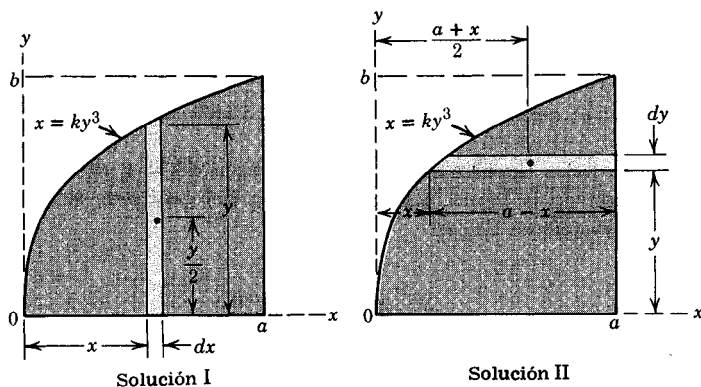
la coordenada x del centroide del elemento. Esta distancia es $x + (a - x)/2 = (a + x)/2$. Así

$$[A\bar{x} = \int x dA] \quad \bar{x} \int_0^b (a - x) dy = \int_0^b \left(\frac{a + x}{2} \right) (a - x) dy.$$

El valor de \bar{y} se obtiene de

$$[A\bar{y} = \int y dA] \quad \bar{y} \int_0^b (a - x) dy = \int_0^b y(a - x) dy.$$

El cálculo de estas integrales comprobará los resultados obtenidos anteriormente para \bar{x} e \bar{y} .



Problema 5/4

5/5. Volumen hemisférico. — Localizar el centroide del volumen de un hemisferio de radio r .

Solución. Con los ejes elegidos en la forma que se indica en la figura $\bar{x} = \bar{z} = 0$, por razón de simetría. El elemento de volumen más sencillo es una rebanada cilíndrica de altura dy paralela al plano $x-z$. Como la semiesfera corta al plano $y-z$ según el círculo $y^2 + z^2 = r^2$, el radio de la rebanada será $z = +\sqrt{r^2 - y^2}$. El volumen de la rebanada elemental será, pues,

$$dV = \pi(r^2 - y^2) dy.$$

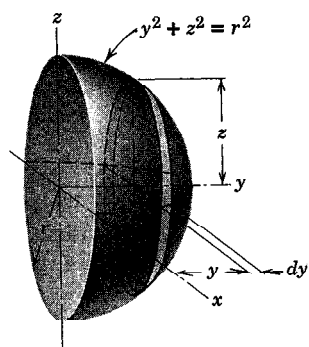
La segunda de las ecuaciones 22 requiere

$$[V\bar{y} = \int y dV] \quad \bar{y} \int_0^r \pi(r^2 - y^2) dy = \int_0^r y\pi(r^2 - y^2) dy.$$

Integrando resulta

$$\frac{3}{8}\pi r^3 \bar{y} = \frac{1}{4}\pi r^4, \quad \bar{y} = \frac{3}{8}r.$$

Resp.

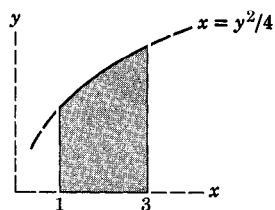


Problema 5/5

Problemas

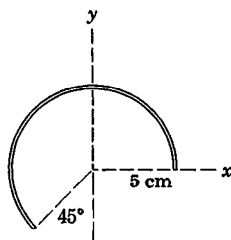
5/6. Localizar el centroide del área sombreada de la figura.

Resp. $\bar{x} = 2,09$, $\bar{y} = 1,43$



Problema 5/6

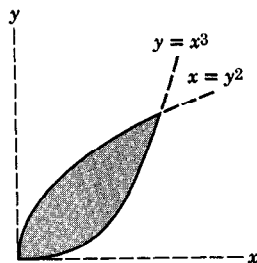
5/7. Localizar el centro de gravedad del alambre en forma de arco circular. Resolver el problema por integración directa y comprobar el resultado con los obtenidos en el problema tipo 5/1.



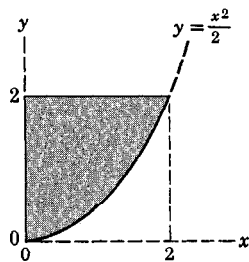
Problema 5/7

5/8. Localizar el centroide del área sombreada comprendida entre las dos curvas.

Resp. $\bar{x} = 12/25$, $\bar{y} = 3/7$



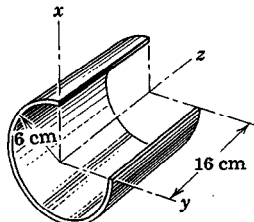
Problema 5/8



Problema 5/9

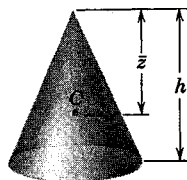
5/9. Localizar el centroide del área sombreada situada sobre la parábola utilizando en la integración una franja horizontal de área dA .

5/10. Resolver el problema 5/9 utilizando una franja vertical de área dA para la integración.



Problema 5/11

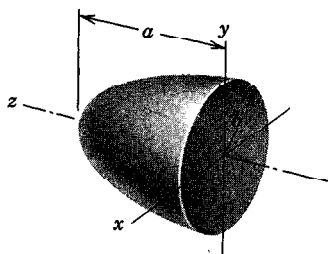
5/11. Especificar las coordenadas del centro de gravedad de la sección de cáscara circular haciendo referencia directa a los resultados del problema tipo 5/1.



Problema 5/12

5/12. Hallar la distancia \bar{z} entre el centroide y el vértice del cono recto de revolución macizo.

Resp. $\bar{z} = \frac{3}{4}h$

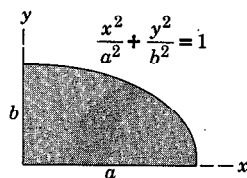


Problema 5/13

5/13. Una parábola gira en torno al eje z generando el paraboloide de revolución de la figura. Localizar el centroide de su volumen respecto a la base $z = 0$.

Resp. $\bar{z} = \frac{a}{3}$

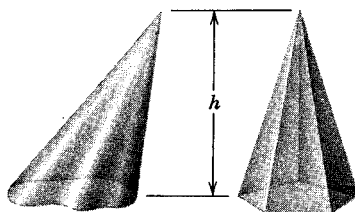
5/14. Localizar el centroide del área del cuadrante elíptico.



Problema 5, 14

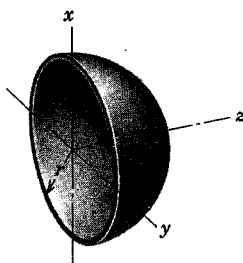
5/15. Determinar la distancia \bar{z} entre la base de un cono o pirámide cualquiera de altura h y el centroide de su volumen.

Resp. $\bar{z} = h/4$



Problema 5/15

5/16. Determinar la distancia \bar{z} entre el centroide de la superficie lateral de un cono o pirámide cualquiera de altura h y la base de la figura.



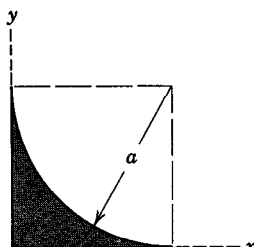
Problema 5/17

5/17. Localizar el centro de gravedad de la cáscara semiesférica homogénea de radio r y espesor despreciable.

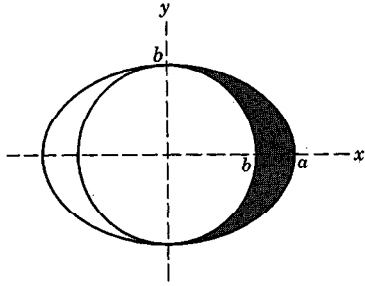
Resp. $\bar{z} = \frac{r}{2}$

5/18. Localizar por integración directa el centroide de la superficie limitada en la figura.

Resp. $\bar{x} = \frac{10 - 3\pi}{4 - \pi} \frac{a}{3}$

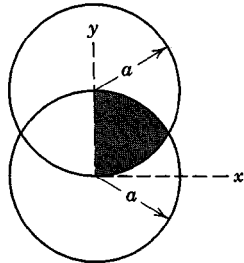


Problema 5, 18



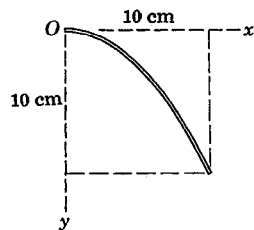
Problema 5, 19

5/19. Localizar el centroide de la superficie sombreada comprendida entre la elipse y el círculo.



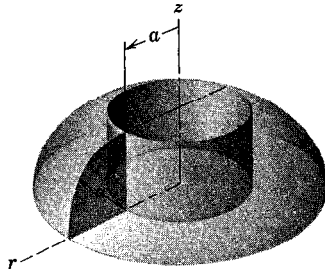
Problema 5/20

5/20. Determinar la coordenada \bar{x} del centroide del área sombreada que se indica. Resp. $\bar{x} = 0,339a$



Problema 5/21

5/21. La varilla delgada tiene sección recta uniforme y está curvada en forma de arco de parábola con vértice en el origen. Determinar las coordenadas del centro de gravedad de la varilla.

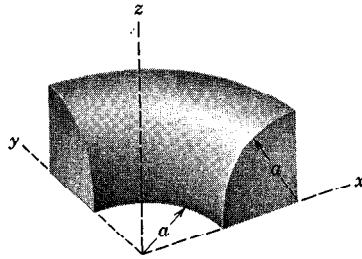


Problema 5, 22

5/22. Determinar la coordenada \bar{z} del centro de gravedad del sólido que se obtiene haciendo girar el área del cuadrante circular alrededor del eje z .

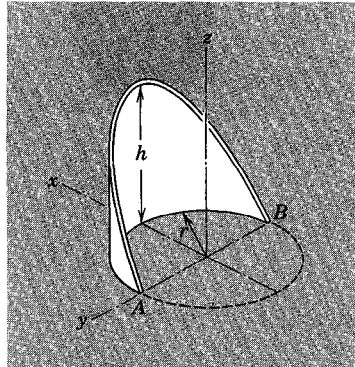
$$\text{Resp. } \bar{z} = \frac{11a}{2(4 + 3\pi)}$$

5/23. Determinar la coordenada z del centroide del volumen generado al hacer girar la superficie del cuadrante circular 90° alrededor del eje z .



Problema 5, 23

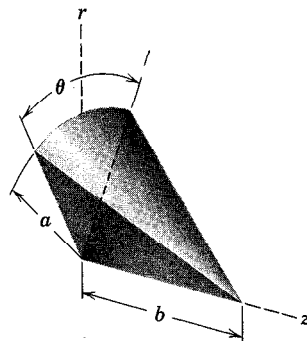
5/24. Se forma una porción de tubo cilíndrico de revolución de pared delgada de radio r cortando el cilindro por un plano que pase por un punto de altura h y por el diámetro AB de la base. Determinar las coordenadas del centro de gravedad de la porción de cáscara.



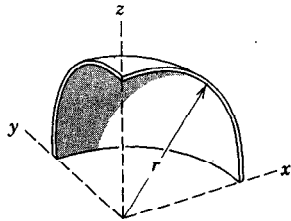
Problema 5, 24

5/25. Localizar el centroide de la cuña cónica generada al hacer girar el triángulo rectángulo de altura a un ángulo θ alrededor de su base b .

$$\text{Resp. } \bar{r} = \frac{a \sin(\theta/2)}{\theta}, \quad \bar{z} = \frac{b}{4}$$

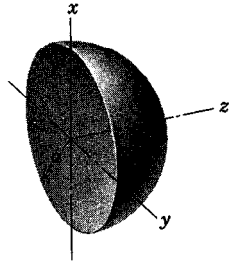


Problema 5, 25



Problema 5/26

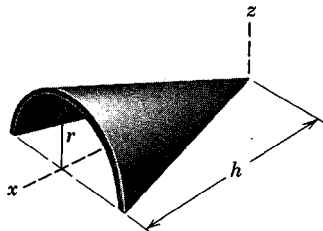
5/26. Localizar el centro de gravedad de la cáscara esférica delgada que se forma al cortar un octavo de una cáscara esférica completa.



Problema 5/27

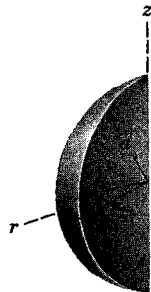
5/27. El peso específico de una esfera disminuye uniformemente con la distancia radial, desde un valor μ_0 en su centro hasta la mitad de este valor en la superficie $r = a$. Si cortamos la esfera por un plano diametral en la forma indicada, determinar la distancia \bar{z} entre este plano base y el centro de gravedad de cada hemisferio. (Sugerencia: Utilícense los resultados del problema 5/17 al definir el elemento de volumen.)

$$\text{Resp. } \bar{z} = \frac{9}{25} a$$



Problema 5/28

5/28. Determinar la posición del centro de gravedad de la cáscara cónica delgada de la figura.



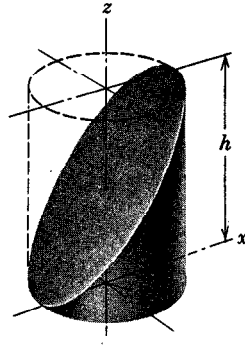
Problema 5/29

5/29. Determinar la distancia \bar{r} al centro de gravedad de la cuña esférica sólida que se indica.

$$\text{Resp. } \bar{r} = \frac{3}{8} \frac{\pi a \sin(\theta/2)}{\theta}$$

◀ 5/30. Un cuerpo cilíndrico de radio r y altura h se divide en dos partes iguales mediante un corte diagonal como el indicado en la figura. Localizar el centro de gravedad de la parte indicada.

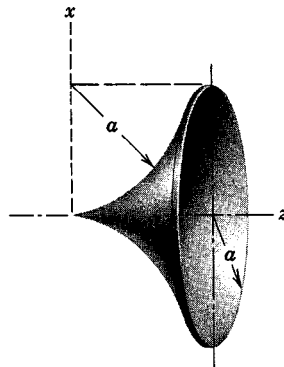
$$\text{Resp. } \bar{x} = \frac{1}{4}r, \quad \bar{z} = \frac{5}{16}h$$



Problema 5/30

◀ 5/31. Localizar el centro de gravedad de la cáscara acampanada de espesor uniforme pero despreciable.

$$\text{Resp. } \bar{z} = \frac{a}{\pi - 2}$$



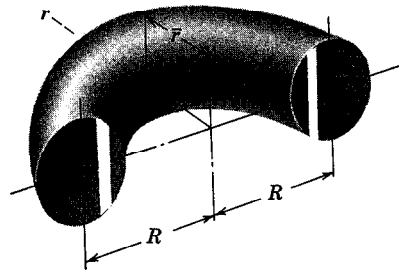
Problema 5/31

◀ 5/32. Determinar la posición del centroide del volumen interior a la cáscara acampanada del problema 5/31.

$$\text{Resp. } \bar{z} = \frac{a}{2(10 - 3\pi)}$$

◀ 5/33. Localizar el centro de gravedad G del medio toro de acero. (Sugerencia: Elíjase un elemento de volumen en forma de cáscara cilíndrica cuya intersección con el plano de los extremos sea la que se indica en la sección.)

$$\text{Resp. } \bar{r} = \frac{a^2 + 4R^2}{2\pi R}$$



Problema 5/33

25. Figuras y cuerpos compuestos; aproximaciones. Cuando un cuerpo o figura pueda dividirse convenientemente en varias partes de forma sencilla, se podrá utilizar el teorema de Varignon si se trata cada parte como un elemento finito del conjunto. Así, para un cuerpo cuyas distintas partes pesen P_1, P_2, P_3, \dots y cuyas correspondientes coordenadas de los respectivos centros de gravedad de dichas partes, por ejemplo, en la dirección x sean $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots$, el principio de los momentos nos da:

$$(P_1 + P_2 + P_3 + \dots)\bar{X} = P_1\bar{x}_1 + P_2\bar{x}_2 + P_3\bar{x}_3 + \dots,$$

donde \bar{X} es la coordenada x del centro de gravedad del conjunto. Para las coordenadas correspondientes a las otras dos direcciones se tendrán expresiones análogas. Estas sumas pueden expresarse en forma condensada y escribirse en la forma

$$\bar{X} = \frac{\sum P\bar{x}}{\sum P}, \quad \bar{Y} = \frac{\sum P\bar{y}}{\sum P}, \quad \bar{Z} = \frac{\sum P\bar{z}}{\sum P}. \quad (23)$$

Para líneas, superficies y volúmenes compuestos se cumplirán relaciones análogas en las que las P estarán sustituidas por L, A y V , respectivamente. Hagamos notar que si se considerara como una de las partes componentes un orificio o cavidad, el peso o área correspondiente representado por la cavidad u orificio se considerará como cantidad negativa.

En la práctica, los límites de una superficie o volumen no pueden expresarse, frecuentemente, en función de formas geométricas sencillas o según formas que puedan representarse matemáticamente. En tales casos es necesario recurrir a algún método de aproximación.

Consideremos el problema de localizar el centroide C de la superficie irregular representada en la figura 53. La superficie puede descomponerse en franjas de anchura Δx y altura h variable. El área A de cada franja, tal como la sombreada, se multiplica por las coordenadas x e y de su *centroide* para obtener los momentos del elemento de superficie. La suma de los momentos de

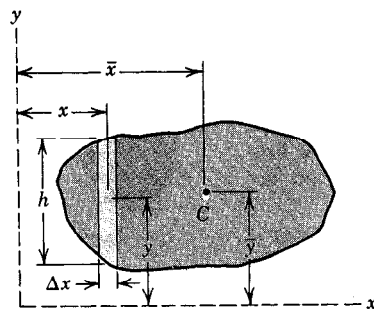


Figura 53

todas las franjas dividida por el área total de éstas dará la componente centroidal correspondiente. La tabulación sistemática de los resultados permitirá una evaluación ordenada del área total ΣA , de las sumas ΣAx y ΣAy y de los resultados

$$\bar{x} = \frac{\Sigma Ax}{\Sigma A}, \quad \bar{y} = \frac{\Sigma Ay}{\Sigma A}.$$

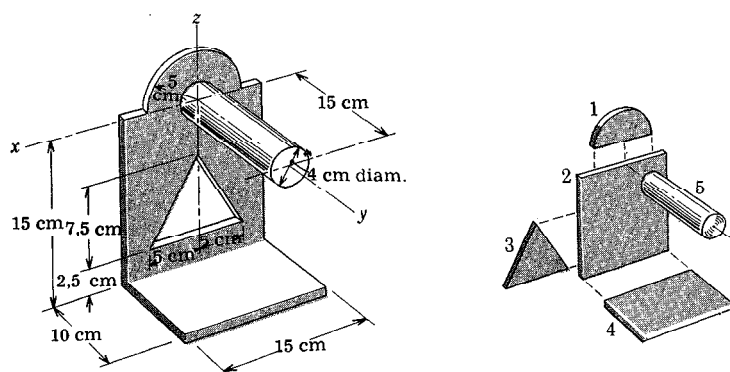
Se aumentará la precisión de la aproximación haciendo más estrechas las franjas que se empleen. En todos los casos se estimará la altura media de la franja al aproximar las áreas. Aun cuando suele ser conveniente emplear elementos de anchura constante, no es necesario hacerlo. En realidad, podrán emplearse elementos de cualquier tamaño y forma que den aproximadamente el área dada con precisión satisfactoria.

En la localización del centroide de un volumen irregular el problema puede reducirse al de determinar el centroide de una superficie. Sólo es necesario trazar una curva que represente las áreas de las secciones rectas del volumen normales a un eje elegido. La posición sobre el eje del centroide de la figura definida por esta curva de áreas será la posición correspondiente del centroide del volumen.

Problemas tipo

5/34. Localizar el centro de gravedad de la combinación soporte-árbol. La cara vertical es de plancha metálica, que pesa 25 kg/m^2 , el material de la base horizontal pesa 40 kg/m^2 y el árbol de acero tiene una densidad de $7,8 \text{ g/cm}^3$.

Solución. El cuerpo puede considerarse compuesto de los cinco elementos que pueden verse en la parte derecha de la ilustración. La parte triangular se considerará como área negativa. Para los ejes de referencia indicados la coordenada x del centro de gravedad es nula, por razón de simetría.



Problema 5/34

Se determinan el peso P de cada parte y las coordenadas \bar{y} y \bar{z} de sus respectivos centros de gravedad. Manejaremos mejor los términos que aparezcan al aplicar las ecuaciones 23, tabulándolos en la forma siguiente:

Parte	P , kp	\bar{y} , cm	\bar{z} , cm	$P\bar{y}$, kp·cm	$P\bar{z}$, kp·cm
1	0,0981	0	2,12	0	0,208
2	0,562	0	— 7,50	0	— 4,215
3	— 0,0938	0	— 10,0	0	0,938
4	0,600	5,00	— 15,0	3,00	— 9,00
5	1,47	7,50	0	11,03	0
Totales	2,636			14,03	— 12,069

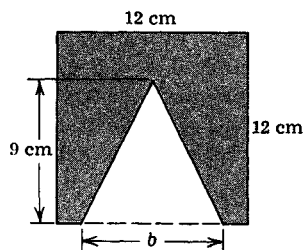
Aplicando ahora las ecuaciones 23 resulta

$$\left[\bar{Y} = \frac{\sum P \bar{y}}{\sum P} \right]$$

$$\bar{Y} = \frac{14,03}{2,636} = 5,32 \text{ cm, Resp.}$$

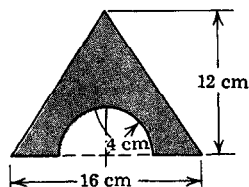
$$\left[\bar{Z} = \frac{\sum P \bar{z}}{\sum P} \right]$$

$$\bar{Z} = \frac{-12,069}{2,636} = -4,58 \text{ cm. Resp.}$$



Problema 5/35

5/35. Calcular la dimensión b que situaría el centroide del área sombreada 7 cm por encima de la base.
Resp. $b = 8$ cm.

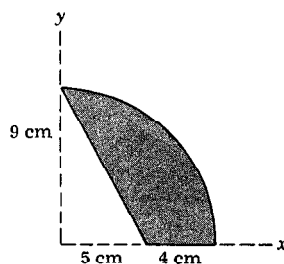


Problema 5/36

5/36. En la placa triangular se ha recortado en la base un semicírculo en la forma que se indica. Calcular la distancia \bar{Y} del centro de gravedad de la placa a la base.

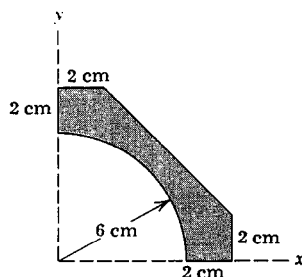
5/37. Determinar las coordenadas del centroide del área sombreada limitada por el arco de circunferencia y las dos rectas.

Resp. $\bar{X} = 5,00 \text{ cm}$, $\bar{Y} = 4,27 \text{ cm}$



Problema 5/37

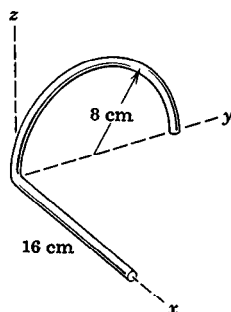
5/38. Calcular las coordenadas del centroide del área sombreada.



Problema 5/38

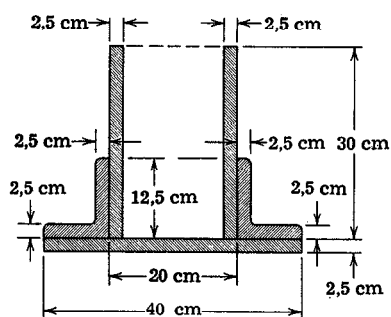
5/39. Calcular las coordenadas del centro de gravedad de la varilla delgada curvada en la forma que se indica.

Resp. $\bar{X} = 3,11 \text{ cm}$, $\bar{Y} = 4,89 \text{ cm}$,
 $\bar{Z} = 3,11 \text{ cm}$

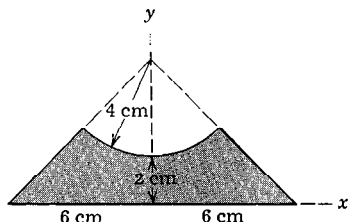


Problema 5/39

5/40. Determinar la distancia \bar{H} del centroide de la sección estructural a su base.



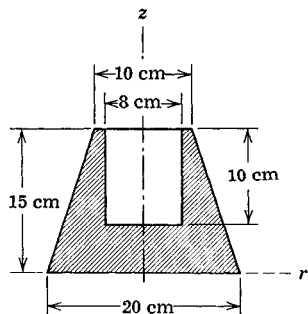
Problema 5/40



Problema 5/41

5/41. Calcular la distancia \bar{Y} del centroide del área sombreada al eje x .

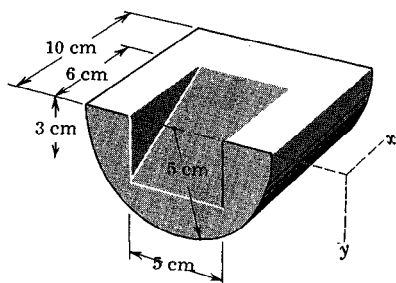
Resp. $\bar{Y} = 1,14 \text{ cm}$



Problema 5/42

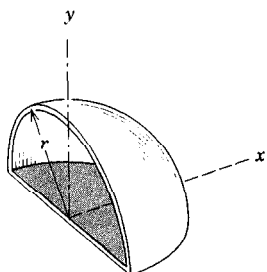
5/42. Un cuerpo homogéneo de revolución, representado en sección, consiste en un tronco de cono de revolución en el que se ha practicado un hueco cilíndrico de 8 cm de diámetro. Calcular la altura \bar{Z} del centro de gravedad del sólido sobre la base.

Resp. $\bar{Z} = 4,97 \text{ cm}$



Problema 5/43

5/43. Calcular las coordenadas del centro de gravedad del semicilindro de revolución macizo al que se ha quitado la cuña prismática.

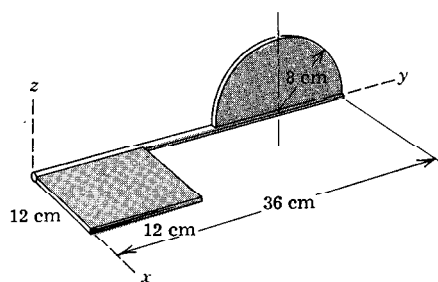


Problema 5/44

5/44. La cáscara semiesférica y su base semicircular están formadas de una misma chapa metálica de pequeño grosor. Utilizar los resultados del problema 5/17 y calcular las coordenadas del centro de masa del conjunto de cáscara y base.

Resp. $\bar{X} = 0,475r$, $\bar{Y} = r/3$

5/45. El disco semicircular y la placa cuadrada están formados de plancha de acero que pesa 195 kg/m^2 y están soldados al árbol de acero que pesa $6,8 \text{ kg}$ por metro de longitud. Calcular las coordenadas del centro de gravedad del conjunto.



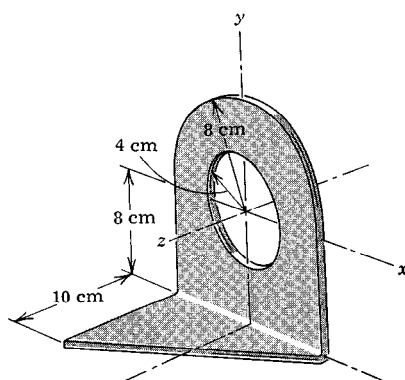
Problema 5 45

5/46. Determinar las coordenadas del centro de gravedad del soporte, el cual está constituido por chapa de grosor uniforme.

Resp. $\bar{X} = -0,83 \text{ cm}$

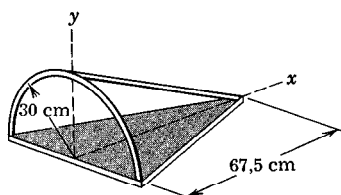
$\bar{Y} = -3,14 \text{ cm}$

$\bar{Z} = 1,03 \text{ cm}$



Problema 5 46

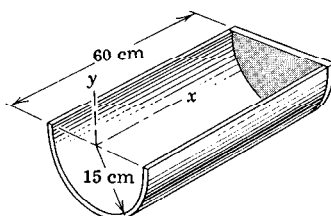
5/47. Una armadura tubular consta de un miembro semicircular y un tirante que se sueldan a una placa triangular en la forma que se indica. Si el material tubular pesa 8 kg por metro de longitud y el de la base pesa 100 kg por metro cuadrado de superficie, calcular las coordenadas del centro de gravedad del conjunto de base y armadura.



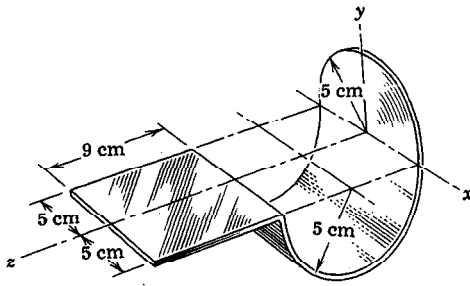
Problema 5/47

5/48. Determinar la posición del centro de gravedad de la cáscara cilíndrica con un extremo semicircular cerrado. La cáscara está constituida de plancha metálica que pesa $26,5 \text{ kg/m}^2$ y el extremo lo está por otra plancha de 40 kg/m^2 .

Resp. $\bar{X} = 34,78 \text{ cm}$, $\bar{Y} = -9,04 \text{ cm}$

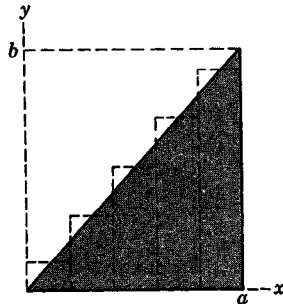


Problema 5/48



Problema 5/49

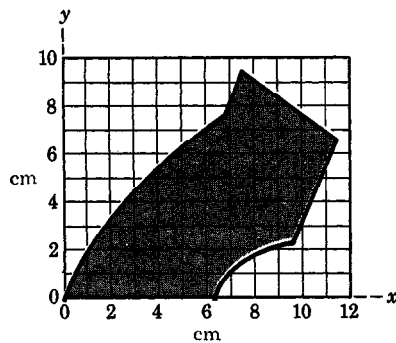
5/49. Localizar el centro de gravedad de la placa delgada cuya forma es la que se indica.



Problema 5/50

5/50. Como ejemplo de la precisión de las aproximaciones gráficas, calcular el tanto por ciento de error e cometido al determinar la coordenada x del centroide del área triangular utilizando la aproximación de los cinco rectángulos de anchura $a/5$ en lugar del triángulo.

Resp. $e = 1,00\%$ por defecto

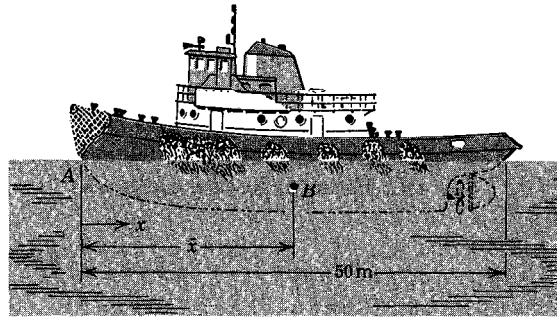


Problema 5/51

5/51. Un patrón de plancha metálica tiene la forma que se indica. Con ayuda del retículo superpuesto determinar las coordenadas del centroide.

Resp. $\bar{X} = 6,14$ cm, $\bar{Y} = 3,92$ cm

5/52. El centro de empuje B del casco de un buque es el centroide de su volumen sumergido. Las áreas A de las secciones rectas bajo el agua del casco del buque se han tabulado para cada cinco metros a lo largo de la eslora en la flotación. Representar gráficamente estos valores y determinar con error menor que 0,5 m la distancia \bar{x} a que se halla B a popa de A .



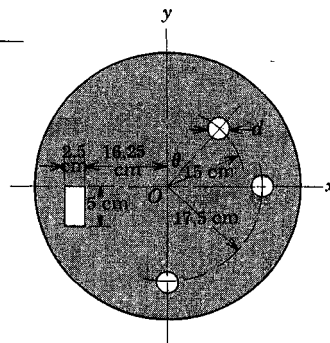
Problema 5/52

x, m	A, m^2	x, m	A, m^2
0	0	25	25,1
5	7,1	30	23,8
10	15,8	35	19,5
15	22,1	40	12,5
20	24,7	45	5,1
		50	0

Resp. $\bar{x} = 24 m$

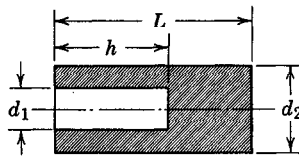
5/53. El disco circular contiene dos orificios de 2,5 cm de diámetro y la ranura rectangular que se indica. Determinar el diámetro d y la posición angular θ del orificio que habría que perforar en el disco a un radio de 15 cm para asegurar una rotación equilibrada del disco alrededor de su centro O .

Resp. $d = 3,875 \text{ cm}$, $\theta = 48^\circ 35'$



Problema 5/53

5/54. Se quiere formar una carga homogénea de explosivo en forma de cilindro de revolución de generatriz L y diámetro d_2 con un hueco axial de diámetro d_1 y profundidad h según puede verse en el corte de la figura. Determinar el valor de h que haría que el centro de gravedad de la carga final se hallara a una distancia máxima del extremo abierto.



Problema 5/54

Resp. $h = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 L \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2}\right]$

26. Teoremas de Pappus-Guldin.* Existe un método muy sencillo para calcular el área de la superficie generada por una curva plana al girar en torno a una recta que no la corte y sea coplanaria con la curva. El segmento curvilíneo de longitud L de la figura 54 está situado en el plano $x-y$ y genera una superficie al girar en torno al eje x . Un elemento de esta superficie es el anillo generado por dL . El área de este anillo es

$$dA = 2\pi y dL,$$

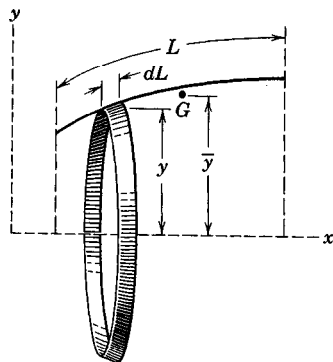


Figura 54

y el área total será, pues,

$$A = 2\pi \int y dL.$$

Pero como $\bar{y}L = \int y dL$, el área vale

►
$$A = 2\pi \bar{y}L, \quad (24)$$

donde \bar{y} es la coordenada y del centroide del segmento curvilíneo de longitud L . Así, pues, el área de la superficie generada es igual al área de la superficie lateral de un cilindro recto de revolución de generatriz L y radio \bar{y} .

En el caso del volumen generado haciendo girar una superficie plana en torno a una recta coplanaria con ella y que no la corte, existe una relación igualmente sencilla para hallar el volumen. En la figura 55 puede verse que al girar

* Atribuidos a PAPPUS de Alejandría, geómetra griego del siglo III a. J. C. Los teoremas suelen llevar el nombre de Guldin (PAUL GULDIN, 1577-1643), quien reclamó para sí la originalidad del teorema, si bien parece ser que ya conocía los trabajos de PAPPUS.

la superficie de área A alrededor del eje x , uno de los elementos de volumen generados es el anillo elemental de sección recta de área dA y radio y . El volumen del elemento es $dV = 2\pi y dA$ siendo el volumen total

$$V = 2\pi \int y dA.$$

Pero como $\bar{y}A = \int y dA$, el volumen será

$$\blacktriangleright \quad V = 2\pi \bar{y}A, \quad (25)$$

donde \bar{y} es la coordenada y del centroide de la superficie giratoria de área A . Luego, el volumen generado se obtendrá multiplicando el área de la superficie generadora por la longitud de la circunferencia que constituye la trayectoria circular descrita por su centroide.

Los dos teoremas de Pappus-Guldin, expresados por las ecuaciones 24 y 25, no solamente son útiles para determinar áreas y volúmenes de revolución, sino que también se emplean para hallar centroides de curvas planas y superficies planas cuando se conocen las correspondientes áreas y volúmenes debidas a la revolución de estas figuras alrededor de un eje que no las corte. Dividiendo el área o volumen por el producto de 2π por la longitud del segmento o área de la superficie correspondiente, tendremos la distancia del centroide al eje de revolución.

En el caso en que la línea o superficie gire un ángulo θ inferior a 2π , se obtendrá la superficie o volumen generados sustituyendo 2π por θ en las ecuaciones 24 y 25.

$$A = \theta \bar{y}L \quad y \quad V = \theta \bar{y}A,$$

donde θ viene expresado en radianes.

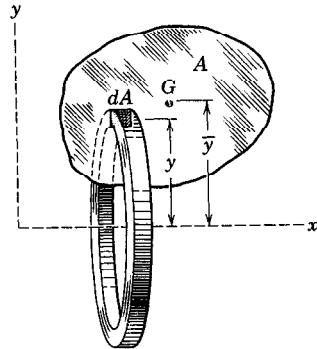


Figura 55

Problemas

5/55. Determinar el volumen V y el área de la superficie lateral de un cono recto de revolución cuyo radio de la base es r y cuya altura es h aplicando el método de este apartado.

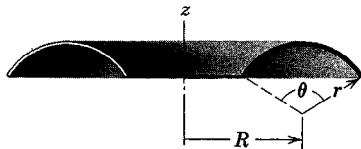
5/56. A partir de la expresión conocida del área de una superficie esférica $A = 4\pi r^2$, determinar la distancia radial \bar{r} al centroide del arco semicircular utilizado para generar la superficie esférica.

5/57. A partir de la fórmula del volumen de una esfera de radio r , $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, determinar la distancia radial \bar{r} al centroide de la superficie semicircular utilizada para generar la esfera.

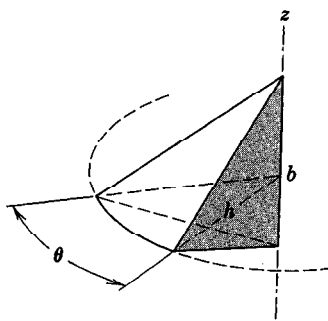
5/58. Utilizar la notación del medio toro del problema 5/33 y determinar el volumen V y el área A de la superficie de un toro completo.

5/59. Una cáscara tiene la forma de una superficie obtenida haciendo girar 360° alrededor del eje z el arco de circunferencia. Determinar el área de la superficie de una cara de la cáscara completa.

5/60. El triángulo sombreado de base b y altura h se hace girar un ángulo θ alrededor de su base para generar una porción de sólido de revolución. Escribir la expresión del volumen V del sólido generado.

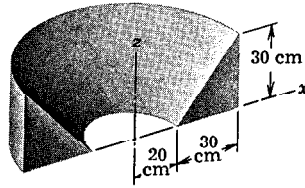


Problema 5/59



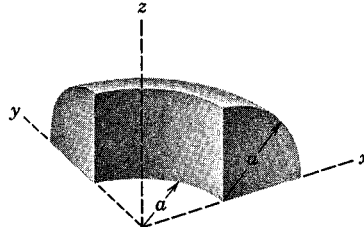
Problema 5/60

5/61. Calcular el volumen V del sólido generado al hacer girar 180° alrededor del eje z al triángulo rectángulo. Resp. $V = 56547 \text{ cm}^3$



Problema 5/61

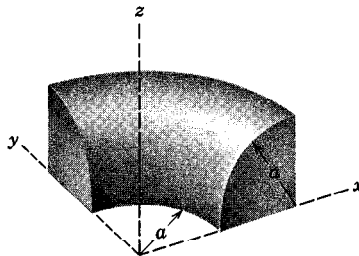
5/62. Determinar el volumen V generado al hacer girar 90° alrededor del eje z un cuarto de círculo colocado en la forma que se indica.



Problema 5/62

5/63. Determinar el volumen V generado al hacer girar 90° alrededor del eje z , en la forma que se indica, un cuarto de círculo.

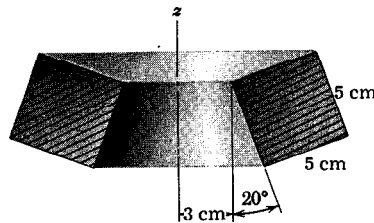
Resp. $V = \frac{\pi a^3}{12}(3\pi - 2)$



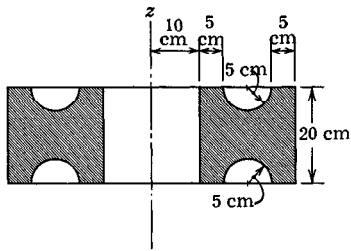
Problema 5/63

5/64. Determinar el área de la superficie de una cara de la cáscara en forma de campana del problema 5/31 por el método de este apartado.

5/65. Calcular el volumen V y el área A de la superficie total del anillo completo cuya sección recta se indica.

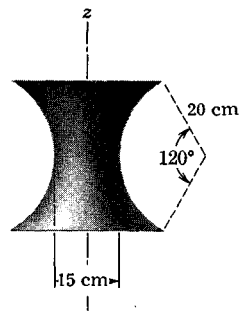


Problema 5/65



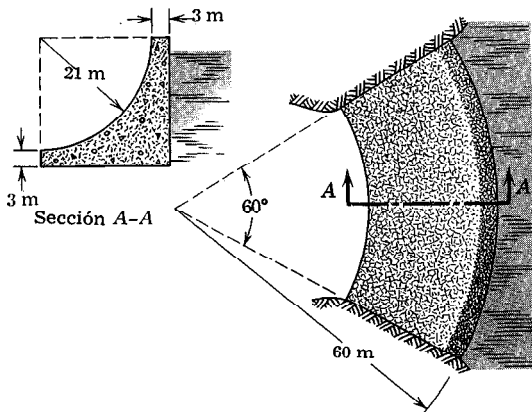
Problema 5/66

5/66. Calcular el peso P y el área A de la superficie total de la rueda generada al hacer girar alrededor del eje z la sección sombreada. El material de la rueda pesa 8333 kg/m^3 .
Resp. $P = 336 \text{ kp}$, $A = 11\,490 \text{ cm}^2$



Problema 5 67

5/67. Se genera una superficie haciendo girar por completo alrededor del eje z un arco de circunferencia de 20 cm de radio que subtiende un ángulo de 120° . El diámetro de la garganta es de 15 cm. Determinar el área A de la superficie generada.
Resp. $A = 2780 \text{ cm}^2$



Problema 5/68

5/68. Calcular el peso P en toneladas del hormigón necesario para construir la presa indicada. El hormigón pesa 2777 kg/m^3 .
Resp. $P = 35,18(10^3) \text{ toneladas}$

27. Cables flexibles

(a) *Relaciones generales.* Un tipo importante de miembro estructural es el cable flexible que se utiliza en puentes colgantes, líneas de transmisión, cables para soportar líneas pesadas telefónicas o de trole, y en otras muchas aplicaciones. En el proyecto de estas estructuras es preciso conocer las relaciones entre la tensión, longitud de tramo, flecha y longitud de los cables. Estas cantidades se determinan examinando el cable como un cuerpo en equilibrio. En el análisis de cables flexibles se supone despreciable toda resistencia opuesta a la flexión. Esta hipótesis significa que la fuerza en el cable tiene siempre la dirección de éste.

Los cables flexibles pueden siempre soportar una serie de cargas concentradas distintas, según se indica en la figura 56a, o pueden soportar cargas distribuidas con continuidad a lo largo del cable, según indica la intensidad de carga variable p en la figura 56b. En algunos casos, el peso del cable es despreciable frente a las cargas que soporta, y en otros el peso del cable puede constituir una carga apreciable e incluso la única, en cuyo caso no puede despreciarse. Independientemente de cuál de estas condiciones sea la existente, los requisitos de equilibrio del cable deberán formularse de la misma manera.

Representando por p kilos por metro de longitud horizontal x la carga variable y continua aplicada al cable de la figura 56b, la resultante R de la carga vertical es

$$R = \int dR, \quad R = \int p \, dx,$$

donde la integración se extiende al intervalo que se considere. La posición de R puede hallarse aplicando el principio de los momentos, con lo que

$$R\bar{x} = \int x \, dR, \quad \bar{x} = \frac{\int x \, dR}{R}.$$

La carga elemental $dR = p \, dx$ está representada por una franja elemental de longitud vertical p y anchura dx del área sombreada del diagrama de carga y R está representada por el área total. De la expresión anterior se deduce que R pasa por el *centroide* del área sombreada.

La condición de equilibrio del cable se satisfará si cada elemento infinitesimal de cable está en equilibrio. En la figura 56c puede verse el diagrama para sólido libre de un elemento diferencial. La tensión del cable en una posición genérica x es T , y el cable forma un ángulo θ con la dirección horizontal x . En la sección $x + dx$ la tensión es $T + dT$ y el ángulo es $\theta + d\theta$. Obsérvese que las variaciones de T y de θ se toman ambas positivas para una variación positiva de x . La carga vertical $p \, dx$ completa el diagrama para sólido libre. El

equilibrio de las fuerzas verticales y de las horizontales exige, respectivamente, que

$$\begin{aligned}(T + dT) \sin (\theta + d\theta) &= T \sin \theta + p dx, \\(T + dT) \cos (\theta + d\theta) &= T \cos \theta.\end{aligned}$$

El desarrollo trigonométrico del seno y del coseno de la suma de dos ángulos y las sustituciones $\sin d\theta = d\theta$ y $\cos d\theta = 1$, válidas en el límite cuando $d\theta$ tiende a cero, conducen tras simplificar a

$$d(T \sin \theta) = p dx \quad \text{y} \quad d(T \cos \theta) = 0.$$

La segunda relación expresa el hecho de que la componente horizontal de T permanece invariable, hecho que resulta evidente en el diagrama para sólido libre. Si esta fuerza horizontal constante es $T_0 = T \cos \theta$, sustituyéndola en la primera ecuación da $d(T_0 \operatorname{tg} \theta) = p dx$. Pero $\operatorname{tg} \theta = dy/dx$, con lo que la ecuación de equilibrio podrá escribirse en la forma

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{p}{T_0}. \quad (26)$$

La ecuación 26 es la *ecuación diferencial* del cable flexible. La solución de la ecuación será la relación funcional $y = f(x)$ que satisfaga a la ecuación y también las condiciones en los extremos fijos del cable, llamadas *condiciones en los límites*.

El método general de obtención de la ecuación diferencial de definición que se ha ilustrado es aplicable a gran número de problemas diferentes de éste que se ilustrarán en apartados posteriores. En cada caso, se aplican los principios rectores a un elemento diferencial genérico del material y las expre-

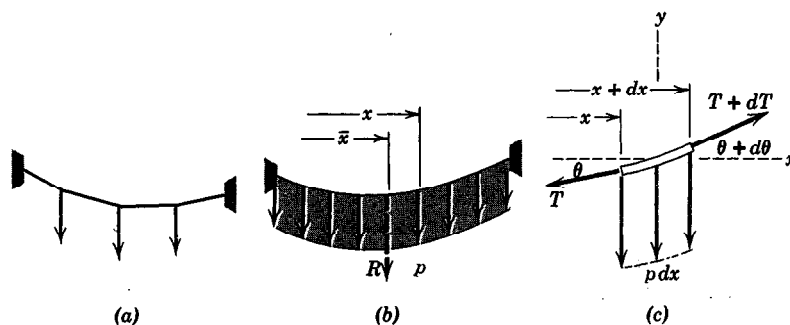


Figura 56

siones que resultan dan las ecuaciones diferenciales que definen el comportamiento del cuerpo en cada punto. Obsérvese que en el problema que nos ocupa sólo hay una variable independiente x , dando así una *ecuación diferencial ordinaria*. Cuando las variables dependientes dependen de dos o más coordenadas independientes, resulta una *ecuación en derivadas parciales*. En el apartado 31 se verán varios ejemplos de ecuaciones en derivadas parciales correspondientes al equilibrio de esfuerzos internos.

Vamos a resolver ahora la ecuación diferencial 26 para dos casos límites importantes de carga de un cable.

(b) *Cable parabólico*. Cuando es constante la intensidad p de la carga vertical, la descripción se aproxima mucho a la de un puente colgante en el que el peso uniforme de la calzada puede expresarse por la constante p . El peso del cable no se distribuye uniformemente según la horizontal, pero se desprecia por ser relativamente pequeño. Para este caso límite se demostrará que el cable toma la forma de arco de parábola. En la figura 57 puede verse un puente colgante de luz L y flecha h con origen de coordenadas en el punto medio de la luz. Siendo constantes p y T_0 , la ecuación 26 podrá integrarse una vez respecto a x para obtener

$$\frac{dy}{dx} = \frac{px}{T_0} + C,$$

donde C es una constante de integración. Para los ejes de coordenadas elegidos, $dy/dx = 0$ cuando $x = 0$, con lo cual $C = 0$. Luego

$$\frac{dy}{dx} = \frac{px}{T_0}$$

define la pendiente de la curva en función de x . Una nueva integración da

$$\int_0^x dy = \int_0^x \frac{px}{T_0} dx \quad \text{o sea} \quad y = \frac{px^2}{2T_0}. \quad (27)$$

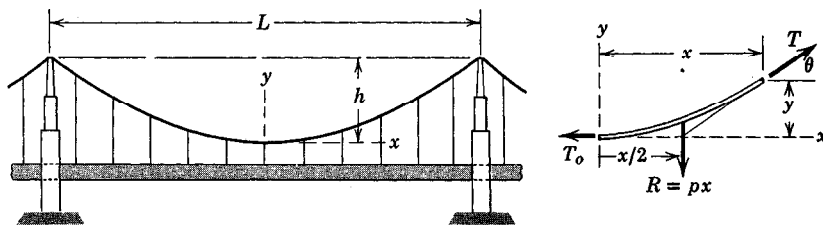


Figura 57

El alumno debe comprobar que se llega al mismo resultado mediante una integral indefinida junto con la evaluación de la constante de integración. La ecuación 27 da la forma del cable que es, evidentemente, una parábola vertical. La componente horizontal constante de la tensión del cable se convierte en la tensión en el origen.

Introduciendo los valores correspondientes $x = L/2$ e $y = h$ en la ecuación 27 se tiene

$$T_0 = \frac{pL^2}{8h} \quad \text{e} \quad y = \frac{4hx^2}{L^2}.$$

La tensión T se halla mediante un diagrama para sólido libre de una porción finita del cable (fig. 57) lo cual exige que $T = \sqrt{T_0^2 + p^2x^2}$. Eliminando T_0 se tiene

$$T = p \sqrt{x^2 + \left(\frac{L^2}{8h}\right)^2}. \quad (28)$$

La tensión máxima tiene lugar cuando $x = L/2$ y es

$$T_{\text{máx.}} = \frac{pL}{2} \sqrt{1 + \frac{L^2}{16h^2}}.$$

La longitud S de todo el cable se obtiene de la relación diferencial $dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$. Así,

$$\frac{S}{2} = \int_0^{L/2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^{L/2} \sqrt{1 + \left(\frac{px}{T_0}\right)^2} dx.$$

Para facilitar el cálculo, esta expresión se desarrolla en serie convergente y se integra término a término. En virtud del desarrollo

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots$$

la integral puede escribirse en la forma,

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{L/2} \left(1 + \frac{p^2x^2}{2T_0^2} - \frac{p^4x^4}{8T_0^4} + \dots\right) dx \\ &= L \left(1 + \frac{p^2L^2}{24T_0^2} - \frac{p^4L^4}{640T_0^4} + \dots\right). \end{aligned}$$

Haciendo la sustitución $p/T_0 = 8h/L^2$ resulta

$$S = L \left[1 + \frac{8}{3} \left(\frac{h}{L} \right)^2 - \frac{32}{5} \left(\frac{h}{L} \right)^4 + \dots \right]. \quad (29)$$

Al examinar las propiedades de esta serie, se encuentra que converge para todos los valores de $h/L \leq 1/4$. En la mayoría de los casos h es mucho menor que $L/4$, con lo que los tres términos de la ecuación 29 dan una aproximación suficientemente precisa.

(c) *Catenaria*. Consideremos ahora un cable uniforme (fig. 58) suspendido de dos puntos de un mismo plano horizontal y que cuelgue bajo la acción de su propio peso solamente. A la derecha de la figura puede verse el diagrama para el sólido libre de una porción finita del cable de longitud s . Este diagrama para el sólido libre difiere del de la figura 57 en que la fuerza vertical total que soporta es igual al peso de la sección de cable de longitud s , en lugar de la carga horizontal uniforme. Si el cable pesa μ kilos por metro de su propia longitud, la resultante R de la carga es $R = \mu s$ y la carga vertical incrementada $p dx$ de la figura 56c se sustituye por μds . Así, pues, la relación diferencial, ecuación 26, del cable queda en la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mu}{T_0} \frac{ds}{dx}. \quad (30)$$

Como $s = f(x, y)$, habrá que transformar esta ecuación en otra que sólo tenga las dos variables.

Sustituyendo la identidad $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ resulta:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mu}{T_0} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}. \quad (31)$$

La ecuación 31 es la ecuación diferencial de la curva (catenaria) que adopta el cable. La solución de esta ecuación se facilita con el cambio $q = dy/dx$, lo cual da

$$\frac{dq}{\sqrt{1 + q^2}} = \frac{\mu}{T_0} dx.$$

La integración de esta ecuación da

$$\ln (q + \sqrt{1 + q^2}) = \frac{\mu}{T_0} x + C.$$

La constante C es nula puesto que $dy/dx = q = 0$ cuando $x = 0$. Sustituyendo $q = dy/dx$, pasando a la forma exponencial y simplificando el radical, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\mu x/T_0} - e^{-\mu x/T_0}}{2} = \sinh \frac{\mu x}{T_0},$$

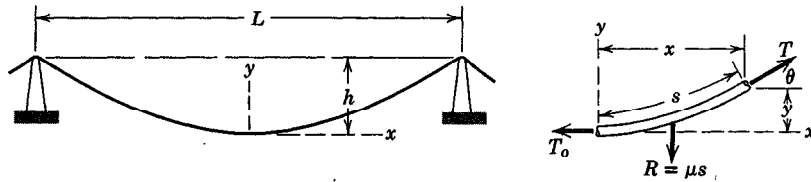


Figura 58

donde se ha introducido la función hiperbólica.* Puede integrarse la pendiente para obtener

$$y = \frac{T_0}{\mu} \cosh \frac{\mu x}{T_0} + K.$$

La constante de integración K se calcula a partir de la condición en el límite $x = 0$ cuando $y = 0$. Esta sustitución requiere que $K = -T_0/\mu$ y por lo tanto

$$y = \frac{T_0}{\mu} \left(\cosh \frac{\mu x}{T_0} - 1 \right). \quad (32)$$

La ecuación 32 es la de la catenaria que forma el cable al colgar bajo la acción exclusiva de su peso.

En el diagrama para sólido libre de la figura 58 se ve que $dy/dx = \tan \theta = \mu s/T_0$. Así, pues, de la expresión anterior de la pendiente,

$$s = \frac{T_0}{\mu} \sinh \frac{\mu x}{T_0}. \quad (33)$$

La tensión T del cable se obtiene a partir del triángulo de fuerzas en equilibrio de la figura 58. Así, pues

$$T^2 = \mu^2 s^2 + T_0^2,$$

que, combinada con la ecuación 33, da

$$T^2 = T_0^2 \left(1 + \sinh^2 \frac{\mu x}{T_0} \right) = T_0^2 \cosh^2 \frac{\mu x}{T_0},$$

o sea,

$$T = T_0 \cosh \frac{\mu x}{T_0}. \quad (34)$$

La tensión puede expresarse también en función de y con ayuda de la ecuación 32, la cual, sustituida en la 34, da

$$T = T_0 + \mu y. \quad (35)$$

* Véase tabla C-3, Apéndice C.

La ecuación 35 indica que el incremento de la tensión del cable sobre la existente en la posición más baja depende solamente de μy .

La mayoría de los problemas en los que intervengan catenarias llevan consigo la solución de las ecuaciones comprendidas entre la 32 y la 35, las cuales se manejan gráficamente o se resuelven con calculadora. En el problema tipo que se halla a continuación de este apartado se ilustra el procedimiento gráfico.

Los problemas de catenarias en los que la razón flecha:claro sea pequeña, pueden resolverse en forma aproximada mediante las relaciones desarrolladas para el cable parabólico. Una razón flecha:claro de pequeño valor significa que el cable está tenso, y la distribución uniforme del peso a lo largo del cable no difiere gran cosa de la misma intensidad de carga distribuida uniformemente a lo largo de la horizontal.

Muchos problemas en los que intervienen catenarias o cables parabólicos llevan consigo la existencia de puntos de suspensión que no se hallan al mismo nivel. En tales casos, podrán aplicarse las relaciones a cada parte del cable que se hallen a uno y otro lado del punto más bajo.

Problema tipo

5/69. Se suspende un cable que pesa 13 kg/m entre dos puntos situados a un mismo nivel y separados 300 m. Si la flecha es de 60 m, hallar la longitud del cable y la tensión máxima.

Solución. Las ecuaciones 33 y 34 para la longitud del cable y la tensión contienen ambas la tensión mínima T_0 que debe hallarse a partir de la ecuación 32. Así, para $x = 150$ m, $y = 60$ m y $\mu = 13$ kg/m

$$60 = \frac{T_0}{13} \left(\cosh \frac{13 \times 150}{T_0} - 1 \right) \quad \text{o sea} \quad \frac{780}{T_0} = \cosh \frac{1950}{T_0} - 1$$

Esta ecuación se resuelve mejor gráficamente. Se calcula la expresión de uno y otro miembro de esta ecuación y se representa gráficamente en función de la variable independiente T_0 . La intersección de las dos curvas establece la igualdad y determina el valor correcto de T_0 . En la figura que acompaña a este problema puede verse esta representación gráfica que da la solución

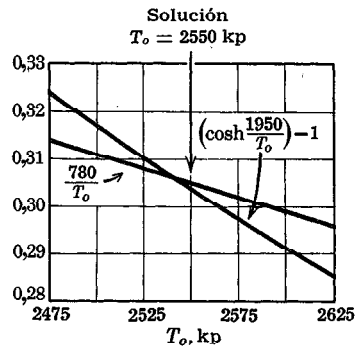
$$T_0 = 2550 \text{ kp}$$

La tensión máxima corresponde al valor máximo de y , obteniéndose de la ecuación 35

$$T_0 = 2550 + 13 \times 60 = 3330 \text{ kp} \quad \text{Resp.}$$

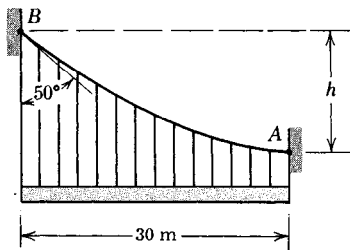
La longitud total del cable resulta ser, en virtud de la ecuación 33

$$2s = 2 \frac{2550}{13} \sinh \frac{13 \times 150}{2550} = 330 \text{ m.} \quad \text{Resp.}$$



Problema 5/69

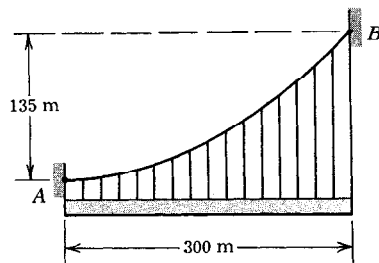
Problemas



Problema 5/70

5/70. Un cable que soporta una carga uniformemente distribuida a lo largo de la horizontal está amarrado al soporte A con una tensión horizontal de 15 000 N. Si la tangente al cable en el punto de amarre B forma un ángulo de 50° con la vertical, determinar la altura h de B por encima de A y la carga p por unidad de longitud horizontal que está distribuida horizontalmente.

Resp. $h = 12,59 \text{ m}$, $p = 419,5 \text{ N/m}$



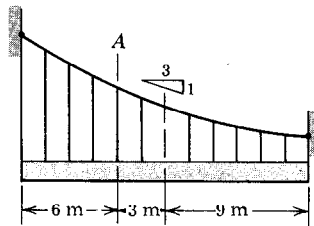
Problema 5/71

5/71. El cable que va de A a B soporta una carga de 120 000 kp distribuida uniformemente a lo largo de la horizontal. La pendiente del cable es nula en A y su peso es pequeño frente a las cargas que soporta. Calcular la tensión máxima del cable.

5/72. Desarrollar la ecuación 32 en serie de potencias de $\cosh(\mu x/T_0)$ y demostrar que la ecuación 27 para la parábola se obtiene tomando solamente los dos primeros términos de la serie. (Véase Tabla C3, Apéndice C, para el desarrollo en serie de la función hiperbólica.)

5/73. Los dos cables de un puente colgante con una luz de 1200 m y una flecha de 180 m soportan una carga vertical de $80(10^6)$ kp distribuida uniformemente respecto a la distancia horizontal entre sus torres. Calcular la tensión T_0 en cada cable en su punto medio y el ángulo θ que forman los cables con la horizontal al aproximarse al punto de amarre en la parte superior de cada torre.
 Resp. $T_0 = 33(10^6)$ kp, $\theta = 30^\circ 58'$

5/74. El cable soporta una carga total de 30 000 kp distribuida uniformemente respecto a la horizontal. Si la pendiente del cable es de $1/3$ en el punto medio de la horizontal y nula en su extremo de la derecha, determinar la tensión T del cable en la posición A. El peso del cable puede despreciarse frente a la carga que soporta.

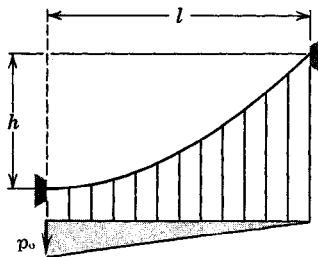


Problema 5/74

5/75. El cable de un puente colgante de 600 m de luz, se halla a 90 m por debajo de las torres soportantes en el punto correspondiente a un cuarto de su luz. Calcular la longitud S total del cable entre las dos torres iguales.

Resp. $S = 658$ m

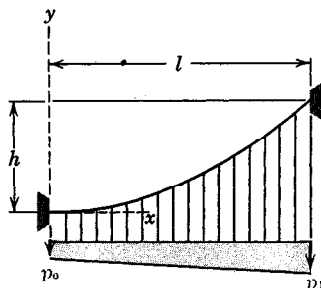
5/76. Un cable de peso despreciable soporta una carga de 67 kp/m distribuida uniformemente respecto a la horizontal. El cable está amarrado a dos puntos de una misma horizontal separados 36 m y tiene una flecha de 9 m. Con auxilio del principio de que tres fuerzas en equilibrio son concurrentes, determinar gráficamente la tensión T en el punto de amarre y el ángulo θ que forma T con la horizontal. Determinar también gráficamente la altura b sobre el cable en el punto medio de la luz, de un punto del cable situado a 12 m de dicho punto medio, midiéndose horizontalmente esta posición.



Problema 5/77

5/77. Se suspende un cable, de peso despreciable, de los puntos fijos indicados y tiene pendiente nula en su extremo inferior. Si el cable soporta una carga por unidad de longitud p que disminuye uniformemente con x desde p_0 hasta cero en la forma indicada, determinar la ecuación de la curva que forma el cable.

$$\text{Resp. } y = \frac{3hx^2}{2l^2} \left(1 - \frac{x}{3l}\right)$$



Problema 5/78

5/78. El cable ligero tiene pendiente nula en su punto de amarre inferior y soporta la carga unitaria que varía linealmente con x desde p_0 hasta p_1 en la forma que se indica. Deducir la expresión de la tensión T_0 del cable en el origen.

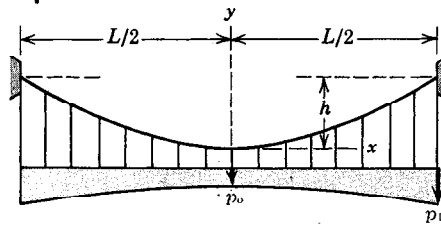
5/79. El cable ligero está amarrado a dos puntos de una misma horizontal separados una distancia L . Si la carga por unidad de longitud, según la dirección horizontal, que soporta el cable varía desde p_0 en el centro hasta p_1 en los extremos de acuerdo con la relación $p = a + bx^2$, deducir la ecuación de la flecha h del cable en función de la tensión T_0 correspondiente al punto medio de la luz.

$$\text{Resp. } h = \frac{L^2}{48 T_0} (5p_0 + p_1)$$

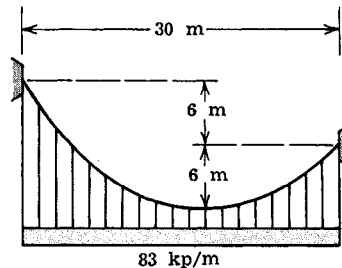
5/80. Un cable de 90 m de longitud está suspendido entre dos puntos a un mismo nivel separados 64 m. Si el cable soporta una carga distribuida uniformemente respecto a la dirección horizontal, hallar la flecha h del cable a partir de la ecuación 29 mediante aproximaciones sucesivas.

5/81. Un cable soporta una carga de 83 kp/m distribuida uniformemente respecto a la horizontal y está suspendido de los dos puntos fijos situados en la forma indicada. Determinar las tensiones máxima T y mínima T_0 del cable.

Resp. $T = 1815 \text{ kp}$, $T_0 = 1073 \text{ kp}$

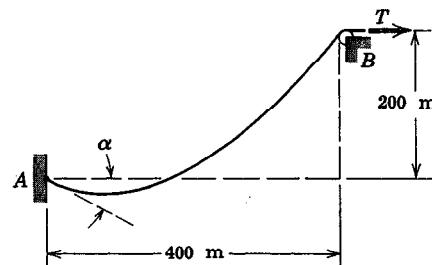


Problema 5/79

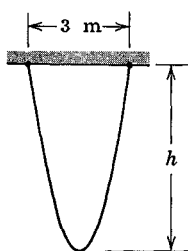


Problema 5/81

5/82. Un cable flexible está amarrado a un punto A y pasa sobre una pequeña polea situada en el punto B que se halla 200 m por encima de A. Si para hacer $\alpha = 0$ en A se precisa de una tensión $T = 60\,000 \text{ N}$ en B, determinar el peso μ del cable por metro de longitud del mismo.



Problema 5/82



Problema 5/83

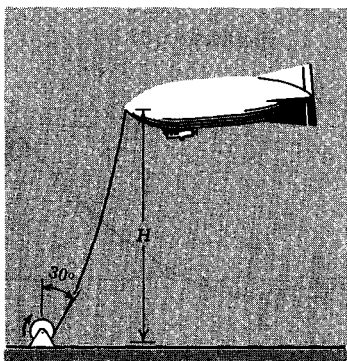
5/83. Una cuerda de 12 m de longitud se suspende entre dos puntos situados a un mismo nivel y separados 3 m. Calcular la distancia h al punto más bajo del seno.

Resp. $h = 5,55$ m

5/84. Entre dos puntos a un mismo nivel separados 120 m se suspende un cable sometido únicamente a la acción de su propio peso. Determinar la longitud total S del cable sabiendo que la flecha es de 30 m. ¿Qué error se cometería al calcular la longitud con la expresión correspondiente al cable parabólico?

5/85. Una línea de transmisión de energía eléctrica está suspendida entre dos torres separadas 150 m sobre la misma horizontal. El cable pesa 20 kp/m de longitud y tiene una flecha de 24 m en el punto medio de la luz. Si el cable puede soportar una tensión máxima de 6000 kp, determinar el peso p' de hielo que puede formarse por metro de cable sin que se sobrepase la tensión máxima de éste.

Resp. $p' = 20,95$ kp de hielo por m



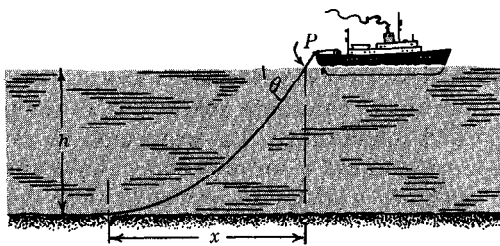
Problema 5, 86

◀ El dirigible está unido al torno del suelo y sometido a un viento suave, siendo 100 m la longitud del cable de amarre de 12 mm, que pesa 0,50 kp/m. Para empezar a arrollar el cable hay que aplicar al torno un par de $400 \text{ m} \cdot \text{N}$. En estas condiciones el cable forma un ángulo de 30° con la vertical en las proximidades del torno. Calcular la altura H a que se halla el globo. El diámetro del torno es de 50 cm.

Resp. $H = 90$ m

◀ 5/87. Mientras se efectúan reparaciones en el cable, las hélices del buque que lo tiende ejercen un empuje hacia adelante de 30000 kp para mantener una posición fija en aguas tranquilas. La profundidad del océano en el lugar considerado es de h metros y se observa que el cable forma un ángulo $\theta = 60^\circ$ con la horizontal en el punto P . El cable pesa 25 kp/m y tiene una sección recta de área 45 cm^2 . La densidad del agua salada es $1,02 \text{ g/cm}^3$. Calcular la longitud s de cable desde el punto P hasta el punto en donde el cable se separa del lecho del océano y hallar la distancia horizontal x desde este punto hasta el que se encuentre directamente debajo del punto P . Determinar la profundidad h del océano. Calcular también el momento del par M que hay que aplicar al cilindro de 1,8 m de diámetro que deposita el cable para evitar que gire. (Nota: La carga vertical es la diferencia entre el peso del cable y el peso del agua desalojada.)

Resp. $s = 2630 \text{ m}$, $x = 2000 \text{ m}$
 $h = 1520 \text{ m}$, $M = 54\,000 \text{ m}\cdot\text{kp}$



Problema 5/87

28. Vigas con cargas distribuidas. En el apartado 21 se desarrolló el estudio de las fuerzas cortantes y los momentos flectores en las vigas con cargas concentradas. Extenderemos ahora este desarrollo al caso de vigas sometidas a cargas distribuidas que varían continuamente sobre las mismas o sobre parte de ellas. Para las fuerzas distribuidas se emplearán también los convenios utilizados para el corte V y el momento M y el método básico de equilibrio desarrollado en el apartado 21. Adicionalmente, existen varias relaciones que contienen V y M que pueden establecerse para toda viga con carga distribuida y que ayudarán en gran manera a la construcción de las distribuciones de fuerzas cortantes y de momentos flectores. La figura 59 representa una porción de viga cargada, en la que se aísla un elemento dx de la viga. La intensidad de carga p representa la fuerza por unidad de longitud de la viga. En la posición x se han dibujado en sus sentidos positivos la fuerza cortante V y el momento M que actúan sobre el elemento. En el lado opuesto del elemento,

donde la coordenada es $x + dx$, también se dibujan estas cantidades en sus sentidos positivos, pero deben representarse por $V + dV$ y $M + dM$ ya que se requiere que V y M varíen con x . La intensidad de carga aplicada p se puede considerar constante sobre toda la longitud del elemento por ser ésta una cantidad infinitesimal. La asignación de las fuerzas y momentos y sus variaciones incrementales a un elemento infinitesimal de la viga, figura 59, sigue un procedimiento análogo al empleado para definir el equilibrio de un elemento infinitesimal del cable flexible.

El equilibrio del elemento exige que la suma de las fuerzas verticales sea cero. Así

$$V + p dx - (V + dV) = 0$$

o sea

$$\blacktriangleright \quad p = \frac{dV}{dx} . \quad (36)$$

De la ecuación 36 queda claro que la pendiente del diagrama de fuerza cortante debe ser igual en todos los puntos al valor de la carga aplicada. La ecuación 36 es válida a uno y otro lado de una carga concentrada, pero no en la carga concentrada a causa de la discontinuidad debida al brusco cambio de fuerza cortante.

El equilibrio del elemento de la figura 59 exige también que la suma de los momentos sea cero. Tomando momentos respecto al extremo de la izquierda del elemento se tiene

$$M + p dx \frac{dx}{2} - (V + dV) dx - (M + dM) = 0 .$$

Las dos M se destruyen y pueden despreciarse los términos $p \frac{(dx)^2}{2}$ y $dV dx$

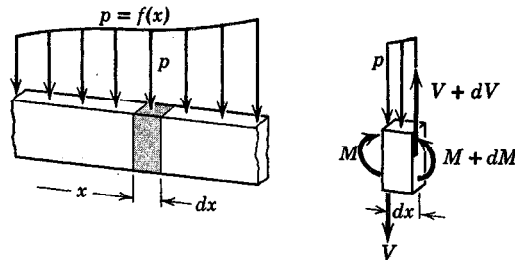


Figura 59

por ser infinitésimos de orden superior a los términos restantes. Queda, pues, simplemente,

$$V = - \frac{dM}{dx} \quad (37)$$

que expresa el hecho de que en todas partes la fuerza cortante es igual a la pendiente de la curva del momento cambiada de signo. O bien el momento M puede considerarse igual a la integral cambiada de signo de la fuerza cortante. La ecuación 37 puede ponerse, pues, en forma integral de la manera siguiente:

$$\int_{M_0}^M dM = - \int_{x_0}^x V dx$$

o sea

$$M = M_0 - (\text{área bajo el diagrama de corte entre } x_0 \text{ y } x).$$

En esta expresión M_0 es el momento flector en x_0 y M lo es en x . En el caso de vigas a las que no se aplique exteriormente momento M_0 en $x_0 = 0$, el momento total en una sección cualquiera es igual y de signo contrario al área limitada bajo el diagrama de corte hasta la sección considerada. La manera más sencilla de construir el diagrama del momento suele ser midiendo el área limitada por el diagrama de corte.

Cuando V pase por cero siendo función continua de x con $dV/dx \neq 0$, el momento flector M será máximo o mínimo, ya que en dicho punto $dM/dx = 0$. También pueden aparecer valores críticos de M cuando V cruce el eje de abscisas en una discontinuidad, como se vio en el apartado 21 para el caso de vigas sometidas a cargas concentradas.

En las ecuaciones 36 y 37 puede verse que el grado de V respecto a x es superior en una unidad al de p . También el de M es superior en una unidad al de V . Además, el grado de M respecto a x es superior en dos unidades al de p . Así, para una viga cargada con $p = kx$, que es de primer grado en x , la fuerza cortante V es de segundo grado en x y el momento flector M es de tercer grado en x .

Las ecuaciones 36 y 37 se pueden combinar para dar

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -p \quad (38)$$

Así, si p es función conocida de x , podrá obtenerse el momento M mediante dos integraciones, siempre que en cada una de ellas se fijen adecuadamente los límites de integración. Este método será utilizable solamente cuando p sea función continua de x . Cuando p sea una función discontinua de x es posible in-

troducir un sistema especial de expresiones llamadas *funciones de singularidad* que permiten escribir expresiones analíticas de V y M que cubran las integrales en un dominio de discontinuidades. En este libro no se tratarán dichas funciones.

Cuando se presente flexión de la viga en más de un plano, se realizará un análisis separado en cada plano. Después se combinan vectorialmente los resultados, según se describió en el apartado 21 para el caso de vigas sometidas a cargas concentradas y según se indicó en la figura 47 y en el problema tipo 4/86.

Problema tipo

5/88. Dibujar los diagramas de corte y de momento de la viga cargada indicada en la parte superior de la figura y determinar el momento máximo M y su situación x respecto al extremo izquierdo.

Solución. Las reacciones de los apoyos se obtendrán más fácilmente considerando las resultantes de las cargas distribuidas en la forma indicada sobre el diagrama para el sólido libre de la viga en conjunto. Se analiza el primer intervalo de la viga mediante el diagrama para el sólido libre correspondiente a la sección en que $x < 1$ m. La suma de las fuerzas verticales de esta sección da

$$[\Sigma F_y = 0] \quad V = 85x^2 - 100$$

y la suma de los momentos respecto a la sección cortada da

$$[\Sigma M = 0] \quad M + (85x^2) \frac{x}{3} - 100x = 0$$

$$M = 100x - 28,3x^3$$

Estos valores de V y M son válidos para $0 < x < 1$ m y pueden verse representados en los diagramas de corte y de momento de la figura.

Del diagrama para el sólido libre correspondiente a la sección para la cual $1 < x < 2$ m el equilibrio para las componentes verticales exige

$$[\Sigma F_y = 0] \quad V - 170(x - 1) - 85 + 100 = 0$$

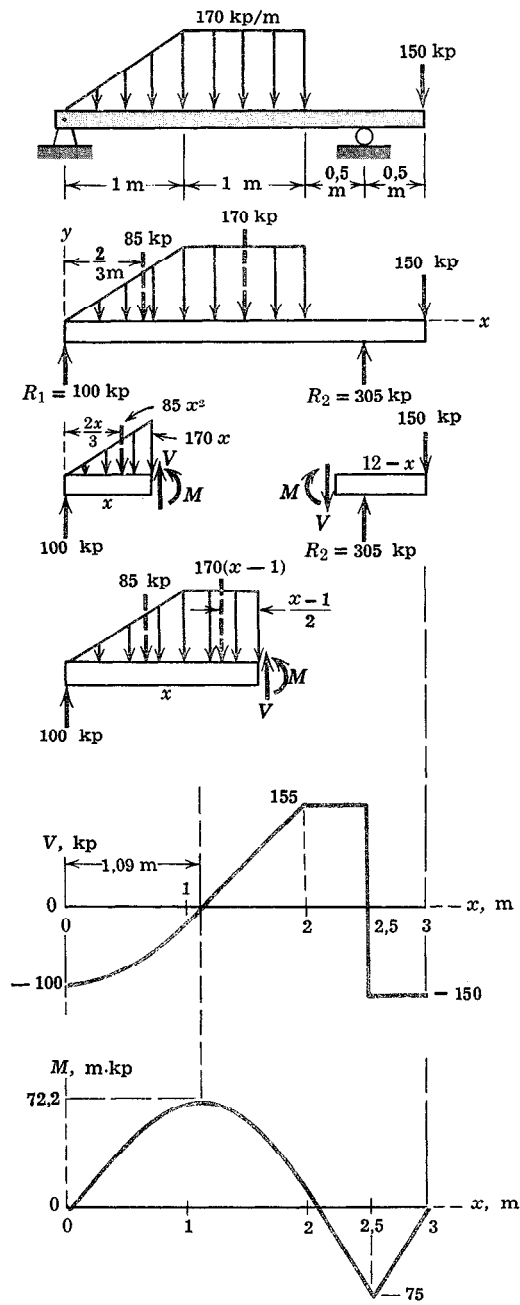
$$V = 170x - 185$$

Sumando momentos respecto a la sección cortada se tiene

$$[\Sigma M = 0] \quad M + 170(x - 1) \frac{x - 1}{2} + 85(x - \frac{3}{2}) - 100x = 0$$

$$M = -28,3 + 185x - 85x^2$$

Estos valores de V y M están representados en los diagramas de corte y momento en el intervalo $1 < x < 2$ m.



Problema 5/88

Se prosigue el análisis del resto de la viga con el diagrama para el sólido libre de la porción de viga a la derecha de una sección en el intervalo siguiente. Obsérvese que V y M están representados en sus sentidos positivos. La suma de las componentes verticales requiere,

$$[\Sigma F_y = 0] \quad V - 305 + 150 = 0 \quad V = 155 \text{ kp}$$

y la suma de momentos respecto a la sección da

$$[\Sigma M = 0] \quad M + 150(3 - x) - 305(3 - x - 0,5) = 0$$

$$M = 312,5 - 155x$$

Estos valores de V y M están representados en los diagramas de corte y momento para el intervalo $2 < x < 2,5$ m.

El último intervalo se puede analizar a simple vista. El esfuerzo cortante es constante e igual a $+150$ kp y el momento sigue una relación lineal que comienza con un valor nulo en el extremo derecho de la viga.

El momento máximo se tiene a $x = 2,5$ m, donde la curva de corte corta al eje de abscisas y la magnitud de M se obtiene sustituyendo este valor de x en la expresión de M para el segundo intervalo. El momento máximo vale

$$M = 75 \text{ m} \cdot \text{kp} \quad \text{Resp.}$$

Para este segundo intervalo, la deducción de $dM/dx = 0$ comprobaría el valor de $x = 2,5$ m.

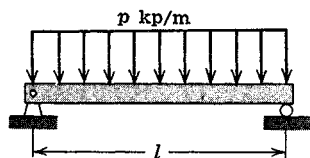
Aun cuando el diagrama de corte vuelve a cortar al eje de abscisas en $x = 1,09$ m, la magnitud del momento flector es menor que para $x = 2,5$ m.

El momento M podría también obtenerse del diagrama de corte en la forma explicada a continuación de la ecuación 37. Así, el momento M en una sección cualquiera de abscisa x es igual al área total de la superficie limitada bajo el diagrama de corte a la izquierda de x con signo cambiado. Para $x < 1$ m, por ejemplo, el momento vale

$$[\Delta M = \int V dx] \quad M - 0 = \int_0^x (85x^2 - 100) dx, \quad M = 100x - 28,3x^3$$

que concuerda con los resultados antes obtenidos.

Problemas

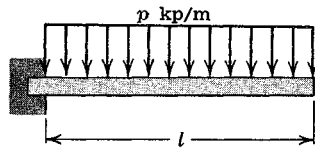


Problema 5/89

5/89. Trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga cargada uniformemente y hallar el momento flector máximo M .

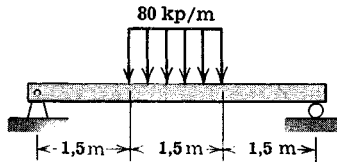
$$\text{Resp. } M = \frac{pl^2}{8}$$

5/90. Trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flector de la viga en voladizo cargada con carga uniforme p por unidad de longitud.



Problema 5/90

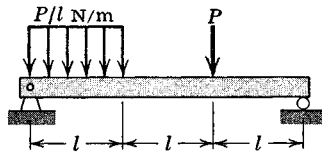
5/91. Trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flector de la viga sometida a una carga de 80 kp por metro de longitud de viga, distribuida sobre el tramo central.



Problema 5/91

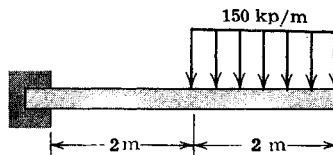
5/92. Trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flector de la viga cargada y hallar la magnitud máxima M del momento flector.

$$\text{Resp. } M = \frac{5}{6} Pl$$



Problema 5/92

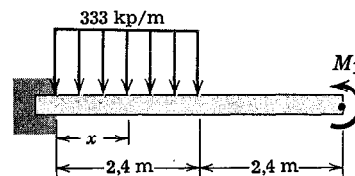
5/93. Trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga en voladizo cargada de la manera que se indica.



Problema 5/93

5/94. Trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flector de la viga en voladizo cargada en la que se ajusta el par M_1 en un extremo de manera que se tenga momento nulo en el empotramiento. Hallar el momento flector M en $x = 1,2$ m.

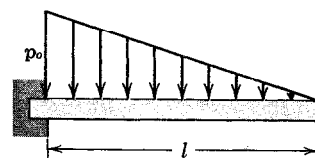
$$\text{Resp. } M = 720 \text{ m}\cdot\text{kp}$$



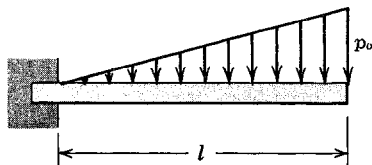
Problema 5/94

5/95. Trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flector de la viga en voladizo sometida a densidad de carga lineal y hallar el valor máximo M del momento flector.

$$\text{Resp. } M = \frac{p_0 l^2}{6}$$

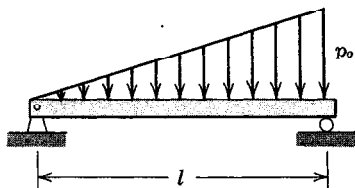


Problema 5/95



Problema 5/96

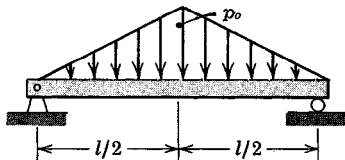
5/96. Trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flector de la viga en voladizo cargada linealmente.



Problema 5/97

5/97. Trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga simple cargada linealmente. La intensidad de carga en el extremo de la derecha es de p_0 kilopond por metro de longitud de viga. Escribir la expresión del valor máximo M del momento flector y la distancia x , medida hacia la derecha a partir del extremo izquierdo, hasta el punto en el que se tiene el momento flector máximo.

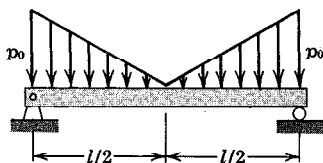
$$\text{Resp. } M = \frac{p_0 l^2}{9\sqrt{3}} \quad \text{en } x = l\sqrt{3}$$



Problema 5/98

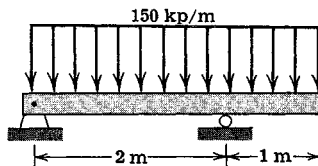
5/98. Trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga simple cargada linealmente de la figura. Determinar el valor máximo M del momento flector.

$$\text{Resp. } M = \frac{p_0 l^2}{12}$$



Problema 5/99

5/99. Trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flector de la viga sometida a las cargas variables linealmente y hallar el valor máximo M del momento flector.



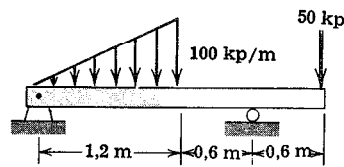
Problema 5/100

5/100. Trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga representada. Determinar la distancia b , medida a partir del extremo izquierdo, hasta el punto en que el momento flector es nulo entre los apoyos.

$$\text{Resp. } b = 1,5 \text{ m}$$

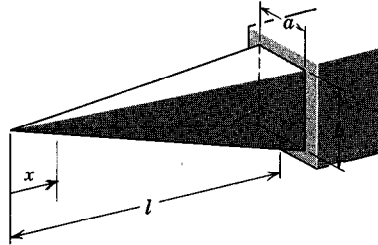
5/101. Trazar los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga cargada y determinar el momento flector M que induce la compresión máxima en las fibras superiores de la viga.

Resp. $M = 7,02 \text{ m.kp}$



Problema 5/101

5/102. Determinar el momento flector M en función de x en la viga piramidal en voladizo que soporta su propio peso. El peso específico del material es γ .

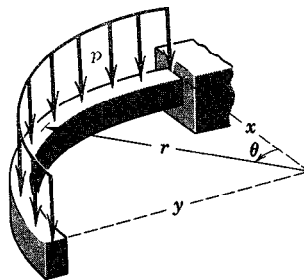


Problema 5/102

5/103. La viga curvada en voladizo tiene forma de cuarto de circunferencia y soporta una carga de $p \text{ kp/m}$ aplicada a lo largo de la curva de la viga sobre su cara superior. Determinar el momento torsor T y el momento flector M de la viga en función de θ .

$$\text{Resp. } T = pr^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta - \cos \theta \right)$$

$$M = -pr^2(1 - \sin \theta)$$

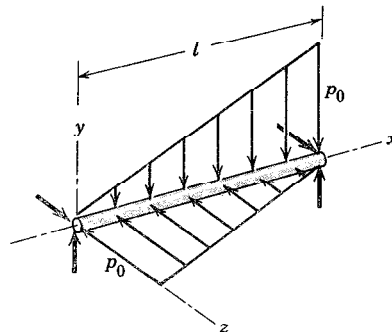


Problema 5/103

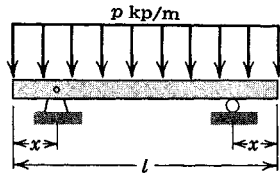
5/104. El árbol apoyado por sus extremos está sometido a cargas variables linealmente, contenidas en planos ortogonales. Determinar la expresión del momento flector resultante M en el árbol.

Resp.

$$M = \frac{p_0}{6l} x(l-x) \sqrt{5l^2 - 2lx + 2x^2}$$



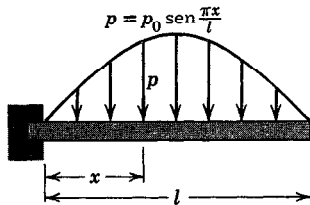
Problema 5/104



Problema 5/105

◀ 5/105. La viga soporta una carga distribuida uniformemente en la forma que se indica. Determinar la situación x de los dos apoyos que reduzca al mínimo el momento flector máximo M en la viga. ¿Cuánto vale M ?

Resp. $M = 0,0215 pl^2$, $x = 0,207 l$



Problema 5/106

◀ 5/106. La viga en voladizo soporta la carga distribuida sinusoidalmente (sólo media onda) $p = p_0 \sin(\pi x/l)$ kilos por metro de longitud. Determinar el momento flector M en función de x utilizando directamente la ecuación 38.

Resp. $M = \frac{p_0 l}{\pi} \left(\frac{l}{\pi} \sin \frac{\pi x}{l} + x - l \right)$

29. Estática de fluidos. En todo lo visto hasta ahora, se ha dirigido la atención principalmente hacia la acción de fuerzas que se ejercen entre cuerpos rígidos. En este apartado se desarrollará el estudio de cuerpos sometidos a fuerzas debidas a la acción de las presiones de los fluidos. Llamaremos fluido a toda sustancia continua que, en estado de reposo, es incapaz de soportar una fuerza cortante. Fuerza cortante es la que es tangente a la superficie sobre la que se ejerce y aparece cuando en capas contiguas de fluido existen velocidades diferentes. Así pues, un fluido en reposo sólo puede ejercer fuerzas normales sobre una superficie límite. Los fluidos pueden ser gaseosos o líquidos. A la Estática de fluidos se le suele llamar *Hidroestática* cuando el fluido es un líquido y *Aerostática* cuando es un gas.

(a) *Presión en un fluido.* La presión en un punto de un fluido es la misma en todas direcciones (principio de Pascal). Se puede poner de manifiesto este hecho considerando el equilibrio de un elemento triangular infinitesimal de fluido, tal como el representado en la figura 60. Tomando la unidad sobre la dimensión z y llamando a las presiones sobre los tres lados p_1 , p_2 y p_3 el equilibrio de las fuerzas en las direcciones x e y podrá venir expresado por las ecuaciones

$$p_2 dx dz = p_3 ds dz \cos \theta, \quad p_1 dy dz = p_3 ds dz \sin \theta.$$

Como $ds \sin \theta = dy$ y $ds \cos \theta = dx$, estas ecuaciones requieren que

$$p_1 = p_2 = p_3 = p.$$

Girando 90° el elemento se encuentra que p_4 también es igual a las otras presiones. Luego la presión p es la misma en todas direcciones. En este estudio no

es preciso tener en cuenta el peso del elemento de fluido, puesto que al multiplicar el peso específico γ (peso por unidad de volumen) del fluido por el volumen del elemento, se obtiene un infinitésimo de orden superior que puede despreciarse frente a los términos de las fuerzas.

En todos los fluidos en reposo, la presión es función de la dimensión vertical. Para determinar esta función habrá que considerar una variación de la dimensión vertical y tener en cuenta el peso del fluido. En la figura 61 puede verse un elemento diferencial de fluido en forma de cilindro de eje vertical y sección recta de área dA . El sentido positivo de la coordenada vertical h se toma hacia abajo. La presión sobre la cara superior es p , y sobre la cara inferior será p más la variación de p , o sea $p + dp$. El peso del elemento es igual a su peso específico γ multiplicado por su volumen. Las fuerzas normales a la superficie lateral no intervienen en el equilibrio de las fuerzas verticales y por ello no se han señalado. El equilibrio del elemento de fluido en la dirección h requiere

$$\blacktriangleright \quad p dA + \gamma dA dh - (p + dp) dA = 0, \quad dp = \gamma dh. \quad (39)$$

Esta relación diferencial indica que la presión en un fluido crece con la profundidad o disminuye al crecer la altura. La ecuación 39 vale tanto para líquidos como para gases y está de acuerdo con los conocimientos corrientes de las presiones en el aire y en el agua.

Los fluidos que son esencialmente incompresibles reciben el nombre de líquidos, y se deduce que para la mayoría de los fines prácticos se puede con-

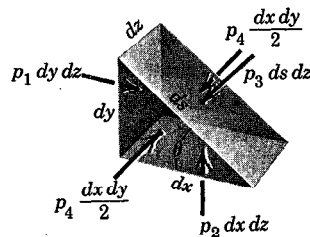


Figura 60

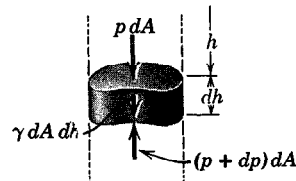


Figura 61

siderar el peso específico constante para todas las parte del líquido.* Siendo γ constante, se puede integrar directamente la ecuación 39 y resulta

$$p = p_0 + \gamma h. \quad (40)$$

La presión p_0 es la presión sobre la superficie del líquido en donde $h = 0$. Si p_0 es debida a la presión atmosférica y el instrumento de medida sólo registra el incremento de presión sobre la atmosférica, ** la medida da lo que se conoce con el nombre de "presión manométrica" que es $p = \gamma h$.

Por otra parte, los gases son compresibles y en ellos el peso específico varía con la distancia vertical. Para la mayoría de problemas técnicos esta variación es despreciable al considerar la presión del gas sobre una estructura puesto que la altura de ésta, por lo general, sólo representa una pequeña variación de altitud. Cuando sea necesario, para determinar la variación de presión con la altitud se podrá utilizar la ley de los gases $p = \gamma KT$, donde T es la temperatura absoluta del gas y K es una constante. Sustituyendo $\gamma = p/(KT)$ en la ecuación 39 y reemplazando la medida hacia abajo h por la medida hacia arriba z , donde $dh = -dz$, se tiene $KT dp = -p dz$. Integrando entre las condiciones de presión p_0 a altitud cero y la presión p a altitud z se tiene, en condiciones de temperatura constante,

$$z = KT \log \frac{p_0}{p}.$$

Cuando la temperatura del gas no se mantiene constante con la altura, como ocurre en la atmósfera terrestre, deberá tenerse en cuenta el efecto de la variación de temperatura.

(b) *Presión hidrostática sobre superficies rectangulares sumergidas.* Una superficie sumergida en un líquido, tal como la válvula de un aliviadero en una presa o las paredes de un depósito, está sometida a una presión normal a su superficie distribuida sobre ésta. En los problemas en que son apreciables las fuerzas ejercidas por el fluido será necesario tener en cuenta la fuerza resultante debida a la distribución de la presión sobre la superficie y la posición en la cual está aplicada dicha resultante. En los sistemas abiertos a la atmósfera terrestre, la presión atmosférica p_0 se ejerce sobre todas las superficies y, por tanto, dará una resultante nula. Así pues, sólo habrá que considerar el incremento sobre la presión atmosférica, al que hemos llamado "presión manométrica", que es $p = \gamma h$.

Consideremos el caso particular pero frecuente de la acción de la presión hidrostática sobre una placa rectangular sumergida en un líquido. En la figura 62a puede verse una tal placa 1-2-3-4 con su borde superior horizontal y

* Ver Tabla C-1, Apéndice C para los pesos específicos.

** La presión atmosférica al nivel del mar puede considerarse de 1 kg/cm² (más aproximadamente 1 033 kg/cm²).

con el plano de la placa formando un ángulo θ cualquiera con el plano vertical. La superficie horizontal del líquido está representada por el plano $x-y'$. La presión (manométrica) del fluido que actúa normalmente al plano en el punto 2 está representada por el vector 6-2 y es igual al producto del peso específico γ por la profundidad vertical desde la superficie del líquido al punto 2. La misma presión se ejerce sobre todos los puntos del borde 2-3. En el punto 1 del borde inferior, la presión del fluido es igual al producto de γ por la profundidad vertical correspondiente al punto 1, y esta presión es la misma en todos los puntos del borde 1-4. La variación de la presión p sobre la superficie de la placa viene regida por la relación lineal con la profundidad y estará representada, por tanto, por la altura del prisma truncado 1-2-3-4-5-6-7-8 que tiene la placa como base. La fuerza resultante producida por esta distribución de la presión está representada por R , la cual se ejerce sobre un cierto punto P llamado *centro de presión*.

Está claro que las condiciones que prevalecen en la sección vertical 1-2-6-5 de la figura 62a son las mismas que en la sección 4-3-7-8 y en cualquier otra

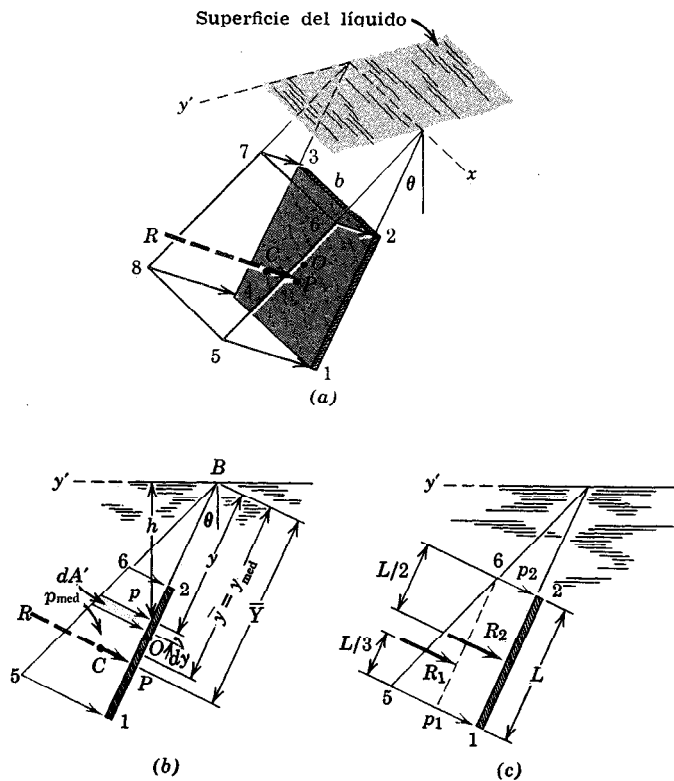


Figura 62

sección vertical que corte a la placa. Así pues, podremos analizar el problema bidimensionalmente a partir de una sección vertical como la 1-2-6-5 de la figura 62b. En esta sección, la distribución de la presión es trapezoidal. Si es b la anchura horizontal de la placa, sobre el elemento de superficie $dA = b dy$ se ejercerá la presión $p = \gamma \bar{h}$, y el incremento de la fuerza resultante es $dR = p dA = b p dy$. Pero $p dy$ no es más que el incremento sombreado del área trapezoidal dA' , con lo que $dR = b dA'$. Por tanto, la fuerza resultante que se ejercerá sobre toda la placa podrá expresarse en la forma

$$R = \int b dA' \quad \text{o sea} \quad R = b A'.$$

Hay que tener cuidado en no confundir el área física A de la placa con el área geométrica A' definida por la distribución trapezoidal de la presión.

El área trapezoidal que representa la distribución de la presión se expresa fácilmente utilizando su altura media. Por tanto, la fuerza resultante R podrá escribirse en función de la presión media $p_{\text{med}} = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$, multiplicándola por el área A de la placa. La presión media es también la presión existente a la profundidad media correspondiente al centroide O de la placa. Por tanto, otra expresión de R será

$$R = p_{\text{med}} A = \gamma \bar{h} A$$

donde $\bar{h} = \bar{y} \cos \theta$.

La recta soporte de la fuerza resultante R se obtiene mediante el principio de los momentos. Utilizando como eje de momentos el eje x (punto B en figura 62b) se tiene $R\bar{Y} = \int y(p b dy)$. Sustituyendo $p dy = dA'$ y eliminando b se tiene

$$\bar{Y} = \frac{\int y dA'}{\int dA'}$$

que no es más que la coordenada centroidal del trapecio de área A' . Por tanto, desde el punto de vista bidimensional, la resultante R pasa por el centroide C del trapecio definido por la distribución de la presión sobre la sección vertical. Evidentemente, \bar{Y} sitúa también el centroide C del prisma truncado 1-2-3-4-5-6-7-8 de la figura 62a por el que pasa en realidad la resultante R .

Al tratar con una distribución trapezoidal de presión, el cálculo suele simplificarse considerando la resultante como compuesta por dos componentes (figura 62c). Se divide el trapecio en un rectángulo y un triángulo, considerando por separado las fuerzas representadas por una y otra parte. La fuerza re-

presentada por la porción rectangular se ejerce sobre el centro O de la placa y es $R_2 = p_2 A$, siendo A el área 1-2-3-4 de la placa. La fuerza representada por el incremento triangular de la distribución de presión es $\frac{1}{2}(p_1 - p_2)A$ y pasa por el centroide de la porción triangular, según se indica.

(c) *Presión hidrostática sobre superficies cilíndricas.* En el caso de una superficie curva sumergida, la resultante R debida a la presión distribuida lleva consigo más cálculos que en el caso de superficie plana. Como ejemplo consideremos la superficie cilíndrica sumergida representada en la figura 63a en donde los elementos de la superficie curva son paralelos a la superficie horizontal $x-y'$ del líquido. Las secciones verticales normales a la superficie dan todas la misma curva AB y la misma distribución de presión. Por tanto, podremos utilizar la misma representación bidimensional de la figura 63b. Para hallar R por integración directa es necesario integrar las componentes x e y de dR a lo largo de la curva AB , ya que la presión cambia de dirección continuamente. Así pues,

$$R_x = b \int (p dL)_x = b \int p dy \quad \text{y} \quad R_y = b \int (p dL)_y = b \int p dx.$$

A continuación necesitaremos una ecuación de momentos para establecer la posición de R .

A menudo resulta más sencillo otro método para hallar R . Consideremos el equilibrio del bloque de líquido ABC situado inmediatamente encima de la superficie y que se ha representado en la figura 63c. La resultante R aparece entonces como la reacción (opuesta) que la superficie ejerce sobre el bloque de líquido. Las resultantes de las presiones a lo largo de AC y CB son, respectivamente, P_x y P_y , y se obtienen fácilmente. El peso W del bloque de líquido se calcula a partir del área ABC de su sección, multiplicándola por la dimensión constante b y por el peso específico. El peso W pasa por el centroide de la superficie ABC . La equilibrante R quedará entonces determinada a partir de las ecuaciones de equilibrio aplicadas al diagrama de sólido libre del bloque de fluido.

(d) *Presión hidrostática sobre superficies planas de forma cualquiera.* En la figura 64a puede verse una placa plana de forma cualquiera sumergida en un líquido. La superficie horizontal de éste es el plano $x-y'$, y el plano de la placa forma un ángulo θ con la vertical. La fuerza que actúa sobre una faja diferencial de área dA paralela a la superficie del líquido es $dR = p dA = \gamma h dA$. La presión p tiene el mismo valor en todos los puntos de la faja, puesto que no hay ninguna variación de profundidad a lo largo de la faja horizontal. La fuerza total que actúa sobre el área A se obtiene por integración, y es

$$R = \int dR = \int p dA = \gamma \int h dA.$$

Sustituyendo la relación centroidal $\bar{h}A = \int h dA$ se tiene

$$R = \gamma \bar{h}A. \quad (41)$$

La cantidad $\gamma \bar{h}$ representa la presión que existe a la profundidad del centroide O de la superficie y es la presión media sobre ella.

La resultante R puede también representarse geoméricamente por un volumen en la forma indicada en la figura 64b. En este caso, el vector presión p se representa como altura correspondiente a la placa considerada como base. El volumen resultante es un cilindro truncado recto. La fuerza dR que actúa sobre el elemento de superficie de área $dA = x dy$ da el volumen elemental $dV = p dA$ representado por la rebanada sombreada, y la fuerza total es, pues, el volumen total del cilindro. Así,

$$R = \int dR = \int dV = V.$$

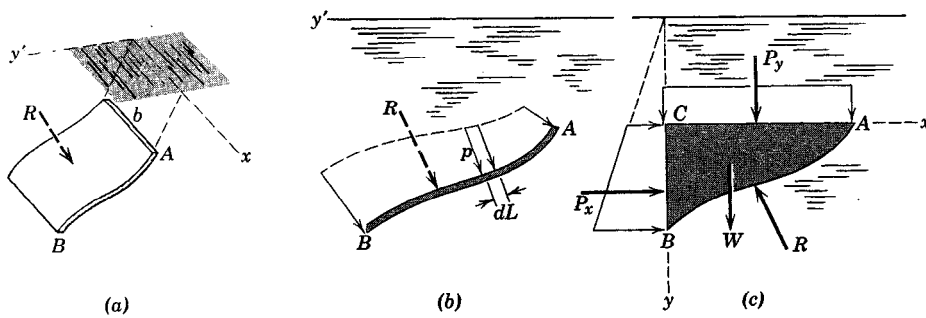


Figura 63

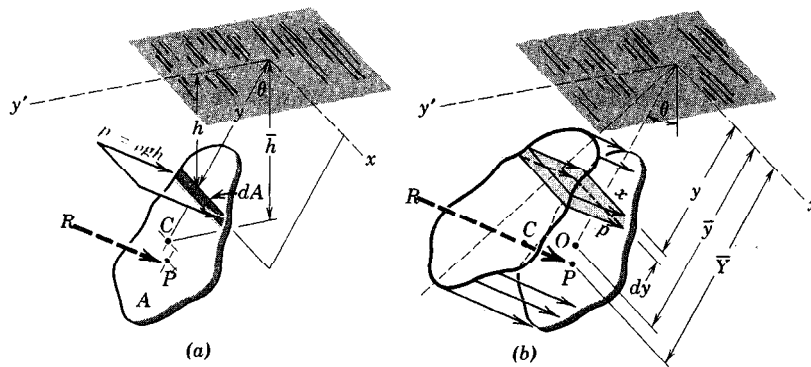


Figura 64

De la ecuación 41 se ve que la altura media del cilindro truncado es la presión media $\gamma \bar{h}$ que existe a una profundidad correspondiente al centroide O de la superficie sometida a presión. En los problemas en que no se vea fácilmente el centroide O o el volumen V , se obtendrá R por integración directa. Así,

$$R = \int dR = \int p \, dA = \int \gamma h x \, dy,$$

donde, para integrar, la profundidad h y la longitud x de la faja horizontal de área diferencial se deben poner en función de y .

El segundo requisito del análisis de la presión del fluido es la determinación de la posición de la fuerza resultante a fin de tener en cuenta los momentos de las fuerzas de presión. Utilizando el principio de los momentos, tomando como eje de momentos el eje x de la figura 64b, se tiene

$$R\bar{Y} = \int y \, dR \quad \text{o sea} \quad \bar{Y} = \frac{\int y \, dV}{V}. \quad (42)$$

Esta segunda relación satisface la definición de la coordenada \bar{Y} del centroide del volumen V , y se concluye, por tanto, que la resultante R pasa por el centroide del volumen descrito por el área de la placa como base y la presión linealmente variable como altura. El punto P de la placa al que hay que aplicar R es el *centro de presión*. Téngase en cuenta que el centro de presión P y el centroide de la superficie plana O no son un mismo punto.

Podemos escribir otra expresión de \bar{Y} que contiene el llamado *momento de inercia* * de la superficie. Sustituyendo en la expresión del principio de los momentos $R = \gamma \bar{h}A$, $dR = \gamma h \, dA$, $\bar{h} = \bar{y} \cos \theta$, $h = y \cos \theta$, la expresión $R\bar{Y} = \int y \, dR$ nos da

$$\bar{Y} = \frac{\int y^2 \, dA}{\bar{y}A} \quad \text{o sea} \quad \bar{Y} = \frac{I_x}{\bar{y}A} \quad (43)$$

donde I_x es el momento de inercia $\int y^2 \, dA$ de la superficie respecto al eje x paralelo en la superficie del líquido. El momento de inercia de la superficie puede escribirse en la forma $I_x = k_x^2 A$ donde k_x es el llamado *radio de giro* de la superficie respecto al eje x . Efectuando esta sustitución, la ecuación 43 podrá escribirse en la forma

$$\bar{Y} = \frac{k_x^2}{\bar{y}}. \quad (43a)$$

* Los momentos de inercia de superficies se tratan extensamente en el Capítulo 8.

La utilización de las ecuaciones 43 exige el conocimiento de las propiedades de los momentos de inercia de superficies. Como en este momento no se supone que el lector posea dicho conocimiento, no insistiremos en el estudio de las ecuaciones 43.

Al tener en cuenta el momento resultante respecto a un eje paralelo a la placa de las fuerzas de presión que sobre ella se ejercen, la integración directa resulta a menudo tan inmediata como la aplicación de las ecuaciones 42 ó 43. Así, el momento resultante M de las fuerzas de presión respecto, por ejemplo, al eje x es

$$M = \int y dR = \int y \gamma h x dy$$

y, de nuevo, para realizar la integración, deberán ponerse en función de y la profundidad h y la longitud x de la faja horizontal de área diferencial.

Problemas tipo

5/107. Una placa rectangular, representada por su sección vertical AB , tiene una altura de 4 m y una anchura de 6 m (normal al plano del papel) y bloquea el extremo de un canal de agua dulce de 3 m de profundidad. La placa está engoznada a un eje horizontal dirigido según su borde superior que pasa por A y está impedida de abrirse por el obstáculo fijo B que se apoya horizontalmente contra el borde inferior de la placa. Calcular la fuerza B que el obstáculo ejerce contra la placa.

Solución. Se muestra en sección el diagrama de sólido libre de la placa, el cual incluye las componentes vertical y horizontal de la fuerza en A , el peso W no especificado, la fuerza horizontal incógnita B y la resultante R de la distribución triangular de la presión contra la cara vertical.

El peso específico del agua dulce es $\gamma = 1000 \text{ kp/m}^3$ con lo que la presión media será

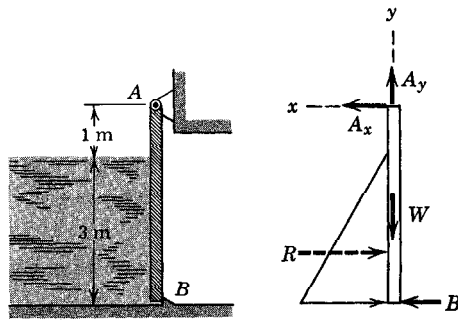
$$[p_{\text{med}} = \gamma \bar{h}] \quad p_{\text{med}} = 1000\left(\frac{3}{2}\right) = 1500 \text{ kp/m}^2$$

La resultante R de las fuerzas de presión contra la placa será

$$[R = p_{\text{med}} A] \quad R = (1500)(3)(6) = 27\,000 \text{ kp}$$

Esta fuerza pasa por el centroide de la distribución triangular de la presión, el cual está 1 m por encima de la base de la placa. La anulación del momento resultante respecto de A dará la fuerza desconocida B . Así

$$[\Sigma M_A = 0] \quad 3(27\,000) - 4B = 0, \quad B = 20\,250 \text{ kp} \quad \text{Resp.}$$



Problema 5/107

5/108. Determinar la fuerza resultante R ejercida por el agua sobre la superficie cilíndrica de la presa. El peso específico del agua es de 1000 kp/m^3 y la presa tiene una longitud normal al papel, de $b = 30 \text{ m}$.

Solución. Se aísla el bloque circular de agua $BCDO$ y se dibuja su diagrama para el sólido libre. La fuerza P_x es

$$P_x = \bar{\gamma} A = \frac{\gamma r}{2} br = \frac{1000 \times 3}{2} \times 30 \times 3 = 135\,000 \text{ kp}$$

El peso W del agua es

$$W = \gamma V = 1000 \times \frac{\pi(3)^2}{4} \times 30 = 212\,000 \text{ kp}$$

El equilibrio de la sección del agua requiere

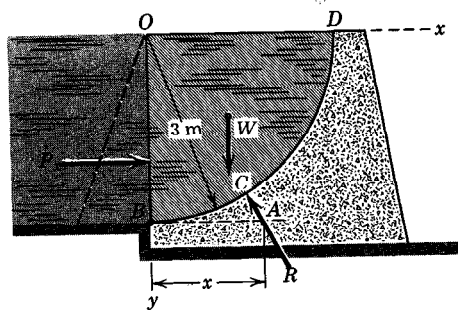
$$[\Sigma F_x = 0] \quad R_x = P_x = 135\,000 \text{ kp}$$

$$[\Sigma F_y = 0] \quad R_y = W = 212\,000 \text{ kp}$$

La fuerza resultante que el fluido ejerce sobre la presa es igual y opuesta a la que se indica actuando sobre el fluido y es

$$[R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}] \quad R = 251\,000 \text{ kp}$$

Resp.



Problema 5/108

Si se desea, puede localizarse gráficamente la coordenada x del punto A por el que pasa R . Del principio de los momentos puede hallarse x algebraicamente. Tomando B como centro de momentos, se tiene

$$P_x \frac{r}{3} + W \frac{4r}{3\pi} - R_y x = 0, \quad x = \frac{135000 \times 1 + 212000 \times \frac{12}{3\pi}}{212000} = 1,90 \text{ m.} \quad \text{Resp.}$$

Si se desea el punto C sobre la superficie, será necesario combinar la relación de momentos con la ecuación de la circunferencia.

5/109. Determinar la fuerza resultante R que se ejerce sobre el extremo semi-circular del tanque de agua de la figura cuando está completamente lleno. Expresar el resultado en función del radio r del extremo circular y del peso específico γ del agua.

Solución I. Puede hallarse R por integración directa de la manera siguiente

$$[R = \int dR] \quad R = \int p \, dA = \int \gamma y (2x \, dy) = 2\gamma \int_0^r y \sqrt{r^2 - y^2} \, dy, \quad \text{Resp.}$$

$$R = \frac{2}{3} \gamma r^3$$

Se determina la localización de R mediante el principio de los momentos que nos da

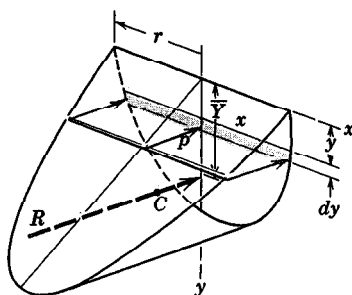
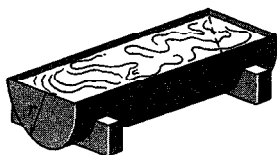
$$[R\bar{Y} = \int y \, dR] \quad \frac{2}{3} \gamma r^3 \bar{Y} = 2\gamma \int_0^r y^2 \sqrt{r^2 - y^2} \, dy.$$

Integrando resulta

$$\frac{2}{3} \gamma r^3 \bar{Y} = \frac{\gamma r^4}{4} \frac{\pi}{2} \quad y \quad \bar{Y} = \frac{3\pi}{16} r. \quad \text{Resp.}$$

Solución II. Utilizando directamente la ecuación 41 para hallar R se tiene

$$[R = \gamma \bar{h} A] \quad R = \gamma \frac{4r}{3\pi} \frac{\pi r^2}{2} = \frac{2}{3} \gamma r^3 \quad \text{Resp.}$$



Problema 5/109

La aplicación de la ecuación 42 para determinar el centroide C equivale a la integración hecha en la *solución 1*. También podría utilizarse la ecuación 43. Con la expresión $I_x = \frac{1}{8}\pi r^4$ del momento de inercia* de la superficie semicircular respecto al eje x , resulta,

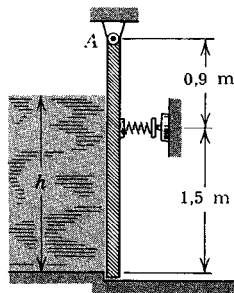
$$\left[\bar{y} = \frac{I_x}{\bar{y}A} \right]$$

$$\bar{y} = \frac{\pi r^4/8}{\frac{4r}{3\pi} \frac{\pi r^2}{2}} = \frac{3\pi}{16} r.$$

Resp.

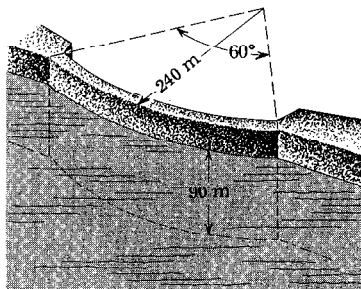
Problemas

5/110. La compuerta vertical accionada por resorte está engoznada por su borde superior A según un eje horizontal y cierra el extremo de un canal rectangular de agua dulce de 1,2 m de anchura (normal al plano del papel). Calcular la fuerza F que debe ejercer el resorte para limitar la profundidad del agua a $h = 1,8$ m. Resp. $F = 3888$ kp



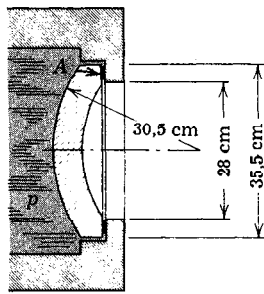
Problema 5/110

5/111. Una presa arqueada tiene la cara que recibe el agua de forma cilíndrica de 240 m de radio y subtendiendo un ángulo de 60° . Si el agua tiene una profundidad de 90 m, determinar la fuerza total P ejercida por el agua sobre la presa.



Problema 5/111

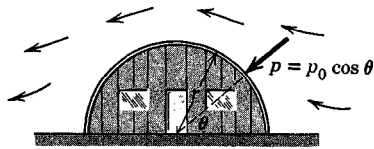
* Véase la tabla C4, Apéndice C.



Problema 5/112

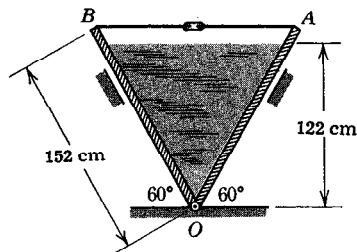
5/112. Uno de los problemas críticos del proyecto de vehículo para grandes profundidades acuáticas es dotarlos de ventanas que soporten grandes presiones hidrostáticas sin romperse ni presentar filtraciones. En la figura puede verse la sección de una ventana acrílica experimental con superficies esféricas puesta a prueba en una cámara de líquido a alta presión. Si se eleva la presión p hasta un nivel que simule el efecto de una inmersión a una profundidad de 915 m en agua salada, calcular la presión media σ soportada por el anillo de cierre A.

Resp. $\sigma = 248 \text{ kp/cm}^2$



Problema 5/113

5/113. El barracón representado en la figura está sometido a un viento horizontal y la presión p sobre el techo de sección circular puede aproximarse a $p_0 \cos \theta$. La presión es positiva a barlovento del barracón y negativa a sotavento. Determinar la fuerza cortante horizontal V sobre los cimientos por unidad de longitud de techo medida normalmente al papel.

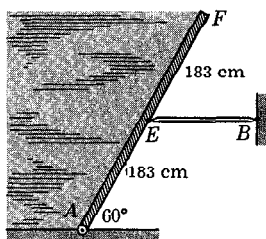


Problema 5/114

5/114. Las caras de un canjilón en V para agua dulce, representado en sección, están articuladas por su intersección común que pasa por O y unidas por un cable y un torniquete colocados cada 183 cm a lo largo del canjilón. Calcular la tensión T que soporta cada torniquete.

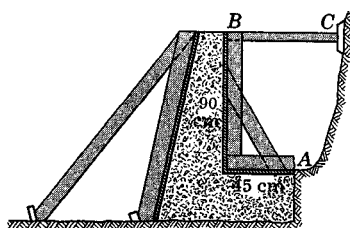
Resp. $T = 5470 \text{ N}$

5/115. Un canal de agua dulce de 9,14 m de anchura (normal al plano del papel) está bloqueado por una barrera rectangular, representada por su sección AEF . Cada 61 cm a lo largo de la anchura del canal se colocan puntales soportantes horizontales BE . El peso de la barrera se supone pequeño frente a las otras fuerzas que actúan. Determinar la compresión C en cada puntal BE .



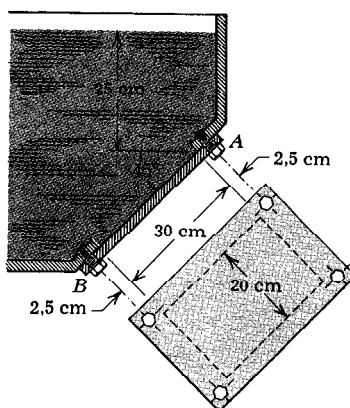
Problema 5/115

5/116. La forma de un encofrado de hormigón está articulada por su borde inferior A y apuntalada cada 120 cm por un puntal horizontal BC . Despreciar el peso de la forma y calcular la compresión C en cada puntal resultante del comportamiento líquido del hormigón fresco, el cual tiene una densidad de 2777 kg/m^3 . Resp. $C = 787,5 \text{ kp}$

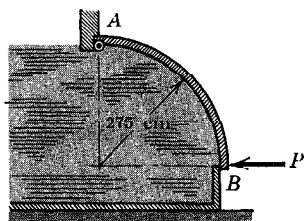


Problema 5/116

5/117. La tapa de la abertura de 20 por 30 cm del depósito está roblonada, siendo despreciables las tensiones iniciales en los roblones. Si se llena de mercurio el depósito hasta el nivel que se indica, calcular la tensión inducida en cada uno de los roblones A y B . El mercurio tiene un peso específico de 13 600 kp/m^3 .

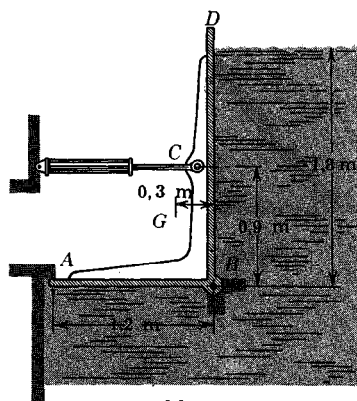


Problema 5/117



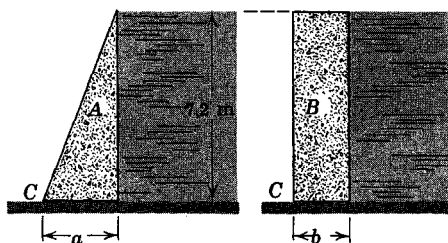
Problema 5/118

5/118. La compuerta cuartocircular AB , representada en sección, tiene una anchura horizontal de 183 cm (normal al plano del papel) y regula la circulación de agua dulce sobre el borde B . La compuerta tiene un peso total de 3084 kp y está articulada por su borde superior A . Calcular la fuerza mínima P necesaria para mantener cerrada la compuerta. Al localizar el centro de gravedad de la compuerta puede desprejarse su grosor frente a su radio de 275 cm. Resp. $P = 4912$ kp



Problema 5/119

5/119. En la figura puede verse la sección de una compuerta ABD que cierra una abertura de anchura 1,5 m en un canal de agua salada. Para el nivel de agua indicado, calcular la fuerza compresiva F del vástago del cilindro hidráulico que mantenga una fuerza de contacto de 300 kp por metro de anchura de compuerta a lo largo de la línea de contacto que pasa por A . La compuerta pesa 1700 kp y su centro de gravedad está en G .

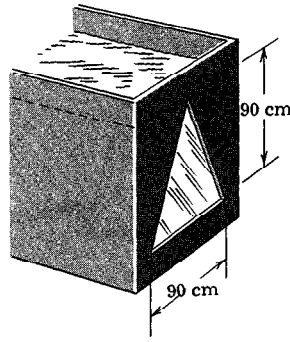


Problema 5/120

5/120. Se consideran las secciones triangular y rectangular para una pequeña presa de hormigón que ha de represar agua dulce. Desde el punto de vista de la resistencia al vuelco girando alrededor de C , ¿qué sección necesitará menos hormigón, y cuánto menos por metro de longitud de la presa? El hormigón pesa 2400 kg/m^3 .

Resp. La sección A pesa 18870 kg menos por metro

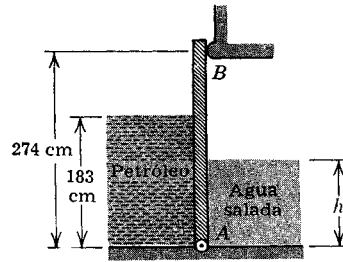
5/121. Determinar la fuerza total R que ejerce sobre la ventana triangular el agua dulce del depósito. El nivel de la superficie libre del agua coincide con el vértice superior de la ventana. Determinar también la distancia H desde R al nivel de la superficie libre.



Problema 5/121

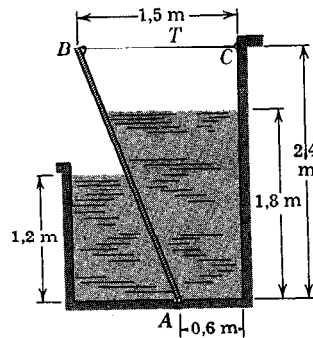
5/122. Una placa rectangular, representada de perfil, tiene una altura de 274 cm y una anchura de 244 cm (normal al papel) y separa depósitos de agua salada y petróleo. El petróleo tiene una densidad relativa al agua dulce de 0,85. Determinar la altura h que ha de alcanzar el agua para que sea nula la reacción en B .

Resp. $h = 172$ cm

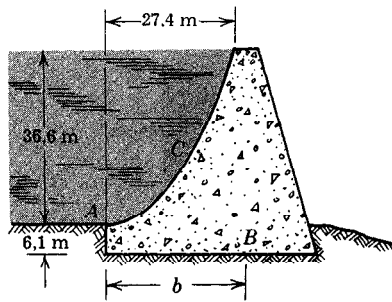


Problema 5, 122

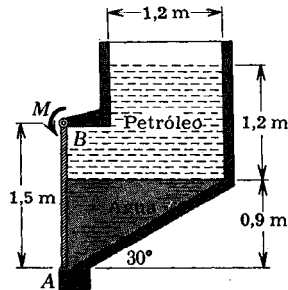
5/123. Una placa rectangular uniforme AB , representada en sección, pesa 1600 kg y separa los dos cuerpos de agua dulce en un depósito que tiene una anchura de 3 m (normal al plano de la figura). Calcular la tensión T del cable soportante.



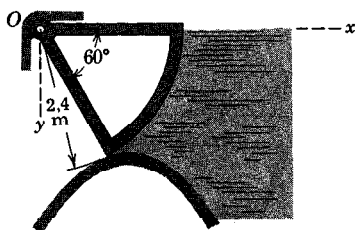
Problema 5/123



Problema 5/124



Problema 5/125



Problema 5/126

5/124. La cara del lado del agua dulce de una presa de hormigón tiene forma de parábola vertical con vértice en A. Determinar la posición b del punto B de la base por el que pasa la fuerza resultante de las que ejerce el agua sobre la cara C de la presa.

Resp. $b = 28,58 \text{ m}$

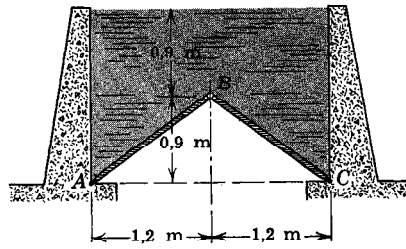
5/125. La compuerta AB es una placa rectangular de 280 kg que tiene 1,5 m de altura y 1,1 m de anchura y se utiliza para cerrar el canal de desagüe en la parte inferior de un depósito de petróleo. A consecuencia de la condensación en el depósito, se recoge agua dulce en la parte inferior del canal. Calcular el momento M respecto al eje del pasador en B necesario para cerrar la compuerta contra la acción de las fuerzas hidrostáticas del agua y del petróleo. La densidad relativa del petróleo es 0,85.

Resp. $M = 1816 \text{ m} \cdot \text{kp}$

5/126. Para regular la cantidad de agua que se vierte por encima de una presa se utiliza un aliviadero, cuya compuerta es de sección cilíndrica (v. fig.). La compuerta pesa 7500 kg y tiene una longitud normal al papel de 5,4 m. Aplicando un par de fuerzas al eje O de la compuerta se regula su posición angular. Determinar, para la posición indicada, las componentes horizontal F_x y vertical F_y de la fuerza total ejercida por el eje sobre sus cojinetes en O. Determinar también el efecto de la presión del fluido mediante integración directa sobre la superficie cilíndrica.

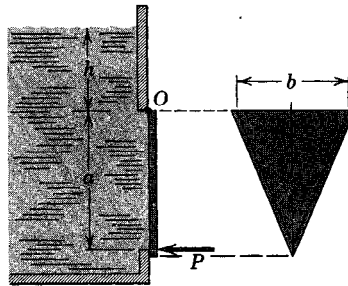
5/127. El fondo de un canal de agua, representado en sección en la figura, consta de dos placas uniformes rectangulares AB y BC , cada una de las cuales pesa 1500 kg y que están articuladas a lo largo de su eje común B y también lo están a la base del canal fijo a lo largo de sus bordes inferiores A y C . La longitud del canal es de 6 m medida perpendicularmente al plano del papel. Determinar la fuerza P por metro de longitud del canal que ejerce cada placa sobre el gozne en B .

Resp. $P = 1400 \text{ kp/m}$



Problema 5/127

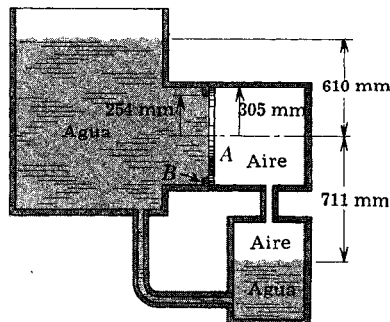
5/128. Una placa plana cierra una abertura triangular existente en la pared vertical de un depósito que contiene un líquido de peso específico γ . La placa está articulada por el borde superior O del triángulo. Determinar la fuerza P requerida para cerrar la compuerta venciendo la presión del líquido.



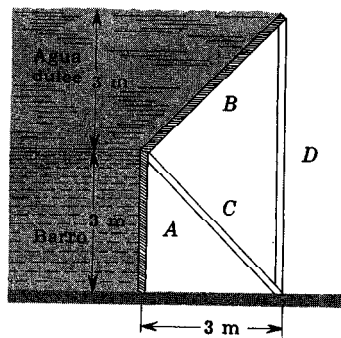
Problema 5/128

5/129. Un disco circular A oprime una empaquetadura situada alrededor de la pestaña B y separa herméticamente el espacio de aire del espacio de agua en el paso circular de conexión. Calcular, para los niveles de la superficie libre del agua que se indican, la presión media p que se ejerce sobre la empaquetadura cuyos diámetros exterior e interior son, 61 cm y 51 cm , respectivamente. La parte alta del depósito de agua está abierta a la atmósfera libre.

Resp. $p = 28,8 \times 10^3 \text{ N/m}^2$



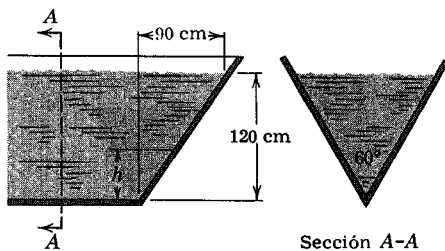
Problema 5/129



Problema 5/130

◀5/130. Una presa está constituida por las barreras planas A y B de poco peso. Cada 3 m de longitud de la presa se colocan riostras como las C y D. Una muestra del barro pesó 1600 kg/m^3 . Determinar la compresión en C y D. Todas las articulaciones pueden considerarse como goznes.

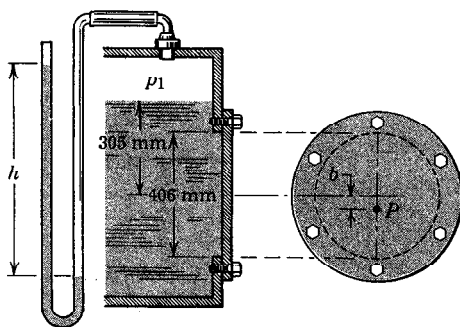
Resp. $C = 49\,000 \text{ kp}$, $D = 9000 \text{ kp}$



Problema 5/131

◀5/131. En el canal de sección triangular de la figura se fija la placa triangular inclinada A. Calcular la resultante R de las fuerzas ejercidas sobre A por el agua y la altura h del punto de A sobre el que se ejerce.

Resp. $R = 437 \text{ kp}$, $h = 60 \text{ cm}$



Problema 5/132

◀5/132. El tanque cerrado contiene agua dulce hasta el nivel que se indica. Se insufla aire en el tanque hasta que el manómetro abierto en U presente una diferencia de alturas entre sus dos ramas de agua igual a 533 mm. Determinar la fuerza total R originada por la presión hidrostática que se ejerce sobre la tapa que cierra la abertura de 406 mm de diámetro. Hallar también la distancia b, por debajo del eje de la tapa, a que se encuentra el centro de presión P.

Resp. $R = 109 \text{ kp}$, $b = 12,3 \text{ mm}$

30. Empuje. El principio del empuje, cuyo descubrimiento se atribuye a ARQUÍMEDES, puede explicarse de la manera siguiente para todo fluido en equilibrio, ya sea gaseoso o líquido. Consideremos una porción del fluido definida por una superficie cerrada imaginaria, tal como la dibujada con trazos en la figura 65a. Si pudiera extraerse de su interior el fluido y éste fuera sustituido por las fuerzas que ejercía sobre el contorno de la cavidad, figura 65b, no se perturbaría en absoluto el equilibrio del fluido que la rodea. Además, el diagrama para el sólido libre de la porción de fluido antes de ser extraído, figura 65c, indica que la resultante de las fuerzas de presión distribuidas sobre su superficie debe ser igual y opuesta a su peso P y debe pasar por el centro de gravedad del elemento fluido. Si se sustituye el elemento por un cuerpo de iguales dimensiones, las fuerzas superficiales que actúan sobre el cuerpo, mantenido en esta posición, serán iguales que las que actuaban sobre el elemento fluido. Así, la fuerza resultante que se ejerce sobre la superficie de un objeto sumergido en un fluido es igual y opuesta al peso del fluido desalojado y pasa por el centro de gravedad de dicho fluido desalojado. La *fuerza resultante* es la fuerza de *empuje*. En el caso de un líquido cuyo peso específico sea constante, el centro de gravedad del líquido desalojado coincidirá con el centroide del volumen desalojado.

De la discusión anterior se deduce que, cuando el peso específico de un objeto es menor que el del fluido en que se halla sumergido, habrá un desequilibrio de fuerzas según la vertical, y el objeto subirá. El objeto sigue subiendo hasta alcanzar la superficie del fluido y entonces queda en reposo en una posición de equilibrio, si se supone que el peso específico del nuevo fluido existente sobre la superficie es menor que el peso específico del objeto. En el caso de la superficie límite entre un líquido y un gas, tales como agua y aire, el efecto de la presión del gas sobre la porción del objeto flotante que emerge del líquido queda equilibrada por la presión adicional en el líquido debido a la acción del gas sobre su superficie.

Uno de los problemas más importantes en los que interviene el empuje es la determinación de la estabilidad de los cuerpos flotantes. Podemos ilustrar esta cuestión considerando el casco de un buque representado en sección transversal en una posición derecha en la figura 66a. El punto B es el centroide del volumen desalojado y recibe el nombre de *centro de empuje*. La resultante de las fuerzas ejercidas sobre el casco por el agua es la fuerza resultante de empuje F . La fuerza F pasa por E , y es igual y opuesta al peso P del buque. Si se inclina al buque un ángulo α , figura 66b, varía la forma del volumen desalojado y el centro de empuje pasa a ocupar una nueva posición E' . El punto de intersección de la vertical que pasa por E' con el plano de simetría del buque recibe el nombre de *metacentro* * M , y la distancia h por encima del centro de gravedad G entre este punto y M se conoce con el nombre de *altura metacéntrica*. Para la mayoría de las formas de cascos se encuentra que la altura

* Más correctamente, *metacentro transversal*, para distinguirlo del *longitudinal* que tiene lugar al inclinar o sumergir uno de los extremos del barco.

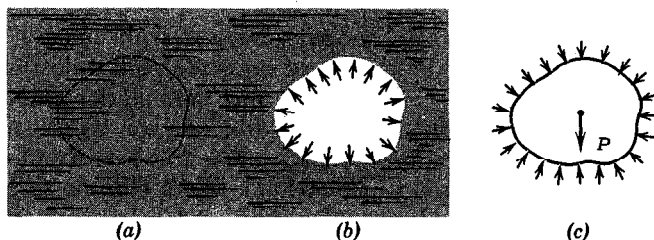


Figura 65

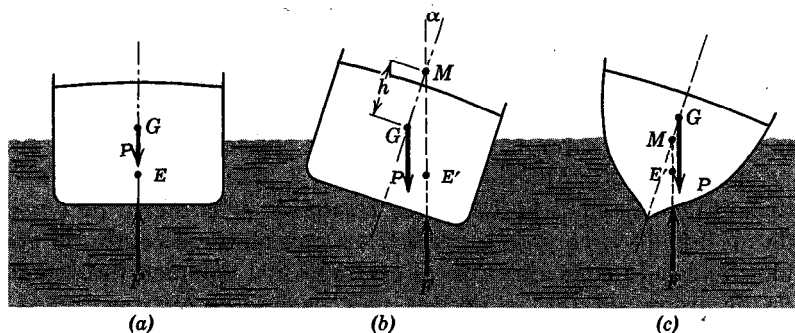


Figura 66

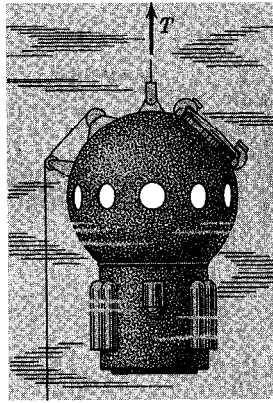
metacéntrica permanece prácticamente constante para ángulos de inclinación de hasta 20° . Cuando M se halla por encima de G , como en la figura 66b, existe claramente un par adrizante que tiende a llevar el buque a su posición inicial. El momento de este par, para todo ángulo de inclinación, constituye una medida de la estabilidad del buque. Si M se hallara por debajo de G , como ocurre en el casco de la forma indicada en la figura 66c, el momento que acompaña un giro cualquiera es de sentido tal que tiende a hacer aumentar el ángulo de inclinación. Esta es, evidentemente, una condición de inestabilidad que deberá evitarse en todo diseño de buques.

Problemas

5/133. Un globo piloto de los empleados para registrar la velocidad y dirección del viento tiene, deshinchado, un peso de 340 g. Si se infla con 0,26 kg de helio y ejerce una fuerza ascensional de 0,50 kp sobre su amarra antes de soltarlo, determinar el diámetro d del globo esférico. La densidad del aire es 1,20 g/litro.

Resp. $d = 1,19$ m

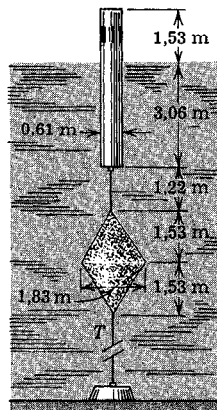
5/134. La cámara sumergible tiene un peso total fuera del agua de 7800 kp incluido el personal, el equipo y el lastre. Cuando se hace descender la cámara a una profundidad de 1200 m en el océano, la tensión del cable es de 900 kp. Calcular el volumen total V que desplaza la cámara.



Problema 5/134

5/135. La baliza consiste en un cilindro cerrado de acero que pesa 816 kp. Está sujeta a una boya estabilizadora sumergida constituida por dos cáscaras cónicas soldadas que forman una unidad cerrada que pesa 998 kp. Calcular la tensión T del cable inferior que mantiene las dos boyas en agua dulce en las posiciones indicadas.

Resp. $T = 1740$ kp

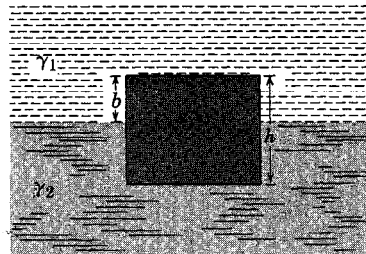


Problema 5/135

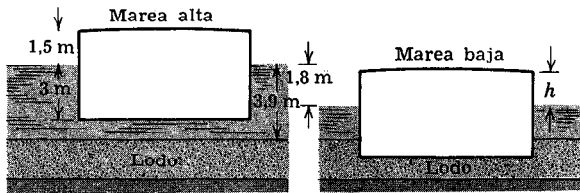
5/136. La densidad del hielo es de $0,90 \text{ g/cm}^3$. Determinar la razón n de la profundidad por debajo del agua a la altura por encima de ella de un témpano de forma rectangular que flote en agua salada (peso específico 1025 kp/m^3).

5/137. El bloque homogéneo de peso específico γ flota entre dos líquidos de pesos específicos $\gamma_1 < \gamma$ y $\gamma_2 > \gamma$. Determinar una expresión de la distancia b que emerge el bloque sobre el líquido inferior.

Resp. $b = h \frac{\gamma_2 - \gamma}{\gamma_2 - \gamma_1}$



Problema 5/137

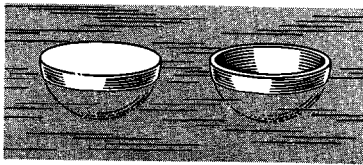


Problema 5/138

5/138. La gabarra cargada de forma rectangular tiene una altura de francobordo de 1,5 m y un calado de 3 m cuando flota en agua salada con marea alta. Cuando el nivel del agua baja 1,8 m al pasar a marea baja, la gabarra penetra parcialmente en el lodo blando que cubre el fondo del puerto. El lodo tiene un peso específico de $1,4 \text{ g/cm}^3$ y se comporta como un líquido. Determinar la altura h de francobordo en la marea baja.

5/139. Una cadena de acero de diámetro nominal de cuerpo 6 mm pesa 0,912 kp por metro de longitud y tiene una resistencia a la rotura de 13,5 kN. ¿Qué longitud h de cadena puede hacerse descender en una parte profunda del océano antes de que se rompa la cadena bajo la acción de su propio peso?

Resp. $h = 1700 \text{ m}$

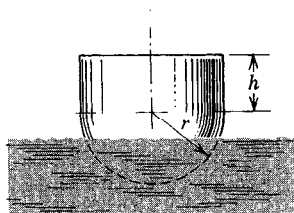


Problema 5/140

5/140. Demostrar que tanto el hemisferio macizo homogéneo como la cáscara semiesférica flotan con estabilidad. Si ambos cuerpos tuviesen el mismo radio y el mismo peso total, ¿cuál sería menos estable?

5/141. El cuerpo flotante macizo está compuesto de una semiesfera y un cilindro de revolución de radios iguales a r . Si el objeto flota con el centro del hemisferio por encima de la superficie del agua, determinar la altura máxima h que puede tener el cilindro para flotar en la posición representada en la figura.

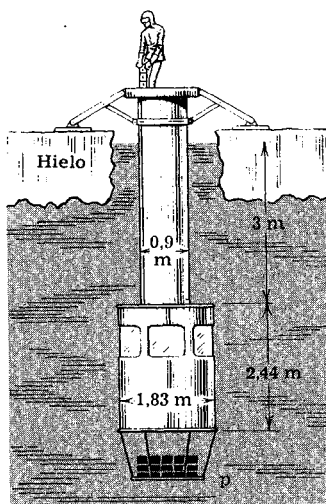
Resp. $h = r/\sqrt{2}$



Problema 5/141

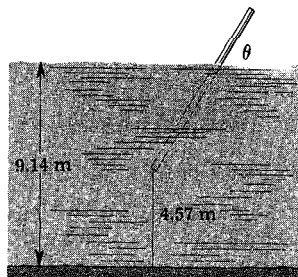
5/142. Una estructura destinada a la observación de la vida marina bajo el hielo en aguas polares consiste en una cámara cilíndrica de visión unida a la superficie por el árbol cilíndrico abierto por su parte superior a fin de facilitar la entrada y la salida. El bastidor bajo la cámara contiene el lastre. Para asegurar una condición estable de la estructura, es necesario que sus patas se apoyen en el hielo con una fuerza que sea al menos el 15 % de la fuerza de empuje total de la estructura sumergida. Si la estructura menos el lastre tiene un peso de 5715 kp fuera del agua, calcular el peso p que ha de tener el lastre de plomo. El peso específico del plomo es de 11370 kp/m³.

Resp. $p = 4680$ kp

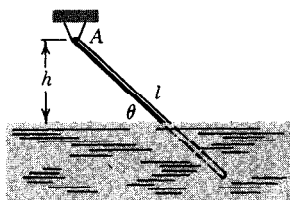


Problema 5/142

5/143. Una boya que tiene forma de poste uniforme de longitud 7,32 m y diámetro 20,32 cm, pesa 181 kp y está sujeta por su parte inferior al fondo de un lago de agua dulce mediante un cable de 4,57 m. Si la profundidad del agua es de 9,14 m, calcular el ángulo θ que formará el poste con la horizontal.



Problema 5/143



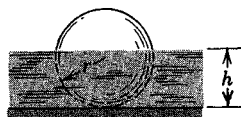
Problema 5/144

5/144. Un extremo de un poste uniforme de longitud l y peso específico γ_1 está colgando de un punto situado a una altura h sobre la superficie de un líquido de peso específico γ_2 . Hallar el ángulo θ que forma el poste con la superficie libre del líquido. Suponer que $\gamma_2 > \gamma_1$.

$$\text{Resp. } \theta = \arcsen \left(\frac{h}{l} \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_2 - \gamma_1}} \right)$$

5/145. Un petrolero de la Armada que estaba anclado en agua dulce pasa a un fondeadero en agua salada donde lo cargan con 400 m^3 de fuel oil (densidad relativa 0,88). El calado del buque es lo mismo en agua salada que lo que marcaba en agua dulce antes de ser cargado. Calcular el desplazamiento final P (peso total) del buque en toneladas métricas.

$$\text{Resp. } P = 12\,085 \text{ Tm}$$



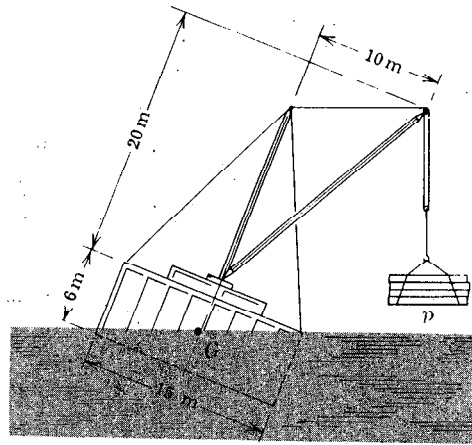
Problema 5/146

5/146. Una esfera maciza homogénea de peso específico γ_e se apoya sobre el fondo de un depósito que contiene un líquido de peso γ_l que es mayor que γ_e . Al llenar el depósito, se alcanza una altura de líquido h a la cual la esfera empieza a flotar. Determinar la relación existente entre h , r y γ_e/γ_l que define esta altura de líquido.

$$\text{Resp. } \frac{\gamma_e}{\gamma_l} = \frac{1}{4} \left(\frac{h}{r} \right)^2 \left(3 - \frac{h}{r} \right)$$

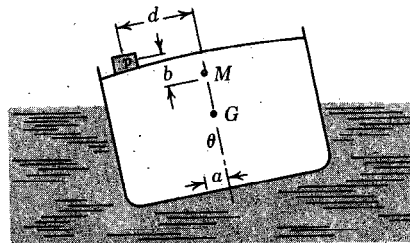
◀5/147. La grúa flotante está montada sobre una gabarra de proporciones rectangulares de 6 m por 15 m en toda su eslora de 10 metros. Si su calado y escora máximos en agua de mar están representados por la posición indicada, determinar la máxima carga p que puede manejar la gabarra sin peligro con el puntal abierto 10 m del palo. Hallar también el desplazamiento en toneladas de la gabarra sin el peso, sabiendo que la distribución de maquinaria y lastres sitúa el centro de gravedad G de la gabarra menos el peso p en el centro del casco.

Resp. $p = 192 \text{ Tm}$
 $D = 1662 \text{ Tm}$



Problema 5/147

◀5/148. Resulta difícil determinar de manera precisa la posición vertical del centro de gravedad G de un buque mediante el cálculo. Se obtiene más fácilmente en forma experimental inclinando el buque cargado. Con referencia a la figura, se coloca un peso exterior p a una distancia d del plano de simetría y se mide el ángulo de escora θ con una plomada. Se conocen el desplazamiento del buque y la posición del metacentro M . Calcular la altura metacéntrica



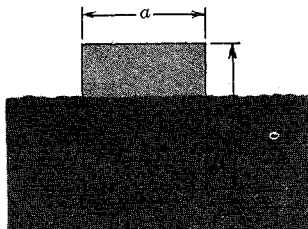
Problema 5/148

\overline{GM} de un buque de 12 000 toneladas inclinado por una carga de 27 toneladas situada a 7,8 m del plano de simetría, sabiendo que una plomada de 6,00 m se desvía una distancia $a = 20 \text{ cm}$. El peso p se halla a una distancia $b = 1,80 \text{ m}$ por encima de M .

Resp. $\overline{GM} = 53 \text{ cm}$

◀ 5/149. Un globo esférico está construido con un material que se estira en proporción a la fuerza que se aplica. Como el estiramiento de un elemento cualquiera depende directamente de la longitud inicial y de la fuerza que se ejerce, podremos escribir la ecuación $u = Krp$, donde u es el incremento de radio del globo, r es el radio del globo sin dilatar, p es la presión (manométrica) interior y K es la constante de proporcionalidad. Al ir llenando el globo con un gas, como el helio, a presión, la esfera se dilata y origina un mayor empuje en el aire. Al mismo tiempo, al inyectar más gas, aumenta el peso del globo. Hallar la presión p para la cual el globo tiene mayor fuerza ascensional. El peso específico del aire es γ_a y el del gas es $\gamma_g = k(p + p_0)$ para temperatura constante, donde k es una constante y p_0 la presión atmosférica.

$$\text{Resp. } p = \frac{1}{4} \left(\frac{3\gamma_a}{k} - \frac{1}{K} - 3p_0 \right)$$



Problema 5/150

◀ Determinar el cociente mínimo entre a y b para que tenga estabilidad el bloque rectangular de peso específico γ_b para ángulos de inclinación muy pequeños. El peso específico del líquido es γ_l .

$$\text{Resp. } \frac{a}{b} = \sqrt{6 \frac{\gamma_b}{\gamma_l} \left(1 - \frac{\gamma_b}{\gamma_l} \right)}$$

31. Equilibrio de esfuerzos interiores. En varios apartados anteriores de este capítulo se ha prestado atención al equilibrio de cuerpos sometidos a una variación continua de las fuerzas en su región de aplicación. La variación de la tensión en un cable flexible, la variación de la fuerza cortante y del momento flector en una viga y la variación de la presión de un fluido sobre la superficie de un objeto sumergido en él se han descrito por medio

del mismo procedimiento básico, el cual llevaba consigo el aislamiento de un elemento diferencial del cuerpo en cuestión para revelar las fuerzas y sus variaciones incrementales. En cada uno de los casos citados, la variación dependía de una sola dimensión. La tensión del cable variaba a lo largo de él; la fuerza cortante y el momento flector de la viga variaban a lo largo de ella; y la presión del fluido variaba con la dimensión vertical. En este apartado presentaremos la variación de las fuerzas interiores de un cuerpo respecto a las tres coordenadas espaciales. La descripción de dicha variación queda englobada bajo el título de *Mecánica de los medios continuos*. El que una cantidad dependa, como en este caso, de más de una variable independiente requiere la utilización de *derivadas parciales* y lleva a la solución de *ecuaciones en derivadas parciales*.

La Mecánica de los medios continuos constituye un tema superior de la Mecánica técnica y se hallará, por lo general, fuera del ámbito de este libro. Sin embargo, la introducción que vamos a dar a continuación está destinada a ilustrar la aplicación de los principios fundamentales de la Estática a problemas analíticos superiores.

Antes de escribir las ecuaciones del equilibrio, es necesario establecer el concepto y notación de los esfuerzos interiores. Consideremos un cuerpo cualquiera, figura 67a, en equilibrio bajo la acción de un sistema de fuerzas aplicadas exteriormente. Las fuerzas exteriores inducirán fuerzas interiores que se transmiten a través de una sección arbitraria cualquiera, tal como la sección N . El aislamiento de una de las dos partes del cuerpo, figura 67b, pone de manifiesto sobre dicha sección una distribución de fuerzas cuya dirección e intensidad varían de un punto a otro. La fuerza resultante que se ejerce sobre un pequeño elemento de superficie ΔA situado en el punto O de la sección es ΔF . El *esfuerzo* que se ejerce sobre el elemento es un vector definido como el límite

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}.$$

Así pues, el esfuerzo que se ejerce sobre una superficie dada en un punto dado es la intensidad de la fuerza y tiene las mismas unidades que la presión. N/m^2 ,

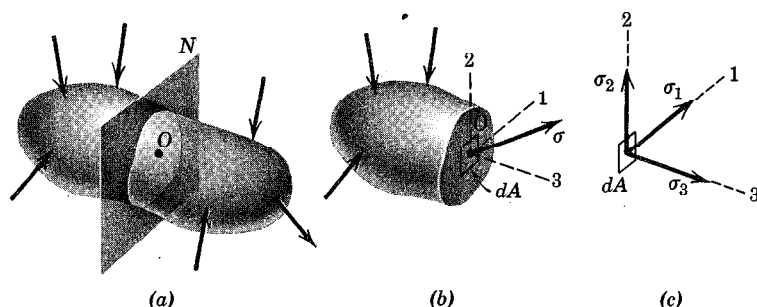


Figura 67

kp/cm², etc. Al tratar del esfuerzo conviene descomponer σ en tres componentes escalares según las direcciones normal y tangentes a la superficie dA , tal como se indica en la figura 67c. La componente σ_3 recibe el nombre de *esfuerzo normal* y puede ser una tensión (hacia afuera de la superficie) o una compresión (hacia la superficie). Se tomará positivo el esfuerzo normal cuando sea una tensión, y negativo cuando sea una compresión. Las componentes según las direcciones tangenciales, σ_1 y σ_2 reciben el nombre de *esfuerzos cortantes*. En contraste con la capacidad de un sólido de soportar esfuerzos cortantes, debe recordarse que el único esfuerzo que puede soportar un fluido en reposo es un esfuerzo normal o presión.

De la anterior descripción se ve que hay tres componentes del esfuerzo que se ejercen sobre una superficie dada en un punto cualquiera de un sólido sometido a esfuerzos. Existen aún otras dos superficies mutuamente ortogonales que pueden exponerse en el punto interior O de la figura 67b, tomando los planos 2-3 y 1-3 que pasan por O del plano de corte N. A cada una de estas otras superficies podrán asignarse otras tres componentes del esfuerzo, dando un total de nueve componentes del esfuerzo asociadas al punto O . Estas componentes, junto con sus sentidos positivos, son las representadas en la figura 68a ejerciéndose sobre tres superficies perpendiculares de un bloque rectangular elemental de materia. En relación con los sentidos coordinados, estas tres caras se llaman caras positivas del bloque elemental. Los esfuerzos positivos que se ejercen sobre las tres caras negativas ocultas del bloque son de sentidos opuestos a los que se ejercen sobre las caras positivas visibles. Esta condición la impone el principio de la acción y la reacción y se ilustra en la figura 68b para el caso de los esfuerzos normales σ_{xx} y σ_{yy} y los esfuerzos cortantes σ_{xy} y σ_{yx} . Para las restantes componentes del esfuerzo existen condiciones análogas.*

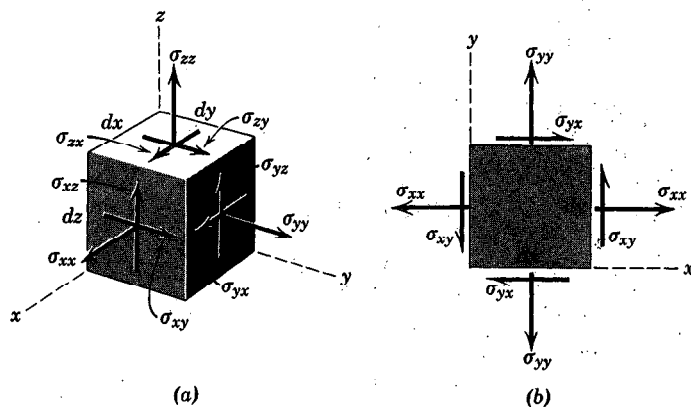


Figura 68

* Una notación empleada frecuentemente para las componentes de esfuerzo es σ_x , σ_y , σ_z para los esfuerzos normales y τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} para los esfuerzos cortantes.

Hay que tener cuidado especial en emplear un triedro directo como triedro de ejes de coordenadas y en la notación de los subíndices de los esfuerzos. El primer subíndice indica que el esfuerzo se ejerce sobre la superficie que es normal al eje coordenado correspondiente y el segundo subíndice indica la dirección del esfuerzo. Así σ_{xy} es un esfuerzo cortante que se ejerce sobre una cara normal a la dirección x y que está dirigido en la dirección y , en el sentido positivo para la cara positiva del elemento.

El estado de esfuerzo en un punto exige la especificación de nueve componentes del esfuerzo. Estas componentes del esfuerzo pueden representarse por la disposición

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (44)$$

conocida con el nombre de *tensor de los esfuerzos* $[T]$. Se observa que el primer subíndice determina la fila y el segundo la columna.

El tensor de los esfuerzos es un tensor de *segundo orden* con cada componente dependiente de dos direcciones en el espacio. Un vector es un tensor de *primer orden* con cada componente dependiente de una sola dirección en el espacio. Una cantidad escalar es un tensor de *orden cero* sin orientación espacial. Otras cantidades tensoriales de segundo orden de importancia en Mecánica son el *tensor de inercia*,* que se utiliza en la descripción del movimiento tridimensional de un cuerpo rígido, y el *tensor de las deformaciones*, que se utiliza junto con el tensor de los esfuerzos en el estudio de los cuerpos deformables.

El tensor de los esfuerzos halla su empleo en la transformación de las componentes del esfuerzo en un punto al cambiar de sistema de coordenadas. El estudio completo del tensor de los esfuerzos se sale del ámbito de este libro y sólo vamos a desarrollar una de sus propiedades particulares. La ecuación del equilibrio del bloque elemental de material representado en la figura 68b, relativa a los momentos respecto al eje z que pasa por el vértice inferior izquierdo del bloque exige que

$$(\sigma_{xy} dy dz) dx - (\sigma_{yx} dx dz) dy = 0.$$

Los demás esfuerzos que se ejercen sobre el elemento tienen contribución nula al momento. Los momentos de todas las fuerzas másicas, tales como las gravitatorias, son infinitésimos de orden superior al de los momentos de las fuerzas cortantes y por tanto desaparecen. Así pues, de la ecuación de momentos resulta que los dos esfuerzos cortantes son iguales y como para las demás componentes tangenciales tendríamos conclusiones análogas, resulta

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \quad \sigma_{xz} = \sigma_{zx}, \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy}. \quad (45)$$

* Véase el tomo de *Dinámica*, capítulo 8, apartado 41.

En virtud de estas igualdades, podrán permutarse los términos simétricos respecto a la diagonal principal σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} del tensor de los esfuerzos de la ecuación 44 y se dice que el tensor es *simétrico*.

Establecidos el concepto y la notación de los esfuerzos interiores, podremos escribir las ecuaciones del equilibrio para los esfuerzos en un punto. Para ilustrar la cuestión, examinemos una distribución continua bidimensional de esfuerzos en una placa de espesor unidad sometida a los esfuerzos σ_{xx} , σ_{yy} , y $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$. Las demás componentes del esfuerzo se toman nulas, con lo que se tiene un *sistema plano de esfuerzos*. De la placa cargada (fig. 69a) se corta un bloque elemental de dimensiones dx y dy que se aísla con su diagrama para sólido libre en la figura 69b (en la que se muestran esfuerzos en vez de fuerzas). En ella hay que tener en cuenta la variación del esfuerzo al cambiar las coordenadas y en el diagrama deberán ponerse de manifiesto estos incrementos de los esfuerzos. En el lugar definido por las coordenadas x e y en las caras negativas del elemento, se han representado los esfuerzos σ_{xx} , σ_{yy} , y σ_{xy} en sus sentidos positivos. Sobre las caras positivas del elemento, definidas por las coordenadas $x + dx$ e $y + dy$, los esfuerzos tendrán variaciones incrementales que deberán reflejar las variaciones por unidad de longitud respecto a las coordenadas. Por tanto, el esfuerzo normal según x en $x + dx$ será σ_{xx} más la variación de σ_{xx} por unidad de longitud según x , manteniendo y constante, multiplicada por la variación de x y viene dada por la expresión $\sigma_{xx} + (\partial\sigma_{xx}/\partial x) dx$. Aquí, la derivada parcial $\partial\sigma_{xx}/\partial x$ significa la variación de σ_{xx} por unidad de longitud en la dirección x , manteniendo y constante. Para los incrementos de las otras dos componentes del esfuerzo se escriben expresiones análogas que se indican sobre el bloque elemental en la figura 69b. Además de los esfuerzos que se ejercen sobre la superficie del elemento, pueden estar presentes fuerzas másicas que se ejerzan por toda la masa del cuerpo. Las cantidades X e Y representan la intensidad de las fuerzas másicas expresadas como fuerzas por unidad de volumen del material.

El equilibrio de las fuerzas en la dirección x exige

$$\left(\sigma_{xx} + \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} dx\right) dy - \sigma_{xx} dy + \left(\sigma_{xy} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} dy\right) dx - \sigma_{xy} dx + X dx dy = 0.$$

Esta ecuación y la ecuación análoga para la dirección y quedan, tras simplificación, en la forma

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} + X = 0 \quad y \quad \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} + Y = 0. \quad (46)$$

Las ecuaciones 46 son ecuaciones en derivadas parciales del equilibrio para un estado de esfuerzos plano expresado en coordenadas x - y . Estas ecuaciones de-

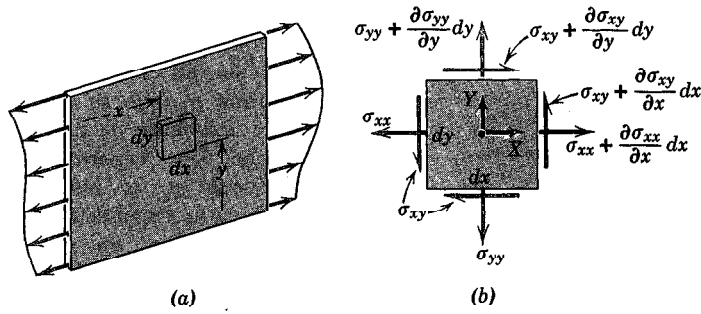


Figura 69

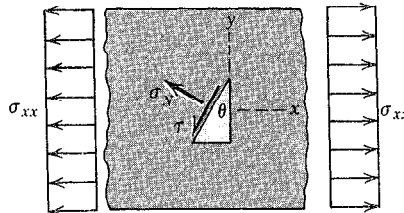
ben satisfacerse en todos los puntos de la placa. Son condiciones necesarias para la determinación de los esfuerzos pero, en general, no son suficientes. Para alcanzar la suficiencia habría que conocer las relaciones esfuerzo-deformación del material que se estudia y que se cumpliera una ecuación que exprese la compatibilidad entre las deformaciones lineales y las angulares. Estas relaciones adicionales y diversas soluciones de las ecuaciones 46 pueden hallarse en tratados de las teorías de la Elasticidad y de la Plasticidad.

Las relaciones de los esfuerzos presentadas en este apartado se desarrollan en coordenadas rectangulares que son las apropiadas a los problemas con contorno rectangular. Frecuentemente es más conveniente el empleo de coordenadas polares, cilíndricas o esféricas para la descripción de esfuerzos cuando uno de dichos sistemas o algún otro sistema de coordenadas ortogonales se ajuste mejor a los límites del cuerpo solicitado que se considera.

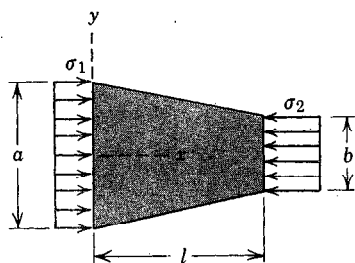
En los problemas que siguen se presentan ejemplos seleccionados de los requisitos de equilibrio para los esfuerzos en un medio continuo.

Problemas

5/151. Una placa plana está sometida a un campo uniforme de esfuerzos σ_{xx} . Escribir las expresiones del esfuerzo normal σ_N y del esfuerzo cortante τ que se ejercen sobre la cara de un elemento inclinado un ángulo θ respecto a la dirección y . Resp. $\sigma_N = \sigma_{xx} \cos^2 \theta$, $\tau = \frac{1}{2} \sigma_{xx} \sin 2\theta$



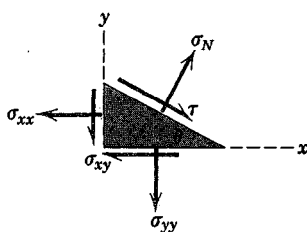
Problema 5/151



Problema 5/152

5/152. La placa plana en forma de trapecio se halla en equilibrio bajo la acción del esfuerzo de compresión uniforme σ_1 que se ejerce sobre su borde izquierdo y del σ_2 sobre el derecho. Un "experto" asegura que el esfuerzo σ_{xx} en una posición interior x varía linealmente desde σ_1 en $x = 0$ hasta σ_2 en $x = l$. También asegura la ausencia de esfuerzo cortante en la placa. Escribir la expresión supuesta de σ_{xx} y demostrar que el experto está equivocado.

5/153. Un cuerpo está sometido a un campo magnético que ejerce sobre él un par de momento $\mathbf{M} = iM_x + jM_y + kM_z$ por unidad de masa. Examinar de nuevo la relación entre las componentes de corrotadura σ_{xy} y σ_{yx} , σ_{xz} y σ_{zx} , σ_{yz} y σ_{zy} .



Problema 5/154

5/154. Deducir, para el caso de esfuerzos planos, la expresión del esfuerzo normal σ_N y del esfuerzo cortante τ que se ejercen sobre una superficie inclinada un ángulo θ respecto al eje x . Demostrar que σ_N es máximo o mínimo cuando $\tau = 0$. (Obsérvese la semejanza entre las ecuaciones resultantes y las desarrolladas en § 44 del capítulo 8 para momentos de inercia de superficies respecto a ejes inclinados.)

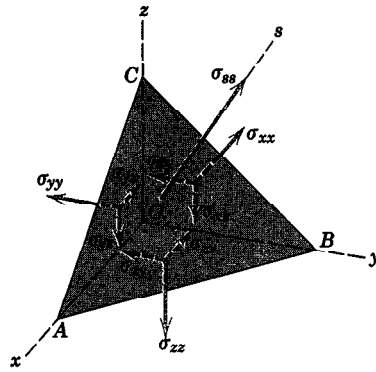
Resp.

$$\sigma_N = \sigma_{xx} \sin^2 \theta + \sigma_{yy} \cos^2 \theta + \sigma_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau = \frac{\sigma_{yy} - \sigma_{xx}}{2} \sin 2\theta - \sigma_{xy} \cos 2\theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{yy} - \sigma_{xx}} \text{ para } \sigma_N \text{ máx. o mín.}$$

◀5/155. Considerando el equilibrio del tetraedro elemental de un material sometido a esfuerzos, deducir la expresión del esfuerzo normal σ_{ss} que se ejerce sobre la cara inclinada ABC en función de las componentes rectangulares del esfuerzo en este punto. Los cosenos directores de la normal a ABC son l, m, n . En la figura no se han dibujado los esfuerzos cortantes en ABC para evitar confusión. (Sugerencia: Tomar como unidad el área de ABC .)



Problema 5/155

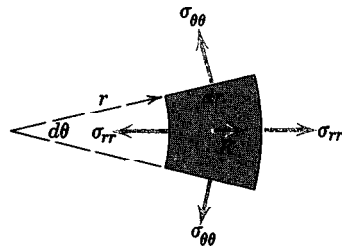
◀5/156. Desarrollar la deducción de la primera de las ecuaciones 46 del equilibrio en la dirección x para que contenga el caso general en tres dimensiones. Escribir, por inspección, las dos ecuaciones restantes del equilibrio. Despreciar las fuerzas másicas.

$$\text{Resp. } \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = 0$$

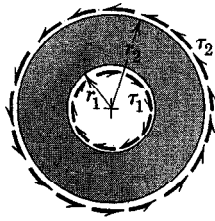
$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} = 0$$

◀5/157. Un disco circular gira con velocidad constante alrededor de su centro. A consecuencia de la simetría no hay esfuerzos cortantes en el disco, y tanto el esfuerzo radial σ_{rr} como el tangencial $\sigma_{\theta\theta}$ son funciones exclusivas de r . El elemento puede tratarse como cuerpo en equilibrio añadiendo una fuerza másica $R = \rho r \omega^2$ por unidad de volumen, donde ρ es la densidad y ω la velocidad angular del disco. Dibujar el diagrama para sólido libre del elemento poniendo de manifiesto la variación de σ_{rr} y deducir la ecuación diferencial para el "equilibrio" de los esfuerzos.



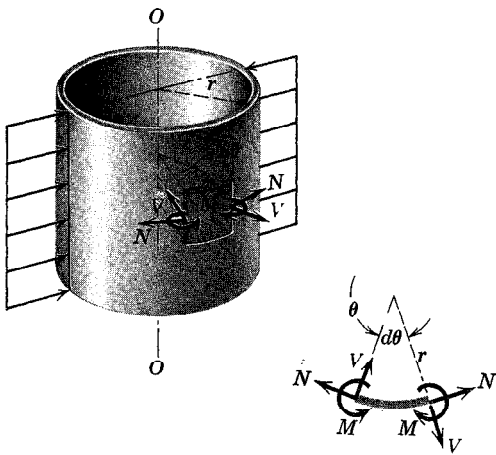
Problema 5/157

$$\text{Resp. } \frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho r \omega^2 = 0$$



Problema 5/158

◀ 5/158. El anillo plano está sometido a un esfuerzo cortante uniforme τ_1 en su borde interior y a un esfuerzo cortante uniforme τ_2 en su borde exterior para mantener el equilibrio. En estas condiciones de torsión no se desarrollan esfuerzos normales en el anillo. Deducir la ecuación diferencial para el equilibrio de un elemento del anillo e integrar la ecuación de manera que se obtenga una expresión para el esfuerzo cortante $\sigma_{r\theta}$ en función de r y del esfuerzo exterior τ_2 . Comparar este resultado con la relación existente entre τ_1 y τ_2 obtenida satisfaciendo el requisito de equilibrio del anillo en conjunto.



Problema 5/159

◀ 5/159. Una cáscara cilíndrica larga está cargada uniformemente a lo largo de dos generatrices diametralmente opuestas. Los esfuerzos resultantes en la capa que afectan al equilibrio en el plano transversal son funciones exclusivas de θ y constan de una fuerza normal N , una fuerza cortante V y un momento M , todo expresado por unidad de longitud de la sección de la capa. Dibujar el diagrama para sólido libre del elemento poniendo de manifiesto los incrementos de los esfuerzos en función de θ y deducir las tres ecuaciones diferenciales para el equilibrio del elemento.

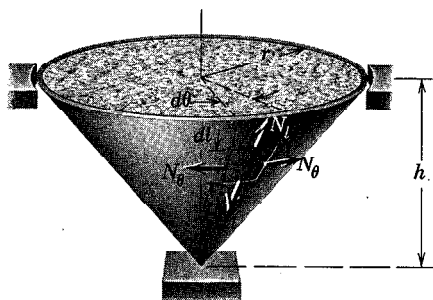
$$\text{Resp. } \frac{d^2 V}{d\theta^2} + V = 0,$$

$$\frac{d^2 N}{d\theta^2} + N = 0, \quad \frac{dM}{d\theta} + Vr = 0$$

◀ 5/160. La cáscara cónica delgada se llena de un líquido de peso específico γ y está en equilibrio sobre su vértice. La cáscara soporta fuerzas interiores por unidad de longitud de la sección de la cáscara las cuales se representan por N_l en la dirección de la generatriz del cono y por N_θ tangente a las secciones circulares horizontales. Despreciar el peso de la cáscara y deducir las ecuaciones de equilibrio para las direcciones a lo largo de un elemento del cono y normal a él.

$$\text{Resp. } \frac{dN_l}{dl} + \frac{N_l - N_\theta}{l} = 0,$$

$$N_\theta = \gamma r l \left(1 - \frac{l}{\sqrt{r^2 + h^2}} \right)$$

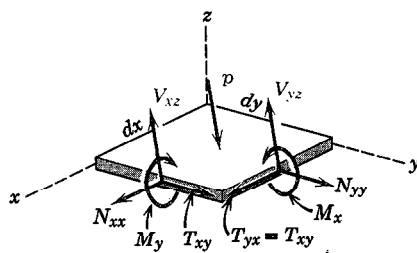


Problema 5/160

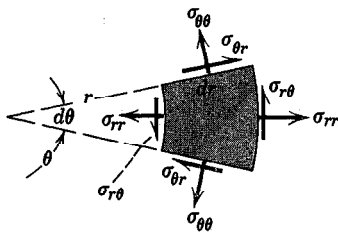
◀ 5/161. Un elemento diferencial rectangular de una placa plana soporta fuerzas flectoras, cortantes y normales. Se indican los sentidos positivos de la fuerza normal N , la fuerza cortante T contenida en el plano, la fuerza cortante V que sale del plano y del momento flector M , todo expresado por unidad de longitud de la sección. Adicionalmente, la placa está sometida a un esfuerzo normal de carga p sobre su superficie. Deducir las ecuaciones diferenciales para el equilibrio de los momentos respecto al eje x y de las fuerzas en la dirección x y de las fuerzas en la dirección z .

$$\text{Resp. } \frac{\partial M_x}{\partial y} + V_{yz} = 0$$

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial V_{xz}}{\partial x} = p$$



Problema 5/161

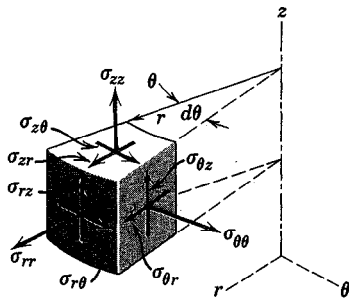


Problema 5/162

◀ 5/162. Deducir las ecuaciones diferenciales del equilibrio en coordenadas polares para el elemento de una placa sometida a un sistema plano de esfuerzos cualesquiera sin fuerzas másicas. En la figura puede verse la notación para los esfuerzos positivos.

Resp.
$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0$$



Problema 5/163

◀ 5/163. Deducir las ecuaciones diferenciales de equilibrio en coordenadas cilíndricas utilizando la notación indicada sobre el elemento para los esfuerzos positivos.

Resp.

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0$$

6 Rozamiento

32. Introducción. En los capítulos anteriores se ha supuesto casi siempre que las fuerzas de acción y reacción se ejercen normalmente a las superficies. Esta hipótesis caracteriza la interacción entre superficies lisas y se ilustró en el ejemplo 2 de la figura 27. Aun cuando en muchos casos esta hipótesis ideal introduce errores muy pequeños, existen muchos problemas en los que debe considerarse tanto la capacidad de las superficies en contacto de poder soportar fuerzas tangenciales como la de poder soportar fuerzas normales. Las fuerzas tangenciales generadas entre superficies en contacto se conocen con el nombre de fuerzas de rozamiento y se presentan, en mayor o menor grado, en todas las interacciones entre superficies reales. Siempre que exista una tendencia de una superficie a deslizarse sobre otra que esté en contacto con ella, las fuerzas de rozamiento que se desarrollan resultan tener siempre un sentido que se opone a dicha tendencia.

En algunos tipos de máquinas y en ciertos procesos, conviene reducir al mínimo el efecto retardador de las fuerzas de rozamiento. Por ejemplo, en los cojinetes de todos los tipos, destornilladores eléctricos, engranajes, circulación de fluidos por tuberías y en la propulsión de aviones y cohetes a través de la atmósfera. En otros casos, se procura aprovechar el rozamiento, como ocurre en los frenos, embragues, correas de transmisión y cuñas. Los vehículos con ruedas dependen del rozamiento tanto para arrancar como para detenerse y el simple caminar depende del rozamiento entre el zapato y el suelo. Las fuerzas de rozamiento están presentes en la Naturaleza en todas partes y existen de manera apreciable en todas las máquinas por elevada que sea la precisión con que se han construido o por muy lubricadas que estén. La máquina o el proceso en que se desprecie el rozamiento se dice que es *ideal*. Cuando se tiene en cuenta el rozamiento, la máquina o el proceso se dice que es *real*. En todos los casos reales en los que haya deslizamiento entre las partes, las fuerzas de rozamiento dan lugar a una pérdida de energía por disipación de ésta en forma de calor. Además de la generación de calor y de la consiguiente pérdida de energía, el rozamiento entre las superficies en contacto origina un desgaste que tiene lugar durante el período de movimiento relativo entre ellas.

33. Fenómenos de rozamiento. Existen varios tipos distintos de resistencia por rozamiento y vamos a describir brevemente cada uno de ellos antes de abordar en el apartado siguiente una explicación más detallada del tipo más común de rozamiento.

Rozamiento seco. El rozamiento seco se presenta cuando dos superficies no lubricadas de dos sólidos están en contacto deslizando o con tendencia a deslizar. Se desarrolla una fuerza de rozamiento tangente a las superficies de contacto tanto durante el intervalo de tiempo que lleva al deslizamiento inminente como cuando ya tiene lugar el deslizamiento. El sentido de la fuerza siempre es el opuesto al movimiento o al movimiento inminente. Este tipo de rozamiento se conoce también con el nombre de rozamiento de *Coulomb*. Los principios del rozamiento seco o de Coulomb se desarrollaron principalmente a partir de los experimentos realizados por COULOMB en 1781 y de los trabajos de MORIN entre 1831 y 1834. Aun cuando no se dispone de una teoría extensa del rozamiento seco, puede darse un modelo analítico que es suficiente para tratar la inmensa mayoría de problemas acerca del rozamiento seco. En el apartado 34 describiremos dicho modelo, el cual constituye la base de la mayor parte de este capítulo.

Rozamiento fluido. Se presenta el rozamiento fluido cuando se mueven a distinta velocidad capas contiguas de un fluido (líquido o gas). Este movimiento da lugar a fuerzas de rozamiento entre elementos fluidos y dichas fuerzas dependen de la velocidad relativa entre capas. Cuando no existe esa velocidad relativa, no habrá rozamiento fluido. Éste no sólo depende de los gradientes de velocidad en el interior del fluido, sino también de la viscosidad del fluido, la cual es una medida de su resistencia a la acción cortante entre capas fluidas. En la figura 70 se ilustran las fuerzas de rozamiento que acompañan a la acción viscosa en una circulación unidimensional, pudiéndose ver la sección transversal *AB* de una placa que se mueve con velocidad v_0 paralelamente a una superficie fija *C*. Las dos superficies están separadas por un fluido cuyas partículas se mueven en la dirección y sentido de v_0 . En este ejemplo, cada lámina o capa de fluido paralela a las superficies que le contienen, desliza sobre su capa adyacente sin mezclarse con las demás. Dicho flujo se llama *laminar*. En $y = 0$ el fluido se adhiere a la superficie *C* y no tiene velocidad alguna. En $y = b$ el fluido se adhiere a la superficie móvil y por tanto la velocidad del fluido es v_0 . Entre las dos superficies existe una variación continua de la velocidad v con la distancia y .

Para una capa de fluido de espesor dy , se necesitará un esfuerzo cortante τ para mantener entre las superficies una diferencia de velocidades dv . Este esfuerzo resulta ser proporcional al gradiente de velocidad, con lo que podemos escribir la relación

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} \quad (47)$$

A la cantidad μ se le da el nombre de *viscosidad absoluta* o *coeficiente de viscosidad* y representa el esfuerzo cortante por unidad de gradiente de velocidad. La unidad cegesimal de coeficiente de viscosidad es el *poise*, que es una (dyna)(s)/(cm²). Más corrientemente se emplea el *centipoise* que es su centésima parte.

Fluido	Temp. ° C	Coeficiente de viscosidad, μ , centipoises
Aire	20	0,018
Agua	20	1,000
Aceite lubricante		
SAE 10	15	100
SAE 30	15	400

La fuerza tangencial total que se ejerce sobre la superficie de la placa móvil debida al rozamiento fluido es τA donde τ es el esfuerzo cortante en la superficie de la placa y A es el área de la superficie en contacto con el fluido cortante. Si varía τ sobre la superficie, la fuerza se podrá expresar en la forma $\int \tau dA$.

Cuando sea irregular la circulación de un fluido y cuando se entremezcle atravesando los límites laminares, se dirá que la circulación es *turbulenta* y ya no será válida la ecuación 47. En gran parte de los problemas de movimiento de fluidos aparece la turbulencia.

El rozamiento fluido desempeña un papel importante en el proyecto y funcionamiento de cojinetes de todo tipo.

Los cojinetes funcionan frecuentemente con lubricación parcial en la cual las superficies no están separadas por una película completa. Este caso se conoce con el nombre de *lubricación límite* y representa una condición intermedia entre la del rozamiento seco y la del cojinete totalmente lubricado. Como es de suponer, resulta difícil obtener un modelo analítico fidedigno de este tipo de rozamiento y la información para el diseño provendrá principalmente de medidas experimentales.

El análisis del rozamiento fluido en gorriones y en los cojinetes totalmente lubricados, tanto con aceite como con gas, en la circulación en bombas centrífugas y en aviación, cohetes y naves espaciales, para mencionar unos pocos ejemplos, resulta fundamental para el diseño de estos elementos y sistemas. El tratamiento completo del rozamiento fluido se sale del ámbito de este libro y es preferible relacionarlo con un estudio directo de la mecánica de fluidos y de la lubricación.

Rozamiento por rodadura. El rozamiento por rodadura es una resistencia a la rodadura de un objeto circular. La rueda de la figura 71 transporta una

carga L sobre el eje y se aplica una fuerza P para originar la rodadura. Se han exagerado mucho las deformaciones de la rueda y de la superficie de apoyo. La distribución de la presión p sobre la zona de contacto es análoga a la indicada y la resultante R de esta distribución se ejercerá sobre un cierto punto A y pasará por el centro de la rueda en el equilibrio. La fuerza P necesaria para iniciar y mantener la rodadura puede hallarse igualando a cero los momentos de todas las fuerzas respecto de A . Se tiene así

$$P = \frac{a}{r} L = f_r L,$$

donde se toma igual a r el brazo de momento de P y a $f_r = a/r$ se le llama coeficiente de rozamiento por rodadura. El coeficiente f_r es el cociente entre la fuerza resistente y la carga normal y en este aspecto es análogo a los coeficientes de rozamiento estático y cinético. Por otra parte, en la interpretación de f_r no interviene ningún deslizamiento.

La cantidad a depende de muchos factores que son difíciles de cuantificar, por lo que no se dispone de una teoría extensa de la resistencia a la rodadura. Esta distancia a es función de las propiedades elásticas y plásticas de los materiales en presencia del radio de la rueda, de la velocidad de marcha y de la rugosidad de las superficies. Algunas pruebas indican que varía muy poco con el radio de la rueda y a menudo se toma a como independiente del radio de rodadura.

Rozamiento interno. El rozamiento interno se encuentra en todos los materiales sometidos a carga cíclica. En los materiales muy elásticos la recuperación de forma tiene lugar con muy poca pérdida de energía debida al rozamiento interno. Para materiales que tienen bajos límites de elasticidad y que sufren deformaciones plásticas apreciables durante el proceso de carga, la cantidad de rozamiento interno que acompaña a dicha deformación puede ser

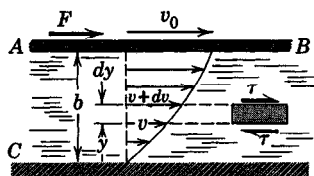


Figura 70

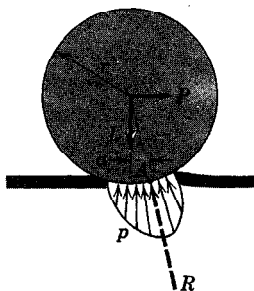


Figura 71

considerable. En la figura 72 puede verse un diagrama esfuerzo-deformación * de un elemento material que sufre una deformación plástica durante un ciclo completo. El retraso de recuperación de las deformaciones tensoras y compresoras da lugar al llamado lazo de *histéresis*. La magnitud del área encerrada en el lazo es una medida directa de la pérdida de energía por ciclo y por unidad de volumen, debida al rozamiento interno. Este tipo de rozamiento atenúa las vibraciones internas resultantes de choques sufridos y la atenuación se puede interpretar analíticamente en el estudio de las vibraciones amortiguadas.** El mecanismo del rozamiento interno está asociado con la acción de la deformación por deslizamiento (cizalladura) y para una descripción detallada de este mecanismo aconsejamos al alumno consulte los textos acerca de materiales.

34. Rozamiento seco. Vamos a explicar ahora con cierto detalle el mecanismo del rozamiento seco ayudándonos de un experimento muy sencillo. Consideremos un bloque sólido de peso P que repose sobre una superficie horizontal en la forma indicada en la figura 73a. Las superficies en contacto presentan una cierta rugosidad. El experimento consistirá en la aplicación de una fuerza horizontal T de tracción que variará con continuidad desde cero hasta un valor suficiente para poner el bloque en movimiento y comunicarle una velocidad apreciable. El diagrama para el sólido libre del bloque correspondiente a un valor cualquiera de T es el indicado en la figura 73b, y la fuerza tangencial de rozamiento que el plano ejerce sobre el bloque se señala con la letra F . Esta fuerza de rozamiento tendrá *siempre* la dirección del movimiento y sentido contrario a él o a la tendencia al movimiento del cuerpo sobre el cual actúa. También existe una fuerza normal N que en este caso es igual a P , y la fuerza resultante R que la superficie soporte ejerce sobre el bloque es la resultante de N y F . En la figura 73c puede verse una ampliación de las

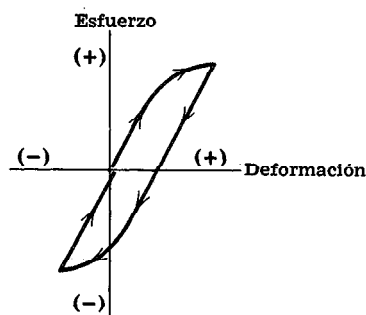


Figura 72

* La deformación se define como la variación en la longitud dividida por la longitud inicial de un elemento del material sometido a esfuerzo; es, por lo tanto, una medida de la intensidad de la alteración en algún punto.

** Ver *Dinámica*, Capítulo 9.

irregularidades de las superficies ásperas que ayudarán a comprender la acción mecánica del rozamiento. El soporte es, necesariamente, intermitente y se produce en las crestas sin pulimento. Las direcciones de las reacciones que actúan sobre el bloque R_1 , R_2 y R_3 , etc., dependerán no solamente de las irregularidades del perfil, sino también de la extensión de la soldadura local en cada punto de contacto. La fuerza normal total N no es más que la suma de las componentes normales de las reacciones y la fuerza total de rozamiento F es la suma de las componentes tangenciales de las reacciones. Cuando las superficies se hallan en movimiento relativo, los contactos se aproximan más a las crestas de las rugosidades, y las componentes tangenciales de las reacciones serán menores que cuando las superficies se hallan en reposo una respecto a otra. Esta consideración explica el conocido hecho de que la fuerza T necesaria para mantener el movimiento es menor que la requerida para poner en movimiento al bloque cuando las irregularidades casi están encajadas.

Supongamos ahora que se realiza el experimento mencionado y que se mide la fuerza de rozamiento F en función de T . En la figura 73d puede verse la relación experimental que se obtiene. Cuando T es nula, el equilibrio exige que no haya fuerza de rozamiento. Al crecer T , la fuerza de rozamiento deberá igualarse con T mientras el bloque no se deslice. Durante este período el bloque está en equilibrio y todas las fuerzas que actúan sobre el bloque deberán satisfacer las ecuaciones del equilibrio. Por último, se alcanza un valor de T que hace que el bloque se deslice en la dirección y sentido de la fuerza aplicada. En este mismo instante la fuerza de rozamiento disminuye brusca y ligeramente a un valor algo inferior. Se mantiene entonces esencialmente constante durante un cierto período y luego disminuye aún más al aumentar la velocidad.

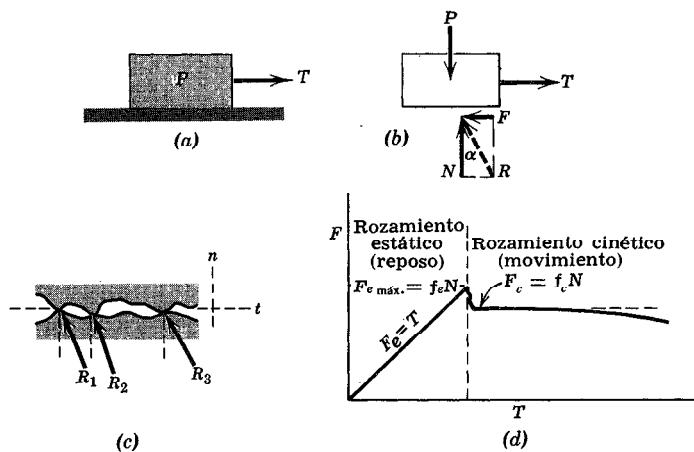


Figura 73

La zona hasta el punto de deslizamiento recibe el nombre de dominio de *rozamiento estático*, y el valor de la fuerza de rozamiento queda determinado por las *ecuaciones del equilibrio*. Esta fuerza puede tener un valor cualquiera entre cero y el valor máximo en el límite, inclusive. Para un par dado de superficies no pulidas, este valor máximo del rozamiento estático $F_{e\text{máx}}$ resulta ser proporcional a la fuerza normal N . Así,

$$F_{e\text{máx.}} = f_e N,$$

donde f_e es la constante de proporcionalidad que recibe el nombre de *coeficiente de rozamiento estático*. Téngase bien en cuenta que esta ecuación sólo describe el *valor máximo* o *límite* de la fuerza de rozamiento estático, pero no un valor inferior. Luego esta ecuación se aplicará *solamente* a casos en que se sepa que el movimiento es inminente.

Una vez se produce el deslizamiento, nos hallamos ante unas condiciones de *rozamiento cinético*. El rozamiento cinético (también llamado *dinámico*) entraña una fuerza algo menor que la fuerza máxima de rozamiento estático. La fuerza F_c de rozamiento cinético también resulta ser proporcional a la fuerza normal. Así,

$$F_c = f_c N,$$

donde f_c es el *coeficiente de rozamiento cinético*. Se deduce que f_c es algo menor que f_e . Al aumentar la velocidad del bloque, el coeficiente de rozamiento cinético disminuye algo y al alcanzar velocidades elevadas, puede hacerse apreciable el efecto lubricante de la capa de aire existente entre las superficies. Los coeficientes de rozamiento dependen en gran parte de la condición exacta de las superficies, así como de la velocidad y se hallan sujetos a un gran margen de incertidumbre.

Las dos ecuaciones para la fuerza de rozamiento suelen escribirse, simplemente, en la forma

►
$$F = fN. \quad (48)$$

Se tendrá conocimiento del problema cuando vayan implícitos o el rozamiento estático, o el rozamiento cinético con su correspondiente coeficiente estático o cinético. Insistimos en que muchos problemas llevan consigo una fuerza de rozamiento estático menor que la de valor máximo para movimiento inminente y, por tanto, en tal caso la ecuación del rozamiento no puede utilizarse.

En la figura 73c puede observarse que en el caso de superficies rugosas son más posibles ángulos grandes formados por las reacciones con la dirección de la normal que en el caso de superficies más lisas. Así pues, el coeficiente de rozamiento mide la rugosidad de un par de superficies en contacto e incorpora una propiedad geométrica de estos contornos ásperos. Carece de sentido hablar de coeficiente de rozamiento de una sola superficie.

La dirección de la resultante R medida, en la figura 73b, a partir de la dirección de N , viene determinada por $\operatorname{tg} \alpha = F/N$. Cuando la fuerza de rozamiento alcanza su valor estático máximo, el ángulo α alcanza su valor máximo ϕ_e . Así,

$$\operatorname{tg} \phi_e = f_e.$$

Al producirse el deslizamiento, el ángulo α tomará un valor ϕ_c correspondiente a la fuerza de rozamiento cinético. En forma análoga,

$$\operatorname{tg} \phi_c = f_c.$$

Es costumbre escribir, simplemente,

$$\operatorname{tg} \phi = f, \quad (49)$$

en donde la aplicación al caso estático límite o al caso cinético se infiere del problema que se deba resolver. Al ángulo ϕ_e se le llama *ángulo de rozamiento estático*, y al ángulo ϕ_c , *ángulo de rozamiento cinético*. Este ángulo ϕ define claramente, para cada caso, la posición límite de la reacción total R entre las dos superficies en contacto. Si el movimiento es inminente, R debe ser una generatriz de un cono recto de revolución de semiángulo en el vértice ϕ_e , según se indica en la figura 74. Si el movimiento no es inminente, R será interior al cono. Este cono de semiángulo ϕ_e recibe el nombre de *cono de rozamiento estático* y representa el lugar geométrico de las posiciones posibles de la reacción R para el movimiento inminente. Si se produce el movimiento, se aplica el ángulo de rozamiento cinético y la reacción deberá encontrarse sobre la superficie de un cono algo menor de semiángulo ϕ_c . Este cono es el de *rozamiento cinético*.

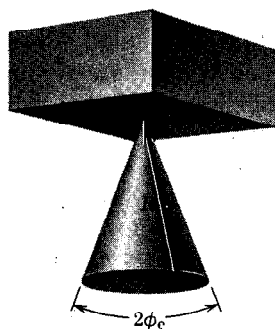


Figura 74

Una experimentación ulterior demuestra que la fuerza de rozamiento es prácticamente independiente de la superficie de contacto aparente o proyectada. El área de la superficie de contacto verdadera es mucho menor que el área proyectada, ya que la carga la soportan solamente los picos de las irregularidades de la superficie de contacto. Cargas normales relativamente pequeñas dan lugar a esfuerzos intensos en dichos puntos de contacto. Al aumentar la fuerza normal, aumenta también la superficie de contacto y el material sufre aplastamiento, rotura o fisuras en los puntos de contacto. La teoría completa del rozamiento seco debe ir más lejos que la explicación mecánica que se ha presentado aquí. Por ejemplo, existe cierta evidencia que apoya la teoría de que la atracción molecular puede ser causa importante de rozamiento cuando las superficies en presencia estén en contacto muy íntimo. Otros factores que influyen en el rozamiento seco son la generación de temperaturas locales elevadas y la adhesión en los puntos de contacto, la dureza relativa de las superficies en presencia y la existencia de películas superficiales delgadas de óxido, aceite, suciedad u otras sustancias.

Tres son los tipos de problemas de rozamiento por deslizamiento que se presentan comúnmente en Mecánica.

(1) En el *primer* tipo hay que buscar la condición de movimiento inminente. En el enunciado del problema deberá quedar claro que hay que utilizar el requisito de rozamiento estático límite.

(2) En el *segundo* tipo de problemas no precisa que haya movimiento inminente y por tanto la fuerza de rozamiento puede ser menor que la dada por la ecuación 48 con el coeficiente de rozamiento estático. En este caso la fuerza de rozamiento quedará determinada por las ecuaciones del equilibrio únicamente. En un tal problema puede preguntarse si el rozamiento existente es suficiente o no para mantener el cuerpo en reposo. Para contestar a esto habrá que suponer que hay equilibrio y de las ecuaciones del equilibrio podrá calcularse la fuerza de rozamiento necesaria para mantener este estado. Puede entonces compararse esta fuerza de rozamiento con el rozamiento estático máximo que pueden soportar las superficies, calculado de la ecuación 48 en donde $f = f_0$. Si F es menor que la que da la ecuación 48, se deduce que la fuerza de rozamiento supuesta puede ser soportada y por tanto el cuerpo se halla en reposo. Si el valor calculado de F es mayor que el valor límite, se deduce que las superficies dadas no pueden soportar tanta fuerza de rozamiento y por tanto hay movimiento y el rozamiento será cinético.

(3) El *tercer* tipo de problemas entraña movimiento relativo entre las superficies en contacto y en tal caso se aplica el coeficiente de rozamiento cinético. En este caso, la ecuación 48 con $f = f_c$ dará siempre directamente la fuerza de rozamiento cinético.

La discusión anterior es aplicable a todas las superficies secas en contacto y, hasta un cierto límite, a superficies móviles parcialmente lubricadas. En la

tabla C1 del Apéndice C se dan algunos valores típicos de coeficientes de rozamiento. Estos valores son sólo aproximados y están sujetos a variaciones considerables, según sean las condiciones exactas que prevalezcan. Sin embargo, pueden utilizarse como ejemplos típicos de las magnitudes de los efectos de rozamiento. Cuando se requiera un cálculo práctico que entrañe al rozamiento, suele ser conveniente determinar el coeficiente de rozamiento apropiado mediante un experimento en el cual se reproduzcan lo más exactamente posible las condiciones de las superficies del problema.

Problemas tipo

6/1. Determinar el intervalo de valores que puede tener el peso P para que el bloque de 50 kg de la figura ni inicie su movimiento plano arriba ni se deslice plano abajo. El coeficiente de rozamiento estático para las superficies en contacto es 0,30.

Solución. El valor máximo de P vendrá dado por el requisito de movimiento inminente plano arriba. Por tanto, la fuerza de rozamiento del bloque estará dirigida plano abajo según se indica en el diagrama para el sólido libre correspondiente al bloque en el caso I de la figura. Aplicando las ecuaciones del equilibrio se tiene:

$$[\Sigma F_y = 0] \quad N - 50 \cos 20^\circ = 0, \quad N = 47 \text{ kp}$$

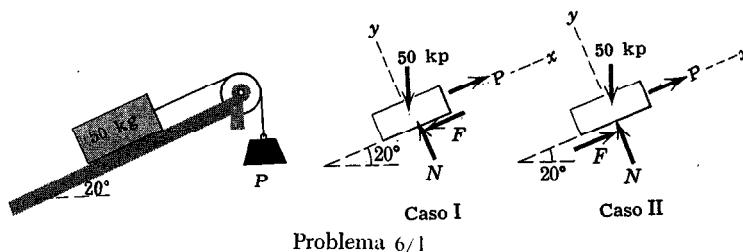
$$[F = fN] \quad F = 0,30 \times 47 = 14,1 \text{ kp}$$

$$[\Sigma F_x = 0] \quad P - 14,1 - 50 \sin 20^\circ = 0 \quad P = 31,2 \text{ kp} \quad \text{Resp.}$$

El valor mínimo de P queda determinado por la condición de movimiento inminente plano abajo. La fuerza de rozamiento que actúa sobre el bloque estará dirigida plano arriba, oponiéndose a la tendencia al movimiento, según se indica en el diagrama para el sólido libre del caso II. El equilibrio en la dirección x exige:

$$[\Sigma F_x = 0] \quad P + 14,1 - 50 \sin 20^\circ = 0 \quad P = 3,0 \text{ kp} \quad \text{Resp.}$$

Luego P puede tener cualquier valor comprendido entre 3,0 kp y 31,2 kp, y el bloque permanecerá en reposo.



Problema 6/1

6/2. Determinar el valor y sentido de la fuerza de rozamiento que actúa sobre el bloque de 50 kg indicado si, primero, $Q = 25$ kp, y segundo, $Q = 5$ kp. El coeficiente de rozamiento estático es 0,20 y el de rozamiento cinético es 0,17. Las fuerzas se aplican estando el bloque en reposo.

Solución. Del enunciado del problema no hay manera de saber si el bloque se halla o no a punto de deslizarse, o si se halla en movimiento en la posición indicada. Será, pues, necesario hacer una hipótesis. Supongamos que la fuerza de rozamiento esté dirigida plano arriba, como indica el vector de trazo continuo, y que el bloque esté en equilibrio. El equilibrio de fuerzas en las direcciones x e y nos da

$$\begin{aligned} [\Sigma F_x = 0] \quad Q \cos 20^\circ + F - 50 \sin 20^\circ &= 0 \\ [\Sigma F_y = 0] \quad N - Q \sin 20^\circ - 50 \cos 20^\circ &= 0 \end{aligned}$$

Caso I. $Q = 25$ kp.

Sustituyendo en la primera de las dos ecuaciones se tiene

$$F = -6,4 \text{ kp}$$

El signo negativo significa que si el bloque *estuviera* en equilibrio, la fuerza de rozamiento a él aplicada tendría sentido contrario al supuesto y por lo tanto estaría dirigida plano abajo como indica el vector de trazos. No obstante, no podemos sacar ninguna conclusión acerca de la magnitud de F hasta verificar si las superficies pueden soportar una fuerza de rozamiento de 6,4 kp. Esto puede hacerse sustituyendo $Q = 25$ kp en la segunda ecuación, lo cual da

$$N = 55,5 \text{ kp}$$

La fuerza máxima de rozamiento estático que pueden soportar las superficies es, pues,

$$[F = fN] \quad F = 0,20 \times 55,5 = 11,1 \text{ kp}$$

Como esta fuerza es mayor que la requerida para el equilibrio, se deduce que la hipótesis de existencia de equilibrio era correcta. El resultado será, pues,

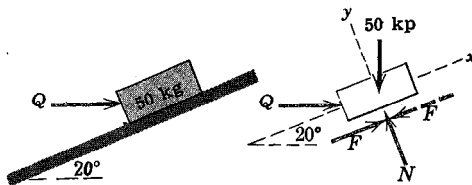
$$F = 6,4 \text{ kp plano abajo}$$

Resp.

Caso II. $Q = 5$ kp.

Sustituyendo en las dos ecuaciones del equilibrio se tiene

$$F = 12,4 \text{ kp} \quad N = 48,7 \text{ kp}$$



Problema 6/2

Pero la fuerza máxima posible de rozamiento estático es

$$[F = fN] \quad F = 0,20 \times 48,7 = 9,75 \text{ kp}$$

Se deduce, pues, que no puede soportarse una fuerza de rozamiento de 12,4 kp. Por tanto, no podrá haber equilibrio y el valor correcto de la fuerza de rozamiento se obtendrá empleando el coeficiente de rozamiento cinético inherente al movimiento plano abajo. Luego, el resultado será

$$[F = fN] \quad F = 0,17 \times 48,7 = 8,3 \text{ plano arriba} \quad \text{Resp.}$$

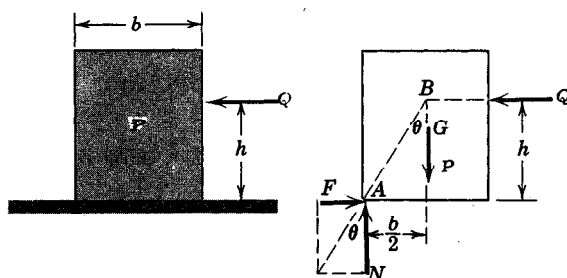
Obsérvese que, aun cuando ΣF_x ya no sea cero, habrá equilibrio en la dirección y , con lo cual $\Sigma F_y = 0$.

6/3. Un bloque homogéneo rectangular de peso P descansa sobre un plano horizontal y está sometido a la fuerza horizontal Q según se indica. Si es f el coeficiente de rozamiento, determinar el mayor valor que puede tener h para que el bloque se deslice sin volcar.

Solución. Si el bloque está a punto de volcar, toda la reacción entre plano y bloque estará en A . En la parte derecha de la figura puede verse el diagrama para el sólido libre correspondiente a esta condición. Si Q es suficiente para originar deslizamiento, la fuerza de rozamiento tendrá el valor límite fN , y el ángulo θ será $\theta = \arctg f$. La resultante de F y N pasa por un punto B por el cual debe pasar también Q puesto que tres fuerzas coplanarias que se equilibren deben ser concurrentes. Luego, de la geometría del bloque

$$\operatorname{tg} \theta = f = \frac{b/2}{h}, \quad h = \frac{b}{2f}. \quad \text{Resp.}$$

Si h fuera mayor que este valor, no se satisfaría el equilibrio de momentos respecto A . Para h menor que $b/2f$ la resultante de F y N no sería concurrente con Q y P en un punto por debajo de B . Luego esta resultante no actuaría en A , sino en algún punto a la derecha de A .



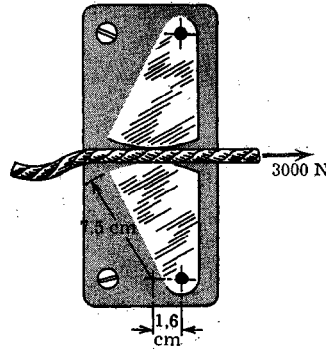
Problema 6/3

Problemas

6/4. Determinar el ángulo máximo θ que puede formar un plano inclinado con la horizontal para que un bloque situado sobre él no se deslice hacia abajo. El coeficiente de rozamiento estático es f . (A este ángulo se le llama *ángulo de reposo*.)

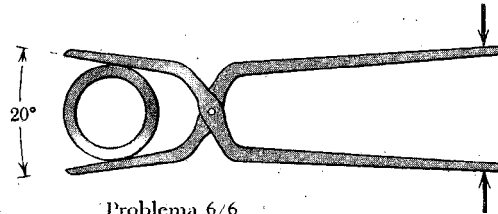
6/5. La figura representa un dispositivo que sujeta una cuerda o cable sometido a tensión, a causa de las grandes fuerzas de rozamiento que se desarrollan. Determinar, para la posición representada, la reacción total R en cada uno de los cojinetes de las levas. El coeficiente de rozamiento es 0,40.

Resp. $R = 7350 \text{ N}$



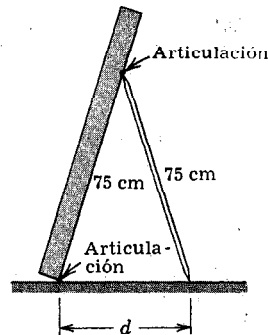
Problema 6/5

6/6. Las tenazas se utilizan para manejar tubos de acero calientes que se tratan en un baño de aceite. Para una apertura de las mandíbulas igual a 20° , ¿cuál es el coeficiente de rozamiento f mínimo entre las mandíbulas y el tubo que permita a las tenazas sujetar el tubo sin deslizamiento?

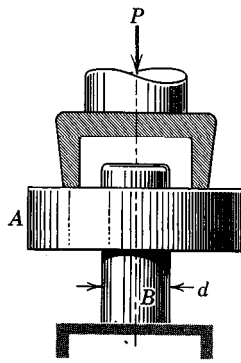


Problema 6/6

6/7. Determinar el valor máximo de la distancia d para el cual el puntal articulado de peso despreciable sostenga el objeto pesado sin deslizarse. El coeficiente de rozamiento es 0,40. Resp. $d = 55,75 \text{ cm}$

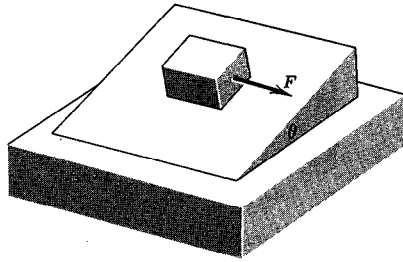


Problema 6/7



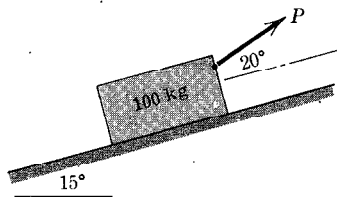
Problema 6/8

6/8. Para hacer deslizar el collar A sobre su eje fijo sobre el que está ajustado a presión se necesita ejercer una fuerza P . Demostrar que el momento M del par que hay que aplicar al collar para que gire sobre el árbol fijo venciendo el rozamiento una vez suprimida P es $M = Pd/2$, siendo d el diámetro del eje.



Problema 6/9

6/9. Sobre un plano inclinado un ángulo θ se halla en reposo un bloque uniforme de peso P . Determinar la fuerza F máxima que puede aplicarse al bloque en la dirección indicada antes de que se inicie el deslizamiento. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano es f .



Problema 6/10

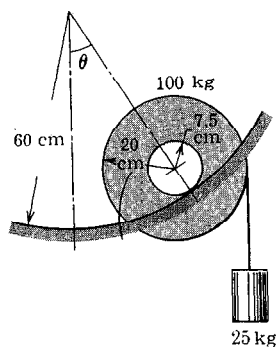
6/10. Los coeficientes de rozamiento estático y cinético entre el bloque de 100 kg y el plano inclinado son 0,30 y 0,20, respectivamente. Determinar (a) la fuerza F de rozamiento que se ejerce sobre el bloque cuando se aplica a éste en reposo una fuerza P de 20 kp, (b) la fuerza P que se necesita para iniciar el movimiento hacia arriba del plano inclinado partiendo del reposo, y (c) la fuerza F de rozamiento que se ejerce sobre el bloque si $P = 60$ kp.

Resp. (a) $F = 7,09$ kp

(b) $P = 52,6$ kp

(c) $F = 15,2$ kp

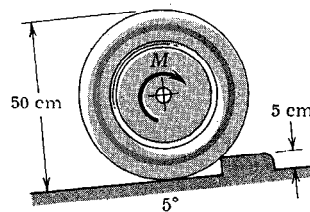
6/11. La rueda de 100 kg gira sobre su cubo ascendiendo la superficie curva inclinada circular bajo la acción del peso de 25 kg que pende de una cuerda enrollada a su periferia. Determinar el ángulo θ al cual se detiene la rueda, suponiendo que el rozamiento es suficiente para impedir el deslizamiento. ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento mínimo f que permita alcanzar esta posición sin deslizarse?



Problema 6/11

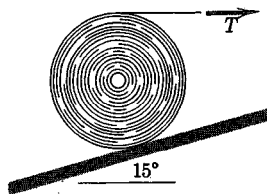
6/12. La rueda de 50 cm de diámetro pesa 40 kg. Determinar el momento M del par necesario para hacer que ruede sobre el escalón de 5 cm situado en el plano inclinado 5° y especificar el coeficiente de rozamiento f mínimo que debe existir para evitar que deslice la rueda.

Resp. $M = 667,5 \text{ cm.kp}$, $f = 0,896$



Problema 6/12

6/13. Se quiere hacer rodar lentamente el rollo de papel haciéndolo subir por el plano inclinado mediante una tensión T aplicada horizontalmente tirando del papel. El coeficiente de rozamiento entre el rollo y el plano inclinado es 0,20. Ver si desliza o no el papel al ir rodando.

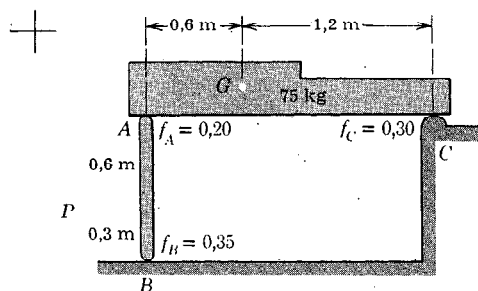


Problema 6/13

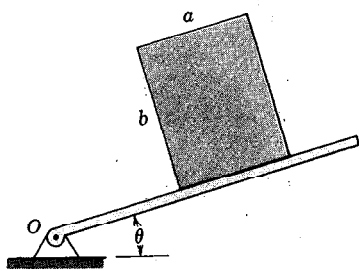
6/14. El bloque de 75 kg y centro de gravedad en G descansa en posición horizontal sobre el apoyo C y sobre el puntal vertical ligero AB . Si los coeficientes de rozamiento de los distintos pares de superficies en contacto son los indicados, calcular el menor valor de P que iniciaría el deslizamiento de una parte del sistema. ¿Dónde tendría lugar primeramente el deslizamiento?

Resp. $P = 22,5 \text{ kp}$

El deslizamiento tiene lugar primeramente en C

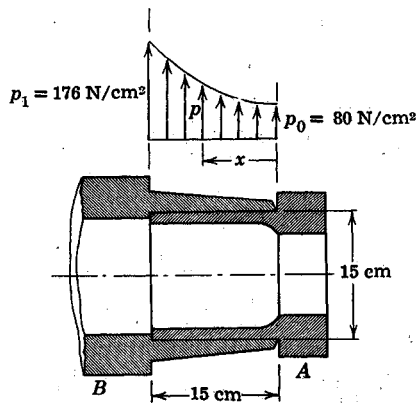


Problema 6/14



Problema 6/15

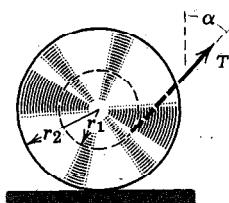
6/15. El bloque rectangular homogéneo de peso P descansa sobre el plano inclinado articulado respecto a un eje horizontal que pasa por O . Si es f el coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y el plano, especificar las condiciones que determinan si el bloque vuelca antes de deslizar o desliza antes de volcar al ir aumentando gradualmente el ángulo θ .



Problema 6/16

6/16. El collar circular A representado en sección ajusta con la parte B gracias a un ajuste por contracción que origina entre las partes una presión o esfuerzo compresivo p . La presión tiene en los extremos del solapamiento los valores que se indican y en los puntos intermedios puede aproximarse satisfactoriamente por la relación $p = p_0 + kx^2$. Si para hacer girar el collar A dentro de la parte B se necesita un par de momento 4500 m.N , calcular el coeficiente de rozamiento eficaz f entre ambas partes.

Resp. $f = 0,758$

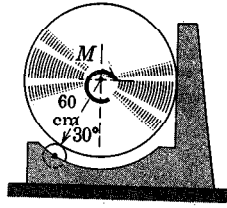


Problema 6/17

6/17. La rueda de la figura rodará hacia la izquierda cuando sea pequeño el ángulo α que forma la cuerda con la vertical. Cuando α es grande la rueda gira hacia la derecha. Determinar, examinando la geometría del diagrama para sólido libre, el ángulo α para el cual la rueda no avanzará en ningún sentido. Si el coeficiente de rozamiento es f y el peso de la rueda P , calcular el valor de T para el cual la rueda deslizará para el valor crítico de α .

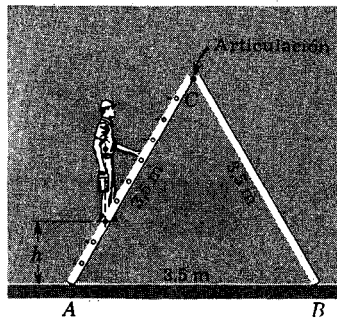
6/18. El cilindro uniforme pesa 200 kp y se apoya en el rodillo, que gira con un rozamiento despreciable. Si el coeficiente de rozamiento entre el cilindro y la superficie vertical es 0,6 calcular el momento M del par que se necesita para hacer girar el cilindro. Hallar también la reacción R sobre el cojinete del rodillo cuando se aplica M .

Resp. $M = 30,9 \text{ m.kp}$, $R = 171 \text{ kp}$



Problema 6/18

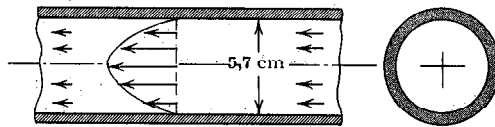
6/19. Hallar la máxima altura h del escalón que puede alcanzar el hombre de 90 kg sin que se derrumbe la escalera. El coeficiente de rozamiento en A y B es de 0,50 y cada una de las dos partes uniformes de la escalera articulada pesa 12 kg.



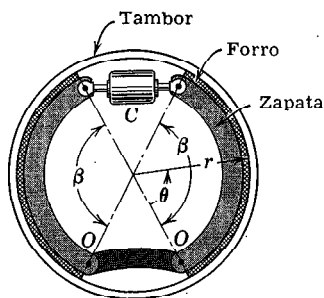
Problema 6/19

6/20. Por una tubería recta de 57 mm de diámetro interior circula aire en régimen laminar con una velocidad máxima en el eje del tubo de 60 cm/s. Si es parabólica la distribución de velocidades en función del radio, calcular la fuerza F de rozamiento por metro de longitud de tubería originada contra las paredes por la circulación del aire. La temperatura del aire es de 20° C.

Resp. $F = 1,36(10^{-4}) \text{ N/m}$

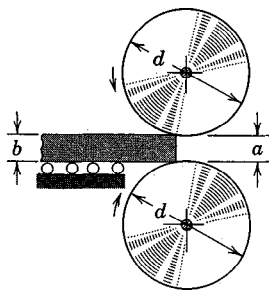


Problema 6. 20



Problema 6/21

6/21. Las dos zapatas de freno y sus forros pivotan alrededor de los puntos O y se aprietan contra el tambor de freno por efecto del cilindro hidráulico C . La presión p entre el tambor y el forro puede demostrarse que es directamente proporcional al seno del ángulo θ y tiene un valor p_0 en el ángulo $\theta = \beta$. La anchura del forro en contacto con el tambor es b . Escribir la expresión del momento frenante M_f aplicado a la rueda si el coeficiente de rozamiento entre el tambor y el forro es f .



Problema 6/22

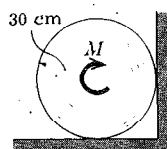
6/22. En la figura pueden verse los elementos de una laminadora. Determinar el espesor máximo b que puede tener el bloque para que aún pueda penetrar entre los rodillos por medio del rozamiento entre el bloque y los rodillos. Llámese f al coeficiente de rozamiento y supóngase que $b - a$ es pequeño frente a d .

6/23. Un automóvil de 1600 kg con una separación entre ejes de 3 m tiene su centro de gravedad 60 cm por encima de la calzada y equidistante de los ejes delantero y trasero. Si es 0,80 el coeficiente de rozamiento entre los neumáticos y la calzada, hallar el ángulo θ que forme con la horizontal la mayor pendiente que puede subir el automóvil a velocidad constante sin que deslicen las ruedas motrices (posteriores). ¿Cuál es el momento M del par que ha de aplicar el motor a cada una de las ruedas posteriores, cuyo diámetro es de 65 cm, en estas condiciones? Despreciar el rozamiento bajo las ruedas delanteras.

Resp. $\theta = 25^\circ 28'$, $M = 112 \text{ m.kp}$

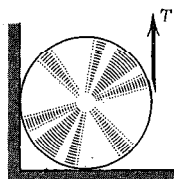
6/24. Calcular el momento M del par necesario para hacer girar en su posición contra la pared vertical la rueda uniforme de 30 kg. El coeficiente de rozamiento en cada par de superficies en contacto es 0,40.

Resp. $M = 435 \text{ cm.kp}$



Problema 6.24

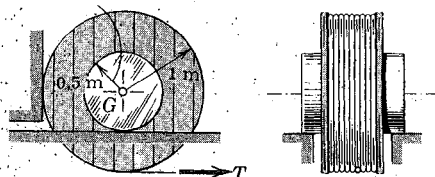
6/25. Determinar la fuerza T que iniciará la rotación del cilindro de peso P venciendo al rozamiento. El coeficiente de rozamiento en ambos pares de superficies en contacto es f .



Problema 6.25

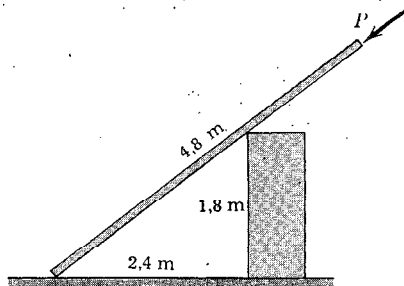
6/26. Calcular la fuerza T que hará girar el carrete de cable telefónico de 200 kg apoyado sobre sus cubos y que se halla en contacto con una pared vertical. El coeficiente de rozamiento en cada par de superficies en contacto es 0,60.

Resp. $T = 74,1 \text{ kp}$



Problema 6.26

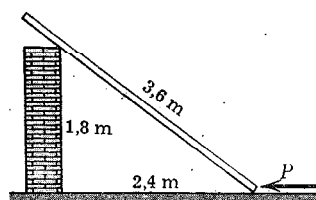
6/27. Determinar la fuerza P necesaria para hacer mover el tablón uniforme de 50 kg a partir de su posición de equilibrio, representada en la figura, si el coeficiente de rozamiento en los dos contactos es 0,50.



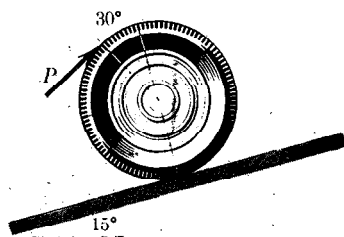
Problema 6.27

6/28. Calcular la fuerza P necesaria para iniciar el deslizamiento del tablón uniforme de 40 kg sobre la pared de 1,8 m, a partir de la posición indicada, si el coeficiente de rozamiento en cada par de superficies en contacto es 0,60.

Resp. $P = 39,7 \text{ kp}$

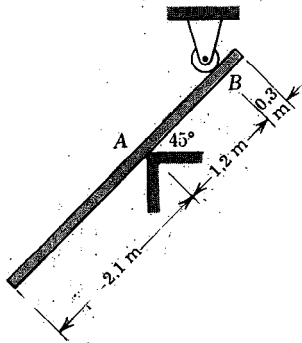


Problema 6.28



Problema 6/29

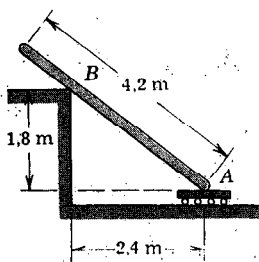
6/29. La fuerza P se aplica tangencialmente a la periferia de la rueda de 45 kg, en la posición que se indica, para evitar que ruéde hacia abajo del plano inclinado. El coeficiente de rozamiento entre la rueda y el plano es de 0,30. Determinar la fuerza F de rozamiento que ejerce el plano sobre la rueda.



Problema 6/30

6/30. El tablón uniforme de 3,6 m pesa 25 kp y está en reposo sobre el ángulo fijo A y se apoya en B contra el rodillo. El tablón forma un ángulo de 45° con la horizontal. Si son 0,90 y 0,75 los coeficientes de rozamiento estático y cinético, respectivamente, entre tablón y ángulo, calcular la fuerza de rozamiento F que se ejerce en A .

Resp. $F = 17,7$ kp

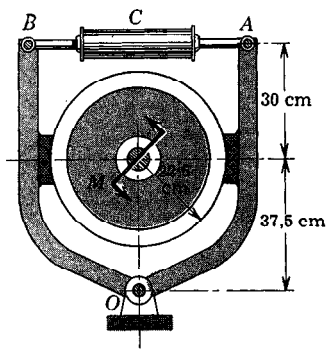


Problema 6/31

6/31. El extremo inferior A del tablón uniforme de 50 kg descansa sobre rodillos que pueden moverse libremente sobre la superficie horizontal. Si los coeficientes de rozamiento estático y cinético entre el tablón y el ángulo B son 0,80 y 0,70, respectivamente, calcular la fuerza de rozamiento F que se ejerce en B si se suelta el tablón a partir del reposo en la posición que se indica.

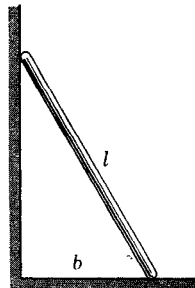
6/32. En el cilindro hidráulico C se desarrolla una fuerza de 1000 N para activar el freno de mordazas. Si el coeficiente de rozamiento estático entre las mordazas y la llanta de la rueda es 0,60, calcular el momento máximo M del par que puede aplicarse a la rueda sin que se produzca rotación. La rueda está montada por su centro sobre un cojinete fijo. Suponer que las fuerzas que se ejercen entre las mordazas y la rueda actúan en los centros de las caras de contacto de las mordazas.

Resp. $M = 559 \text{ m}\cdot\text{N}$



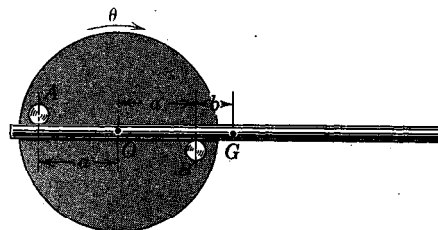
Problema 6. 32

6/33. La varilla delgada uniforme de peso P está a punto de deslizar cuando se coloca en la posición indicada contra la pared vertical. Hallar la expresión del coeficiente de rozamiento f , el cual es el mismo en los dos pares de superficies en contacto.



Problema 6. 33

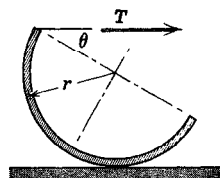
6/34. La barra uniforme cuyo centro de gravedad está en G se apoya en las espigas A y B que están fijas a la rueda. Si es f el coeficiente de rozamiento entre la barra y las espigas, determinar el ángulo θ que puede girarse la rueda alrededor de su eje horizontal que pasa por O sin que deslice la barra.



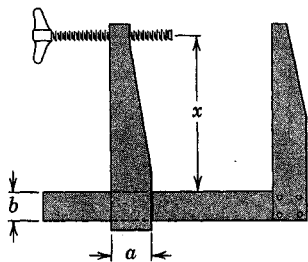
Problema 6. 34

6/35. La cáscara semicilíndrica de peso P y radio r gira un ángulo θ a consecuencia de la fuerza horizontal T aplicada a su borde. Si es 0,20 el coeficiente de rozamiento, calcular el ángulo θ para el cual la cáscara deslizará sobre la superficie horizontal al ir aumentando gradualmente T .

Resp. $\theta = 27^\circ 16'$



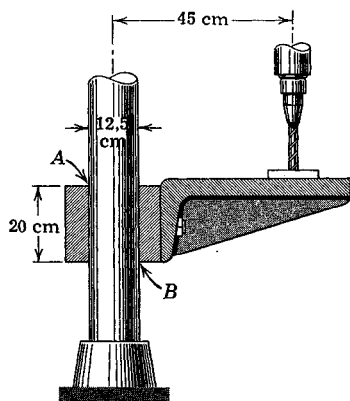
Problema 6/35



Problema 6, 36

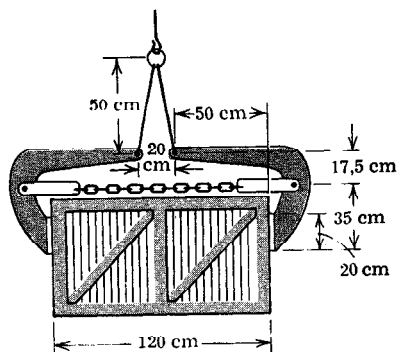
6/36. La mordaza de la izquierda del sujetador puede deslizar a lo largo del bastidor para aumentar la capacidad del dispositivo. Para evitar el deslizamiento de la mordaza cuando esté sometida a carga, la dimensión x deberá superar un cierto valor mínimo. Hallar este valor correspondiente a dimensiones a y b dadas y a un coeficiente de rozamiento f entre el bastidor y la mordaza con huelgo.

$$\text{Resp. } x = \frac{a - bf}{2f}$$



Problema 6/37

6/37. El coeficiente de rozamiento entre el collar de la mesa de la perforadora y la columna vertical es 0,30. ¿Deslizarán collar y mesa hacia abajo de la columna por la acción del empuje de la broca si olvida el operario fijar la sujeción, o será suficiente el rozamiento para inmovilizar el dispositivo? Despreciar el peso de la mesa y del collar frente al empuje de la broca y suponer que el contacto tiene lugar en los puntos A y B .

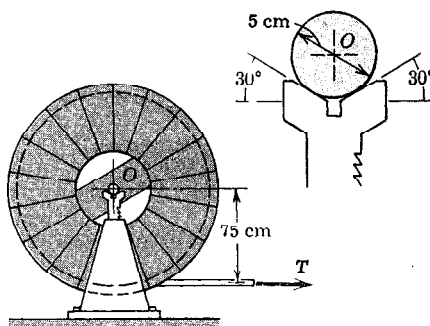


Problema 6/38

6/38. Las mordazas de rozamiento están destinadas a elevar cargas de 500 kg de una anchura nominal de 1,2 m. A partir de la configuración de las piezas, determinar si es más probable que se produzca el deslizamiento en cargas que sean ligeramente más anchas (contacto en A) o ligeramente más estrechas (contacto en B) que las de anchura nominal. Determinar el coeficiente de rozamiento mínimo f entre las mordazas y la carga que evite el deslizamiento correspondiente al caso en que sea más probable y calcular la tensión T correspondiente en la cadena horizontal que une las mordazas.

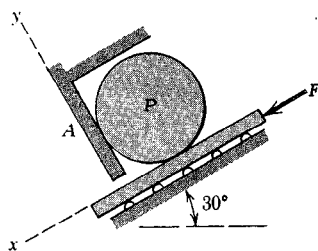
6/39. El carrete de cable telefónico pesa 3000 kp y está apoyado por su eje sobre soportes tallados en V a ambos lados del carrete. Se eleva éste haciendo ascender los soportes, con lo que se podrá tirar horizontalmente del cable en la forma que se indica. El eje está fijo al carrete y gira con él. Si es 0,30 el coeficiente de rozamiento entre el eje y las superficies en V, calcular la tracción T que hay que aplicar al cable para que gire el carrete.

Resp. $T = 31,9$ kp



Problema 6, 39

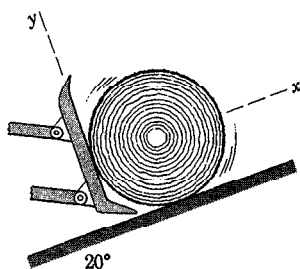
6/40. El rodillo de peso P descansa sobre una placa de peso despreciable que desliza sin resistencia sobre su cara inferior. El rodillo se apoya sobre la barrera perpendicular fija A. Si es 0,30 el coeficiente de rozamiento entre el rodillo y cada una de sus superficies de contacto, determinar la fuerza F necesaria para mover la placa.



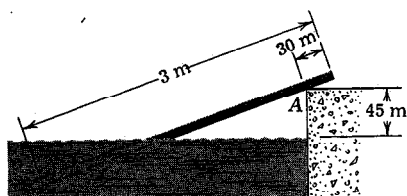
Problema 6/40

6/41. Un tractor hace rodar el tronco de 750 kg hacia arriba del plano inclinado 20° empujándolo con su pala, la cual está perpendicular a dicho plano. Si el coeficiente de rozamiento entre pala y tronco es 0,50 y entre tronco y suelo 0,80, calcular la componente N de la fuerza, normal a la pala, que hay que aplicar al tronco. Éste se supone cilíndrico.

Resp. $N = 513$ kp

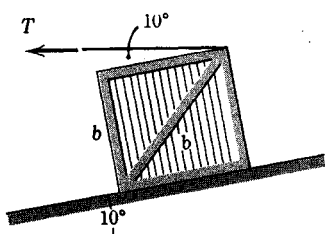


Problema 6 41



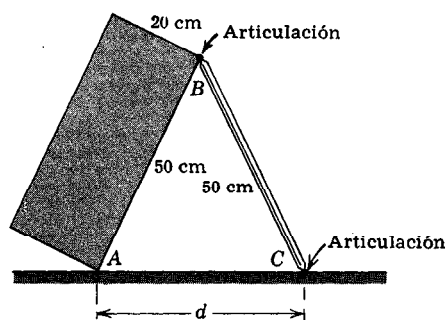
Problema 6/42

6/42. El tablón de roble de 3 m de longitud, 30 cm de anchura y 10 cm de grosor, cuyo peso específico es de 801 kp/m^3 , se coloca sobre el borde de hormigón de un depósito de agua dulce en la forma que se indica. Si es 0,80 el coeficiente de rozamiento entre el tablón y el borde mencionado, calcular la fuerza de rozamiento F que se ejerce en A. Resp. $F = 10,2 \text{ kp}$



Problema 6/43

6/43. La caja cuadrada uniforme pesa 200 kp y se quiere hacerla bajar por el plano inclinado aplicándole una tracción horizontal T mediante la cuerda unida a la arista superior de la caja. El coeficiente de rozamiento entre caja y plano inclinado es 0,40. Determinar la fuerza T necesaria para iniciar el movimiento, bien sea de vuelco o de deslizamiento.



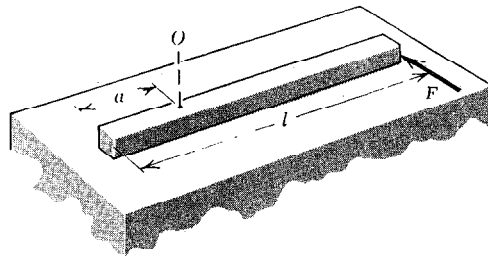
Problema 6/44

6/44. Determinar la distancia máxima d a la cual puede situarse la arista inferior del bloque metálico uniforme de 100 kg, contada a partir de la articulación C, sin que se origine deslizamiento en A. El coeficiente de rozamiento en A es de 0,30.

Resp. $d = 80 \text{ cm}$

6/45. Una barra uniforme de peso P y longitud l descansa sobre una superficie horizontal con su peso distribuido uniformemente a lo largo de aquélla. Si es f el coeficiente de rozamiento entre barra y superficie de apoyo, escribir las expresiones de la fuerza horizontal F que hay que aplicar al extremo de la barra para moverla y de su distancia a al eje O alrededor del cual se observa que gira la barra.

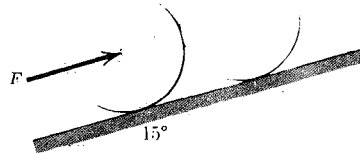
Resp. $F = 0,414 fP$, $a = 0,293 l$



Problema 6/45

6/46. Determinar la fuerza F necesaria para mover los dos rodillos iguales hacia arriba del plano inclinado. Cada rodillo pesa 15 kp y el coeficiente de rozamiento en todas las superficies en contacto es 0,20.

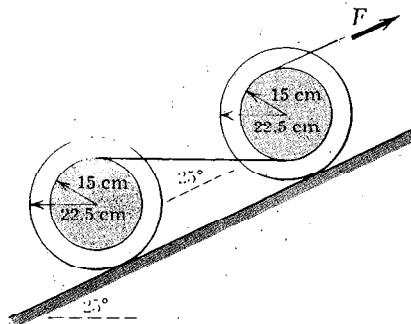
Resp. $F = 9,71 \text{ kp}$



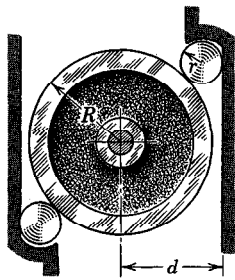
Problema 6/46

6/47. Cada una de las dos ruedas iguales con los cubos solidarios pesa 20 kp. Se colocan las ruedas sobre el plano inclinado 25° estando unidas por la cuerda horizontal que está firmemente sujeta a los cubos. Se impide la rodadura por medio de la fuerza F aplicada paralelamente al plano inclinado. El coeficiente de rozamiento entre éste y las ruedas es 0,50. Determinar la fuerza de rozamiento R que se ejerce sobre la rueda superior.

Resp. $R = 7,48 \text{ kp}$



Problema 6/47

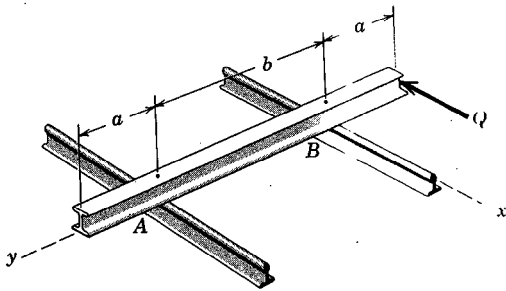


Problema 6/48

◀6/48. El dispositivo representado en la figura impide la rotación en sentido horario en el plano horizontal de la rueda central por medio de la sujeción por rozamiento de los dos rodillos pequeños. Para valores dados de R y r y para un coeficiente de rozamiento común f en todas las superficies en contacto, determinar el intervalo de valores de d para el cual funcione el dispositivo en la forma mencionada.

Resp.

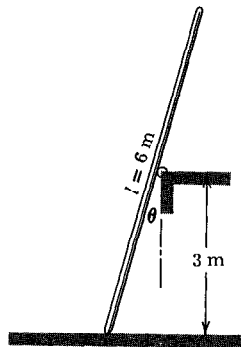
$$\frac{2r + (1 - f^2)R}{1 + f^2} < d < (R + 2r)$$



Problema 6/49

◀6/49. Una viga en doble T de peso P está apoyada sobre dos carriles horizontales en la forma que se indica. Calcular la carga mínima Q aplicada que sea suficiente para hacer deslizar la viga y determinar la fuerza de rozamiento correspondiente en A al iniciarse el deslizamiento. El coeficiente de rozamiento entre la viga y los carriles es f .

Resp. $Q = \frac{fPb}{2(a + b)}$, $R_A = \frac{fPa}{2(a + b)}$

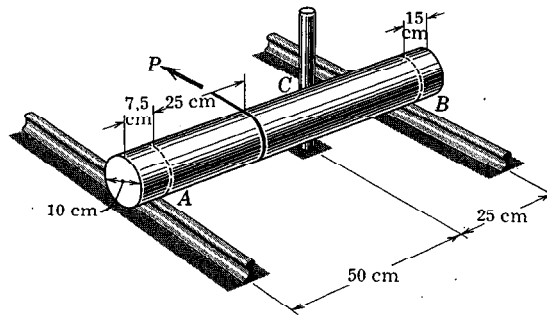


Problema 6/50

◀6/50. El coeficiente de rozamiento entre el poste uniforme de 6 m y la superficie horizontal está limitado a 0,40. Cuando se coloca en el plano vertical de la figura, el poste no deslizará si θ es o menor que un cierto valor crítico o mayor que otro cierto valor crítico más elevado. Hallar el intervalo de θ para el cual es inestable el poste.

Resp. Inestable para $24,0^\circ < \theta < 57,2^\circ$

◀6/51. El árbol cilíndrico de revolución es homogéneo, pesa 50 kg tiene un diámetro de 10 cm, descansa sobre los carriles horizontales paralelos y se apoya contra el poste vertical C de la manera que se indica. A la cuerda arrollada al árbol se aplica una fuerza horizontal P que se incrementa hasta que se produzca el deslizamiento. Si en todas las superficies en contacto es 0,4 el coeficiente de rozamiento, determinar el modo de deslizamiento y hallar la fuerza de rozamiento en el punto de contacto A entre el árbol y el carril en las condiciones de deslizamiento inminente. Resp. $F_A = 2,46 \text{ kp}$



Problema 6, 51

35. Rozamiento en las máquinas. En el diseño y funcionamiento de diversas máquinas intervienen algunas aplicaciones interesantes del rozamiento seco. En los apartados siguientes se estudian varias de dichas aplicaciones y los problemas al final del apartado contienen ejemplos ilustrativos de todos los casos.

(a) *Cuñas.* La cuña es una de las máquinas más sencillas y se emplea para realizar pequeños ajustes de la posición de un cuerpo o como medio para aplicar grandes fuerzas. La acción de las cuñas se basa en el rozamiento. Cuando el deslizamiento de una cuña es inminente, la fuerza resultante en cada cara de la cuña estará inclinada respecto a la normal a la cara en un ángulo igual al de rozamiento. La componente de la resultante a lo largo de la superficie es la fuerza de rozamiento, la cual está dirigida siempre oponiéndose al movimiento de la cuña.

En la figura 75a puede verse una cuña que se utiliza para fijar o elevar una carga P pesada. El coeficiente de rozamiento entre los dos pares de superficies es $f = \tan \phi$. La fuerza F necesaria para iniciar el movimiento de la cuña se encuentra a partir de los triángulos de equilibrio de las fuerzas que se ejercen sobre la carga y sobre la cuña. En la figura 75b pueden verse los diagramas para sólido libre, en los cuales las reacciones están inclinadas un ángulo ϕ respecto a las normales correspondientes y tienen el sentido que se opone al movimiento. El peso de la cuña se considera despreciable. A partir de estos diagramas pueden escribirse las ecuaciones de equilibrio

$$P + R_2 + R_3 = 0$$

y

$$R_1 + R_2 + F = 0.$$

En la parte *c* de la figura pueden verse las soluciones de estas ecuaciones, donde se halla primeramente R_2 en el diagrama superior empleando el valor conocido de P . Se halla después la fuerza F mediante el triángulo inferior una vez establecido el valor de R_2 .

Si se suprime F , la cuña seguirá en el mismo sitio mientras α sea menor que ϕ , en cuyo caso se dice que la cuña es irreversible. Si lo es y se quiere sacar, será necesario aplicar una tracción F' . En este caso, las reacciones R_1 y R_2 se ejercerán al otro lado de sus normales para oponerse al nuevo movimiento inminente y la resolución del problema tendrá lugar siguiendo líneas análogas a las descritas en el caso de elevación de la carga.

Los problemas de cuñas conducen a soluciones gráficas del tipo indicado en la figura 75c. La precisión de una solución gráfica se mantiene fácilmente dentro de las tolerancias compatibles con la incertidumbre de los coeficientes de rozamiento. También pueden obtenerse soluciones algebraicas a partir de la trigonometría de los polígonos de equilibrio.

(b) *Tornillos*. Los tornillos se utilizan para fijaciones y para transmitir potencia o movimiento; y en todos los casos es importante el rozamiento desarrollado en los hilos o filetes. Para transmitir potencia o movimiento es más eficaz el filete cuadrado que el filete en V; el estudio siguiente se limitará al filete cuadrado.

Consideremos el tornillo de filete cuadrado de la figura 76, sometido a la acción de la carga axial W y de un momento M aplicado respecto al eje del tornillo. En el diagrama para sólido libre del tornillo puede verse la fuerza R ejercida por el filete de la estructura del gato sobre una pequeña porción representativa del filete del tornillo. En todos los segmentos del filete del tornillo que estén en contacto con el filete de la base existen reacciones análogas. Si M es justamente suficiente para hacer girar el tornillo, el filete del tornillo

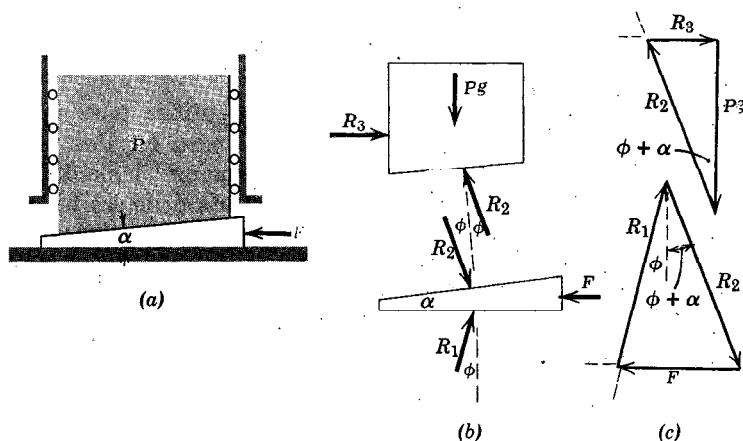


Figura 75

se deslizará en sentido ascendente sobre el filete fijo de la estructura. El ángulo ϕ que forma R con la normal al filete será el ángulo de rozamiento, con lo que $\operatorname{tg} \phi = f$. El momento de R respecto al eje vertical del tornillo es $Rr \operatorname{sen}(\alpha + \phi)$ y el momento total debido a todas las reacciones sobre los filetes del tornillo es $\Sigma Rr \operatorname{sen}(\alpha + \phi)$. Como en ambos términos aparece $r \operatorname{sen}(\alpha + \phi)$ puede sacarse factor común. La ecuación del equilibrio de momentos para el tornillo es, pues,

$$M = [r \operatorname{sen}(\alpha + \phi)] \Sigma R.$$

Por el equilibrio de fuerzas en sentido axial, se ha de verificar, además,

$$W = \Sigma R \cos(\alpha + \phi) = [\cos(\alpha + \phi)] \Sigma R.$$

Dividiendo M por W se tiene

$$M = Wr \operatorname{tg}(\alpha + \phi), \quad (50)$$

donde $\phi = \operatorname{arctg} f$. El ángulo α viene determinado por el paso de rosca L o avance por revolución del tornillo. Luego $\alpha = \operatorname{arctg}(L/2\pi r)$. Esta relación se ve fácilmente desarrollando una vuelta de filete y formando el triángulo rectángulo cuyos catetos sean, respectivamente, la circunferencia media $2\pi r$ y el paso de rosca L .

La ecuación 50 da el momento necesario para poner en marcha el tornillo en sentido ascendente o para mantener dicho movimiento ascendente, según se utilice el coeficiente de rozamiento estático o el cinético. Si se suprime el momento M , la fuerza de rozamiento cambia de sentido con lo que habrá que medir ϕ al otro lado de la normal. De esta manera, el tornillo quedará irreversible con tal que $\phi > \alpha$ y estará a punto de girar volviendo atrás si $\phi = \alpha$.

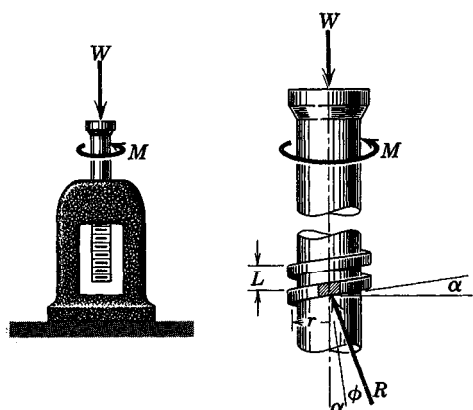


Figura 76

Cuando $\phi > \alpha$ para hacer bajar el tornillo habrá que aplicar un momento M de sentido contrario al indicado en la figura 76 y que viene dado por

$$M = Wr \operatorname{tg} (\phi - \alpha).$$

Si $\phi < \alpha$ el tornillo volverá atrás espontáneamente y si se quisiera mantenerlo quieto habría que aplicar un momento

$$M = Wr \operatorname{tg} (\alpha - \phi).$$

(c) *Cojinetes de soporte.* Un cojinete de soporte o chumacera es un cojinete que proporciona soporte lateral a un árbol, en contraste con el soporte axial. En el caso de cojinetes secos y de muchos cojinetes parcialmente lubricados, constituye una buena aproximación un análisis basado en los principios del rozamiento por deslizamiento. El comportamiento de los cojinetes totalmente lubricados, no obstante, es totalmente diferente y el análisis de la resistencia del rozamiento lleva consigo la holgura del cojinete, la velocidad de giro y la viscosidad del lubricante, siendo mucho más complicado que la aproximación que se hace para cojinetes parcialmente lubricados basada en el rozamiento por deslizamiento. En la figura 77 puede verse un cojinete de soporte con contacto o casi contacto entre el árbol y el cojinete, habiéndose exagerado mucho la holgura. Cuando empieza a girar el árbol en la dirección indicada, sube rodando por el cojinete hasta que se origina el deslizamiento. Entonces permanece en una posición más o menos fija durante la rotación. El par M necesario para mantener la rotación y la carga radial L sobre el árbol originan una reacción R en el punto de contacto A . El equilibrio en la dirección vertical exige que R sea igual a L pero no les obliga a tener la misma línea de acción. La fuerza R será tangente a un pequeño círculo de radio r , llamado *círculo de rozamiento*. El ángulo que forma R con su componente normal N es el ángulo de rozamiento ϕ . Igualando a cero la suma de los momentos respecto a O resulta:

$$M = Rr_r = Rr \operatorname{sen} \phi. \quad (51)$$

Para un coeficiente de rozamiento pequeño el ángulo ϕ es pequeño y podrán confundirse el seno y la tangente sin error apreciable. Como $f = \operatorname{tg} \phi$ puede bien tomarse como valor aproximado del momento del par

$$M = fRr. \quad (51a)$$

Esta relación da el momento aplicado al árbol que es necesario para superar el rozamiento de un cojinete de soporte parcialmente lubricado.

El comportamiento de un cojinete lubricado totalmente en donde el lubricante puede formar una cuña completa de fluido bajo el árbol, es completamente diferente del comportamiento de un cojinete seco o parcialmente lubricado. El análisis del cojinete lubricado totalmente se sale del ámbito de

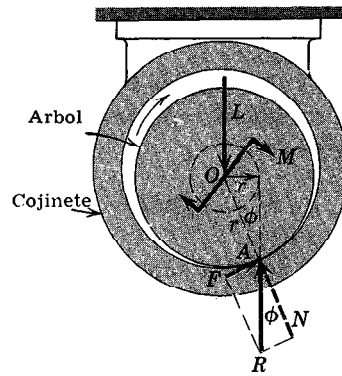


Figura 77

este tratado pero puede hallarse en los de lubricación, diseño de máquinas y mecánica de fluidos. Si son pequeñas las cargas laterales que se ejercen sobre un cojinete lubricado totalmente, puede desarrollarse una primera aproximación del momento de rozamiento suponiendo centrado el árbol en el cojinete, como se indica en la figura 78, en donde se ha exagerado el tamaño del huelgo radial c . La distribución de velocidades entre las distintas capas fluidas del huelgo puede considerarse lineal partiendo de cero en la superficie interior fija del cojinete hasta alcanzar la velocidad periférica v del árbol en su superficie exterior. Para el huelgo radial c , el gradiente de velocidad tiene la magnitud $|dv/dr| = v/c = r\omega/c$, donde ω es la velocidad angular del árbol expresada en radianes por segundo. El esfuerzo tangencial ejercido sobre la superficie del árbol es, según la ecuación 47

$$\tau = \mu \left| \frac{dv}{dr} \right| = \frac{\mu r \omega}{c},$$

y el momento de rozamiento de un cojinete de longitud l con un área de superficie $A = 2\pi r l$ es

$$M = \tau A r = \frac{2\pi \mu r^3 l \omega}{c}, \quad (52)$$

donde μ es el coeficiente de viscosidad del lubricante.

(d) *Rozamiento de discos y pivotes.* En cojinetes de pivotes, platos de embrague y frenos de disco aparece el rozamiento entre superficies circulares sometidas a presiones normales. Consideremos los dos discos circulares planos de la figura 79 cuyos árboles están montados sobre cojinetes (no indicados en el dibujo) de manera que puedan ponerse en contacto bajo la acción de la fuerza axial P . El momento máximo que puede transmitir este embrague será

igual al momento M necesario para que un disco deslice sobre el otro. Si p es la presión normal en un lugar cualquiera entre los platos, la fuerza de rozamiento que actúa sobre un elemento de superficie será $f p dA$, donde f es el coeficiente de rozamiento y dA es el elemento de superficie de área $r dr d\theta$. El momento de esta fuerza de rozamiento elemental respecto al eje del árbol es $f p r dA$ y el momento total es

$$M = \int f p r dA,$$

donde la integral se extiende a toda la superficie del disco. Para calcular esta integral debe conocerse la variación de f y p con r .

En los ejemplos siguientes se supondrá f constante. Además, si las superficies son nuevas, planas y bien soportadas, es razonable suponer que la presión p es constante y está distribuida uniformemente con lo que $\pi R^2 p = P$. Sustituyendo este valor constante de p en la expresión de M se tiene

$$M = \frac{fP}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 dr d\theta = \frac{2}{3} f P R. \quad (53)$$

Este resultado puede interpretarse como equivalente al momento debido a una fuerza de rozamiento fP aplicada a una distancia $2R/3$ del centro del árbol.

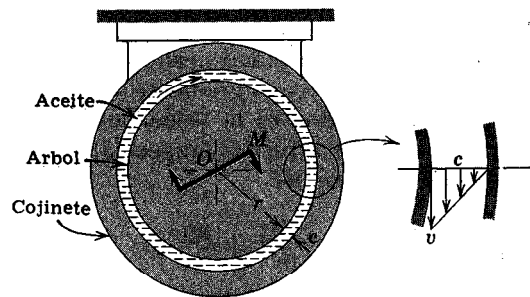


Figura 78

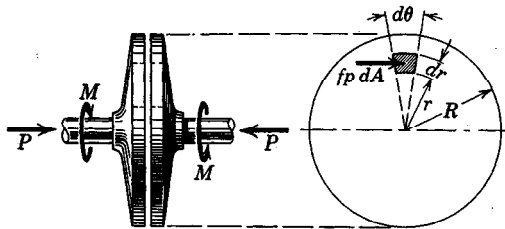


Figura 79

Si los discos de rozamiento son anillos, los límites de integración son los radios interior R_i y exterior R_e , respectivamente, y el par de rozamiento tiene un momento

$$M = \frac{2}{3} f P \frac{R_e^3 - R_i^3}{R_e^2 - R_i^2}. \quad (53a)$$

Tras un cierto uso de las superficies, se encuentra que el momento de rozamiento disminuye un poco. Pasado este primer período, las superficies conservan su nueva forma relativa y el ulterior desgaste será, pues, constante sobre toda la superficie. Este desgaste depende de la distancia circular recorrida y de la presión p . Como la distancia recorrida es proporcional a r , podrá escribirse la expresión $rp = K$, donde K es una constante. El valor de K se determina igualando a cero las fuerzas axiales, o sea

$$P = \int p \, dA = K \int_0^{2\pi} \int_0^R dr \, d\theta = 2\pi KR.$$

Con $pr = K = P/(2\pi R)$, la expresión de M podrá escribirse en la forma

$$M = \int fpr \, dA = \frac{fP}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \int_0^R r \, dr \, d\theta$$

la cual da

$$M = \frac{1}{2} fPR. \quad (54)$$

El momento de rozamiento para platos usados es, pues, solamente $(\frac{1}{2})/(\frac{2}{3})$, o sea, $\frac{3}{4}$ del correspondiente a superficies nuevas.

Si los discos de rozamiento fueran anillos de radio interior R_i y radio exterior R_e , sustituyendo estos valores en los límites de integración resulta para el momento de rozamiento

$$M = \frac{1}{2} fP(R_e + R_i). \quad (54a)$$

Rozamiento en las correas. El deslizamiento inminente de los miembros flexibles tales como correas y cuerdas sobre poleas y tambores es de gran importancia para el diseño de transmisiones por correa de todos los tipos, frenos de fleje y tornos elevadores. En la figura 80 puede verse un tambor sometido a las dos tensiones T_1 y T_2 de la correa, el momento M necesario para impedir la rotación y la reacción R en el cojinete. Teniendo M el sentido indicado, T_2 es mayor que T_1 . El diagrama para sólido libre correspondiente a un elemento de correa de longitud $r d\theta$ también está indicado en la figura. La tensión se incrementa desde T para el ángulo θ hasta $T + dT$ para el ángulo $\theta + d\theta$. La fuerza

normal es la infinitesimal dN puesto que actúa sobre un elemento de superficie infinitesimal. Análogamente la fuerza de rozamiento, que debe actuar sobre la correa en el sentido de oponerse al deslizamiento, es infinitesimal e igual a $f dN$ para el movimiento inminente. El equilibrio en la dirección tangencial da,

$$T \cos \frac{d\theta}{2} + f dN = (T + dT) \cos \frac{d\theta}{2},$$

o sea,

$$f dN = dT,$$

ya que el coseno de una cantidad infinitesimal es la unidad. El equilibrio en la dirección normal exige que

$$dN = (T + dT) \sin \frac{d\theta}{2} + T \sin \frac{d\theta}{2},$$

o sea,

$$dN = T d\theta.$$

En esta reducción debe recordarse que el seno de un ángulo infinitesimal es equivalente al ángulo y que el producto de dos diferenciales se puede despreciar por ser infinitésimo de orden superior al de los términos que quedan. Combinando las dos relaciones de equilibrio queda,

$$\frac{dT}{T} = f d\theta.$$

Integrando entre los límites correspondientes se tiene,

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \int_0^\beta f d\theta,$$

o sea,

$$\log \frac{T_2}{T_1} = f\beta,$$

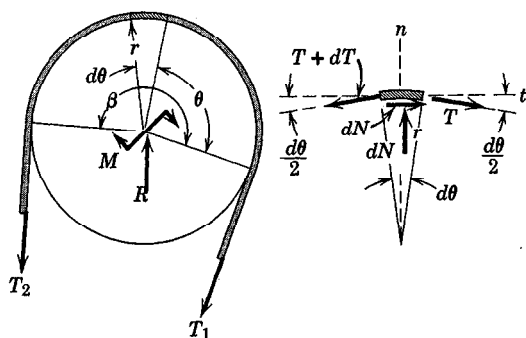


Figura 80

en donde $\ln (T_2/T_1)$ es un logaritmo neperiano de base e . Despejando T_2 se tiene

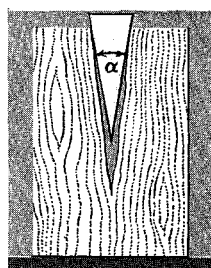
$$T_2 = T_1 e^{f\beta}. \quad (55)$$

Debe observarse que β es el ángulo total de contacto de la correa y viene expresado en radianes. Si se arrollara n veces una cuerda en torno a un tambor, el ángulo β sería de $2\pi n$ radianes. La ecuación 55 es igualmente válida para una sección no circular en la que el ángulo total de contacto sea β . Esta conclusión resulta evidente del hecho de que el radio r del tambor de la figura 80 no interviene en las ecuaciones del equilibrio de un elemento diferencial de correa.

La relación expresada por la ecuación 55 se aplica también a transmisiones por correa en las que la correa y la polea se hallen girando a velocidad constante. En este caso la ecuación describe el cociente entre las tensiones de la correa para el caso de deslizamiento o de deslizamiento inminente. Cuando la velocidad de giro se hace grande, la correa tiende a abandonar la llanta, por lo que la ecuación 55 lleva consigo un cierto error.

Problemas

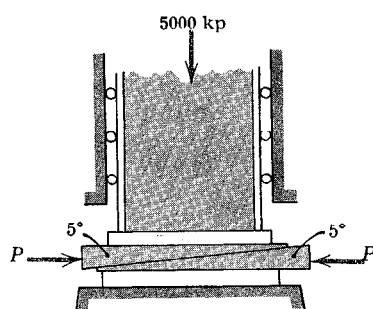
6/52. Una cuña será irreversible si su ángulo α es menor que un valor crítico. Si es f el coeficiente de rozamiento entre la cuña y el material que se escinde, ¿cuál es el valor crítico de α ?



Problema 6, 52

6/53. Las dos cuñas de 5° de la figura se utilizan para ajustar la posición de la columna sometida a una carga vertical de 5000 kp. Determinar la magnitud de las fuerzas P necesarias para elevar la columna si el coeficiente de rozamiento en todas las superficies es 0,40.

Resp. $P = 4520$ kp



Problema 6/53

6/54. Si se quiere hacer bajar la columna cargada del problema 6/53, calcular las fuerzas horizontales P' necesarias para extraer las cuñas.

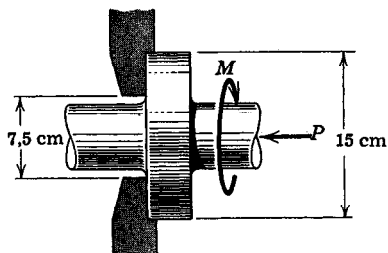
6/55. Un gato tiene un tornillo de filete cuadrado de radio medio 25 mm y soporta una carga de 500 kp. Si es 0,25 el coeficiente de rozamiento, ¿cuál es el paso de rosca (avance por vuelta) L máximo del tornillo para el cual éste no se desenroscaría por sí mismo? Para esta condición, ¿cuál es el momento M del par que hay que aplicar al tornillo para elevar la carga?

Resp. $L = 3,92$ cm, $M = 666$ cm·kp



Problema 6/56

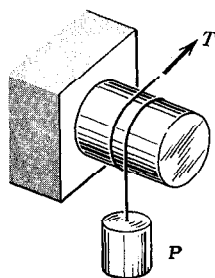
6/56. El torniquete soporta una tensión T de 7500 kp. Cada tornillo tiene un diámetro medio de 34,4 mm y tiene un solo filete con un paso de rosca (avance por vuelta) de 8,3 mm, siendo un tornillo a derechas y el otro a izquierdas. Si para aflojar el torniquete, haciendo girar su cuerpo e impidiendo que giren los tornillos, se necesita un par de momento 40,5 m·kp, calcular el coeficiente de rozamiento eficaz f en los filetes.



Problema 6/57

6/57. Un cojinete de collar nuevo y plano soporta la fuerza P de presión en el eje. Si a éste se aplica un momento constante $M = 37,5$ cm·kp, (a) ¿qué valor deberá tener P para mantener una velocidad de rotación constante? Se sabe que el coeficiente de rozamiento es 0,15. (b) Para el caso en que se haya desgastado el cojinete, calcular el incremento ΔP de la fuerza de presión necesario para mantener constante la velocidad al tener aplicado el mismo momento. Resp. (a) $P = 42,8$ kp, (b) $\Delta P = 1,6$ kp

6/58. Para elevar la carga P se necesita una fuerza de tracción $T = 5P$ con la cuerda que da $1\frac{1}{4}$ vueltas alrededor del árbol fijo. Calcular el coeficiente de rozamiento f entre cuerda y árbol.



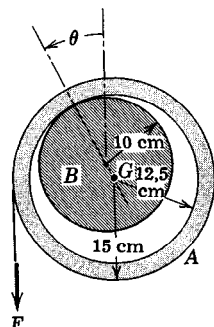
Problema 6/58

6/59. Para un coeficiente de rozamiento dado y un número de vueltas dado alrededor del árbol de la configuración del problema 6/58, se necesita una fuerza $T = 150$ kp para elevar P y una fuerza $T = 24$ kp para bajar P . Hallar P .

Resp. $P = 60$ kp

6/60. El anillo de acero A pesa 20 kp y sus radios interior y exterior son de $12,5$ cm y 15 cm, respectivamente. Se apoya sobre un árbol horizontal de 10 cm de radio. Si se aplica una fuerza $F = 15$ kp a la periferia del anillo, éste estará a punto de deslizarse. Calcular el coeficiente de rozamiento f y el ángulo θ .

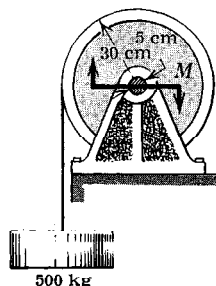
Resp. $f = 0,600$, $\theta = 30^\circ 57'$



Problema 6/60

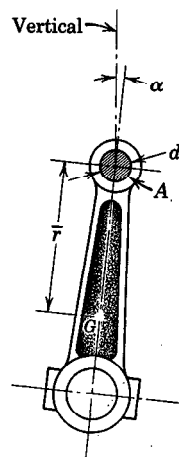
6/61. Para elevar la carga de 500 kg a velocidad constante con el torno cuyo eje es de 5 cm de diámetro, hay que aplicar a dicho eje un par de momento $M = 15375$ cm·kp. El torno junto con su eje pesa 100 kp. Calcular el coeficiente de rozamiento del cojinete.

Resp. $f = 0,258$



Problema 6/61

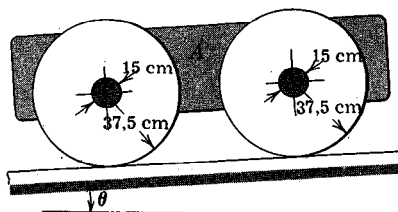
6/62. Calcular el momento M del par que hay que aplicar al eje del torno del problema 6/61 para hacer bajar a velocidad constante la carga de 500 kg. Tomar como coeficiente de rozamiento el valor $f = 0,258$ calculado en el problema 6/61.



Problema 6/63

6/63. El árbol A ajusta con huelgo en el cojinete de la biela de centro de gravedad G representada. Con la biela inicialmente en posición vertical se hace girar lentamente el árbol hasta que la biela desliza en el ángulo α . Escribir una expresión exacta del coeficiente de rozamiento.

$$\text{Resp. } f = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d/2}{r \sin \alpha}\right)^2 - 1}}$$

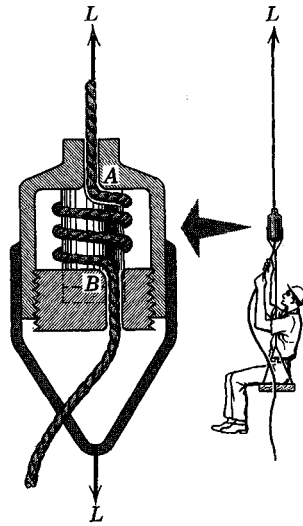


Problema 6/64

6/64. Cada una de las cuatro ruedas de un vehículo pesa 75 kp y es de acero templado. El diámetro del orificio central de cada rueda es de 15,01 cm, con lo que ajusta fácilmente en el eje de 15 cm fijo al bastidor A de 400 kg. Las cuatro ruedas soportan por igual el peso del bastidor. Si el vehículo, inicialmente en reposo, está a punto de rodadura cuando se encuentre sobre un plano inclinado de $\theta = 2^\circ$, calcular el coeficiente de rozamiento estático f en los cojinetes de 15 cm de diámetro. Suponer que toda la resistencia a la rotación de las ruedas la ofrecen los cojinetes.

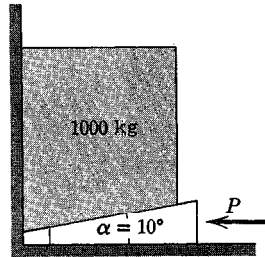
6/65. En la figura se ha representado un dispositivo destinado a que una persona en un balsa descienda con velocidad regulada constante. La cuerda rodea un árbol central fijo al bastidor y sale libre a través del collar inferior. Se ajusta el número de vueltas haciendo girar el collar inferior, el cual arrolla o desarrolla la cuerda en torno al árbol. La entrada de la cuerda por el collar superior en A equivale a $\frac{1}{4}$ de vuelta, y el paso rodeando el ángulo B también equivale a $\frac{1}{4}$ de vuelta. El rozamiento de la cuerda en los tramos rectos de los collares tiene un valor medio de 1 kp para cada collar. Si se precisan tres vueltas completas en torno al árbol, además de las correspondientes a los ángulos, para que un hombre de 75 kg descienda a velocidad constante sin ejercer tracción sobre el extremo libre de la cuerda, calcular el coeficiente de rozamiento f entre la cuerda y las superficies de contacto del dispositivo. Despréciase el pequeño ángulo de hélice de la cuerda alrededor del árbol.

Resp. $f = 0,196$

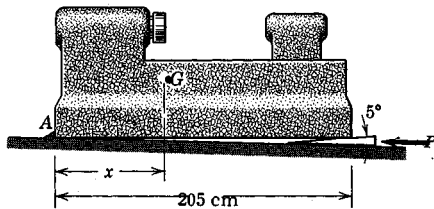


Problema 6/65

6/66. Determinar la fuerza horizontal P , aplicada a la cuña de 10° , necesaria para iniciar el ascenso del bloque de 1000 kg. El coeficiente de rozamiento entre todas las superficies en contacto es 0,30 y el peso de la cuña es despreciable.



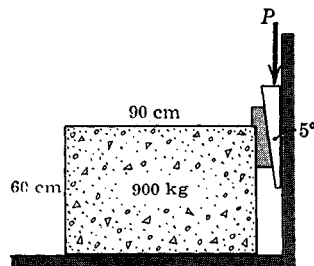
Problema 6/66



Problema 6/67

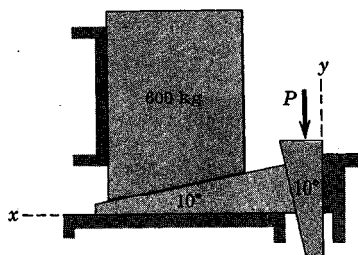
6/67. Una cuña de acero de 5° se fuerza bajo el extremo de una máquina de 1200 kg con una fuerza $P = 550$ kp. Si el coeficiente de rozamiento entre cuña y máquina es igual a 0,30, así como entre la cuña y el suelo horizontal, determinar la posición x del centro de gravedad G de la máquina. Esta no puede deslizarse horizontalmente a causa de un pequeño obstáculo existente en A .

Resp. $x = 77$ cm



Problema 6/68

6/68. Con la cuña de 5° se quiere ajustar la posición horizontal del bloque de hormigón de 900 kg. Si es 0,70 el coeficiente de rozamiento en todos los pares de superficies en contacto, ¿qué fuerza vertical P se necesitará para mover el bloque? Despréciase el peso de la cuña.

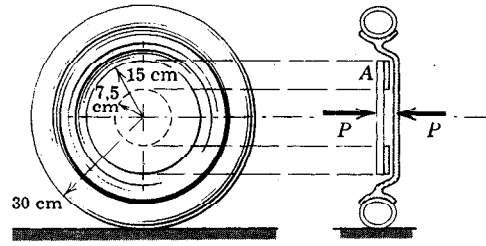


Problema 6/69

6/69. Las dos cuñas de 10° están puestas de manera que una fuerza P hacia abajo aplicada a una de ellas hace que se eleve la carga de 600 kg. El coeficiente de rozamiento es 0,20 para todas las superficies deslizantes y los pesos de las cuñas son despreciables. Determinar P .

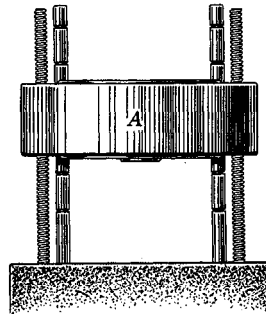
Resp. $P = 246$ kp

6/70. Las ruedas delanteras de un vehículo experimental de tracción trasera tienen un radio de 30 cm y están equipadas con frenos de disco consistentes en un anillo A de radios exterior e interior 15 cm y 7,5 cm, respectivamente. El anillo, que no gira con la rueda, se aprieta contra ella con una fuerza P . Si la presión entre el anillo y la rueda de disco es uniforme sobre las superficies que entran en contacto, calcular la fuerza de rozamiento F entre cada neumático delantero y la calzada horizontal para una fuerza axial $P = 100 \text{ kp}$ cuando se acciona el vehículo a velocidad constante con las ruedas girando. El coeficiente de rozamiento entre disco y anillo es 0,35.



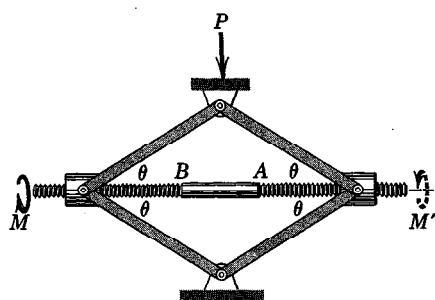
Problema 6/70

6/71. El cabezal móvil de una máquina de ensayos universal pesa 2400 kp y se eleva a la posición de ensayo por medio de dos tornillos sin fin de 7,5 cm de diámetro, cada uno de los cuales tiene rosca simple de paso 1,25 cm. Si el coeficiente de rozamiento en las roscas es de 0,25 ¿cuál ha de ser el momento M del par que hay que aplicar a cada tornillo (a) para elevar el cabezal y (b) para bajarlo? Las columnas de carga interiores no están unidas al cabezal durante el proceso de situación del mismo.



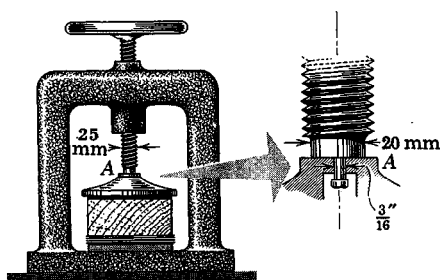
Problema 6/71

Resp. (a) $M = 1381 \text{ cm}\cdot\text{kp}$
(b) $M = 875 \text{ cm}\cdot\text{kp}$



Problema 6/72

6/72. El dispositivo de la figura se utiliza como gato. El tornillo es de doble rosca con filete cuadrado, de diámetro medio $7/8$ pulgada y un paso de $1/3$ pulgada. La sección A del tornillo tiene rosca a derechas y la sección B rosca a izquierdas. Para $\theta = 30^\circ$ determinar: (a) el momento M del par que debe aplicarse al tornillo para elevar una carga $P = 750$ kp y (b) el momento M' necesario para hacer descender la carga. El coeficiente de rozamiento en las roscas es igual a 0,20.



Problema 6/73

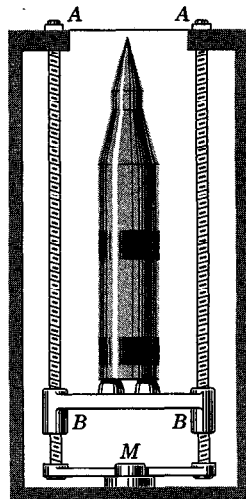
6/73. El tornillo de la pequeña prensa tiene un diámetro medio de 25 mm y una doble rosca de filete cuadrado de paso 8 mm. El cojinete plano de empuje en A se representa ampliado y tiene superficies bien desgastadas. Si es 0,25 el coeficiente de rozamiento tanto para los filetes como para el cojinete en A, calcular el momento M que hay que aplicar al volante para (a) originar una fuerza compresiva de 4000 N y (b) para aflojar la prensa partiendo de la compresión de 4000 N.

Resp. (a) $M = 24,05 \text{ m} \cdot \text{N}$

(b) $M = 13,22 \text{ m} \cdot \text{N}$

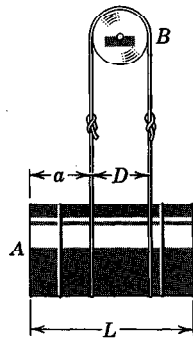
6/74. El proyectil cohete de 20 000 kg se hace descender a su silo protector mediante un ascensor de dos tornillos, tal como se indica. Cada tornillo pesa 1091 kg, tiene un diámetro de 130 mm y tiene una rosca simple de filete cuadrado de 13 mm de paso. Los tornillos giran sincrónicamente por acción de un motor situado en la base del silo. El peso total del cohete, tornillos y de la plataforma de 4281 kg se reparte por igual entre cojinete planos de collar situados en A, cada uno de los cuales tiene un diámetro exterior de 250 mm y un diámetro interior de 125 mm. Se supone que la presión sobre los cojinetes se distribuye uniformemente sobre la superficie de éstos. Si es 0,15 el coeficiente de rozamiento para el cojinete de collar y los tornillos en B, calcular el momento M del par que hay que aplicar a cada tornillo (a) para elevar el ascensor y (b) para hacerlo descender.

Resp. (a) $M = 33\,537 \text{ cm}\cdot\text{kp}$
 (b) $M = 28\,440 \text{ cm}\cdot\text{kp}$

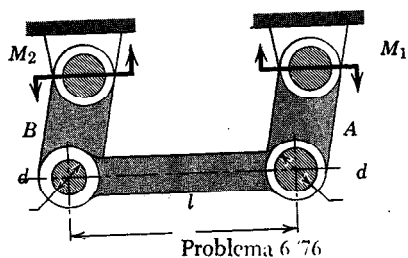


Problema 6/74

6/75. El tambor uniforme A cuyo centro de gravedad se halla a la mitad de su longitud está suspendido por una cuerda que pasa sobre la superficie cilíndrica fija B. El coeficiente de rozamiento estático entre la cuerda y la superficie sobre la cual pasa es f . Determinar el valor máximo que puede tener la dimensión a sin que vuelque el tambor a partir de su posición horizontal.



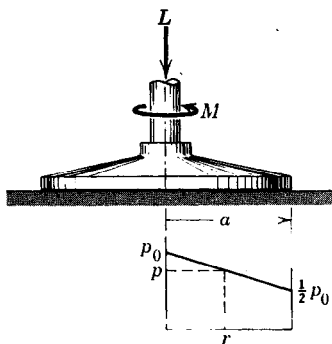
Problema 6/75



Problema 6/76

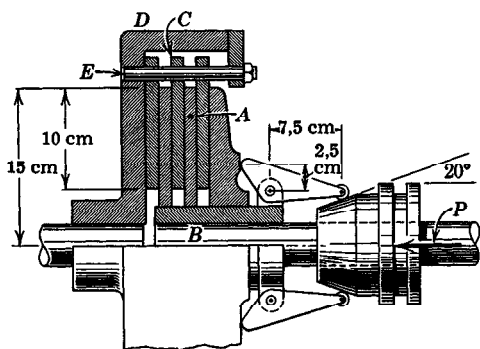
6/76. El cuadrilátero articulado se halla inicialmente en reposo bajo la acción de los pares de momentos M_1 y M_2 . Si se incrementa gradualmente M_1 hasta que se mueva el mecanismo, escribir una expresión exacta del ángulo α que forma la fuerza compresiva resultante en la barra AB con el eje de ésta en las condiciones de movimiento inminente. El coeficiente de rozamiento en cada cojinete es f .

$$\text{Resp. } \alpha = \arcsen \frac{fd}{l\sqrt{1+f^2}}$$



Problema 6/77

6/77. Para el disco plano de lijar de radio a , la presión p desarrollada entre el disco y la superficie enarenada subyacente disminuye linealmente con r desde un valor p_0 en el centro hasta $p_0/2$ en $r = a$. Si es f el coeficiente de rozamiento, deducir la expresión del momento M del par que hay que aplicar al eje del disco para hacerlo girar estando sometido a la fuerza axial L .

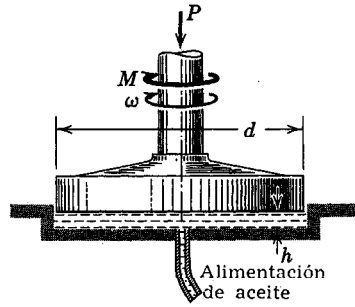


Problema 6/78

6/78. En la figura puede verse un embrague de disco múltiple de un motor marino. Los discos conductores A están montados sobre el eje conductor B de manera que puedan deslizar libremente a lo largo de dicho eje, si bien deben girar con él. Los discos C accionan la carcasa D por medio de los pasadores E a lo largo de los cuales pueden deslizar libremente. En el embrague representado hay cinco pares de superficies con rozamiento. Suponer que la presión se distribuye uniformemente sobre la superficie de los discos y determinar el momento máximo M del par que se puede transmitir si el coeficiente de rozamiento es 0,15 y $P = 50$ kp.

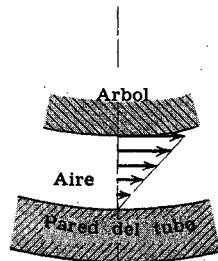
$$\text{Resp. } M = 33,5 \text{ m}\cdot\text{kp}$$

6/79. Un cojinete plano de disco soporta una carga P con un espacio totalmente lubricado con aceite. La presión del aceite se mantiene por medio de una línea de alimentación regulada que incide en el centro del cojinete. El aceite tiene un coeficiente de viscosidad μ y a una distancia radial cualquiera tiene una velocidad tangencial que varía linealmente desde cero en el fondo en reposo del espacio de aceite hasta la velocidad correspondiente de la superficie en rotación del cojinete que se halla inmediatamente encima. Deducir una expresión del momento M del par necesario para vencer la resistencia del aceite al movimiento para una velocidad angular constante ω del eje y para una separación vertical h del cojinete.



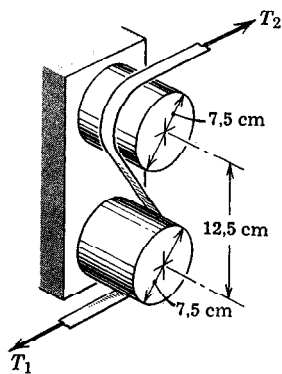
Problema 6/79

6/80. Un árbol de 75 mm de diámetro y de 500 mm de longitud está protegido por un tubo exterior fijo de igual longitud que tiene un diámetro interior de 75,75 mm. Si el árbol gira a la velocidad constante de 3000 rpm, calcular el momento M del par resistente que se ejerce sobre el árbol a consecuencia de la viscosidad de la película de aire comprendida entre el árbol y el tubo. Desprecie el efecto de las fugas de aire por los extremos del tubo y supóngase un gradiente lineal de velocidades entre las superficies del árbol y del tubo, según se indica. La presión es la atmosférica y la temperatura es de 20°C. Si se redujera a la mitad el huelgo entre el árbol y el tubo, ¿cuál sería el par resistente?

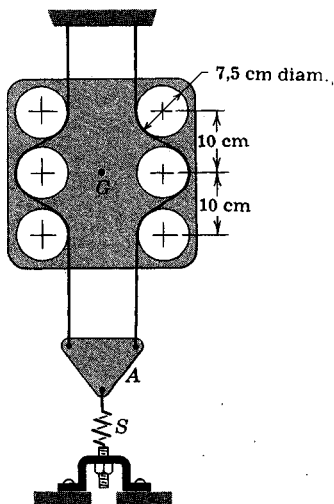


Problema 6,80

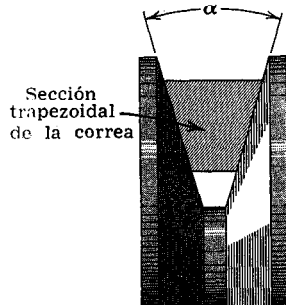
Resp. $M = 0,25 \text{ cm}\cdot\text{N}$



Problema 6 81



Problema 6 82



Problema 6/83

6/81. La cinta desliza alrededor de los dos muñones fijos como se indica y está sometida a la acción de las tensiones horizontales $T_1 = 20 \text{ N}$ y $T_2 = 80 \text{ N}$. Determinar el coeficiente de rozamiento f entre la cinta y los muñones.

Resp. $f = 0,313$

6/82. El conjunto representado en la figura pesa 50 kp estando su centro de gravedad en G y está soportado por los dos hilos que rodean los muñones fijos y se mantiene a igual tensión por acción de la placa igualadora A y el resorte ajustable S . Calcular la tensión mínima T en el resorte que asegure que el conjunto permanezca suspendido de la manera que se indica. El coeficiente de rozamiento entre el hilo y los muñones es $0,30$.

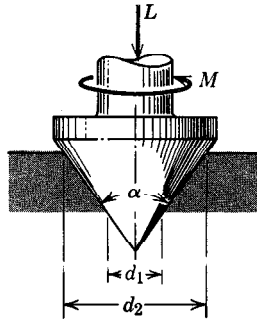
Resp. $T = 28,3 \text{ kp}$

6/83. Sustituir la correa plana y polea de la figura 80 por una correa trapezoidal y una polea con acanaladura de igual forma, como se indica en la vista en sección que acompaña a este problema. Deducir la relación entre las tensiones de la correa, el ángulo de contacto y el coeficiente de rozamiento de la correa trapezoidal cuando haya deslizamiento inminente. La utilización de una correa trapezoidal con $\alpha = 35^\circ$, ¿equivaldría a multiplicar por un factor n el coeficiente de rozamiento de una correa plana del mismo material?

Resp. $T_2 = T_1 e^{\beta'}$ donde $\beta' = \frac{\beta}{\sin(\alpha/2)}$
 $n = 3,33$

6/84. Determinar la expresión del momento M del par que hay que aplicar para hacer girar el árbol cuyo empuje L soporta un cojinete cónico de pivote. El coeficiente de rozamiento es f y la presión del cojinete es constante.

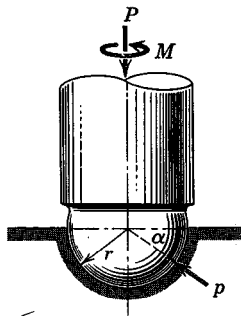
$$\text{Resp. } M = \frac{fL}{3 \sin \frac{\alpha}{2}} \frac{d_2^3 - d_1^3}{d_2^2 - d_1^2}$$



Problema 6/84

6/85. El cojinete esférico situado al extremo del eje soporta una carga axial P . Determinar la expresión del momento M que haga girar el eje venciendo el rozamiento del cojinete. Suponer que la presión p es directamente proporcional a $\sin \alpha$ y que el coeficiente de rozamiento es f .

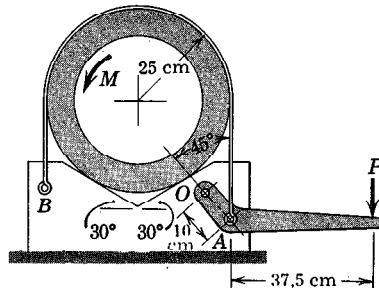
$$\text{Resp. } M = fPr$$



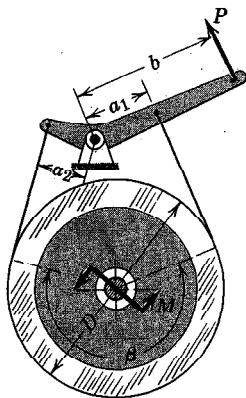
Problema 6/85

6/86. Hallar el momento M del par necesario para hacer girar la tubería en el soporte en V venciendo la acción de la cinta flexible. A la palanca de eje O se aplica una fuerza $P = 125 \text{ N}$. El coeficiente de rozamiento entre la cinta y la tubería es 0,30 y entre la tubería y el soporte 0,40. Los pesos de las partes son despreciables.

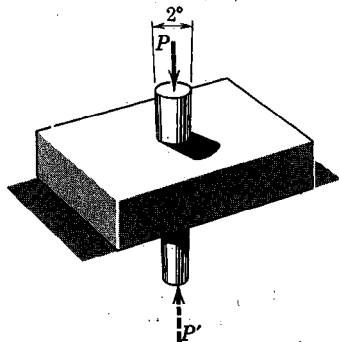
$$\text{Resp. } M = 229 \text{ m}\cdot\text{N}$$



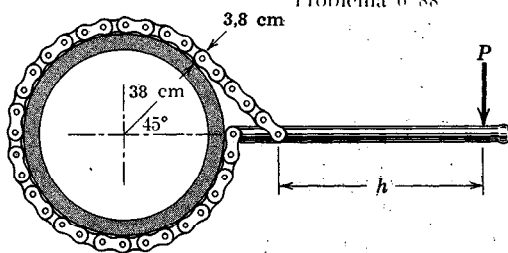
Problema 6/86



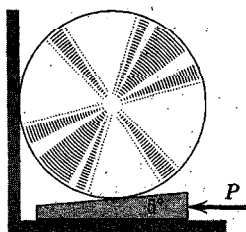
Problema 6/87



Problema 6/88



Problema 6/89



Problema 6/90

6/87. En la figura puede verse un freno de cinta diferencial. Determinar la fuerza P necesaria para frenar la rueda con un par del sentido de las agujas del reloj y momento M si el coeficiente de rozamiento es f . ¿Qué sucede si $a_1/a_2 < ef\theta$?

6/88. Se fuerza el pasador tronco-cónico en el orificio de igual forma practicado en el bloque fijo, aplicando una fuerza $P = 200$ kp. Si la fuerza necesaria para arrancar el pasador es $P' = 150$ kp, calcular el coeficiente de rozamiento entre el pasador y la superficie del orificio.

Resp. $f = 0,122$

6/89. Se utiliza la cadena de rodillos como agarradero de tuberías. Si es 0,25 el coeficiente de rozamiento entre la cadena y la tubería fija, determinar el valor mínimo de h que impida el deslizamiento del agarradero sobre la tubería independientemente de P . Despréciense los pesos de la cadena y del mango y despréciase todo rozamiento entre el extremo izquierdo del mango y la tubería.

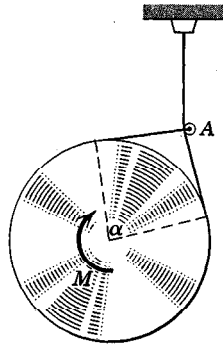
Resp. $h = 9,22$ cm

6/90. Se emplea una cuña de 5° para elevar el cilindro de 500 kg en la forma que se indica. Si en todas las superficies es $\frac{1}{4}$ el coeficiente de rozamiento, determinar la fuerza P necesaria para mover la cuña.

Resp. $P = 179$ kp

◀6/91. Un hilo flexible ligero pasa alrededor del disco circular de peso P y termina en una pequeña polea que puede hallar libremente su posición de equilibrio en el hilo. Si es 0,50 el coeficiente de rozamiento entre hilo y disco, calcular el ángulo α que forman las normales al hilo en los puntos de tangencia correspondientes a la posición en que el disco esté a punto de girar bajo la acción del par M aplicado a él. (Sugerencia: Resolver gráficamente la ecuación resultante que da α .)

Resp. $\alpha = 87^\circ 20'$



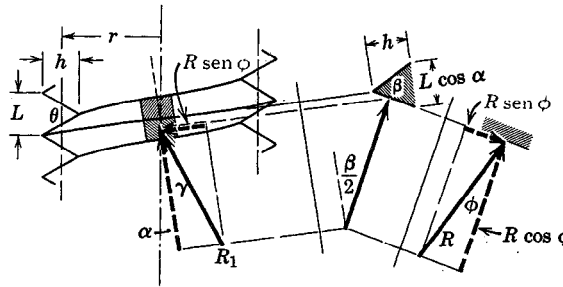
Problema 6/91

◀6/92. Sustitúyase el filete cuadrado del gato de la figura 76 por un filete en V como el indicado en la figura del problema y determínese el momento M que hay que aplicar al tornillo para elevar un peso P . La fuerza R que actúa sobre una pequeña sección representativa del filete está representada con sus proyecciones. El vector R_1 es la proyección de R en el plano de la figura que contiene al eje del tornillo. Se inicia el análisis con una suma de fuerzas axiales y de momentos que incluye la sustitución de los ángulos γ y β en función de los θ , α y del ángulo de rozamiento $\phi = \arctan f$. Para mayor claridad se ha exagerado el ángulo de la hélice de la rosca simple.

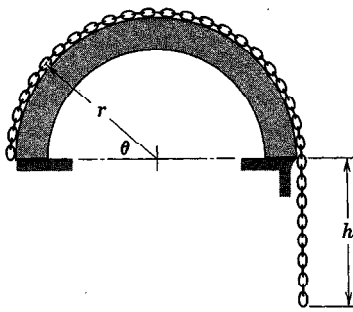
Resp.

$$M = Pr \frac{\tan \alpha + f \sqrt{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \alpha}}{1 - f \tan \alpha \sqrt{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \alpha}},$$

$$\text{donde } \tan \alpha = \frac{L}{2\pi r}$$



Problema 6/92



Problema 6/93

◀6/93. La cadena tiene un peso μ por unidad de longitud. Determinar la longitud h de la misma, que pende por debajo de la guía cilíndrica fija, correspondiente al deslizamiento inminente. El coeficiente de rozamiento es f . (Sugerencia: La ecuación diferencial resultante en la que interviene la tensión variable T de la cadena correspondiente al ángulo θ es de la forma $dT/d\theta + KT = f(\theta)$, que es una ecuación lineal, no homogénea, de primer orden, con coeficiente constante. Su integral es

$$T = Ce^{-K\theta} + e^{-K\theta} \int e^{K\theta} f(\theta) d\theta$$

donde C y K son constantes.)

$$\text{Resp. } h = \frac{2fr}{1+f^2} (1 + e^{f\pi})$$

7 Trabajo virtual

36. Introducción. En los capítulos anteriores se ha analizado el equilibrio de un cuerpo aislándolo, siguiendo la técnica del diagrama de sólido libre y escribiendo las ecuaciones correspondientes a las anulaciones de las sumas de fuerzas y de las sumas de momentos. Dicho método se ha aplicado casi siempre a cuerpos cuya posición de equilibrio se conocía o se especificaba y donde la incógnita a determinar era una o varias fuerzas exteriores.

Existe otro tipo de problemas en el que los cuerpos están compuestos de miembros interconectados que permiten el movimiento relativo de las partes, permitiendo examinar, por tanto, varias configuraciones de equilibrio. En los problemas de este tipo, aun cuando las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y de momentos siguen siendo válidas y adecuadas no constituyen el método más directo y conveniente. Más útil y directo resulta ser entonces un método basado en el concepto de trabajo efectuado por una fuerza. Además, el método proporciona una visión más profunda del comportamiento de sistemas mecánicos y permite examinar la estabilidad de los sistemas en equilibrio. Vamos a desarrollar a continuación este método.

37. Trabajo. La expresión *trabajo* se emplea en sentido cuantitativo, en contraste con su empleo común no científico. El trabajo efectuado por una fuerza \mathbf{F} a lo largo de un desplazamiento infinitesimal $d\mathbf{s}$ de su punto de aplicación O , figura 81a, es por definición la cantidad escalar

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

La magnitud de este producto escalar del vector fuerza por el vector desplazamiento es $dU = F ds \cos \alpha$, donde α es el ángulo que forman \mathbf{F} y $d\mathbf{s}$. Esta expresión puede interpretarse como el desplazamiento multiplicado por la componente $F \cos \alpha$ de la fuerza en la dirección del desplazamiento, tal como representan las líneas de trazos de la figura 81b. También puede interpretarse el trabajo dU como el producto de la fuerza por la componente del despla-

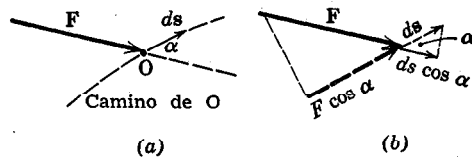


Figura 81

miento $ds \cos \alpha$ en la dirección de la fuerza, lo que está representado por las líneas de trazo continuo de la figura 81b. Con esta definición de trabajo resulta que la componente $F \sin \alpha$ normal al desplazamiento no trabaja. El trabajo es positivo si la componente $F \cos \alpha$ que trabaja tiene el mismo sentido que el desplazamiento y negativo si tiene sentido contrario. El trabajo es una cantidad escalar cuyas dimensiones son las de una fuerza por una distancia y suele expresarse en joule (J) o newton-metro, kilopondmetros (kpm) y kilowatt-hora (kWh). El trabajo tiene las mismas dimensiones que el momento. Para distinguir entre ambas cantidades, se recomienda expresar el trabajo en joule o kilopondmetros y el momento en metrokilopond, como hemos venido haciendo; también hemos expresado el momento en metro newton, mientras que el trabajo lo expresaremos en newton-metro, si bien esta unidad tiene su propio nombre de *joule*. Obsérvese que el trabajo es un escalar en que interviene el producto de una fuerza por una distancia, ambas medidas a lo largo de una misma dirección, mientras que el momento es un vector que entraña el producto de una fuerza por una distancia medida en una dirección perpendicular a la fuerza.

Durante un desplazamiento finito s , del punto de aplicación de una fuerza, ésta realiza un trabajo igual a

$$U = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz),$$

o sea

$$U = \int F \cos \alpha ds.$$

Para efectuar esta integración es necesario conocer la relación existente entre las componentes y sus coordenadas respectivas, o sea, las relaciones entre F y s y entre $\cos \alpha$ y s .

En el caso de fuerzas concurrentes que se ejerzan sobre un cuerpo, el trabajo efectuado por su resultante es igual al trabajo total efectuado por las distintas fuerzas. Puede verse esto partiendo del hecho de que la componente de la resultante según la dirección del desplazamiento es igual a la suma de las componentes de las distintas fuerzas en la misma dirección.

El trabajo efectuado por un par de momento \mathbf{M} que se ejerza sobre un cuerpo obedece a una relación vectorial análoga a la del trabajo de una fuerza. Considérese el momento $\mathbf{M} = 2\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ del par formado por dos fuerzas opuestas \mathbf{F} aplicadas al disco de la figura 82. Si el disco sufre un desplazamiento

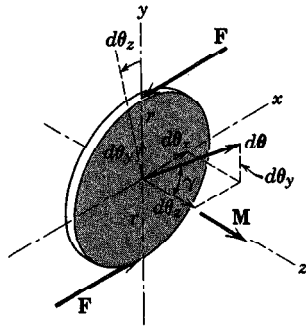


Figura 82

angular $d\theta_z$ respecto al eje z , cada fuerza efectúa un trabajo $Fr d\theta_z$, siendo $r d\theta_z$ el movimiento del punto de aplicación de F sobre el arco y el trabajo del par es, por tanto, $dU = 2Fr d\theta_z = M d\theta_z$. Para las rotaciones infinitesimales $d\theta_x$ respecto al eje x y $d\theta_y$ respecto al eje y , los puntos de aplicación de las fuerzas no tienen desplazamiento en la dirección de las fuerzas, por lo que no se efectúa trabajo. La única componente de la rotación infinitesimal resultante $d\theta = i d\theta_x + j d\theta_y + k d\theta_z$ del disco que se traduce en trabajo del par es la componente z , $d\theta_z = d\theta \cos \gamma$. Por tanto, el trabajo del par puede expresarse por el producto escalar

$$dU = \mathbf{M} \cdot d\boldsymbol{\theta},$$

que es análoga a la expresión del trabajo de una fuerza. El ángulo θ se expresa en radianes y el trabajo tiene las unidades de N·m, es decir joule, o bien kp·m. Si la componente de $d\boldsymbol{\theta}$ según el eje del par tiene sentido contrario al del momento del par, el trabajo efectuado es negativo. Si el disco de la figura 82 tuviera traslación en una dirección cualquiera (movimiento sin rotación), el trabajo efectuado por una de las fuerzas se anularía con el efectuado por la otra, por lo que el trabajo del par sólo figura en la rotación.

El trabajo total efectuado por un par durante una rotación finita del cuerpo sobre el que se ejerce es

$$U = \int \mathbf{M} \cdot d\boldsymbol{\theta} = \int (M_x d\theta_x + M_y d\theta_y + M_z d\theta_z),$$

o sea

$$U = \int M \cos \gamma d\theta,$$

donde γ representa el ángulo medido entre los dos vectores \mathbf{M} y $d\boldsymbol{\theta}$. Hay que tener cuidado al manejar los vectores rotación, porque puede demostrarse* que,

* Véase *Dinámica*, Capítulo 7, apartado 37.

si bien las rotaciones infinitesimales pueden sumarse vectorialmente como en la figura 82, las rotaciones finitas no obedecen a la ley conmutativa de la adición de vectores. Por tanto, no se podrá multiplicar una rotación finita por un par para obtener trabajo, a menos que la rotación tenga lugar alrededor de un eje fijo, en cuyo caso la dirección del vector rotación permanece invariada.

Consideremos ahora una partícula cuya posición de equilibrio esté determinada por las fuerzas que se ejercen sobre ella. Todo desplazamiento elemental arbitrario que podamos imaginar $\delta \mathbf{s}$ que la separe de su posición natural recibe el nombre de *desplazamiento virtual*. El término *virtual* se emplea para indicar que el desplazamiento no existe en realidad, sino que sólo lo imaginamos con el fin de comparar varias posibles posiciones de equilibrio en el proceso de selección de la correcta. El trabajo realizado por una fuerza cualquiera \mathbf{F} que se ejerza sobre la partícula durante el desplazamiento virtual recibe el nombre de *trabajo virtual* y es

$$\delta U = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{s} \quad \text{o sea} \quad \delta U = F \delta s \cos \alpha,$$

donde α es el ángulo que forman \mathbf{F} y $\delta \mathbf{s}$. La diferencia entre $d\mathbf{s}$ y $\delta \mathbf{s}$ es que $d\mathbf{s}$ se refiere a un cambio infinitesimal en un movimiento real, mientras que $\delta \mathbf{s}$ se refiere a un movimiento virtual o supuesto. Desde un punto de vista matemático, ambas cantidades son infinitésimos de primer orden.

También puede ser un desplazamiento virtual una rotación $\delta \theta$ de un cuerpo. El trabajo virtual efectuado por un par de momento \mathbf{M} durante un desplazamiento angular virtual $\delta \theta$ es, pues, $\delta U = \mathbf{M} \cdot \delta \theta$.

La fuerza \mathbf{F} o el momento \mathbf{M} puede considerarse que se mantienen constantes durante cualquier desplazamiento virtual infinitesimal $\delta \mathbf{s}$ o $\delta \theta$. Si se tiene en cuenta la variación de magnitud o dirección de \mathbf{F} o \mathbf{M} durante el movimiento infinitesimal, salen términos de orden superior que desaparecen en el límite. Esta consideración es la misma que permite escribir que un elemento de área limitado por la curva $y = f(x)$ es $dA = y dx$.

38. Equilibrio de un cuerpo rígido. Un cuerpo rígido puede considerarse compuesto de un conjunto de partículas unidas cuyas distancias mutuas se mantienen invariables. Las condiciones de equilibrio del cuerpo en función del trabajo virtual de las fuerzas que se ejercen sobre él se establecen considerando en primer lugar el equilibrio de una partícula única.

Si está en equilibrio una partícula, el trabajo virtual efectuado por todas las fuerzas que se ejercen sobre ella durante un desplazamiento virtual arbitrario cualquiera $\delta \mathbf{s}$ que la separe de su posición de equilibrio es

$$\begin{aligned} \delta U &= \mathbf{F}_1 \cdot \delta \mathbf{s} + \mathbf{F}_2 \cdot \delta \mathbf{s} + \mathbf{F}_3 \cdot \delta \mathbf{s} + \dots \\ &= \delta \mathbf{s} \cdot \Sigma \mathbf{F} = \Sigma F_x \delta x + \Sigma F_y \delta y + \Sigma F_z \delta z = 0. \end{aligned}$$

La suma es nula, puesto que $\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$ y también $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma F_z = 0$. La ecuación $\delta U = 0$ es, pues, otro enunciado de las condiciones de equilibrio de

una partícula. Esta condición de trabajo virtual nulo es necesaria y suficiente, ya que puede aplicarse a desplazamientos virtuales tomados uno cada vez en cada una de las tres direcciones mutuamente perpendiculares y es por tanto equivalente a los tres requisitos escalares conocidos para el equilibrio.

El principio de trabajo virtual nulo para el equilibrio de una partícula única no suele simplificar este problema ya sencillo de por sí, ya que el desplazamiento virtual aparece como factor en todos los términos y por tanto se elimina. El concepto de trabajo virtual para una partícula se introduce para aplicarlo a sistemas de partículas en la explicación subsiguiente.

Es fácil extender el principio del trabajo virtual de una partícula a un sistema de partículas unidas rígidamente formando un cuerpo rígido. En un cuerpo rígido las distancias entre sus partículas permanecen constantes y por tanto nada del trabajo efectuado por fuerzas exteriores al cuerpo puede absorberse por rozamientos internos o por deformaciones elásticas internas que, en un cuerpo rígido, se suponen ausentes.

Como es nulo el trabajo virtual efectuado sobre cada partícula del cuerpo en equilibrio, se deduce que el trabajo virtual efectuado sobre el cuerpo en total es nulo. En el cálculo de $\delta U = 0$ para todo el cuerpo sólo aparece el trabajo virtual efectuado por las fuerzas *exteriores*, ya que las fuerzas interiores son dos a dos iguales, opuestas y de igual línea de acción, y será nulo el trabajo realizado por estas fuerzas durante un movimiento cualquiera. Este trabajo total es nulo, porque las componentes de los desplazamientos de las dos partículas según las líneas de acción de las fuerzas son iguales en el caso de un cuerpo rígido.

De nuevo, como en el caso de una partícula, el principio de los trabajos virtuales no ofrece ninguna ventaja real para la solución del equilibrio de un cuerpo rígido único. Todo desplazamiento virtual supuesto definido por un movimiento lineal o angular aparecerá en cada uno de los términos de $\delta U = 0$ y al eliminarlo quedará la misma expresión que se habría obtenido utilizando directamente la ecuación de las fuerzas o la de los momentos. Esta condición se ilustra en la figura 83, en donde se quiere determinar la reacción R bajo el rodillo de la placa articulada de peso despreciable sometida a la acción de una fuerza dada P . Una pequeña rotación imaginada $\delta\theta$ de la placa alrededor de O es compatible con la articulación de ligadura situada en O y la tomaremos como desplazamiento virtual. El trabajo efectuado por P es $-Pa \delta\theta$ y el efectuado por R es $+Rb \delta\theta$. Por tanto, el principio $\delta U = 0$ da

$$-Pa \delta\theta + Rb \delta\theta = 0.$$

Eliminando $\delta\theta$ queda

$$Pa - Rb = 0,$$

que no es más que la ecuación de equilibrio de los momentos respecto a O . Por tanto, no se ha ganado nada utilizando el principio de los trabajos virtuales

para un cuerpo rígido único. El empleo del principio presenta ventajas evidentes en el caso de cuerpos interconectados, según se describe en el apartado siguiente.

39. Sistemas de cuerpos rígidos. Vamos a extender ahora el principio de los trabajos virtuales para describir un sistema de cuerpos rígidos interconectados, en el cual quedará patente la ventaja del principio. Será necesario, es primer lugar, hacer ciertas observaciones referentes a los sistemas mecánicos.

Dos o más cuerpos rígidos unidos por conexiones mecánicas exentas de rozamientos y que no puedan absorber energía por elongación o compresión, constituyen un sistema mecánico *ideal*. En la figura 84 pueden verse ejemplos de sistemas ideales. En cada sistema se supone que no hay rozamiento en las conexiones. Pueden existir fuerzas de rozamiento en la cara exterior del émbolo, de la figura 84a, ya que dichas fuerzas serían *exteriores* al sistema compuesto por el émbolo, biela y cigüeñal, y, si se conocen, pueden tratarse como otra fuerza exterior cualquiera. El dispositivo de polea y cuerda de la figura 84b es un sistema ideal mientras sea despreciable el alargamiento de la cuerda y ésta no deslice sobre la polea introduciendo rozamiento cinético y desprendimiento de calor. Aislando un sistema ideal mediante un diagrama para sólido libre en el que figuren todas las fuerzas exteriores al sistema, como el indicado en la figura 84c, se ve que durante cualquiera de los movimientos posibles del sistema o de sus partes *el trabajo total realizado por las fuerzas interiores en las conexiones es nulo*. Esto es así porque las fuerzas interiores son iguales dos a dos y opuestas, según se ilustra para la articulación B de la figura 84c, y toda reacción realizará un trabajo igual y opuesto al realizado por su correspondiente acción. Luego, el principio de los trabajos virtuales será aplicable a un tal sistema conectado cuando solamente las fuerzas exteriores puedan realizar trabajo durante un desplazamiento virtual. El principio puede enunciarse de nuevo en la forma siguiente: *Para un sistema en equilibrio de conexiones ideales, el trabajo total realizado por todas las fuerzas exteriores al sistema es siempre nulo para cualquiera de los desplazamientos virtuales posibles compatibles con las conexiones*.

Para aplicar el principio de los trabajos virtuales es necesario observar tanto las libertades como las ligaduras para los desplazamientos posibles de un sistema mecánico. En los mecanismos de las figuras 84a, b y c sólo se precisa

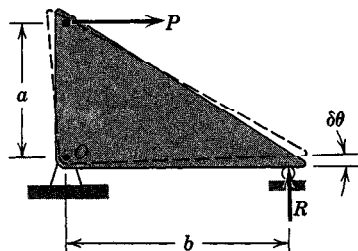


Figura 83

una coordenada en cada caso para especificar la posición de todas las partes del sistema. Así, el ángulo de la biela determina la posición del émbolo. El movimiento del extremo libre de la cuerda especifica por completo la posición del peso P y las posiciones angulares de las poleas. Y la posición angular de la barra AB determina unívocamente las posiciones de las otras dos barras. Estos mecanismos y otros en donde sólo se necesita una coordenada para especificar la configuración del sistema se dice que tienen *un grado de libertad*. En la figura 84d la posición de P dependerá de los desplazamientos independientes de los dos extremos libres de la cuerda y por tanto este dispositivo tiene dos grados de libertad. El mecanismo de cinco barras de la figura 84e (una de las barras es el suelo) tiene dos grados de libertad, ya que una rotación de A a A' podría ir acompañada de una rotación de B a B' o a B'' , o a otro número cualquiera de distintas posiciones posibles. Así pues, deberán especificarse las posiciones de A y B antes de que queden determinadas unívocamente las posiciones de las dos barras restantes. El mecanismo de seis barras de la figura 84f tiene tres grados de libertad. Un cuerpo rígido que pueda moverse libremente en el es-

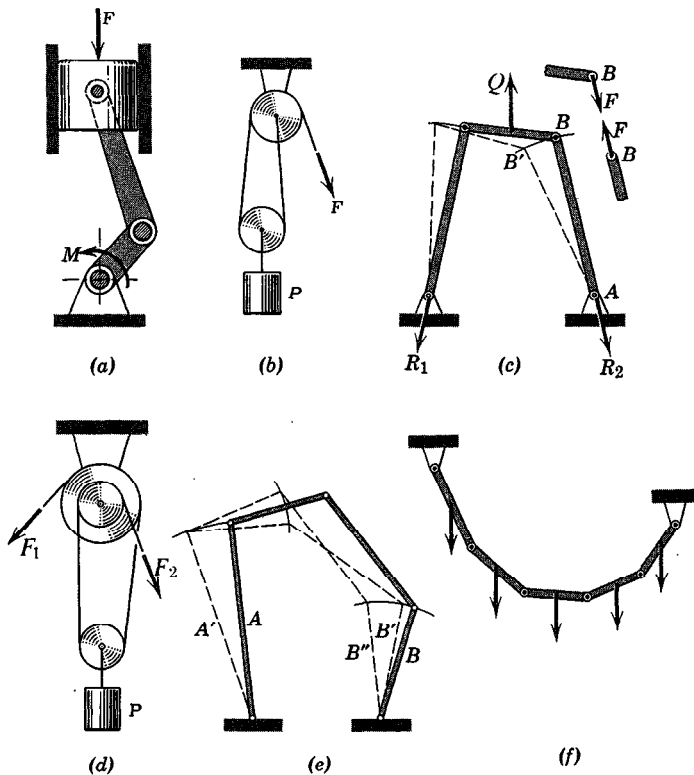


Figura 84

pacio tiene seis grados de libertad, tres componentes de traslación y tres de rotación.

Por tanto, el *número de grados de libertad* es igual al *número de coordenadas independientes* necesarias para determinar unívocamente la configuración del sistema. El número de desplazamientos virtuales posibles de un sistema será igual al número de grados de libertad.

Todas las fuerzas exteriores existentes en reacciones fijas realizan un trabajo nulo durante un desplazamiento virtual cualquiera compatible con las ligaduras de dichas reacciones. A esas fuerzas exteriores, tales como R_1 y R_2 de la fig. 84 c, se les da el nombre de *fuerzas reactivas* para distinguirlas de las fuerzas aplicadas exteriormente o *fuerzas activas*, tales como la Q de esta misma figura, que efectúan trabajo durante un desplazamiento virtual posible. Las fuerzas másicas, tales como el peso, pueden tratarse de igual manera que cualquier otra fuerza activa. Con la observación de que sólo efectúan trabajo las fuerzas activas, el principio de los trabajos virtuales puede enunciarse ahora de manera un tanto restringida. *El trabajo virtual efectuado por fuerzas activas exteriores sobre un sistema mecánico ideal en equilibrio es nulo para todo desplazamiento virtual compatible con las ligaduras.* En esta forma, el principio halla su máxima aplicación en sistemas ideales. El sistema puede expresarse simbólicamente mediante la ecuación

$$\delta U = 0, \quad (56)$$

donde δU representa el trabajo virtual total efectuado por todas las fuerzas activas exteriores durante un desplazamiento virtual. En los sistemas en los que las fuerzas o momentos en una o más conexiones efectúan trabajo, como ocurre en las barras articuladas conectadas por un resorte de torsión en la articulación, los trabajos no se anulan y deben incluirse en la ecuación $\delta U = 0$.

Solamente ahora podrán verse las verdaderas ventajas del método de los trabajos virtuales. Esencialmente, son dos. La primera, que no es necesario desmembrar los sistemas ideales para establecer las relaciones entre las fuerzas activas, como suele ocurrir en el método para el análisis del equilibrio basado en las adiciones de fuerzas y momentos. La segunda, que pueden determinarse directamente las relaciones entre las fuerzas activas sin hacer referencia a las fuerzas reactivas. Estas ventajas hacen particularmente útil el método de los trabajos virtuales en la determinación de la posición de equilibrio de un sistema sometido a cargas conocidas. Este tipo de problema es el contrario del de determinar las fuerzas que actúan sobre un cuerpo cuando se fija su posición de equilibrio.

En el método de los trabajos virtuales debe dibujarse un esquema que aísle el sistema que se considera. A diferencia del diagrama para el sólido libre, en el que se indican todas las fuerzas, el esquema para el método de los trabajos sólo precisa indicar las fuerzas *activas*, ya que las reactivas no intervienen en la aplicación de $\delta U = 0$ en el sentido restringido para sistemas con ligaduras. A dicho esquema puede llamársele *diagrama de las fuerzas activas*.

La mayoría de los problemas contienen un solo grado de libertad y como el número de desplazamientos virtuales posibles es igual al número de grados de libertad, dichos problemas requerirán una aplicación de la ecuación 56 para el desplazamiento virtual único. En el caso de sistemas de n grados de libertad será necesario resolver n ecuaciones, cada una de las cuales expresen el trabajo virtual nulo de todas las fuerzas activas, debido a cada uno de los n desplazamientos virtuales posibles considerados por separado, mientras los demás se conservan nulos.

Problemas tipo

7/1. Cada una de las dos barras articuladas tiene un peso P y una longitud l , estando soportada y cargada en la forma que se indica. Determinar el ángulo θ de equilibrio para una fuerza F dada.

Solución. Puede verse aparte el diagrama de las fuerzas activas para el sistema compuesto por los dos miembros, en el que se incluyen los dos pesos además de la fuerza F . Todas las demás fuerzas que actúan exteriormente sobre el sistema son fuerzas reactivas que no trabajan durante un movimiento virtual δx y por ello no se indican.

El principio de los trabajos virtuales exige que el trabajo total de todas las fuerzas activas exteriores sea nulo para todo desplazamiento virtual compatible con las ligaduras. Así, para un movimiento δx

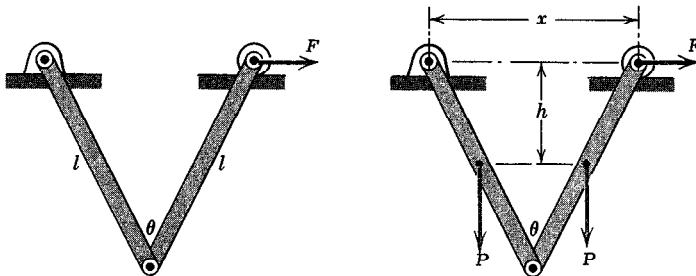
$$[\delta U = 0] \quad F \delta x + 2 P \delta h = 0.$$

De la geometría del sistema resulta evidente que δh será negativo para un δx positivo. Cada uno de estos desplazamientos virtuales se expresará ahora en función de la variable θ que es la cantidad requerida. Así

$$h = \frac{l}{2} \cos \frac{\theta}{2} \quad y \quad \delta h = -\frac{l}{4} \sin \frac{\theta}{2} \delta \theta.$$

Análogamente,

$$x = 2l \sin \frac{\theta}{2} \quad y \quad \delta x = l \cos \frac{\theta}{2} \delta \theta.$$



Problema 7/1

Sustituyendo en la ecuación de los trabajos virtuales se tiene

$$Fl \cos \frac{\theta}{2} \delta\theta - 2P \frac{l}{4} \sin \frac{\theta}{2} \delta\theta = 0,$$

de donde,

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{2F}{P} \quad \text{o bien} \quad \theta = 2 \operatorname{arctg} \frac{2F}{P}.$$

Para obtener este resultado mediante los principios de adición de fuerzas y de momentos, sería necesario desmembrar la estructura y tener en cuenta todas las fuerzas que actúan sobre cada miembro. La solución por el método de los trabajos virtuales lleva consigo una operación más sencilla.

7/2. Se lleva el peso P a una posición de equilibrio aplicando el par de momento M al extremo de una de las dos barras paralelas articuladas de la manera que se indica. Los pesos de las barras son despreciables y se supone que no hay rozamiento alguno. Determinar la expresión del ángulo de equilibrio θ que forman las barras con la vertical para un valor dado de M .

Solución. El esquema dado constituye el diagrama de fuerzas activas del mecanismo completo, ya que P y M son las únicas fuerzas y momentos exteriores que trabajan sobre el sistema durante una variación de θ .

La posición vertical del centro de gravedad G se halla a una distancia h por debajo de la horizontal de referencia y tenemos $h = b \cos \theta + c$. El trabajo efectuado por P durante un movimiento δh en la dirección de P es

$$\begin{aligned} + P \delta h &= P \delta(b \cos \theta + c) \\ &= P (-b \sin \theta \delta\theta + 0) \\ &= -Pb \sin \theta \delta\theta. \end{aligned}$$

El signo menos indica que el trabajo es negativo para un valor positivo de $\delta\theta$. La constante c desaparece porque su derivada es cero.

Con θ medido positivo en sentido horario, $\delta\theta$ también lo será en el mismo sentido. Así pues, el trabajo efectuado por el par M de sentido horario será $+M\delta\theta$. Sustituyendo en la ecuación del trabajo virtual se tiene

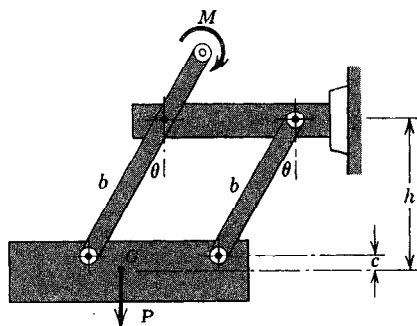
$$[\delta U = 0] \quad M \delta\theta + P \delta h = 0$$

lo cual da

$$\begin{aligned} M \delta\theta &= Pb \sin \theta \delta\theta \\ \theta &= \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{M}{Pb} \end{aligned}$$

Resp.

Como $\sin \theta$ no puede ser mayor que la unidad, M estará limitado a valores que no sean mayores que Pb .



Problema 7/2

La ventaja de resolver este problema por el método del trabajo virtual se ve inmediatamente cuando se aborda su solución mediante el equilibrio de fuerzas y momentos. En tal caso deberían dibujarse diagramas de sólido libre para las tres partes móviles y habría que tener en cuenta las reacciones internas en las articulaciones. Para seguir estos pasos sería necesario incluir en el análisis la posición horizontal de G respecto a los puntos de unión de las dos barras, aun cuando al final desaparezca la referencia a esta posición al resolver las ecuaciones. Resulta evidente, pues, que en este problema el método de los trabajos virtuales lleva directamente de causa a efecto y evita la referencia a cantidades sin importancia.

7/3. Se aplica una fuerza horizontal F al extremo de una de las tres barras articuladas iguales de la figura, cuyo peso es P y su longitud l . Determinar la configuración de equilibrio.

Solución. La configuración de equilibrio puede quedar especificada determinando los ángulos θ_1 , θ_2 y θ_3 . Luego, se requerirán tres coordenadas independientes para describir unívocamente las posiciones de las barras. En consecuencia, el problema es de *tres grados de libertad*. Será necesario aplicar tres veces el principio $\delta U = 0$, haciendo variar en cada aplicación *una* de las coordenadas, dejando constantes las otras dos.

El diagrama de las fuerzas activas muestra los tres pesos y la carga aplicada F . De la geometría del sistema se deduce

$$h_1 = \frac{l}{2} \cos \theta_1, \quad h_2 = l (\cos \theta_1 + \frac{1}{2} \cos \theta_2),$$

$$h_3 = l (\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \frac{1}{2} \cos \theta_3),$$

$$x = l (\sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \sin \theta_3).$$

Si se hace variar primeramente θ_3 manteniendo constantes θ_1 y θ_2 , el principio de los trabajos virtuales requiere:

$$[\delta U = 0]_{\theta_3} \quad F \delta x + P \delta h_3 = 0, \quad Fl \cos \theta_3 \delta \theta_3 - P \frac{l}{2} \sin \theta_3 \delta \theta_3 = 0,$$

$$\operatorname{tg} \theta_3 = \frac{2F}{P}. \quad \text{Resp.}$$

A continuación, se hace variar θ_2 manteniendo constantes θ_1 y θ_3 , con lo que,

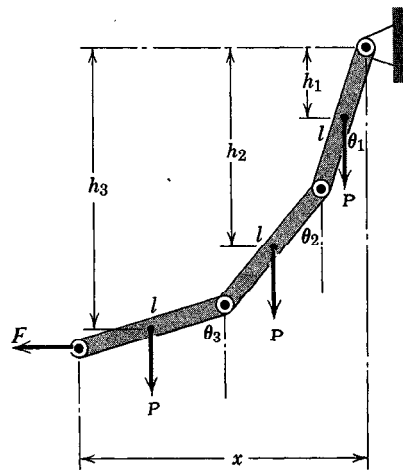
$$[\delta U = 0]_{\theta_2} \quad F \delta x + P \delta h_3 + P \delta h_2 = 0, \\ Fl \cos \theta_2 \delta \theta_2 - Pl \sin \theta_2 \delta \theta_2 - P \frac{l}{2} \sin \theta_2 \delta \theta_2 = 0,$$

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{2F}{3P}. \quad \text{Resp.}$$

Por último, se hace variar θ_1 mientras se mantienen constantes θ_2 y θ_3 . Así,

$$[\delta U = 0]_{\theta_1} \quad F \delta x + P \delta h_3 + P \delta h_2 + P \delta h_1 = 0 \\ Fl \cos \theta_1 \delta \theta_1 - Pl \sin \theta_1 \delta \theta_1 - Pl \sin \theta_1 \delta \theta_1 - P \frac{l}{2} \sin \theta_1 \delta \theta_1 = 0$$

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{2F}{5P} \quad \text{Resp.}$$



Problema 7/3

7/4. La posición angular de la conexión telescópica OA respecto al eje z está regulada por el momento **M** del par aplicado al árbol OB. El extremo A está confi-

nado a deslizar a lo largo de un árbol fijo CD . La varilla de conexión tiene un peso \mathbf{P} y centro de gravedad en G que siempre se halla a un tercio de la distancia de O a A . Determinar, en ausencia de rozamiento, el momento \mathbf{M} que se necesita para mantener el equilibrio para un valor dado de h .

Solución. El diagrama de fuerzas activas del sistema sólo contiene \mathbf{M} y \mathbf{P} , ya que las demás fuerzas exteriores son reacciones que no trabajan. El sistema tiene un sólo grado de libertad, que puede asignarse a h , γ , o a la distancia \overline{OA} . El trabajo virtual efectuado por \mathbf{M} es

$$\mathbf{kM} \cdot \mathbf{k} \delta\gamma = M \delta\gamma.$$

El trabajo virtual efectuado por \mathbf{P} es

$$\mathbf{P} \cdot \delta\mathbf{r} = -\mathbf{kP} \cdot \frac{1}{3} \delta(\mathbf{i}a + \mathbf{j}h \operatorname{ctg} \beta + \mathbf{k}h) = -\frac{1}{3} P \delta h.$$

Pero $h \operatorname{ctg} \beta = a \operatorname{tg} \gamma$, por lo que

$$\delta h \operatorname{ctg} \beta = a \sec^2 \gamma \delta\gamma = \frac{1}{a} (h^2 \operatorname{ctg}^2 \beta + a^2) \delta\gamma.$$

Así pues, la ecuación de los trabajos virtuales del sistema será

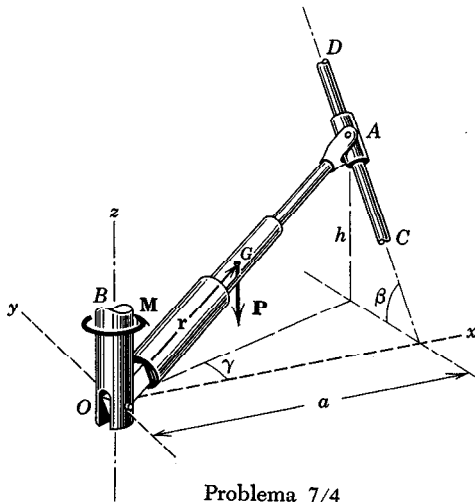
$$[\delta U = 0] \quad M \delta\gamma - \frac{1}{3} P \delta h = 0,$$

$$\left[M - \frac{P}{3a \operatorname{ctg} \beta} (h^2 \operatorname{ctg}^2 \beta + a^2) \right] \delta\gamma = 0.$$

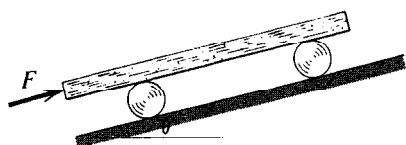
Luego

$$M = \frac{P}{3a} (h^2 \operatorname{ctg} \beta + a^2 \operatorname{tg} \beta).$$

Resp.



Problema 7/4

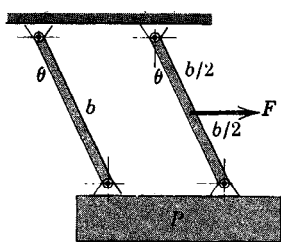


Problema 7/5

Problemas

7/5. El tablón pesado de peso P está apoyado sobre dos rodillos, cada uno de los cuales tiene un peso p . Determinar la fuerza F aplicada al tablón paralelamente al plano inclinado, necesaria para iniciar el movimiento del tablón hacia arriba de dicho plano. Supóngase que los rodillos no deslizan. El tablón se mueve el doble que los centros de los rodillos.

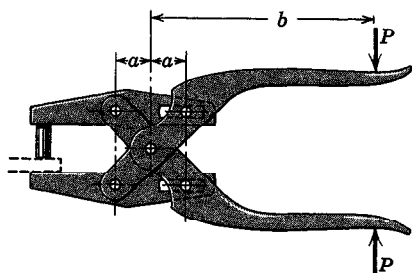
Resp. $F = (P + p) \sin \theta$



Problema 7/6

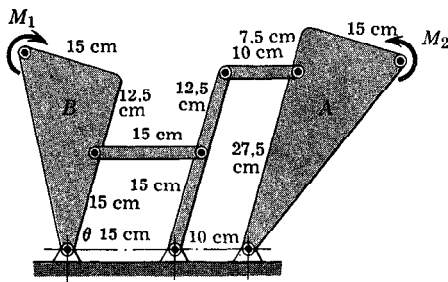
7/6. El peso P está suspendido de las barras paralelas articuladas de peso despreciable. Determinar el ángulo de equilibrio θ que alcanzan las barras bajo la acción de una fuerza horizontal F aplicada al punto medio de una de ellas.

Resp. $\theta = \arctg \frac{F}{2P}$



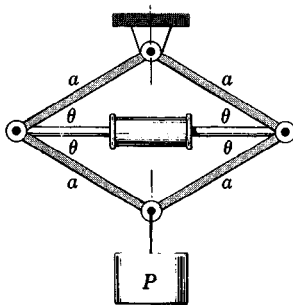
Problema 7/7

7/7. Hallar la fuerza Q ejercida por la taladradora de papel del problema 4/56 cuya figura se reproduce.



Problema 7/11

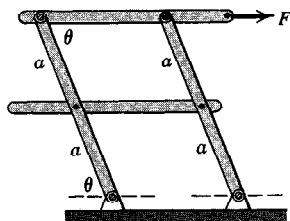
7/11. Las dos placas triangulares oscilantes A y B están unidas por el paralelogramo articulado que se indica. Los ejes de todos los pasadores de las articulaciones están verticales, por lo que todos los movimientos posibles del mecanismo tendrán lugar en un plano horizontal. A partir del conocimiento del principio de los trabajos virtuales y de la observación de la configuración geométrica de los desplazamientos virtuales posibles, determinar por inspección el valor del momento M_2 que hay que aplicar a la placa A para equilibrar el sistema cuando se aplique a la placa B el par de momento M_1 .



Problema 7. 12

7/12. El cilindro hidráulico se utiliza para ensanchar el cuadrilátero articulado y elevar la carga P . Para la posición indicada, determinar la compresión C en el cilindro. Despreciar los pesos de todas las partes menos el de P .

$$\text{Resp. } C = P \operatorname{ctg} \theta$$

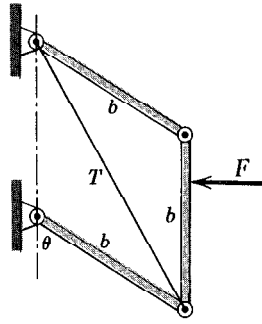


Problema 7/13

7/13. El peso de cada una de las cuatro barras uniformes es P . Determinar la fuerza F que hay que aplicar para mantenerlas en su lugar en el plano vertical como se muestra.

7/14. Determinar la tensión T del hilo diagonal que evite la deformación del paralelogramo articulado al someterlo a la acción de la fuerza horizontal F . Despréciense los pesos de las barras.

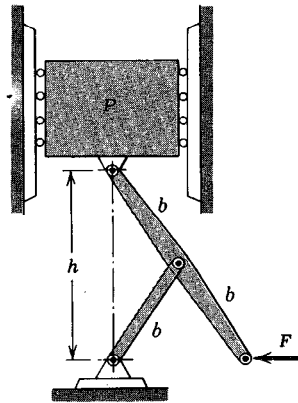
Resp. $T = F \cos \theta \sin \frac{\theta}{2}$



Problema 7/14

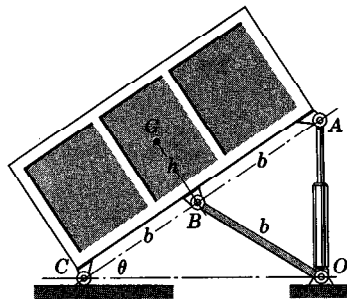
7/15. El mecanismo de la figura sirve para situar el peso P en las guías verticales lisas. Determinar la expresión de la fuerza horizontal F necesaria para soportar P a un valor cualquiera de h . ¿Sería más eficaz la acción si se aplicara F en una dirección que no fuera la horizontal?

Resp. $F = P \sqrt{\left(\frac{2b}{h}\right)^2 - 1}$

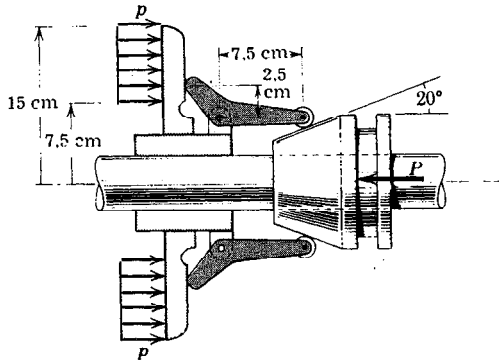


Problema 7/15

7/16. El cilindro hidráulico OA y la barra OB se disponen de manera que gobiernen la inclinación de la carga que tiene un peso P y centro de gravedad en G . La esquina inferior C puede rodar libremente en el plano horizontal al alargarse el vástago del cilindro. Determinar la fuerza F que debe ejercer éste para mantener el equilibrio a un ángulo dado θ .



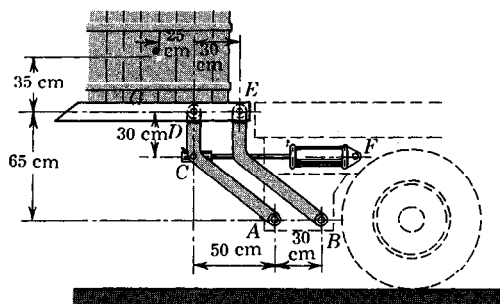
Problema 7/16



Problema 7/17

7/17. En la figura puede verse una sección de un mecanismo para accionar el embrague de un motor marino. La posición del collar cónico sobre el eje está gobernada por la fuerza P , y un ligero movimiento hacia la izquierda hace que las dos palancas se apoyen contra la cara trasera de la placa de embrague, la cual origina una presión uniforme p sobre la superficie de contacto de la placa. Esta superficie es un anillo circular de radio exterior 15 cm y radio interior 7,5 cm. Determinar por el método de los trabajos virtuales la fuerza P necesaria para originar una presión embrague-placa de 24 N/cm^2 . La placa de embrague puede deslizarse libremente a lo largo del collar al que están fijos los ejes de las palancas.

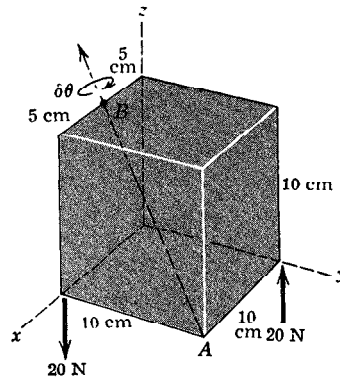
Resp. $P = 1545 \text{ N}$



Problema 7/18

7/18. En la figura puede verse una plataforma para cargar un camión situada en la trasera del mismo. Su posición la regula un cilindro hidráulico que le aplica una fuerza en C . Los miembros giran alrededor de ejes fijos al chasis del camión en A , B y F . Determinar la fuerza P que aplica el cilindro para mantener la plataforma en la posición representada en la figura. Puede despreciarse el peso de la plataforma y los miembros frente a los 250 kp de la caja de centro de gravedad G .

7/19. El cubo de 10 cm de arista experimenta una rotación infinitesimal $\delta\theta$ alrededor del eje AB en el sentido indicado. Determinar el trabajo virtual δU efectuado por el par compuesto por las dos fuerzas de 20 N.

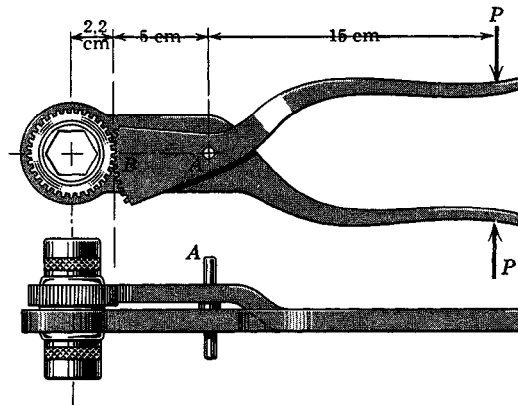


Problema 7/19

7/20. El eje motor de un automóvil de tracción trasera gira 3,27 revoluciones por cada revolución de las ruedas de 65 cm de diámetro. Si el automóvil pesa 1700 kg y sube a velocidad constante una pendiente del 10 %, calcular el momento M del par que ha de aplicar el motor al eje mencionado. Despréciense la resistencia del aire y todos los rozamientos mecánicos.

Resp. $M = 16,8 \text{ m}\cdot\text{kp}$

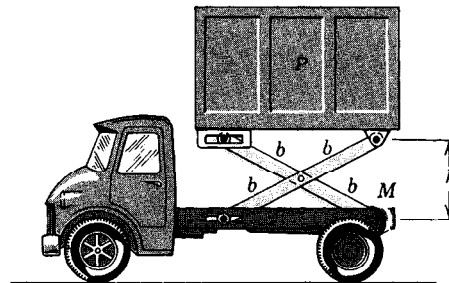
7/21. Determinar el momento M ejercido por la llave de astronauta descrita en el problema 4/67 cuya figura se reproduce. La fuerza de apriete sobre los mangos es $P = 150 \text{ N}$.



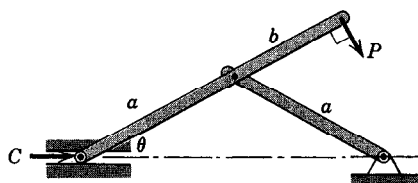
Problema 7 21

7/22. La caja del camión de suministro de alimentos para aviones tiene un peso P cuando está cargada y se eleva aplicando un par de momento M al extremo inferior de la barra articulada al bastidor del camión. Las ranuras horizontales permiten que se despliegue el sistema articulado al elevarse la caja. Expresar M en función de h .

Resp. $M = 2Pb \sqrt{1 - \left(\frac{h}{2b}\right)^2}$



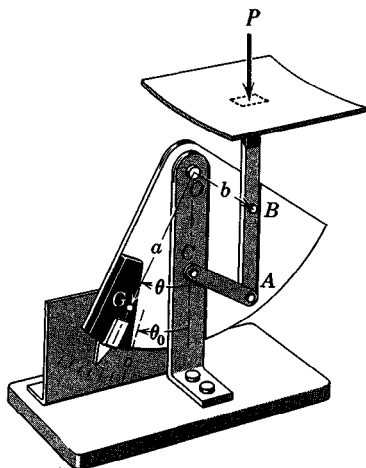
Problema 7/22



Problema 7/23

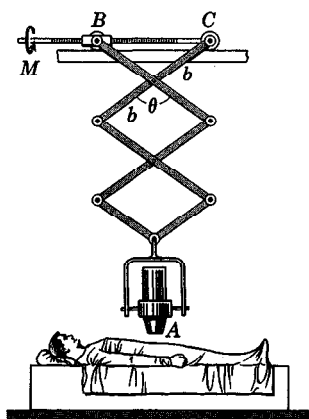
7/23. Si hay aplicada normalmente a la barra una fuerza P , tal como se indica en la figura, determinar qué fuerza C habrá que aplicar para mantener el equilibrio a un ángulo θ del sistema articulado.

$$\text{Resp. } C = \frac{P}{2 \sin \theta} \left(\frac{b}{a} + \cos 2\theta \right)$$



Problema 7/24

7/24. El pesacartas consta de un sector circular de peso p_0 suspendido de O y con centro de gravedad en G . El platillo y el vástago vertical AB tienen un peso p_1 y están articulados al sector en B . El extremo A está articulado a la barra uniforme AC de peso p_2 , la cual está articulada a su vez a la estructura fija. La figura $OBAC$ forma un paralelogramo y el ángulo GOB es recto. Determinar la relación existente entre el peso P a medir y el ángulo θ suponiendo que $\theta = \theta_0$ cuando $P = 0$.

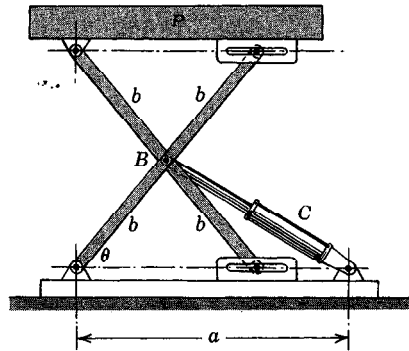


Problema 7/25

7/25. En la figura se ha representado un dispositivo para medir la radiación del cuerpo de un paciente. El contador de radiación A tiene un peso P y se sitúa en posición haciendo girar el tornillo de paso L con un par de momento M , regulándose así la distancia BC . Relacionar el momento M con la carga P para valores dados de b y θ . Despréciense todos los rozamientos y el peso de las barras frente a P .

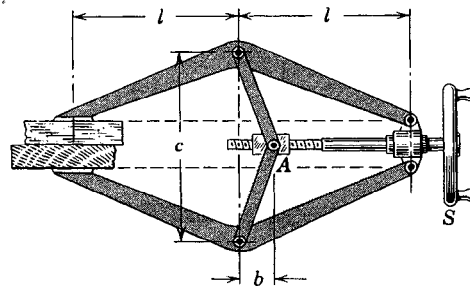
$$\text{Resp. } M = \frac{5PL}{4\pi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$$

7/26. Determinar la expresión de la presión p de aceite que debe haber en el cilindro hidráulico C para que su vástago pueda aguantar las patas de la mesa pesada de peso P para un valor dado de θ . El área del émbolo es A . Despréciese los pesos de todas las partes menos el P .



Problema 7/26

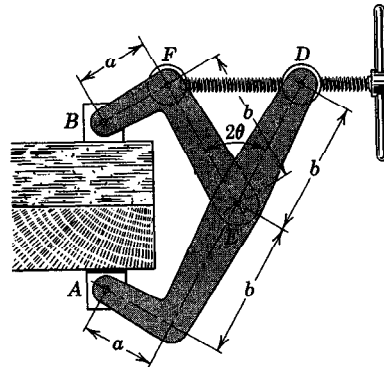
7/27. La mordaza para fines especiales se acciona haciendo girar el tornillo en sentido dextrógiro para forzar hacia la derecha al bloque roscado A , apretando en consecuencia las mordazas por acción de las palancas. Expresar la fuerza de sujeción F entre mordazas en función del momento M del par aplicado al volante del tornillo. Despréciese todos los rozamientos. Una vuelta del tornillo hace adelantar la rosca una longitud L (paso de rosca del tornillo).



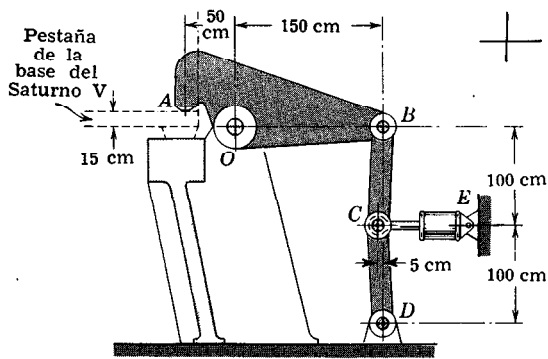
Problema 7/27

$$\text{Resp. } F = \frac{\pi M c}{4 L b}$$

7/28. Determinar la fuerza entre las mordazas del perro en función de un momento M ejercido en el mango del tornillo de ajuste. El tornillo tiene un paso L (avance por revolución) y hay que despreciar el rozamiento.



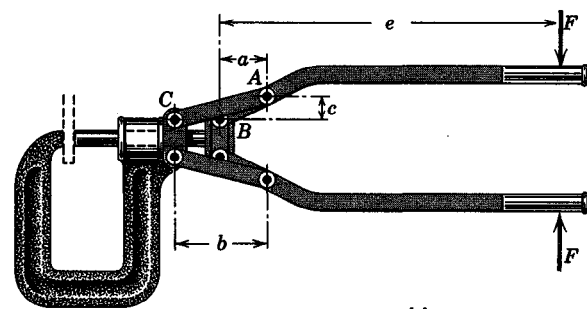
Problema 7/28



Problema 7/29

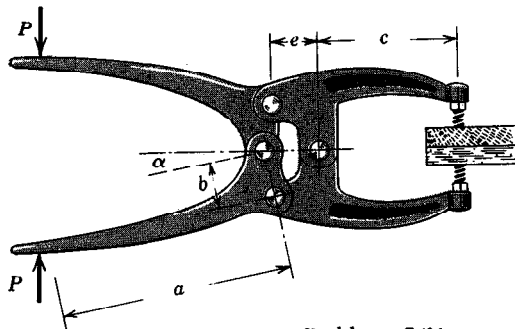
7/29. El esquema muestra la configuración aproximada de uno de los sistemas que fijan la pestaña de la base del vehículo de cohetes Saturno V al pedestal de su plataforma antes del lanzamiento. Calcular la fuerza F de sujeción previa en A si el vástago CE se halla sometido a tensión por efecto de una presión de fluido de 160 kp/cm^2 que se ejerce sobre la cara izquierda del émbolo del cilindro hidráulico. El émbolo tiene una superficie de 100 cm^2 . El peso del conjunto es considerable, pero es pequeño frente a la fuerza de sujeción originada, por lo que podemos despreciarlo.

Resp. $F = 480\,000 \text{ kp}$



Problema 7/30

7/30. Determinar la fuerza P desarrollada en las mandíbulas del remachador del problema 4/70 que reproducimos.



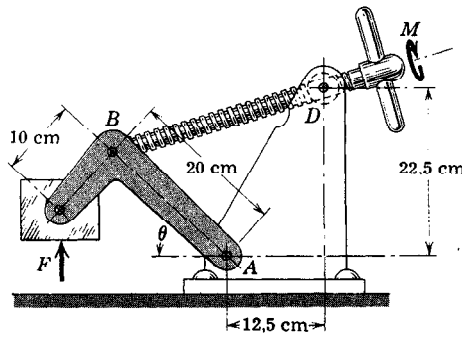
Problema 7/31

7/31. Reproducimos las tenazas del problema 4/60 con dimensiones simbólicas. Determinar la fuerza de sujeción F en función de α para una fuerza dada P aplicada a las empuñaduras.

Resp. $F = P \frac{e}{c} \left(\frac{a}{b} \cotg \alpha - 1 \right)$

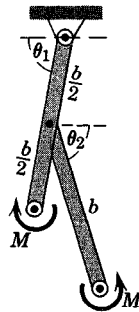
7/32. En la prensa de tornillo, un par de momento M aplicado a la empuñadura del tornillo aprieta la mordaza aumentando la distancia BD , produciendo en consecuencia una fuerza de sujeción F . El tornillo está roscado a través del collar que puede girar alrededor del eje horizontal que pasa por D y tiene un paso (avance por revolución) de 4,25 mm. Suponer ausencia de rozamientos, expresar la fuerza de sujeción F en newtons en función del momento M medido en cm.N para la posición $\theta = 30^\circ$.

Resp. $F = 10,76 \text{ MN}$



Problema 7/32

7/33. Cada una de las barras uniformes tiene un peso P y está sometida a un par de momento M en su extremo inferior, aplicado en el sentido que se indica. Determinar los ángulos θ_1 y θ_2 de equilibrio.

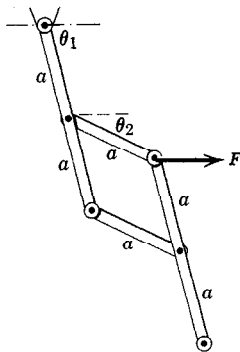


Problema 7/33

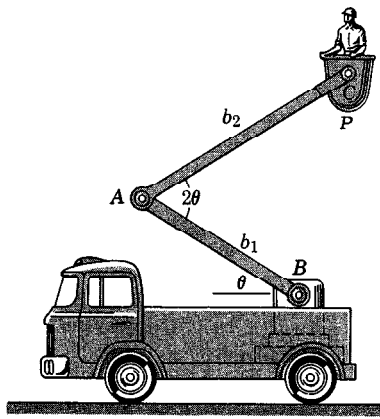
7/34. Cada una de las barras articuladas uniformes tiene un peso p por unidad de longitud. Determinar los ángulos θ_1 y θ_2 que forma el mecanismo bajo la acción de la fuerza horizontal F .

$$\text{Resp. } \theta_1 = \arctg \frac{9pa}{F}$$

$$\theta_2 = \arctg \frac{3pa}{F}$$

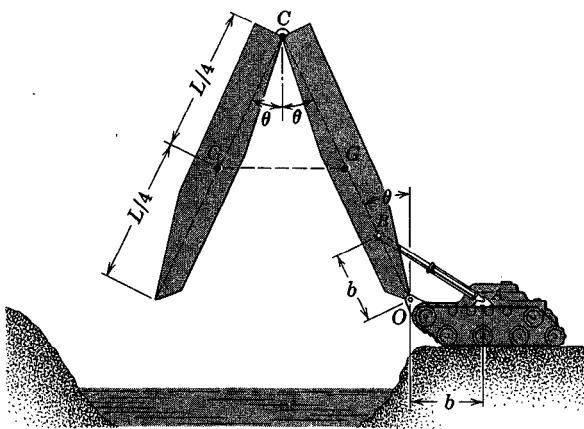


Problema 7/34



Problema 7/35

► 7/35. En el vehículo de conservación para acceso a puntos altos, una unidad motor-engranaje montada en la unión de los brazos en A proporciona a dicha unión un par interior y mantiene el ángulo CAB exactamente igual al doble de θ al ir elevando la carga P . Si $b_2 > b_1$, determinar el momento exterior M_1 que hay que aplicar en B al brazo AB para empezar a elevar la carga. Despreciar los pesos de los dos miembros. Estudiar el trabajo efectuado sobre el sistema y justificar la inclusión del momento interior en A al aplicar la ecuación de los trabajos virtuales.



Problema 7/36

► 7/36. Desde un tanque se tiende un puente de tijera de luz L por acción del cilindro hidráulico de vástago AB . Si cada una de las dos secciones iguales del puente tiene un peso P con centro de gravedad G , relacionar la fuerza F en el cilindro hidráulico con el ángulo θ de equilibrio. Un mecanismo interior mantiene en C el ángulo 2θ entre las dos secciones. ¿Por qué deberá calcularse el trabajo del momento interno en C ? Discutir la elección del método de los trabajos virtuales para este problema.

$$\text{Resp. } F = \frac{PL\sqrt{2}}{b} \sqrt{1 + \sin \theta} \operatorname{tg} \theta$$

►7/37. La figura representa un mecanismo para medir la profundidad de una zanja submarina formada en el fondo del océano mediante un chorro de agua, para tender en ella cables telefónicos. El carro A se mueve horizontalmente a velocidad constante detrás del chorro de agua y puede considerarse que es una plataforma estable. Cada una de las barras uniformes BC y DE tiene un peso P_1 y la barra y sonda EFC tiene un peso P_2 . La densidad del material de la barra es μ y la del agua del mar μ_a . El coeficiente de rozamiento eficaz entre la sonda y el fondo de la zanja es f . Determinar la componente vertical N de la fuerza ejercida sobre EFC en F por el fondo de la zanja.

Resp.

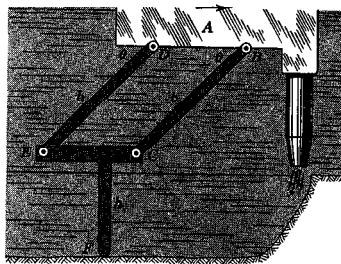
$$N = (P_1 + P_2) \left(1 - \frac{\mu_a}{\mu}\right) \frac{1}{1 + f \operatorname{tg} \theta}$$

►7/38. Sobre una partícula cuyo vector de posición es $\mathbf{r} = ix + jy + kz$ se ejerce una fuerza $\mathbf{F} = iF_x + jF_y + kF_z$. La partícula está confinada a moverse a lo largo de una recta cuyos cosenos directores son l , m y n . Escribir una expresión del trabajo virtual efectuado por \mathbf{F} en función de una variación virtual δx de la coordenada de la partícula.

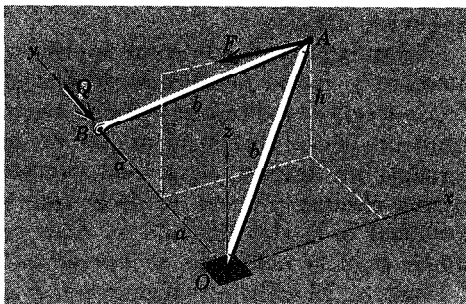
►7/39. Cada una de las dos barras uniformes tiene una longitud b y un peso P . Las articulaciones en A y O son de rótula y la articulación en B permite el deslizamiento a lo largo del eje y y la rotación de la barra AB alrededor de este eje. Para valores dados de a y h , determinar los valores necesarios de la fuerza F , paralela al eje x , y de la fuerza Q .

Resp.

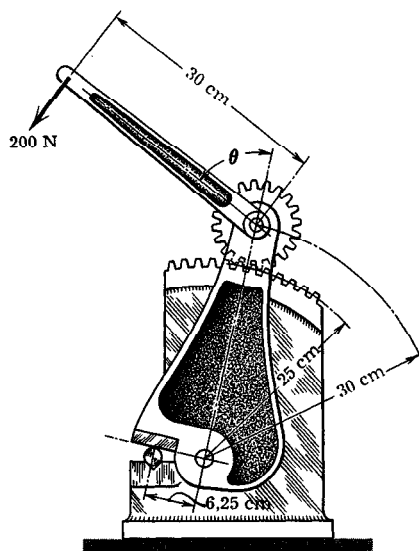
$$F = \frac{P \sqrt{b^2 - h^2 - a^2}}{h}, \quad Q = \frac{Pa}{2h}$$



Problema 7/37



Problema 7/39



Problema 7/40

◀ 7/40. Determinar la fuerza Q en la mandíbula de la cizalla del problema 4/69 repetida aquí. (Sugerencia: Sustituir la fuerza de 200 N por una fuerza y un par en el centro de la rueda pequeña. Hay que determinar con precisión el desplazamiento angular absoluto del engranaje.

Resp. $Q = 6590$ N

40. Sistemas con miembros elásticos. Cuando se halla en equilibrio un sistema de cuerpos interconectados que contiene miembros elásticos, dicho sistema habrá absorbido un cierto trabajo realizado sobre él por las fuerzas activas al comprimir o extender los miembros elásticos. Para cubrir el trabajo realizado sobre o por los miembros elásticos, deberá ampliarse el principio de los trabajos virtuales enunciado para sistemas ideales. Antes de ampliar dicho principio, deberemos estudiar el trabajo realizado por una fuerza al deformar un cuerpo elástico.

El trabajo realizado sobre un miembro elástico queda almacenado en dicho miembro y recibe el nombre de *energía potencial de deformación elástica* V_e . Esta energía es utilizable y puede recuperarse haciendo que el miembro trabaje sobre un cierto cuerpo al anular de nuevo su compresión o extensión. Consideremos un resorte, figura 85, comprimido por una fuerza F . El resorte se supone elástico y lineal, es decir, que la fuerza F resulta ser directamente proporcional a la deformación x . Esta relación se escribe en la forma $F = kx$, donde k es la *constante recuperadora* y constituye una medida de la rigidez del resorte. El trabajo realizado por F durante un movimiento dx es $dU = F dx$, con lo que la energía potencial de deformación del resorte correspondiente a una compresión x es

$$V_e = \int_0^x F dx = \frac{1}{2} kx^2.$$

Luego la energía potencial del resorte es igual al área del triángulo sombreado del diagrama de F en función de x . El trabajo virtual realizado por F durante un desplazamiento δx es la variación virtual de energía potencial del resorte y es

$$\delta V_e = F \delta x = kx \delta x.$$

Si en lugar de comprimir el resorte lo estiramos, se requerirá una fuerza tensora que también realizará un trabajo positivo sobre el resorte ya que el movimiento se realizará también en el mismo sentido que la fuerza. Todo cuerpo que presente una relación lineal entre la fuerza aplicada y la deformación resultante se dice que es elástico y podrá analizarse de esta manera.

El principio de conservación de la energía exige que el trabajo realizado sobre un sistema mecánico por fuerzas exteriores sea igual a su variación de energía. Este principio debe cumplirse, tanto para desplazamientos virtuales elementales, como para desplazamientos reales finitos. Luego, el principio de los trabajos virtuales deberá extenderse ahora en la forma siguiente: *cuando un sistema de cuerpos con miembros elásticos esté en equilibrio, el trabajo total realizado por todas las fuerzas activas exteriores al sistema durante un desplazamiento virtual cualquiera compatible con las ligaduras es igual a la variación de energía de deformación del sistema*. Este principio puede expresarse simbólicamente mediante la ecuación

$$\delta U = \delta V_e \quad (57)$$

donde δU es el trabajo virtual total de todas las fuerzas activas exteriores incluidos los pesos de los miembros y donde δV_e es la variación total de energía

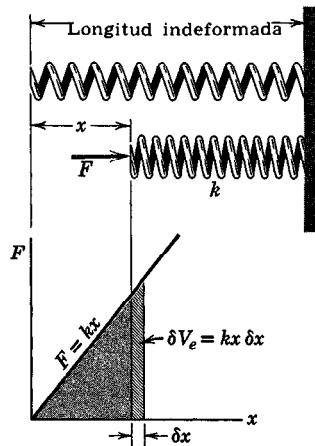


Figura 85

de deformación del sistema durante el desplazamiento virtual. Si δU es positivo, δV_e será positivo y si δU es negativo, δV_e será también una cantidad negativa.

En problemas de un solo grado de libertad, bastará aplicar una sola vez la ecuación 57. Si hubieren n grados de libertad, habría que aplicar n veces el principio. En cada aplicación se consideran los movimientos del sistema debidos a un desplazamiento virtual cada vez, mientras se mantienen constantes las restantes $n-1$ coordenadas.

La ecuación 57 halla una aplicación importante en el análisis de sistemas, tanto isostáticos como hiperestáticos. La elasticidad del sistema puede provenir de la inclusión de resortes manufacturados, tales como el resorte espiral de la figura 85, o puede deberse a la deformación elástica natural de los miembros estructurales cargados. En el caso de un miembro de dos fuerzas esbelto de sección recta uniforme A y longitud l , la acción puede tratarse como la de un resorte unidimensional. Si es E el módulo de Young y es e la deformación, el esfuerzo será, es virtud de la ley de Hooke $\sigma = eE$, tensión o compresión. Esta relación se convierte en la forma $F = kx$ escribiendo $\sigma A = (EA/l)(el)$, con lo cual EA/l es la constante de resorte equivalente para una barra elástica. La energía de deformación elástica de la barra, por tanto, es

$$V_e = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{EA}{l} \right) (el)^2 = \frac{\sigma^2 Al}{2E}.$$

En el caso de un cuerpo elástico que contenga una distribución de esfuerzos bi- o tridimensional, las relaciones de la ley de Hooke generalizada permiten escribir expresiones de la energía de deformación V_e del cuerpo en función de los esfuerzos o de las deformaciones. Estas expresiones pueden verse en los textos de Elasticidad y de análisis de esfuerzos y no insistiremos aquí sobre ellas.

Una variante del principio de los trabajos virtuales, presentado en la ecuación 57, es el llamado método de la carga unitaria y suele emplearse en análisis estructural para hallar la desviación de una parte cualquiera de una estructura cargada. El trabajo realizado por una carga unitaria ficticia o virtual, durante la aplicación de cargas reales, se hace igual al incremento de la energía de deformación resultante cuando las fuerzas internas debidas a la carga ficticia trabajan a lo largo de los desplazamientos originados por las cargas reales. El desplazamiento Δ de un punto cualquiera de una estructura se puede hallar colocando la carga unitaria en dicho punto dirigida según Δ , con lo que el trabajo de la carga unitaria virtual será $(1)(\Delta)$. Se despeja entonces Δ de la ecuación trabajo-energía.

Problema tipo

7/41. El collar A puede deslizarse libremente sobre el árbol vertical fijo y comprime el resorte por acción del peso P . Si el resorte no está comprimido en la posición

correspondiente a $\theta = 0$, determinar el ángulo θ de equilibrio. La constante del resorte es k , en las articulaciones es despreciable el rozamiento y los pesos de los brazos, collar y resorte son despreciables.

Solución. La compresión del resorte es

$$x = 2a \sin \frac{\theta}{2}.$$

La variación de energía potencial elástica durante un cambio virtual de θ es

$$\delta V_e = kx \delta x = k \left(2a \sin \frac{\theta}{2} \right) \delta \left(2a \sin \frac{\theta}{2} \right) = 2ka^2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \delta \theta.$$

El trabajo efectuado por el peso es

$$\delta U = P \delta h = P \delta \left(3a \sin \frac{\theta}{2} \right) = \frac{3Pa}{2} \cos \frac{\theta}{2} \delta \theta.$$

Para la posición de equilibrio

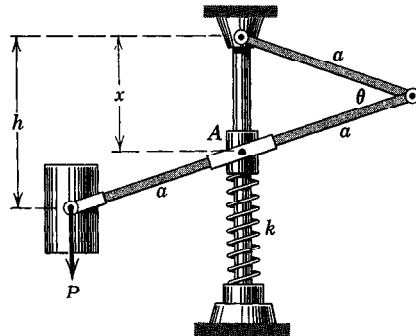
$$[\delta U = \delta V_e] \quad \frac{3Pa}{2} \cos \frac{\theta}{2} \delta \theta = 2ka^2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \delta \theta,$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = 0, \quad \sin \frac{\theta}{2} = \frac{3P}{4ka}.$$

La primera solución da el valor físicamente imposible $\theta = \pi$. La segunda solución da

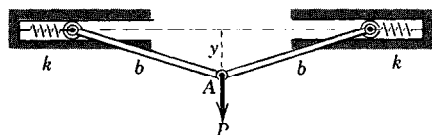
$$\theta = 2 \arcsen \frac{3P}{4ka} \quad \text{Resp.}$$

que presenta la limitación $k > 3P/(4a)$. Si k fuera menor que este valor, el peso llevaría al mecanismo a la posición $\theta = \pi$ si ello fuera posible físicamente.



Problema 7/41

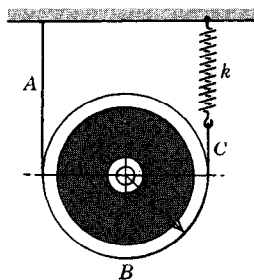
Problemas



Problema 7/42

7/42. Cada uno de los dos resortes tiene una constante de rigidez k y está indeformado cuando $y = 0$. Despreciar los pesos de las barras y determinar la fuerza P necesaria para originar un desplazamiento dado y del punto A .

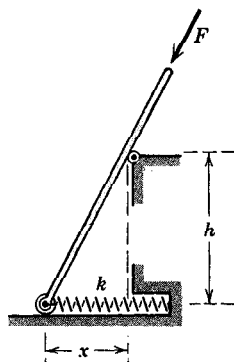
$$\text{Resp. } P = 2ky \left(\frac{b}{\sqrt{b^2 - y^2}} - 1 \right)$$



Problema 7/43

7/43. La rueda uniforme de peso P se mantiene en el plano vertical por acción de la cinta ligera ABC y del resorte de rigidez k . Si se suelta la rueda partiendo de la posición en la cual es nula la fuerza en el resorte, determinar el ángulo θ que gira la rueda en sentido horario desde la posición inicial hasta la final.

$$\text{Resp. } \theta = \frac{P}{4kr}$$

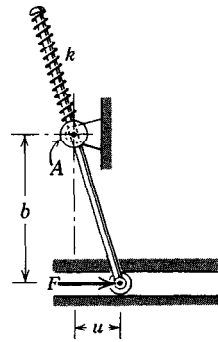


Problema 7/44

7/44. Determinar el valor que tiene x en el equilibrio de la barra sometida a la acción del resorte. Éste tiene una rigidez k y está indeformado cuando $x = 0$. La fuerza F se ejerce en la dirección de la barra y el peso de ésta es despreciable.

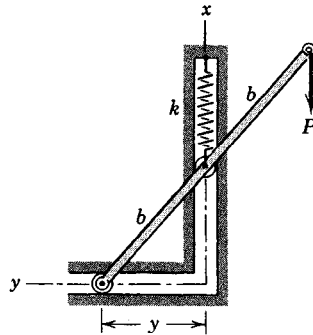
7/45. Cuando $u = 0$, el resorte de rigidez k está indeformado. Al aumentar u , la varilla desliza a través del collar que puede girar alrededor de A y comprime al resorte entre el collar y el extremo de la varilla. Determinar la fuerza F necesaria para originar un desplazamiento dado u . Suponer ausencia de rozamiento y despreciar el peso de la varilla.

$$\text{Resp. } F = \left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 + u^2}}\right)ku$$



Problema 7/45

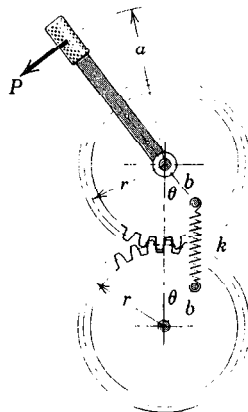
7/46. Determinar el valor de equilibrio de la coordenada y en el mecanismo sometido a la acción de la carga vertical P . El resorte de rigidez k está indeformado cuando $y = 0$, y el peso de la barra es despreciable frente a P .



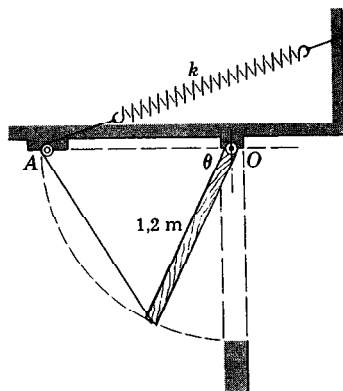
Problema 7/46

7/47. La empuñadura es solidaria a una de las ruedas dentadas unidas por resorte, las cuales están montadas sobre cojinetes fijos. El resorte de rigidez k , une dos espigas montadas en las caras de las ruedas. Cuando la empuñadura está en posición vertical, $\theta = 0$ y la fuerza del resorte es nula. Determinar la fuerza P necesaria para mantener el equilibrio en una posición correspondiente a un ángulo θ .

$$\text{Resp. } P = \frac{4kb^2}{a} \sin \theta (1 - \cos \theta)$$

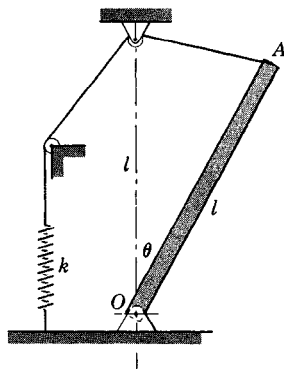


Problema 7/47



Problema 7/48

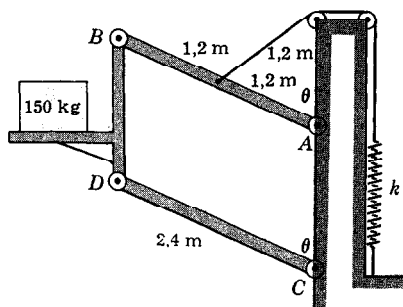
7/48. En la figura puede verse la sección de una puerta de ventilación, uniforme, de 100 kg articulada por su borde superior en O . La puerta está gobernada por el cable accionado por resorte que pasa por la pequeña polea situada en A . El resorte tiene una constante de rigidez de 20 kp por metro de alargamiento y su deformación es nula cuando $\theta = 0$. Determinar el ángulo θ de equilibrio.



Problema 7/49

7/49. En la figura puede verse de perfil la puerta de un tragaluz de peso P cuyo centro de gravedad está en el punto medio de AO . La puerta está equilibrada por la acción del resorte de rigidez k , el cual está indeformado cuando la puerta se halle en el plano vertical con $\theta = 0$. Determinar la constante k de rigidez necesaria para equilibrar la puerta en una posición de equilibrio.

Resp. $k = \frac{P}{2l}$, independiente de θ

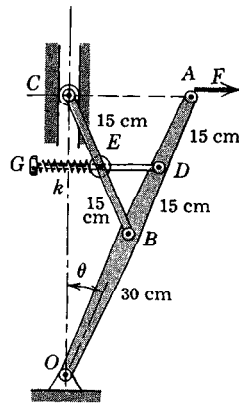


Problema 7/50

7/50. Especificar la constante k de rigidez del resorte que asegure el equilibrio del entramado elevador. Cuando $\theta = 0$, el resorte está indeformado. Las barras AB y CD son miembros uniformes de 100 kg cada uno y el miembro BD con su carga pesa 150 kg.

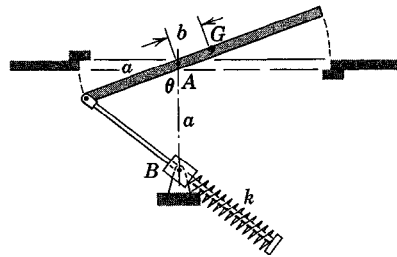
7/51. Para una fuerza horizontal $F = 250 \text{ N}$, determinar el ángulo θ de equilibrio del entramado cargado por resorte. La varilla DG pasa por el eslabón giratorio E y comprime al resorte, el cual tiene una rigidez de 50 N/cm y su longitud natural corresponde a $\theta = 0$. Despreciar los pesos de los miembros.

Resp. $\theta = 19^\circ 28'$



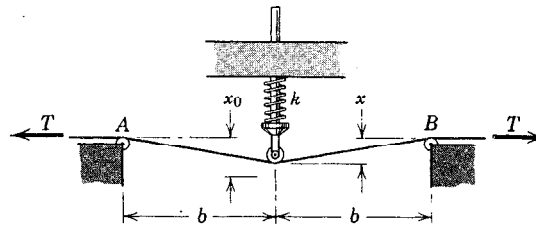
Problema 7/51

7/52. En la figura se ha representado la sección transversal de una puerta de ventilación articulada en A y de peso P con centro de gravedad en G. El resorte está comprimido por la varilla articulada al extremo inferior de la puerta y que atraviesa el bloque giratorio B. Cuando $\theta = 0$, el resorte no está deformado. Demostrar que con un valor adecuado de la constante k de rigidez del resorte, la puerta estará en equilibrio cualquiera que sea el ángulo θ .



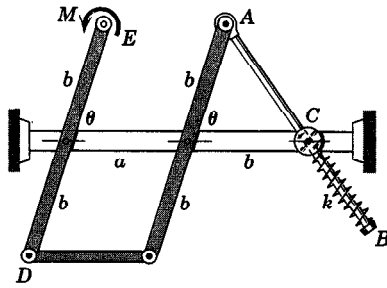
Problema 7/52

7/53. El rodillo accionado por resorte mantiene en tensión la cinta que pasa por los rodillos A y B. El resorte tiene una rigidez k y está indeformado cuando $x = x_0$. Determinar el valor de equilibrio de x para una tensión T de la cinta. Despreciar los radios de los rodillos frente a las demás dimensiones y resolver el caso en que x es muy pequeña frente a b .



Problema 7/53

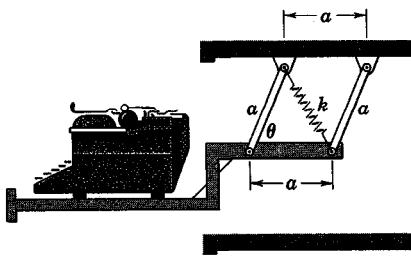
$$\text{Resp. } x = \frac{x_0}{1 + \frac{2T}{kb}}$$



Problema 7/54

7/54. En el mecanismo representado en la figura, la varilla AB desliza a través del collar que pivota en C y comprime al resorte cuando se aplica a la barra DE un par de momento M . Si el resorte tiene una constante k y no está comprimido en la posición correspondiente a $\theta = 0$, determinar el ángulo θ de equilibrio. Los pesos de las partes son despreciables.

$$\text{Resp. } \theta = \arcsen \frac{M}{kb^2}$$

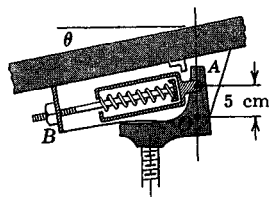
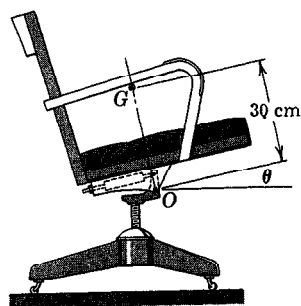


Problema 7/55

7/55. En la figura se ha representado una mesa simplificada para máquina de escribir. El resorte tiene una constante k y su longitud, cuando no está deformado, es $a/2$. Si es P el peso de la máquina y el estante, determinar el valor de k que mantenga el equilibrio para un ángulo θ determinado.

7/56. En la figura se ha representado un sillón giratorio de escritorio, junto con un detalle del mecanismo basculante de resorte. La estructura del sillón pivota sobre el punto fijo O de la base. El incremento de distancia entre A y B cuando se inclina el sillón hacia atrás respecto a O es el incremento de compresión del resorte. Éste tiene una constante de $89,3 \text{ kp/cm}$ y está indeformado cuando $\theta = 0$. Para pequeños ángulos de inclinación puede suponerse sin error sensible que el eje del resorte permanece paralelo al asiento. El centro de gravedad de una persona de 73 kg sentada, se halla en el punto G situado sobre la perpendicular en O al asiento. Determinar el ángulo θ de equilibrio. (Sugerencia: Puede visualizarse la deformación del resorte haciendo que la base se incline el ángulo requerido θ respecto a O mientras se mantiene el asiento en una posición fija.)

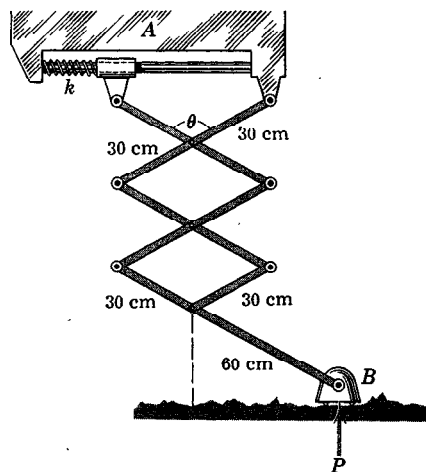
Resp. $\theta = 16^\circ 15'$



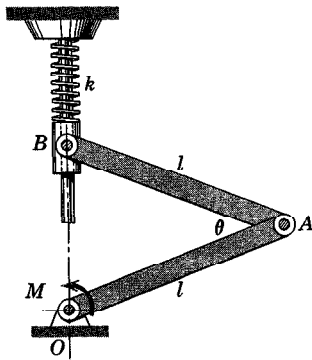
Problema 7/56

7/57. Un dispositivo de exploración que se despliega desde el cuerpo A de un vehículo espacial no tripulado apoyado sobre la superficie lunar consta de un pantógrafo con resorte, dotado de una cabeza detectora B . Se desea seleccionar un resorte que limite a 150 N la fuerza vertical P de contacto en la posición para la cual $\theta = 120^\circ$. Si es despreciable la masa de los brazos y de la cabeza, especificar la constante k necesaria del resorte. Éste no está comprimido cuando $\theta = 30^\circ$.

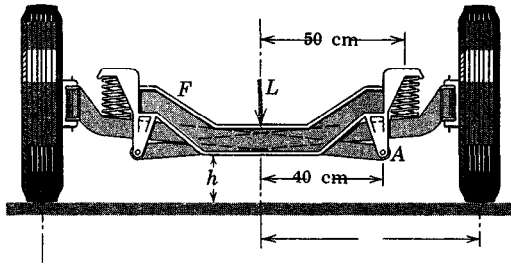
Resp. $k = 30 \text{ N/cm}$



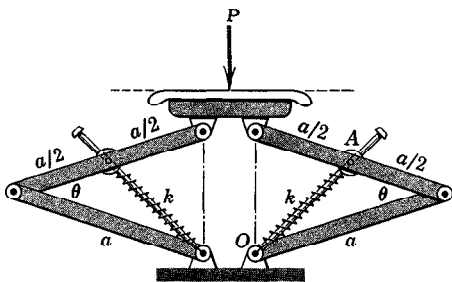
Problema 7/57



Problema 7/58



Problema 7/59



Problema 7/60

7/58. Determinar el momento M , del par aplicado en O a la barra OA , que se necesita para equilibrar el mecanismo a un valor dado de θ . Cada una de las barras uniformes tiene un peso P y el resorte de rigidez k está indeformado en la posición equivalente a $\theta = 0$. El peso del collar deslizante B es despreciable.

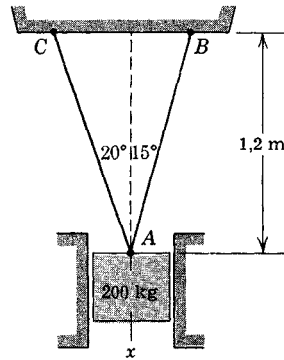
7/59. Se repite aquí la suspensión delantera del problema 4/62. Si hay que elevar el chasis F con un gato hasta que $h = 35$ cm para suprimir la compresión en los amortiguadores, determinar el valor de h correspondiente al equilibrio al quitar el gato. La constante de cada resorte vale 116 kp/cm. La carga L es de 1090 kp y el chasis central F pesa 36 kg. Cada rueda y el miembro a ella unido pesa 32 kg con centro de gravedad situado a 67,5 cm del plano vertical de simetría. Resp. $h = 27,1$ cm

7/60. Un pantógrafo de resorte proporciona contacto eléctrico en el patín superior y está diseñado para soportar una carga P a un ángulo θ entre los brazos iguales. Cada uno de los resortes tiene una constante k y tiene su longitud natural cuando $OA = a$. Determinar la constante k de cada resorte que se necesita para soportar la carga P cuando θ tiene un valor dado. Los pesos de las partes son pequeños frente a P .

$$\text{Resp. } k = \frac{P}{2a \sin \frac{\theta}{2}} \frac{\sqrt{1 + 8 \sin^2 \frac{\theta}{2}}}{2 - \sqrt{1 + 8 \sin^2 \frac{\theta}{2}}}$$

◀ 7/61. El peso de 200 kp está suspendido por dos alambres de acero de 3,125 mm de diámetro en la forma que se indica. Determinar el corrimiento vertical x del punto A a consecuencia de la aplicación del peso de 200 kp. Calcular también los esfuerzos σ_{AB} y σ_{AC} en los alambres. Tomar $2,4 \times 10^6$ kp/cm² como módulo de Young del acero.

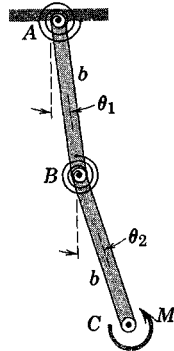
Resp. $x = 0,07525$ cm
 $\sigma_{AB} = 1406$ kp/cm²
 $\sigma_{AC} = 1330$ kp/cm²



Problema 7/61

◀ 7/62. Cada una de las dos barras uniformes AB y BC de longitud b tiene un peso P . Los resortes de torsión resisten una rotación respecto a su punto de sujeción con un gran momento de C m.N por radián de torsión de resorte en cada uno de ellos. Éstos no están deformados cuando $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Si son pequeñas las deformaciones angulares, determinar θ_1 y θ_2 .

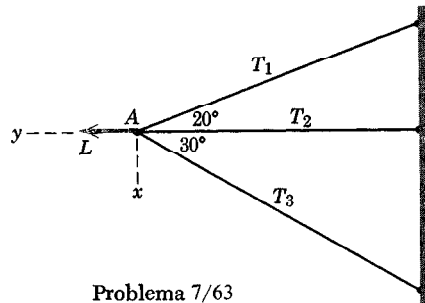
Resp. $\theta_1 = \frac{M/C}{1 + \frac{5}{2} \frac{Pb}{C} + \frac{3}{4} \left(\frac{Pb}{C}\right)^2}$,
 $\theta_2 = \frac{\left(2 + \frac{3}{2} \frac{Pb}{C}\right) \frac{M}{C}}{1 + \frac{5}{2} \frac{Pb}{C} + \frac{3}{4} \left(\frac{Pb}{C}\right)^2}$



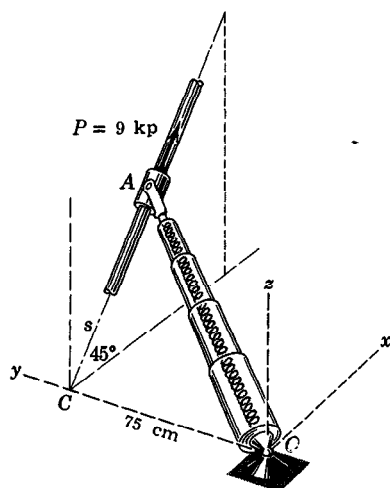
Problema 7/62

◀ 7/63. Tres alambres del mismo material e igual diámetro concurren en un punto A cuando no hay carga. Determinar la tensión en cada alambre debida a la carga L . Supóngase que los desplazamientos son pequeños frente a la longitud de cada alambre

Resp. $T_1 = 0,388L$,
 $T_2 = 0,406L$,
 $T_3 = 0,265L$



Problema 7/63



Problema 7/64

◀7/64. La suspensión telescópica OA pesa 12 kp con centro de gravedad situado siempre a un tercio de la distancia de O a A . El extremo O está fijo con una rótula y el extremo A puede deslizar libremente a lo largo del árbol fijo que forma 45° , bajo la acción de la fuerza $P = 9$ kp. El resorte helicoidal del interior de los tubos telescópicos está sujeto a cada extremo de los tubos y tiene una constante de 30 kp/m. El resorte tiene su longitud natural cuando la distancia s entre A y C es nula. Calcular el valor de equilibrio de s .

Resp. $s = 73$ cm

41. Sistemas con rozamiento; rendimiento mecánico. Cuando en un sistema de cuerpos haya rozamiento por deslizamiento en cantidad apreciable, parte del trabajo realizado sobre el sistema por las fuerzas activas exteriores se disipa en forma de calor generado por el trabajo negativo de las fuerzas de rozamiento durante el movimiento del sistema. En todos los casos en que hay deslizamiento de una superficie de contacto respecto a otra, la fuerza de rozamiento presente realizará un trabajo negativo. El trabajo es negativo porque el sentido de la fuerza es siempre opuesto al del movimiento del cuerpo sobre el cual actúa. Así, la fuerza de rozamiento fP del bloque deslizante de la figura 86a realiza sobre el bloque, durante el desplazamiento x , un trabajo igual a $-fPx$. Durante un desplazamiento virtual δx , la fuerza de rozamiento realiza un trabajo igual a $-fP \delta x$. En cambio, la fuerza de rozamiento que se ejerce sobre la rueda de la figura 86b no trabaja si la rueda no desliza durante su rodadura. En la figura 86c el momento M_f respecto al centro de la articulación por pasador o cojinete de todas las fuerzas de rozamiento que se ejercen en las superficies en contacto efectuará un trabajo negativo durante todo movimiento angular relativo entre las dos partes. Así pues, si se produce un desplazamiento virtual $\delta \theta$, el trabajo negativo efectuado es $-M_f \delta \theta_1 - M_f \delta \theta_2 = -M_f(\delta \theta_1 + \delta \theta_2)$, o simplemente $-M_f \delta \theta$. Para cada una de las partes, M_f tiene el sentido que se opone al movimiento relativo. El trabajo negativo efectuado por las fuerzas de rozamiento cinético no puede recuperarse, ya que todo él se disipa en forma de calor. El trabajo negativo de rozamiento puede deberse a fuerzas de rozamiento cinético que sean tanto exteriores como interiores al sistema.

El principio de los trabajos virtuales expresado por la ecuación 57 para sistemas con energía de deformación exentos de rozamiento, deberá modificarse para tener en cuenta la pérdida de energía mecánica por rozamiento. El principio de la conservación de la energía exige que el trabajo realizado sobre el sistema durante un movimiento cualquiera deberá ser igual a la energía almacenada en los miembros elásticos del sistema más la pérdida por rozamiento. Luego si representamos por δQ el trabajo negativo total realizado sobre un sistema en equilibrio por todas las fuerzas de rozamiento cinético durante un desplazamiento virtual compatible con las ligaduras, será:

$$\delta U = \delta V_e + \delta Q. \quad (58)$$

En los dos apartados anteriores hemos visto que una de las principales ventajas del método de los trabajos virtuales es el análisis de un sistema completo de miembros conectados sin considerarlos por separado. Sin embargo, cuando haya un rozamiento interno apreciable en un sistema, suele ser necesario desmembrarlo a fin de calcular las fuerzas de rozamiento. En tales casos se pierde una de las ventajas del método de los trabajos virtuales. En consecuencia, el método halla poca aplicación en la determinación de la configuración de equilibrio de sistemas con rozamiento.

A causa de la pérdida de energía por rozamiento, el cociente entre el trabajo útil que puede extraerse de una máquina y el trabajo realizado sobre la máquina durante el mismo intervalo es siempre menor que la unidad. Este cociente mide el rendimiento mecánico ρ de la máquina.

$$\rho = \frac{\text{trabajo útil realizado por la máquina}}{\text{trabajo entregado a la máquina}}$$

El rendimiento mecánico de las máquinas simples que tienen un grado de libertad y que funcionan de manera uniforme, se puede determinar por medio del principio de los trabajos virtuales calculando el numerador y el denominador de la expresión de ρ durante un desplazamiento virtual. Si la máquina funciona uniformemente con el tiempo, las variaciones elásticas debidas a alargamientos o compresiones ocurridas durante la aplicación inicial de las cargas,

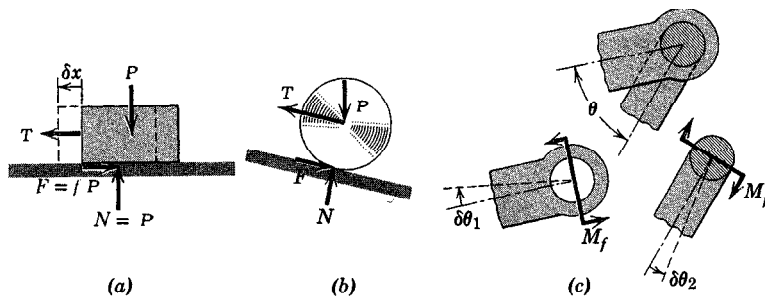


Figura 86

permanecerán constantes durante el funcionamiento continuo y no figurarán en las expresiones.

Como ejemplo, consideremos el trabajo realizado por la tensión T del cable de la figura 87 al hacer deslizar plano arriba, a velocidad constante, al cuerpo indicado. El diagrama de las fuerzas activas pone de manifiesto tres fuerzas solamente, que son las que realizan trabajo sobre el sistema constituido por el cuerpo y el cable. Durante un desplazamiento diferencial ds plano arriba el trabajo realizado sobre el cuerpo es

$$T ds = (P \sin \theta + f P \cos \theta) ds.$$

El trabajo útil realizado por la máquina consiste en el trabajo realizado para elevar el peso P la distancia vertical $ds \sin \theta$ y es:

$$P ds \sin \theta.$$

El rendimiento del plano inclinado es, pues,

$$\rho = \frac{P ds \sin \theta}{(P \sin \theta + f P \cos \theta) ds} = \frac{1}{1 + f / \operatorname{tg} \theta}.$$

Como segundo ejemplo de rendimiento mecánico consideremos el gato descrito en el apartado 35 y representado en la figura 76. La ecuación 50 da el momento M aplicado al tornillo, necesario para elevar el peso P , en donde el tornillo tiene un radio medio r y un ángulo de hélice α , siendo ϕ el ángulo de rozamiento. Esta relación es:

$$M = Pr \operatorname{tg} (\alpha + \phi).$$

Durante un giro pequeño $d\theta$, en el sentido de elevar la carga, el momento M realiza un trabajo

$$M d\theta = Pr d\theta \operatorname{tg} (\alpha + \phi).$$

El trabajo realizado por la máquina es el trabajo realizado para elevar la carga una distancia vertical $(d\theta/2\pi)L = rd\theta \operatorname{tg} \alpha$, donde L es el paso de rosca o avance por vuelta del tornillo. Luego, el rendimiento del tornillo es

$$\rho = \frac{Pr d\theta \operatorname{tg} \alpha}{Pr d\theta \operatorname{tg} (\alpha + \phi)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} (\alpha + \phi)}.$$

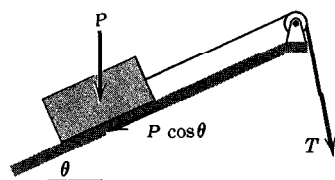


Figura 87

A medida que disminuye el rozamiento en los filetes, disminuye el ángulo ϕ de rozamiento y el rendimiento tiende a la unidad.

42. Criterio energético para el equilibrio. La energía representa la capacidad de realizar un trabajo. Un cuerpo o sistema de cuerpos se dice que tiene *energía potencial* cuando, en virtud de su posición o de su estado elástico, es capaz de realizar un trabajo sobre otro cuerpo. Existen dos tipos de energía potencial mecánica. En el apartado 40 se ha estudiado ya la energía potencial V_e asociada al estado elástico que es igual a $\frac{1}{2}kx^2$, siendo k la razón constante de la fuerza aplicada a la deformación resultante x . Esta expresión representa una energía recuperable siempre que no se haya superado el límite de elasticidad del material. El segundo tipo de energía potencial V_g es el asociado a la posición de un cuerpo en un campo de fuerzas. Más exactamente, es el trabajo realizado sobre un cuerpo al cambiar su posición en el campo de fuerzas a que se halla sometido. El campo de fuerzas más corriente es, claro está, el campo gravitatorio terrestre y para experimentos realizados en las proximidades de la superficie de la Tierra puede considerarse constante su intensidad.

En los anteriores ejemplos de trabajo virtual de los apartados 39 y 40 se tenía en cuenta el efecto de la posición en el campo gravitatorio terrestre tratando el peso o atracción gravitatoria como fuerza exterior que trabaja durante cualquier desplazamiento virtual vertical δh del centro de gravedad. Así pues, el peso P del cuerpo de la figura 88 efectúa un trabajo $\delta U = -P \delta h$, donde el signo menos interpreta el hecho de que el desplazamiento y la fuerza tienen sentidos opuestos. En cambio, si el cuerpo se moviera hacia abajo, el peso P efectuaría un trabajo positivo, ya que el desplazamiento tendría el mismo sentido que la fuerza. Visto de esta manera, el peso se trata como cualquier otra fuerza activa y su trabajo aparece en el mismo miembro que δU en la ecuación del trabajo virtual, según se ha visto en los apartados 39 y 40.

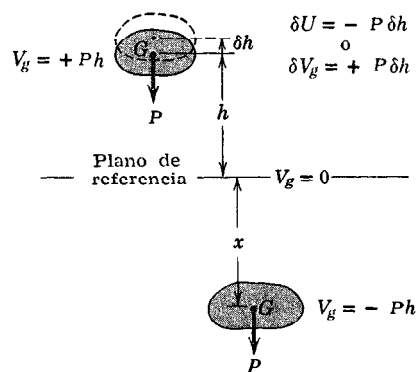


Figura 88

Se puede adoptar otro tratamiento en el que el trabajo efectuado por las fuerzas de la gravedad se exprese por medio de una variación de la energía potencial del cuerpo. Este otro tratamiento constituye una representación útil cuando se describe un sistema mecánico en función de su energía total. La energía potencial gravitatoria V_g de un cuerpo se define simplemente como el trabajo efectuado sobre el cuerpo para llevarlo a la posición considerada desde un cierto plano arbitrario de referencia en el que se define como nula la energía potencial. Por ejemplo, cuando se eleva el cuerpo este trabajo se convierte en energía potencialmente disponible, ya que el cuerpo es capaz de efectuar trabajo sobre otro al volver a su posición inicial inferior. Si se toma nula V_g en $h = 0$ (fig. 88), a una altura h sobre el plano de referencia, la energía potencial gravitatoria del cuerpo será $V_g = +Ph$. Si el cuerpo se halla a una distancia h por debajo del plano de referencia, su energía potencial gravitatoria será $-Ph$. Como el trabajo efectuado por el peso P es de signo contrario e igual magnitud que la variación de la energía potencial, el efecto de un cambio de posición vertical podrá tenerse en cuenta en el miembro de la ecuación donde se halle la energía en vez de en el miembro donde figure el trabajo. Importa observar que el plano de referencia al que corresponde energía potencial nula es totalmente arbitrario, ya que solamente interesa la *variación* de energía y esta variación es independiente de la posición del plano de referencia. Además, la energía potencial gravitatoria es independiente del camino seguido para llegar al nivel particular h considerado.

Al aplicar la ecuación trabajo-energía, hay que tener cuidado en no incluir el efecto del peso simultáneamente como término de trabajo y como término de energía en un mismo problema. Puede adoptarse una u otra alternativa y ello deberá aplicarse de manera sistemática dentro de un mismo problema.

Al introducir la energía potencial gravitatoria, la energía potencial mecánica total de un cuerpo o de un sistema de cuerpos será la suma de la energía elástica recuperable V_e más la energía de posición V_g en el campo gravitatorio terrestre y es

$$V = V_e + V_g.$$

En el caso de un sistema mecánico con fuerzas gravitatorias y miembros elásticos la relación trabajo-energía de la ecuación 57 podrá también escribirse en la forma

►
$$\delta U = \delta V \quad \text{o bien} \quad \delta U = \delta V_e + \delta V_g. \quad (59)$$

En este caso δU es el trabajo virtual de todas las fuerzas activas exteriores excluidos los pesos de los miembros, los cuales están contenidos en el término δV_g .

Además de sustituir el trabajo de las fuerzas de la gravedad por las variaciones correspondientes de energía potencial, puede convertirse en variaciones de energía potencial el trabajo de otras fuerzas activas en la forma que se indica

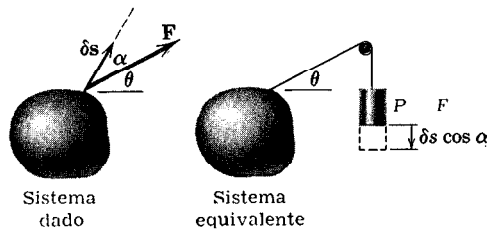


Figura 89

en la figura 89. En ella, el trabajo efectuado por F durante un desplazamiento virtual δs de su punto de aplicación equivale a la variación $-P \delta s \cos \alpha$ de energía potencial del peso P del sistema equivalente. Luego el trabajo efectuado por fuerzas activas exteriores sobre un sistema mecánico podrá sustituirse por las variaciones correspondientes de energía potencial, con signo cambiado, del sistema equivalente.

Sustituyendo los términos de trabajo por términos de energía, el principio de los trabajos virtuales para un sistema mecánico sin rozamiento cinético interno, expresado por las ecuaciones 57 ó 59, podrá escribirse en la forma

$$\blacktriangleright \quad \delta(V_e + V_g) = 0 \quad \text{o bien} \quad \delta V = 0. \quad (60)$$

La ecuación 60 expresa el requisito de que la configuración de equilibrio de un sistema mecánico ha de ser una para la cual la energía potencial V del sistema tenga un valor estacionario. Así pues, en el caso de un sistema mecánico cuya posición posible esté descrita por la variable x , la aplicación de la ecuación 60 equivale matemáticamente a la condición $dV/dx = 0$, la cual da un valor estacionario de V , bien sea un máximo, un mínimo o un punto de inflexión con tangente horizontal en la curva de V en función de x . Sabemos que la posición natural de equilibrio de un sistema mecánico sin rozamiento corresponde a un mínimo de energía potencial, lo que constituye un valor estacionario de V , mientras V y sus derivadas sean funciones continuas.

El principio de la variación nula de energía potencial para el equilibrio puede aplicarse solamente a *sistemas conservativos*, es decir, sistemas exentos de fuerzas de rozamiento cinético que efectúan un trabajo negativo. Un sistema podrá aproximarse más o menos, según cuál sea la cantidad de rozamiento cinético presente, a la posición de equilibrio de energía potencial mínima, pero nunca llegará a alcanzarla.

Como ejemplo del principio de la mínima energía, consideremos el sencillo sistema en equilibrio, representado en la figura 90, consistente en un resorte que se deforma una cantidad x por acción del peso P unido a él. Si se toma arbitrariamente $x = 0$ como posición para la cual $V = 0$, la energía potencial correspondiente al alargamiento x será

$$V = V_e + V_g = \frac{1}{2} k x^2 - P x.$$

La condición de equilibrio dada por la ecuación 60 exige que

$$\delta V = kx \delta x - P \delta x = 0, \quad x = P/k.$$

Este valor concuerda con el resultado que puede obtenerse por simple inspección. También se muestra en la figura 90 la contribución de V_e y V_g a la energía potencial total V para distintos valores posibles de x , y se ve que $x = P/k$ da un valor mínimo de V .

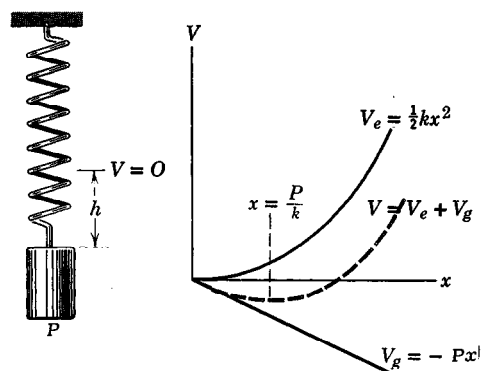


Figura 90

Surgen ciertas situaciones en donde la configuración de un sistema mecánico depende de la especificación de más de una coordenada. En las partes *d*, *e* y *f* de la figura 84 se ilustraron varios ejemplos de dichas situaciones. El número de coordenadas independientes que se necesitan para especificar la configuración del sistema da el número de grados de libertad de éste. Para determinar las condiciones de equilibrio de un sistema de n grados de libertad, deberá calcularse e igualarse a cero la variación de V respecto a cada una de las n coordenadas independientes tomadas de una en una, dejando las demás constantes. Este procedimiento dará n ecuaciones con las n incógnitas que son los valores de las coordenadas. Si representamos por x_i una de las n coordenadas independientes, se deberá satisfacer la condición

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \quad (61)$$

para cada una de las n coordenadas. Las coordenadas independientes se denominan *coordenadas generalizadas* y no están limitadas a las componentes de sistemas de coordenadas ortogonales tales como x , y , z , o r , θ , ϕ .

Hasta el momento, el estudio de la energía potencial V_g se ha limitado al caso en que el campo de fuerzas gravitatorio sea paralelo y de intensidad

constante en todos los puntos. En el caso más general, consideremos una fuerza $\mathbf{F} = iF_x + jF_y + kF_z$ cuyas componentes sean funciones de las coordenadas de un campo o región de fuerza, tal como un campo gravitatorio o magnético cuya intensidad varíe con la posición. El trabajo efectuado por \mathbf{F} durante un desplazamiento virtual de su punto de aplicación, determinado por el vector de posición $\mathbf{r} = ix + jy + kz$, es

$$\delta U = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r} = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z.$$

Si este trabajo es una diferencial exacta — δV , entonces, como

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial x} \delta x + \frac{\partial V}{\partial y} \delta y + \frac{\partial V}{\partial z} \delta z$$

las componentes de la fuerza resultan ser *

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}. \quad (62)$$

La cantidad V recibe el nombre de energía potencial o, simplemente, función potencial. El signo negativo es arbitrario, pero se toma para que sea compatible con la designación usual del signo de la variación de la energía potencial en el campo gravitatorio terrestre.

Un campo de fuerzas cuyas componentes formen una diferencial exacta se dice que es un campo *conservativo*. Se deduce que el trabajo efectuado es

$$\int \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r} = -\int_{V_1}^{V_2} \delta V = -(V_2 - V_1),$$

que *sólo* depende de los puntos extremos del movimiento y *no* del camino que se haya seguido. El trabajo efectuado por un campo de fuerzas no conservativo depende del camino que se siga para ir de un punto extremo al otro. La introducción de fuerzas de rozamiento cinético en el sistema, por ejemplo, da lugar a fuerzas no conservativas.

Los dos ejemplos de energía potencial estudiados anteriormente concuerdan con la formulación matemática más general de la energía potencial. Luego, para el campo de fuerzas de un resorte simple cuya energía es $V_e = \frac{1}{2}kx^2$, la fuerza ejercida por el resorte sobre el cuerpo que lo estira una longitud x es

$$F_x = -\frac{\partial V_e}{\partial x} = -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2}kx^2 \right) = -kx,$$

* Recuérdese que la cantidad $d\phi = P dx + Q dy + R dz$ es diferencial exacta de las coordenadas si $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$.

la cual tiene sentido contrario a la fuerza $+kx$ que estira al resorte. En el caso de un peso P en el campo gravitatorio terrestre en la superficie de la Tierra, $V_g = Ph$ y la componente de la fuerza en el sentido hacia arriba de las h positivas es

$$F_h = -\frac{\partial V_g}{\partial h} = -\frac{d(Ph)}{dh} = -P,$$

lo cual concuerda con el sentido vertical hacia abajo del peso. La formulación más general de los potenciales de campos de fuerzas hallan su aplicación más importante cuando la intensidad y dirección del campo varían con la posición.

43. Estabilidad del equilibrio. El requisito de variación nula de la energía potencial en el equilibrio, según establece la ecuación 60, es equivalente al requisito

$$\frac{dV}{dx} = 0$$

para un sistema de un sólo grado de libertad, en el que x es la coordenada que define la posición del sistema. Esta ecuación define matemáticamente la condición para un valor estacionario de V , máximo, mínimo o punto de inflexión con tangente horizontal de la curva de V en función de x . Aun cuando la configuración natural de equilibrio suele representar un valor mínimo de V , existen otras posibilidades para valores estacionarios que también representan posiciones de equilibrio. En la figura 91 se ha representado un ejemplo de cada tipo de equilibrio para el caso sencillo de un cilindro apoyado sobre superficies de cuatro curvaturas diferentes. Se dice que el equilibrio es *estable*, figura 91a, cuando un ligero desplazamiento a partir de la posición de equilibrio da lugar a un aumento de energía potencial y la correspondiente tendencia a volver a la posición inicial. Así pues, un valor mínimo de V define siempre una posición estable. Se dice que el equilibrio es *inestable*, figura 91b, cuando un ligero desplazamiento a partir de la posición de equilibrio da lugar a una disminución de energía potencial y a la correspondiente tendencia a alejarse aún más de la posición inicial. Un valor máximo de V define siempre una posición inestable. La tercera posibilidad de valor estacionario de V se presenta cuando hay un punto de inflexión con tangente horizontal, figura 91c. En este caso

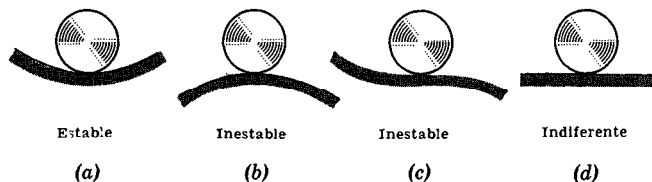


Figura 91

el equilibrio se clasifica como inestable, ya que un ligero desplazamiento hacia la parte más baja daría lugar a una tendencia al alejamiento del punto de inflexión. Desde un punto de vista físico, esta condición de equilibrio suele ser muy poco sensible a desplazamientos pequeños y el comportamiento se aproxima al del cuarto caso, figura 91d, que representa al *equilibrio indiferente*. En este caso no hay tendencia ni al alejamiento ni al retorno a la posición inicial de reposo.

Las condiciones de estabilidad que acabamos de ilustrar para el caso del cilindro rodante son aplicables a cualquier sistema mecánico real de un sólo grado de libertad en el que pueda desprejarse el rozamiento. En la figura 92 puede verse una gráfica esquemática de la energía potencial total $V = V_e + V_g$ de un tal sistema mecánico y se indican en el mismo orden que en los ejemplos anteriores las cuatro condiciones de equilibrio. El signo del incremento ΔV debido a un pequeño desplazamiento a partir de la posición de equilibrio puede determinarse matemáticamente con auxilio del desarrollo de Taylor para una función en la proximidad de un punto determinado. Si se toma $x = 0$ para la posición de equilibrio y el subíndice cero indica condiciones en $x = 0$, el valor de V correspondiente a un pequeño desplazamiento x es

$$V = V_0 + \left(\frac{dV}{dx}\right)_0 \frac{x}{1!} + \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_0 \frac{x^2}{2!} + \left(\frac{d^3V}{dx^3}\right)_0 \frac{x^3}{3!} + \left(\frac{d^4V}{dx^4}\right)_0 \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Pero para el equilibrio $(dV/dx)_0 = 0$, con lo cual la variación de energía potencial $V - V_0$ se convierte en

$$\Delta V = \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_0 \frac{x^2}{2!} + \left(\frac{d^3V}{dx^3}\right)_0 \frac{x^3}{3!} + \left(\frac{d^4V}{dx^4}\right)_0 \frac{x^4}{4!} + \dots,$$

donde los términos sucesivos disminuyen rápidamente de magnitud. Así pues, en la posición de equilibrio el signo de ΔV vendrá regido por el signo del término de menor orden que se mantenga no nulo. Generalmente, éste será el de la segunda derivada y el equilibrio del sistema será

estable (ΔV positivo) si $(d^2V/dx^2)_0$ es positivo
 inestable (ΔV negativo) si $(d^2V/dx^2)_0$ es negativo.

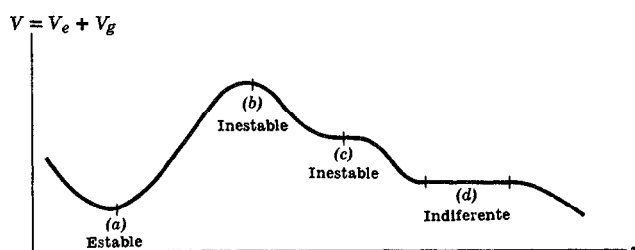


Figura 92

Si fuera nula la segunda derivada, habría que estudiar derivadas de orden superior. En general, cuando la derivada no nula de menor orden es *par*, la variación de energía potencial en la posición de equilibrio será una función par análoga a la representada para las condiciones (a) y (b) en la figura 92 y el equilibrio será estable o inestable según que el signo de esta derivada par de menor orden sea positivo o negativo. Si la derivada no nula de orden inferior fuera *impar*, la variación de la energía potencial en la posición de equilibrio sería una función impar del tipo inflexión, análoga a la de la condición (c) de la figura 92 y la condición se clasifica como inestable.

La estabilidad es una condición que siempre es difícil de determinar al basarse solamente en la intuición mecánica, salvo en el más sencillo de los casos. El análisis anterior proporciona un medio por el cual el técnico puede influir sobre el tipo y grado de estabilidad que pueda aparecer en el proyecto de estructuras y mecanismos.



En el caso de un sistema con dos grados de libertad en las coordenadas independientes x e y , las condiciones de estabilidad se deducen del desarrollo de Taylor de V en la proximidad de la posición de equilibrio en $x = 0$, $y = 0$. Este desarrollo de V función de dos variables es

$$V = V_0 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0 y + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_0 x^2 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right)_0 2xy + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_0 y^2 \right] + \dots,$$

donde se han omitido los términos en que intervienen derivadas de órdenes más elevados, los cuales son más complicados. Con el requisito de que $(\partial V / \partial x)_0 = 0$ y $(\partial V / \partial y)_0 = 0$ para el equilibrio y con las sustituciones

$$A = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_0, \quad B = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right)_0, \quad C = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_0,$$

la expresión del incremento $\Delta V = V - V_0$ puede aproximarse en la forma

$$\Delta V = \frac{1}{2}(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2), \quad (63)$$

donde se han despreciado los términos de orden superior, más pequeños.

La ecuación 63 puede representarse por una superficie en el espacio poniendo ΔV como coordenada vertical y x e y como coordenadas horizontales. La pendiente de la superficie es nula en las dos direcciones en el origen o posición

de equilibrio. A partir de la geometría de la superficie puede demostrarse que el sistema será

$$\left. \begin{array}{ll} \text{estable } (\Delta V \text{ positivo}) \text{ si} & B^2 - AC < 0 \text{ y } A + C > 0 \\ \text{inestable } (\Delta V \text{ negativo}) \text{ si} & B^2 - AC < 0 \text{ y } A + C < 0 \\ \text{inestable (punto de silla) si} & B^2 - AC > 0 \\ \text{indeterminado si} & B^2 - AC = 0. \end{array} \right\} \quad (64)$$

En la figura 93 se han representado las superficies potencial correspondientes a los tres primeros casos. El caso estable, figura 93a, exige que la superficie sea cóncava hacia arriba en el origen en cualquier dirección. Esta condición, por tanto, asegura que $(\partial^2 V / \partial n^2)_0$ será positiva para cualquier valor de θ . El caso inestable de la figura 93b, exige que la superficie sea cóncava hacia abajo en el origen para cualquier dirección. La segunda condición de las ecuaciones 64 asegura que $(\partial^2 V / \partial n^2)_0$ será negativa para todo valor de θ . El tercer caso, representado en la figura 93c, es el de una "silla de montar". Es un caso de inestabilidad, ya que $(\partial^2 V / \partial n^2)_0$ es negativa para un cierto dominio de valores de θ . Si se cumple la cuarta condición de las ecuaciones 64, habría que examinar derivadas de orden superior en el desarrollo de Taylor de una función de dos variables. La condición de equilibrio indiferente en dos o más variables está dada sencillamente por la condición $V = \text{constante}$.

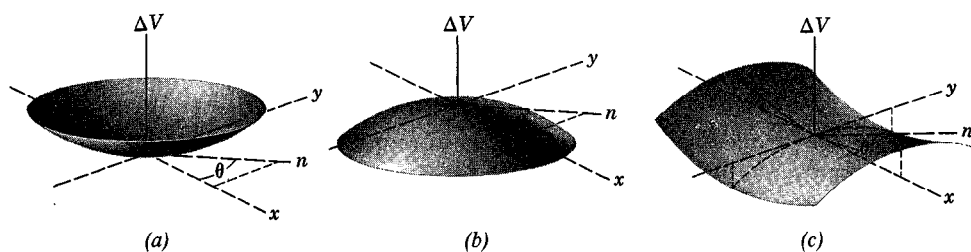


Figura 93

Problemas tipo

7/65. La energía potencial total $V = V_g + V_e$ de un sistema mecánico conservativo de un solo grado de libertad en la coordenada x viene dada por $V = 3x^3 - 9x^2 + 16$ donde x se expresa en metros y V en joule. Determinar el tipo de estabilidad en cada posición de equilibrio.

Solución. El equilibrio exige que

$$\left[\frac{dV}{dx} = 0 \right] \quad \frac{dV}{dx} = 9x^2 - 18x = 0$$

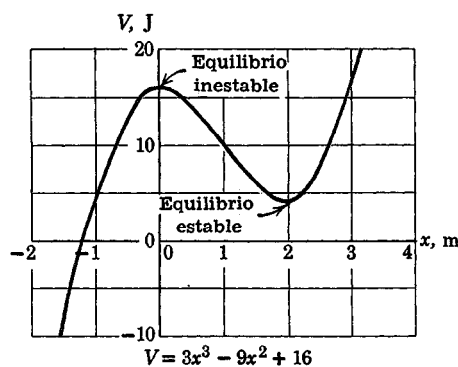
$$x = 0 \quad x = 2 \text{ m.}$$

La estabilidad viene determinada por la segunda derivada, que es

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 18x - 18.$$

Para $x = 0$, $d^2V/dx^2 = -18$ y como el signo es negativo, esta posición será inestable. Para $x = 2$ m, $d^2V/dx^2 = 36 - 18 = +18$ y esta posición será estable por ser positiva la segunda derivada de V .

La gráfica de V en función de x exhibe a simple vista las posiciones de equilibrio y su estabilidad.



Problema 7/65

7/66. En los mecanismos representados, el resorte de constante k no está deformado cuando $\theta = 60^\circ$. Los pesos de las partes son pequeños frente a la suma P de los dos pesos. El mecanismo está construido de manera que los brazos puedan sobrepasar la vertical, según se ve en la figura central. Determinar los valores de θ correspondientes al equilibrio y estudiar la estabilidad del mecanismo en cada posición. Representar gráficamente la variación con θ de la energía potencial total del sistema e indicar las condiciones de estabilidad sobre la gráfica. Despréciense los rozamientos.

Solución. Tomaremos como cero de energía potencial gravitatoria V_g el correspondiente al nivel que pasa por O , con lo que

$$V_g = -2Pa \cos \theta.$$

La compresión del resorte es $x = 2a \cos \theta - a$ y la energía elástica del resorte es

$$V_e = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{ka^2}{2}(2 \cos \theta - 1)^2.$$

La energía potencial total del mecanismo es, pues,

$$V = V_e + V_g = \frac{ka^2}{2}(2 \cos \theta - 1)^2 - 2Pa \cos \theta.$$

Las derivadas de V respecto a θ son

$$\frac{dV}{d\theta} = 2a[(P + ka) \sin \theta - 2ka \sin \theta \cos \theta]$$

y

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = 2a[(P + ka) \cos \theta - 2ka (2 \cos^2 \theta - 1)].$$

En el equilibrio

$$\left[\frac{dV}{d\theta} = 0 \right] \quad [(P + ka) - 2ka \cos \theta] \sin \theta = 0,$$

con lo cual

$$\sin \theta = 0 \quad \text{y} \quad \cos \theta = \frac{P + ka}{2ka} \quad \text{Resp.}$$

dan dos valores posibles de θ para el equilibrio. En la segunda solución, el coseno no debe ser mayor que la unidad, por lo que la solución tiene la limitación $P \leq ka$.

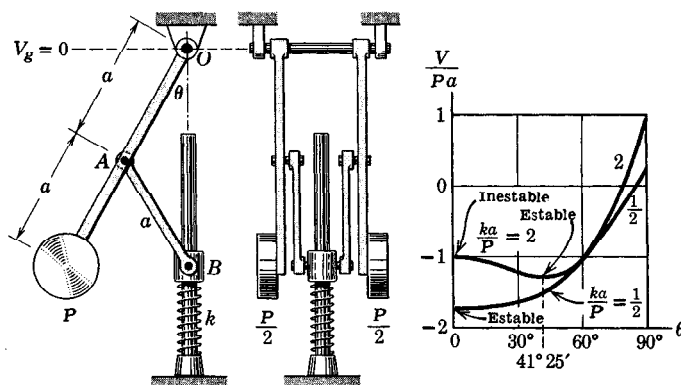
La estabilidad la determina el signo de la segunda derivada. Para la solución $\sin \theta = 0$, la segunda derivada queda en la forma

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = 2a[(P + ka) - 2ka] = 2a(P - ka).$$

Si $P > ka$, la segunda derivada es positiva y el equilibrio será estable para la posición $\theta = 0$. Si $P < ka$, la segunda derivada es negativa y el equilibrio es inestable.

En el caso de la segunda solución, $\cos \theta = (P + ka)/2ka$, la segunda derivada de V resulta ser

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = 2a \left\{ \frac{(P + ka)^2}{2ka} - 2ka \left(2 \left[\frac{P + ka}{2ka} \right]^2 - 1 \right) \right\} = \frac{P^2}{k} \left(\frac{3ka}{P} + 1 \right) \left(\frac{ka}{P} - 1 \right).$$



Problema 7/66

Como la segunda solución sólo es válida si $P < ka$, se ve que la segunda derivada será positiva para esta solución que será, por tanto, estable.

En la parte derecha de la figura se ha representado gráficamente la energía adimensional

$$\frac{V}{Pa} = \frac{ka}{2P}(2 \cos \theta - 1)^2 - 2 \cos \theta$$

para dos valores arbitrarios, $ka/P = 2$ y $ka/P = \frac{1}{2}$, a lo largo de un dominio de θ de 90° suponiendo que el resorte permanece unido al collar B más allá de $\theta = 60^\circ$, con lo que V es función continua de θ .

◀ 7/67. Cada una de las dos barras uniformes articuladas tiene un peso P y una longitud a . La rigidez combinada de los dos resortes superiores es k y los dos inferiores tienen también la misma rigidez combinada. Cuando las dos barras están verticales, no se ejerce fuerza alguna sobre ninguno de los resortes. Examinar las condiciones de estabilidad de las barras en las posiciones verticales y representar gráficamente la superficie de energía potencial en la proximidad de la posición de equilibrio para el valor particular $ka/P = 1$.

Solución. El sistema tiene dos grados de libertad, ya que cada barra puede girar independientemente de la otra. Las coordenadas independientes que definen la configuración del sistema son los ángulos θ_1 y θ_2 que se indican. Para ángulos pequeños, las deformaciones de los sistemas inferior y superior de resortes son $a \sin \theta_1$ y $(a \sin \theta_1 + a \sin \theta_2)$, respectivamente. Tomando el cero de energía potencial gravitatoria en el nivel de O , la energía potencial total del sistema es

$$V = V_e + V_g = \frac{1}{2}k(a \sin \theta_1)^2 + \frac{1}{2}k(a \sin \theta_1 + a \sin \theta_2)^2 + P \frac{a}{2} \cos \theta_1 + P \left(a \cos \theta_1 + \frac{a}{2} \cos \theta_2 \right).$$

Las derivadas parciales pertinentes son

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_1} = ka^2 \sin 2\theta_1 + ka^2 \sin \theta_2 \cos \theta_1 - \frac{3Pa}{2} \sin \theta_1,$$

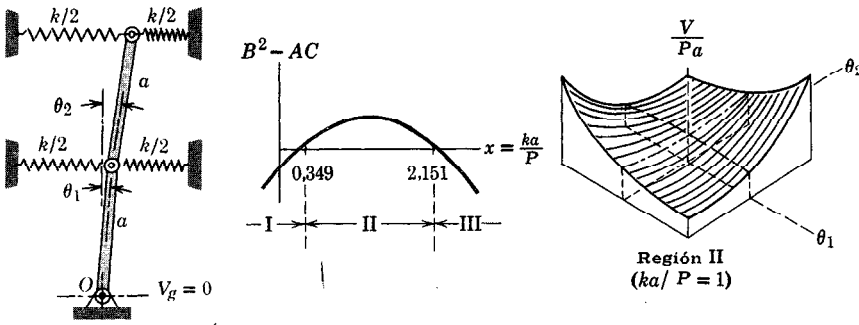
$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1^2} = 2ka^2 \cos 2\theta_1 - ka^2 \sin \theta_2 \sin \theta_1 - \frac{3Pa}{2} \cos \theta_1,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_2} = \frac{1}{2}ka^2 \sin 2\theta_2 + ka^2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 - \frac{Pa}{2} \sin \theta_2,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2^2} = ka^2 \cos 2\theta_2 - ka^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 - \frac{Pa}{2} \cos \theta_2,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} = ka^2 \cos \theta_1 \cos \theta_2.$$

Para la condición de equilibrio $\theta_1 = \theta_2 = 0$, para la cual $\partial V / \partial \theta_1 = \partial V / \partial \theta_2 = 0$ también, los valores de las derivadas segundas son



Problema 7/67

$$A = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1^2} \right)_0 = 2ka^2 - \frac{3Pa}{2},$$

$$B = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \right)_0 = ka^2,$$

$$C = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2^2} \right)_0 = ka^2 - \frac{Pa}{2}.$$

Sustituyendo $x = ka/P$ y simplificando, la cantidad $B^2 - AC$ queda en la forma

$$B^2 - AC = \left(\frac{Pa}{2} \right)^2 (-4x^2 + 10x - 3).$$

En la figura se incluye una representación gráfica de $B^2 - AC$ en función de $x = ka/P$. Deben estudiarse las tres regiones siguientes: $x < 0,349$, $0,349 < x < 2,151$ y $x > 2,151$.

$$\text{Región I: } \frac{ka}{P} < 0,349, \quad B^2 - AC < 0$$

$$A + C = 2ka^2 - \frac{3Pa}{2} + ka^2 - \frac{Pa}{2} = Pa \left(3 \frac{ka}{P} - 2 \right) = (-).$$

Luego, el equilibrio es inestable y las dos barras tenderán a derrumbarse con una constante de rigidez $k < 0,349 P/a$.

$$\text{Región II: } 0,349 < \frac{ka}{P} < 2,151, \quad B^2 - AC > 0.$$

En esta región se tiene equilibrio inestable por puntos de silla.

$$\text{Región III: } \frac{ka}{P} > 2,151, \quad B^2 - AC < 0$$

$$A + C = Pa \left(3 \frac{ka}{P} - 2 \right) = (+).$$

Luego el equilibrio es estable. Queda bien patente que, para asegurar la estabilidad vertical de las barras, cada combinación de resortes debe tener una constante de rigidez $k > 2,151 P/a$.

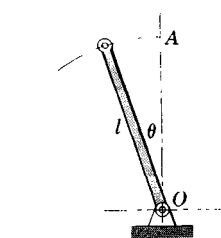
En la parte derecha de la figura puede verse una representación de la energía potencial expresada de manera adimensional para el valor $ka/P = 1$, el cual está en la región del equilibrio tipo puntos de silla. Esta energía es

$$\left(\frac{V}{Pa}\right)_{ka/P=1} = \sin^2 \theta_1 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 + \frac{1}{2} \sin^2 \theta_2 + \frac{3}{2} \cos \theta_1 + \frac{1}{2} \cos \theta_2.$$

Otros valores de ka/P en la región II darán otras formas a la superficie de la silla de montar en la proximidad de la posición de equilibrio vertical.

Obsérvese que la resolución presentada en este ejemplo sólo es válida en condiciones próximas a $\theta_1 = \theta_2 = 0$ en virtud de las hipótesis geométricas hechas desde el principio.

Problemas



Problema 7/68

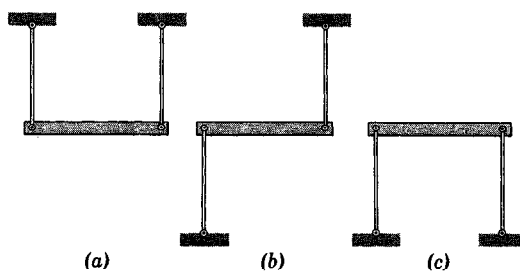
7/68. La barra puede girar libremente describiendo un círculo vertical completo. Verificar matemáticamente las condiciones de estabilidad, que son evidentes, en las dos posiciones de equilibrio.

7/69. Las energías potenciales de dos sistemas mecánicos vienen dadas por $V_1 = C_1 x^4$ y $V_2 = C_2 x^3$, donde C_1 y C_2 son constantes positivas y x es la coordenada única que expresa las posiciones de ambos sistemas. Especificar la estabilidad de cada sistema en la posición de equilibrio $x = 0$.

7/70. La energía potencial de un sistema mecánico viene dada por $V = a \cos 2\theta + 2a \sin \theta$, donde θ es la coordenada que especifica la posición del sistema y a es una constante positiva. Determinar la estabilidad para cada posición de equilibrio.

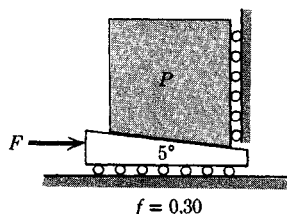
Resp. estable para $\theta = \pi/2$
 y $\theta = 3\pi/2$
 inestable para $\theta = \pi/6$
 y $\theta = 5\pi/6$

7/71. Identificar las condiciones de equilibrio representadas por las tres configuraciones de la barra de peso P soportada por las varillas ligeras que pueden girar libremente en el plano vertical de la figura.



Problema 7/71

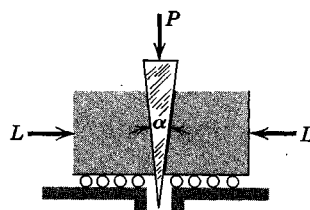
7/72. Calcular el rendimiento con que eleva el peso P la cuña de 5° bajo la acción de la fuerza horizontal F aplicada a la cuña. El coeficiente de rozamiento entre cuña y bloque es 0,30.



Problema 7/72

7/73. Determinar el rendimiento o desarrollo mecánico ρ del dispositivo que utiliza una fuerza P sobre la cuña para mover los bloques en contra de las fuerzas L . El coeficiente de rozamiento es $f = 0,40$ y $\alpha = 5^\circ$.

Resp. $\rho = 0,097$

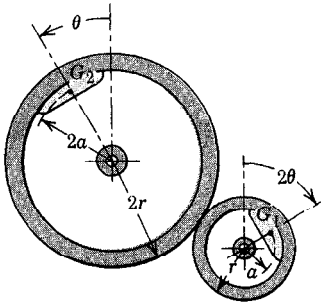


Problema 7/73

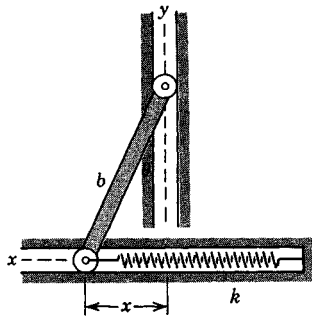
7/74. Demostrar que la puerta uniforme del tragaluz del problema 7/49 adopta una posición de equilibrio indiferente para todos los valores de θ si el resorte tiene una constante de rigidez $k = P/(2l)$ donde P es el peso de la puerta. El resorte está indeformado cuando $\theta = 0$.

7/75. Comprobar la estabilidad para la posición de equilibrio citada de la puerta de ventilación del problema 7/48.

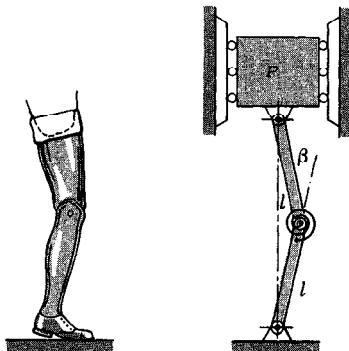
Resp. Equilibrio estable para $\theta = 46^\circ 10'$



Problema 7/76



Problema 7/77



Problema 7/78

7/76. Las dos ruedas dentadas (no se han dibujado los dientes) giran en el plano vertical y llevan pesos excentricos p de centros de gravedad G_1 y G_2 . Ambos pesos se hallan en la parte más alta de su rueda respectiva cuando $\theta = 0$. Determinar la estabilidad asociada a cada configuración posible de equilibrio del sistema.

7/77. Los extremos de una barra uniforme de peso P deslizan libremente en las guías horizontal y vertical según se indica. Examinar las condiciones de estabilidad correspondientes a las posiciones de equilibrio. El resorte está indeformado cuando $x = 0$.

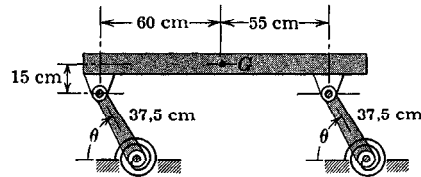
Resp. Para $\theta = 0$,
estable si $k > P/(2b)$
inestable si $k < P/(2b)$

Para $\theta = \pm \arccos \frac{P}{2kb}$
inestable si $k > P/(2b)$

7/78. Uno de los requisitos críticos en el proyecto de una pierna artificial para amputado es evitar que se doble la rodilla cuando esté sometida a carga estando recta la pierna. En primera aproximación, simulemos la pierna artificial por medio de dos barras ligeras con un resorte de torsión en su articulación común. El resorte desarrolla un par de momento $M = K\beta$, que es proporcional al ángulo β que forma el sistema en la articulación. Determinar el valor mínimo de K que asegure la estabilidad de la articulación de la rodilla para $\beta = 0$.

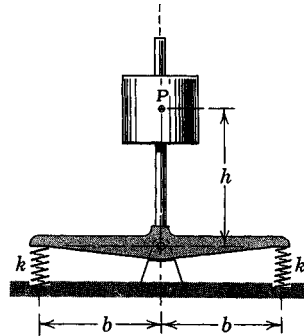
7/79. La plataforma pesa 40 kg con centro de gravedad en G y está montada sobre las dos bielas iguales de peso despreciable dotadas de resortes. Cada resorte de torsión tiene una rigidez de 1,7 cm-kp por grado de torsión y ésta es nula cuando $\theta = 90^\circ$. Determinar la posición de equilibrio estable.

Resp. $\theta = 22^\circ 20'$



Problema 7/79

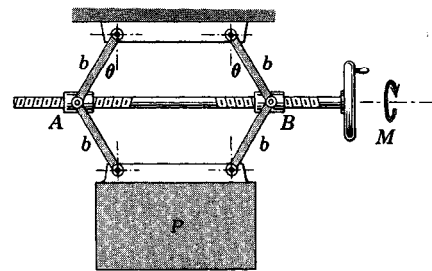
7/80. Determinar la altura máxima h del peso P para la cual el péndulo invertido será estable en la posición vertical indicada. Cada resorte tiene una constante de rigidez k y en esta posición tienen precompresiones iguales. Despréciase el peso del resto del mecanismo.



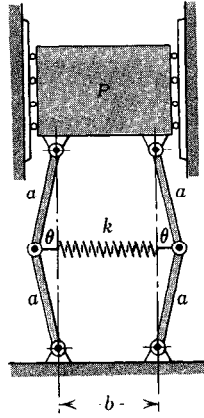
Problema 7 80)

7/81. Se eleva la carga pesada P por medio del tornillo y barras que se indican. El tornillo tiene en sus respectivas secciones roscas de filete cuadrado a derechas y a izquierdas y separa los bloques roscados A y B cuando se gira el tornillo por acción de un par aplicado de momento M . El paso de rosca (avance por revolución) de cada sección roscada del tornillo es L , su radio medio r y el coeficiente de rozamiento de las roscas es f . Determinar el momento M del par que hay que aplicar para elevar la carga igualando el rendimiento ρ de la rosca del tornillo (apartado 41) al cociente entre el trabajo efectuado por el mecanismo para elevar la carga y el trabajo entregado por M al mecanismo.

Resp. $M = 2Pr \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} (\phi + \alpha)$
donde $\phi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} f$

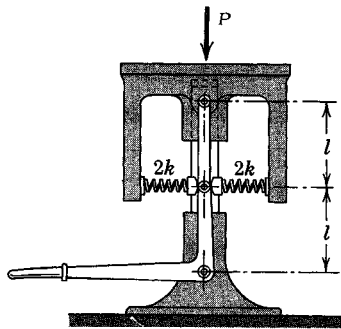


Problema 7/81



Problema 7/82

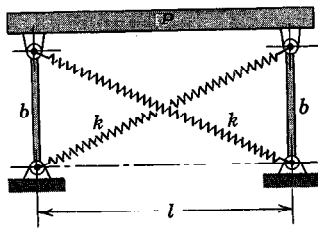
7/82. El peso P se mueve entre guías lisas verticales y está soportado por las cuatro barras articuladas, de peso despreciable, unidas por resorte. El resorte de rigidez k está indeformado cuando $\theta = 0$. Especificar la estabilidad del sistema en sus posiciones de equilibrio.



Problema 7/83

7/83. En la figura puede verse un pequeño elevador industrial de pedal. Hay cuatro resortes iguales, dos a cada lado del árbol central. La constante de cada par de resortes es $2k$. Especificar los valores de k que asegurarán un equilibrio estable cuando el elevador soporte una carga P en la posición indicada, sin ejercer fuerza sobre el pedal. Los resortes tienen compresiones iniciales iguales y puede suponerse que actúan, en todo momento, en dirección horizontal.

$$\text{Resp. } k > \frac{P}{2l}$$



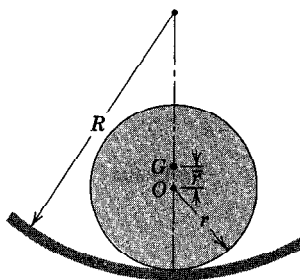
Problema 7/84

7/84. La plataforma de peso P está soportada por patas iguales y sometida, en la forma que se indica, a la acción de dos resortes. Si son despreciables los pesos de las patas y de los resortes, determinar la rigidez mínima k de cada resorte que asegure la estabilidad de la plataforma en la posición indicada. Cada resorte está alargado inicialmente una cantidad Δ .

$$\text{Resp. } k_{\min} = \frac{P}{2b} \frac{l^2 + b^2}{l^2}$$

7/85. El disco circular desequilibrado, cuyo centro de gravedad G se halla a una distancia r de su centro O , se coloca sobre un camino circular cóncavo de radio R . Determinar el valor máximo que puede tener r siguiendo estable el disco en la posición inferior que se indica.

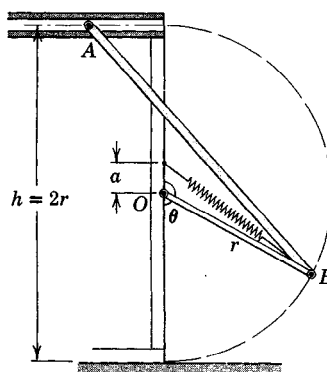
$$\text{Resp. } \bar{r}_{\text{máx}} = \frac{r}{\frac{R}{r} - 1}$$



Problema 7/85

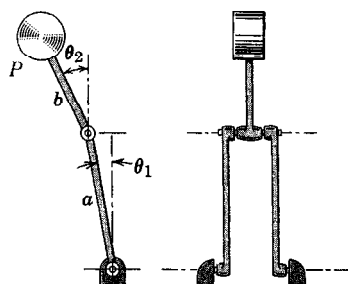
7/86. La puerta uniforme AB de un garage, representada en sección en la figura, tiene un peso P y está equipada con dos mecanismos de resorte como el indicado, uno a cada lado de la puerta. El brazo OB es de peso despreciable y la esquina superior A de la puerta puede deslizarse libremente en dirección horizontal mediante un rodillo. La longitud natural del resorte es $r - a$, por lo que en la posición superior con $\theta = \pi$, la fuerza en el resorte es nula. A fin de asegurar una acción suave de la puerta al alcanzar la posición vertical de cierre $\theta = 0$, conviene que dicha posición sea de equilibrio indiferente. Determinar el valor adecuado de la constante k .

$$\text{Resp. } k = \frac{P(r + a)}{8a^2}$$

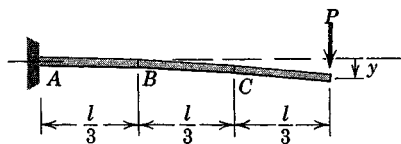


Problema 7/86

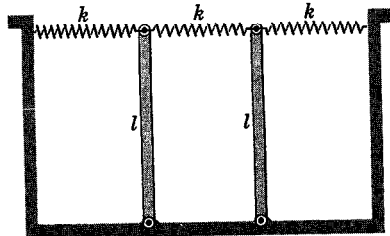
7/87. Cada una de las dos barras del péndulo doble puede girar libremente 360° en el plano vertical. Despreciar los pesos de las barras frente a P y describir todas las posiciones de equilibrio posibles indicando el tipo de equilibrio de cada una.



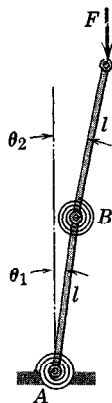
Problema 7/87



Problema 7/88



Problema 7/89



Problema 7/90

◀7/88. Simulemos la viga en voladizo de longitud l y carga P en su extremo por una viga de tres segmentos rígidos unidos mediante goznes elásticos en A , B y C . La rigidez torsora de cada gozne es K . Determinar la flecha y del extremo de la viga para rotaciones elásticas pequeñas de los segmentos.

$$\text{Resp. } y = \frac{14Pl^2}{9K}$$

◀7/89. Las dos barras uniformes, cada una de peso P y longitud l , están articuladas por sus extremos inferiores y soportadas por sus extremos superiores mediante tres resortes iguales, de rigidez k cada uno de ellos. Si cuando las barras están en posición vertical los resortes no están deformados, determinar el dominio de valores de l para los cuales las barras estarán estables en posición vertical.

$$\text{Resp. } \frac{P}{2k} < l < \infty$$

◀7/90. Las dos barras ligeras, cada una de longitud l , están articuladas con resortes de torsión en A y B . Cada resorte tiene una rigidez torsora de K m.N/radián y cuando las barras están verticales no se hallan sometidos a torsión. Examinar las condiciones de estabilidad de las barras en sus posiciones verticales sometidas a una carga vertical F . (Nota: El análisis de este problema puede utilizarse como primera aproximación a los modos de pandeo de columnas.)

Resp. Para el equilibrio en $\theta_1 = \theta_2 = 0$ y con $x = Fl/K$,

estable para $x < 0,382$

inestabilidad de punto de silla

para $0,382 < x < 2,618$

inestable para $x > 2,618$

modos de pandeo:

para $x = 0,382$, $\delta\theta_2 = 1,618 \delta\theta_1$

para $x = 2,618$, $\delta\theta_2 = -0,618 \delta\theta_1$

8 Momentos de inercia de una superficie

44. Definiciones. Cuando las fuerzas que actúan sobre una superficie se distribuyen con continuidad por ella, es a menudo necesario calcular su momento respecto a algún eje. Frecuentemente, la intensidad de la fuerza es proporcional a la distancia de la fuerza al eje de momentos y en tales condiciones resulta una integral de la forma $\int (\text{distancia})^2 d(\text{área})$. A esta integral se la denomina *momento de inercia* de la superficie. La integral depende de la geometría de la superficie y aparece con tanta frecuencia en las aplicaciones de la Mecánica que será útil desarrollar sus propiedades con cierto detalle y poder disponer de ellas para utilizarlas con soltura cuando surja la integral.

En la figura 94 puede verse el origen físico de estas integrales. En la parte *a* de la figura se ha sometido la superficie *ABCD* a una presión *p* distribuida cuya intensidad es proporcional a la distancia *y* al eje *AB*. Ya vimos esta situación en el apartado 29 del capítulo 5, y es característica de la acción de la presión de un líquido sobre una superficie plana. El momento respecto *AB* debido a la presión ejercida sobre el elemento de superficie de área *dA* es $pydA = ky^2dA$. Así, aparece la integral en cuestión cuando se calcula el momento total $M = k \int y^2 dA$.

En la parte *b* de la figura 94 puede verse la distribución de los esfuerzos sobre una sección recta de una viga elástica simple curvada por pares iguales y opuestos aplicados en sus extremos. En toda sección de la viga existe una distribución lineal de la intensidad de fuerza o esfuerzo dada por $\sigma = ky$, siendo el esfuerzo positivo (de tensión) por debajo del eje *O-O* y negativo (de compresión) por encima del eje. El momento elemental respecto al eje *O-O* es $dM = \sigma(ydA) = ky^2dA$. Así, también aparece la misma integral al calcular el momento total $M = k \int y^2 dA$. En la parte *c* de la figura 94 se da un tercer ejemplo en el que puede verse un árbol cilíndrico sometido a un momento de torsión. En cada sección recta del árbol se opone una resistencia a este momento debida a una distribución de los esfuerzos tangenciales o de corte τ que, dentro de los límites de elasticidad del material, es proporcional a la distancia

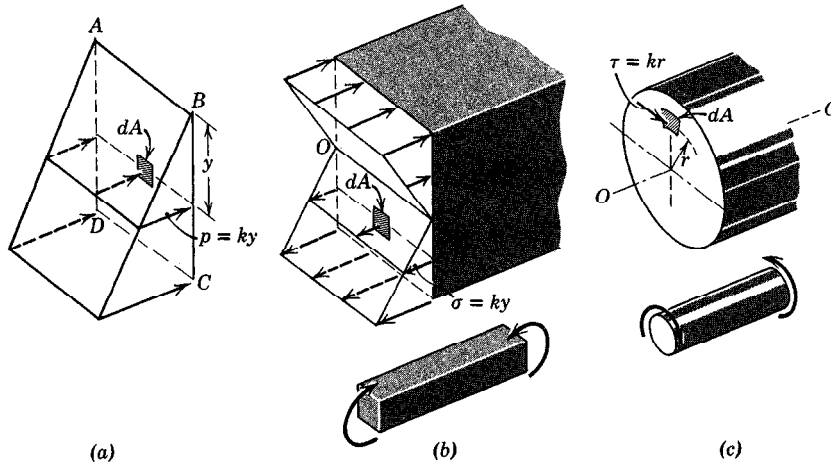


Figura 94

radial r al eje del árbol. Así $\tau = kr$, y el momento total respecto al eje del árbol es $M = \int \tau(r dA) = k \int r^2 dA$. En este caso, la integral difiere de la de

los dos ejemplos anteriores en que la superficie es normal, en lugar de paralela, al eje de momentos y r es una coordenada radial en lugar de una coordenada cartesiana.

Aun cuando la integral que acabamos de tratar recibe el nombre de *momento de inercia* de la superficie respecto al eje en cuestión, sería más apropiado llamarle *segundo momento de superficie*, puesto que el primer momento $y dA$ vuelve a multiplicarse por el brazo de momento y para obtener el segundo momento para el elemento dA . La palabra *inercia* aparece en la terminología a causa de la similitud entre las formas matemáticas de las integrales para los segundos momentos de superficies y las correspondientes a los momentos resultantes de las llamadas fuerzas de inercia, en el caso de los cuerpos giratorios. El momento de inercia de una superficie es una propiedad puramente matemática de la superficie y no tiene, en sí, ningún significado físico.

Considérese la superficie de área A contenida en el plano x - y de la figura 95. Los momentos de inercia del elemento de área dA respecto a los ejes x e y son, por definición, $dI_x = y^2 dA$ y $dI_y = x^2 dA$, respectivamente. Luego, los momentos de inercia de la superficie de área A respecto a los mismos ejes serán

$$\begin{aligned} I_x &= \int y^2 dA, \\ I_y &= \int x^2 dA, \end{aligned} \tag{65}$$

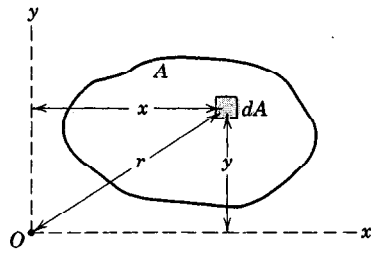


Figura 95

donde la integral está extendida a toda la superficie. El momento de inercia de dA respecto al polo O (eje z) es, por definición análoga, $dI_z = r^2 dA$, y el momento de inercia de toda la superficie respecto a O es

►
$$J_z = \int r^2 dA. \quad (66)$$

Las expresiones definidas por las ecuaciones 65 reciben el nombre de momentos *cartesianos* de inercia, mientras que la expresión de la ecuación 66 recibe el de momento *polar* de inercia. Como $x^2 + y^2 = r^2$, es evidente que,

►
$$J_z = I_x + I_y. \quad (67)$$

La ecuación 67 resulta particularmente útil para calcular el momento polar de inercia de un área cuyo contorno sea más fácil de describir en coordenadas cartesianas que en coordenadas polares.

Obsérvese que el momento de inercia de un elemento contiene el cuadrado de la distancia del elemento al eje de inercia. Un elemento cuya coordenada sea negativa contribuye al momento de inercia en la misma cantidad que un elemento igual cuya coordenada sea positiva y del mismo valor absoluto. En consecuencia, el momento de inercia de una superficie respecto a un eje será una cantidad esencialmente positiva. En cambio, el primer momento de la superficie, que ha intervenido en los cálculos de centroides, puede ser positivo o negativo.

Las dimensiones de los momentos de inercia de superficies son evidentemente L^4 , representando por L las dimensiones de una longitud. Luego, los momentos de inercia de superficies vendrán expresados en centímetros a la cuarta potencia (cm^4) o metros a la cuarta potencia (m^4), o milímetros a la cuarta potencia (mm^4).

Es muy importante elegir adecuadamente las coordenadas a utilizar para el cálculo de momentos de inercia. Se utilizarán coordenadas cartesianas para aquellos contornos que se pueden expresar más fácilmente en dichas coordenadas. Las coordenadas polares suelen simplificar aquellos problemas en los que los contornos se expresan más fácilmente en función de r y θ . También es importante la elección de un elemento de superficie que simplifique la integración todo lo posible. Estas consideraciones son, en todo, análogas a las tratadas en el capítulo 5 al estudiar el cálculo de centroides.

Radio de giro. El momento de inercia de una superficie es una medida de la distribución del área respecto al eje en cuestión. Supongamos que toda el área A de la superficie representada en la figura 96 se concentre en una franja de anchura despreciable situada a una distancia k_x del eje x , tal que el producto $k_x^2 A$ sea igual al momento de inercia respecto al eje. La distancia k_x , llamada *radio de giro*, es, pues, una medida de la distribución del área respecto al eje de inercia. Por definición, pues, para un eje cualquiera

$$\blacktriangleright \quad I = k^2 A \quad \text{o sea} \quad k = \sqrt{\frac{I}{A}}. \quad (68)$$

Cuando se sustituye esta definición en cada uno de los tres términos de la ecuación 67, resulta,

$$\blacktriangleright \quad k_z^2 = k_x^2 + k_y^2. \quad (69)$$

Luego el cuadrado del radio de giro respecto a un eje polar es igual a la suma de los cuadrados de los radios de giro respecto a los dos ejes cartesianos correspondientes.

Es de todo punto necesario no confundir la coordenada \bar{y} del centroide C del área con el radio de giro k . El cuadrado de la distancia centroidal (véase fig. 96) es \bar{y}^2 y es el cuadrado del valor medio de las distancias y de los elementos dA al eje. Por otra parte, la cantidad k_x^2 es el valor medio de los cuadrados de estas distancias. El momento de inercia *no* es igual a $A\bar{y}^2$ porque el cuadrado del valor medio no es igual al valor medio de los cuadrados.

Cambio de ejes. El momento de inercia de una superficie respecto a un eje no centroidal puede expresarse fácilmente en función del momento de inercia respecto a un eje centroidal paralelo a él. En la figura 97 los ejes x_0 - y_0 pasan por el centroide C de la superficie. Vamos a determinar los momentos de la superficie respecto a los ejes paralelos a ellos x - y . Por definición, el momento de inercia del elemento dA respecto al eje x es:

$$dI_x = (y_0 + d_x)^2 dA.$$

Desarrollando e integrando se tiene

$$I_x = \int y_0^2 dA + 2d_x \int y_0 dA + d_x^2 \int dA.$$

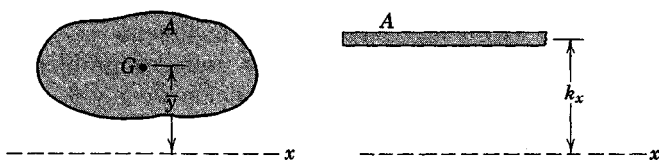


Figura 96

La primera integral es el momento de inercia \bar{I}_x respecto al eje centroidal x_0 . La segunda integral es nula puesto que $A\bar{y}_0 = \int y_0 dA$ e \bar{y}_0 es automáticamente cero. La tercera integral es, simplemente, Ad_x^2 . Luego la expresión de I_x y la expresión análoga de I_y resultan ser

$$\begin{aligned} I_x &= \bar{I}_x + Ad_x^2, \\ I_y &= \bar{I}_y + Ad_y^2. \end{aligned} \quad (70)$$

En virtud de la ecuación 67, la suma de estas dos ecuaciones da

$$J_z = \bar{J}_z + Ad^2. \quad (70a)$$

Las ecuaciones 70 y 70a constituyen el *teorema de Steiner* o teorema de los ejes paralelos. Hagamos resaltar dos hechos. Primero, los ejes entre los que se ha hecho el cambio deben ser paralelos, y segundo, uno de los ejes debe pasar por el centroide de la superficie.

Si se quisiera cambiar de un eje a otro paralelo a él sin que ninguno de ambos pasara por el centroide, habría que cambiar de uno de los ejes a otro paralelo que pasara por el centroide y luego cambiar de éste al segundo eje.

El teorema de Steiner vale también para los radios de giro. Sustituyendo en las ecuaciones 70 la definición de k , se tiene,

$$k^2 = \bar{k}^2 + d^2, \quad (70b)$$

donde \bar{k} es el radio de giro respecto a un eje centroidal paralelo al eje al que se refiere k , y d es la distancia entre ambos ejes. Los ejes pueden estar contenidos en el plano de la superficie o ser normales a él.

En la tabla C4 del apéndice C se da un resumen de las relaciones de los momentos de inercia para algunas figuras planas corrientes. Los problemas tipo que se dan a continuación ilustran el cálculo detallado de los momentos de inercia de superficies. Los problemas 8/1, 8/2 y 8/3 desarrollan los resultados

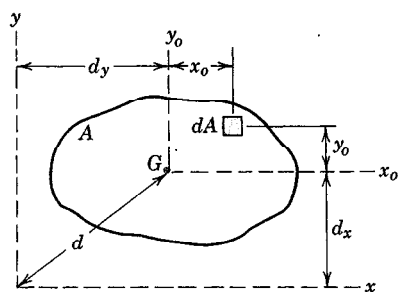


Figura 97

de los momentos de inercia de tres formas comunes que encuentran repetida aplicación en Mecánica. Dichos resultados deben comprenderse a la perfección y recordarse.

Problemas tipo

8/1. Determinar los momentos de inercia de la superficie rectangular respecto a los ejes centroides $x_0 - y_0$, al eje polar centroidal z_0 que pasa por C , al eje x y al eje polar z que pasa por O .

Solución. Para el cálculo del momento de inercia \bar{I}_x respecto al eje x_0 se elige una franja horizontal de área $b \, dy$ tal que todos los elementos de la franja tengan la misma coordenada y . Así.

$$[I_x = \int y^2 dA] \quad \bar{I}_x = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b \, dy = \frac{1}{12} b h^3. \quad \text{Resp.}$$

Intercambiando símbolos, el momento de inercia respecto al eje centroidal y_0 será

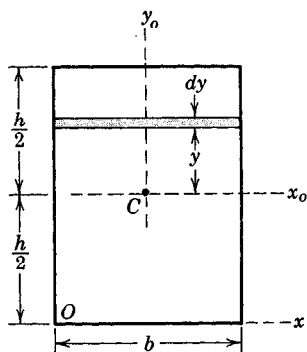
$$\bar{I}_y = \frac{1}{12} h b^3. \quad \text{Resp.}$$

El momento de inercia polar centroidal es

$$[J_z = \bar{I}_x + \bar{I}_y] \quad J_z = \frac{1}{12} (b h^3 + h b^3) = \frac{1}{12} A (b^2 + h^2). \quad \text{Resp.}$$

En virtud del teorema de Steiner, el momento de inercia respecto al eje x es

$$[I_x = \bar{I}_x + A d_x^2] \quad I_x = \frac{1}{12} b h^3 + b h \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} b h^3 = \frac{1}{3} A h^2. \quad \text{Resp.}$$



Problema 8/1

El momento polar de inercia respecto a O puede obtenerse también aplicando el teorema de Steiner. Así

$$[J_z = J_z + Ad^2] \quad J_z = \frac{1}{12}A(b^2 + h^2) + A\left[\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2\right],$$

$$J_z = \frac{1}{3}A(h^2 + h^2).$$

Resp.

8/2. Calcular los momentos de inercia de la superficie circular respecto a un eje diametral y respecto a un eje polar que pase por el centro. Especificar los radios de giro.

Solución. Para el cálculo del momento de inercia respecto al eje polar z que pasa por O puede utilizarse un elemento de superficie en forma de corona circular, como el indicado en la parte *a* de la figura, ya que todos los elementos de dicha corona equidistan de O . El área elemental es $dA = 2\pi r_0 dr_0$ y, por tanto,

$$[J_z = \int r^2 dA] \quad J_z = \int_0^r r_0^2 (2\pi r_0 dr_0) = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{1}{2}Ar^2.$$

Resp.

El radio de giro polar es,

$$\left[k = \sqrt{\frac{J}{A}}\right] \quad k_z = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Resp.

Por simetría $I_x = I_y$, por lo que según la ecuación 67.

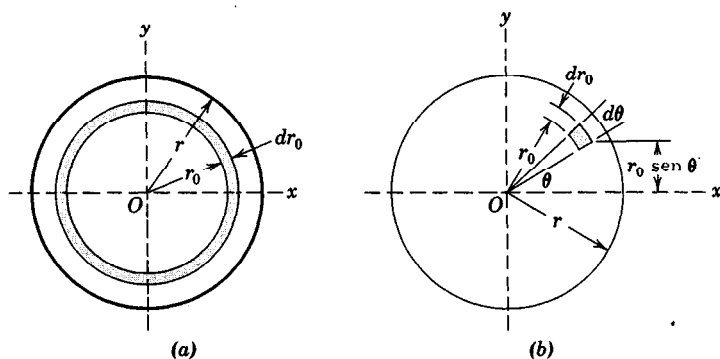
$$[J_z = I_x + I_y] \quad I_x = \frac{1}{2}J_z = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{1}{4}Ar^2.$$

Resp.

El radio de giro respecto al eje diametral es,

$$\left[k = \sqrt{\frac{I}{A}}\right] \quad k_x = \frac{r}{2}.$$

Resp.



Problema 8/2

La anterior determinación de I_x es la más sencilla. También podría obtenerse el resultado por integración directa, utilizando como elemento de superficie $dA = r_0 dr_0 d\theta$ que es el indicado en la parte *b* de la figura. Por definición,

$$[I_x = \int y^2 dA] \quad I_x = \int_0^{2\pi} \int_0^r (r_0 \sin \theta)^2 r_0 dr_0 d\theta, \\ = \int_0^{2\pi} \frac{r^4 \sin^2 \theta}{4} d\theta = \frac{r^4}{4} \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi r^4}{4}. \quad \text{Resp.}$$

8/3. Determinar los momentos de inercia de la superficie triangular respecto a su base y respecto a ejes paralelos a ella que pasen por su centroide y por el vértice opuesto a dicha base.

Solución. Se elige una franja paralela a la base, tal como la indicada en la figura, cuya área es $dA = xdy = [(h-y)b/h] dy$. Por definición

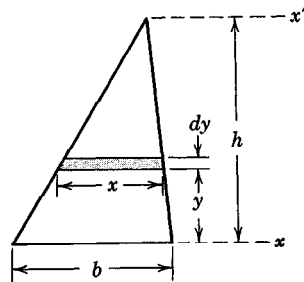
$$[I_x = \int y^2 dA] \quad I_x = \int_0^h y^2 \frac{h-y}{h} b dy = b \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4h} \right]_0^h = \frac{bh^3}{12}. \quad \text{Resp.}$$

En virtud del teorema de Steiner, el momento de inercia \bar{I} respecto a un eje que pasa por el centroide, que se halla a una distancia $h/3$ por encima de las x , es,

$$[I = \bar{I} + Ad^2] \quad I = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{bh}{2} \right) \left(\frac{h}{3} \right)^2 = \frac{bh^3}{36}. \quad \text{Resp.}$$

Cambiando del eje centroidal al eje x' que pasa por el vértice se tiene,

$$[I = \bar{I} + Ad^2] \quad I_{x'} = \frac{bh^3}{36} + \left(\frac{bh}{2} \right) \left(\frac{2h}{3} \right)^2 = \frac{bh^3}{4}. \quad \text{Resp.}$$



Problema 8/3

8/4. Determinar el momento de inercia respecto al eje x del área semicircular de la figura.

Solución. El momento de inercia de la superficie semicircular respecto al eje x'

es la mitad del correspondiente a un círculo completo respecto al mismo eje. Luego, según los resultados del problema 8/2,

$$I_{x'} = \frac{1}{2} \frac{\pi r^4}{4} = \frac{2^4 \pi}{8} = 2\pi \text{ cm}^4.$$

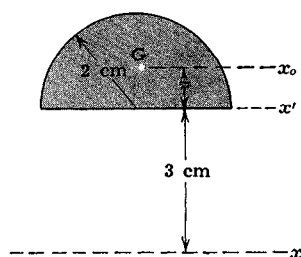
A continuación se obtiene el momento de inercia I respecto al eje centroidal paralelo x_0 . Aplicando el teorema de Steiner se hace el cambio para una distancia $\bar{r} = 4r/3\pi = (4 \times 2)/3\pi = 8/3\pi$ cm. Luego,

$$[I = I - Ad^2] \quad I = 2\pi - \left(\frac{2^2\pi}{2}\right)\left(\frac{8}{3\pi}\right)^2 = 1,755 \text{ cm}^4.$$

Por último, se hace el cambio del eje centroidal x_0 al eje x , lo cual da,

$$[I = I + Ad^2] \quad I_x = 1,755 + \left(\frac{2^2\pi}{2}\right)\left(3 + \frac{8}{3\pi}\right)^2 \\ = 1,755 + 93,1 = 94,9 \text{ cm}^4.$$

Resp.



Problema 8/4

8/5. Calcular el momento de inercia respecto al eje x del área limitada por el eje y y los arcos de círculo de radio a cuyos centros se hallan en O y en A .

Solución. La elección de una franja vertical de área infinitesimal permite cubrir toda la superficie con una sola integración. Una franja horizontal requeriría dos integraciones respecto a y en virtud de la discontinuidad. El momento de inercia de la franja respecto al eje x es el de una franja de altura y_2 menos el de una franja de altura y_1 . Así, pues, de los resultados del problema tipo 8/1,

$$dI_x = \frac{1}{3}(y_2 dx)y_2^2 - \frac{1}{3}(y_1 dx)y_1^2 = \frac{1}{3}(y_2^3 - y_1^3) dx.$$

Los valores de y se obtienen de las ecuaciones de las dos curvas, las cuales son $x^2 + y_2^2 = a^2$ y $(x - a)^2 + y_1^2 = a^2$ y que dan $y_2 = \sqrt{a^2 - x^2}$ e $y_1 = \sqrt{a^2 - (x - a)^2}$. Así pues

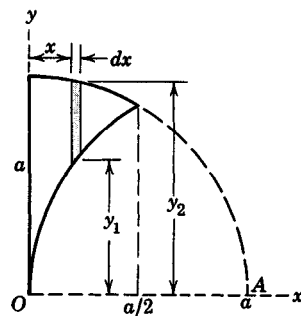
$$I_x = \frac{1}{3} \int_0^{a/2} \left\{ (a^2 - x^2) \sqrt{a^2 - x^2} - [a^2 - (x - a)^2] \sqrt{a^2 - (x - a)^2} \right\} dx.$$

Resolviendo el sistema de las dos ecuaciones se tiene la coordenada x de la intersección de las dos curvas que, por inspección, resulta ser $a/2$. El cálculo de las integrales da:

$$\begin{aligned}\int_0^{a/2} a^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \frac{a^4}{4} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} \right), \\ -\int_0^{a/2} x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \frac{a^4}{16} \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3} \right), \\ -\int_0^{a/2} a^2 \sqrt{a^2 - (x-a)^2} dx &= \frac{a^4}{4} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3} \right), \\ \int_0^{a/2} (x-a)^2 \sqrt{a^2 - (x-a)^2} dx &= \frac{a^4}{8} \left(\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{3} \right)\end{aligned}$$

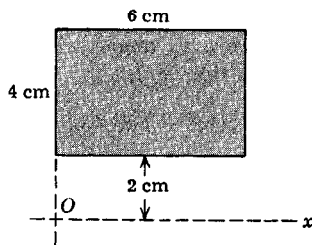
y sustituyéndolas en la expresión para I_x se tiene

$$I_x = \frac{a^4}{96} (9\sqrt{3} - 2\pi) = 0,0969a^4. \quad \text{Resp.}$$



Problema 8/5

Problemas



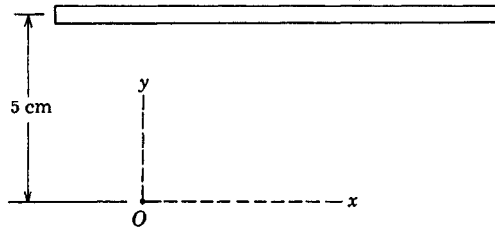
Problema 8/6

8/6. Calcular el momento de inercia de la superficie rectangular respecto al eje x y el momento polar de inercia respecto al punto O .

Resp. $I_x = 416 \text{ cm}^4$, $I_o = 704 \text{ cm}^4$

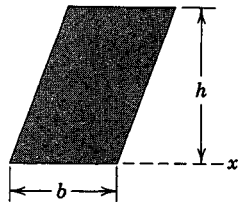
8/7. La tira rectangular estrecha tiene un área de 6 cm^2 y su momento de inercia respecto al eje y vale 170 cm^4 . Obtener una buena aproximación para el radio de giro respecto al punto O .

Resp. $k_O = 7,30 \text{ cm}$



Problema 8/7

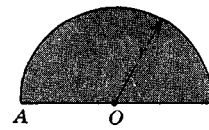
8/8. De los resultados del Problema tipo 8/1, exponer sin cálculo cuál es el momento de inercia de la superficie del paralelogramo respecto al eje x que contiene a su base y respecto a un eje paralelo que pase por su centroide.



Problema 8/8

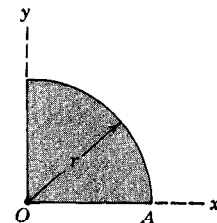
8/9. Determinar el momento polar de inercia de la superficie semicircular respecto al punto A .

Resp. $J_A = \frac{3}{2}\pi r^4$



Problema 8/9

8/10. Calcular el radio polar de giro respecto al centroide de la superficie del cuadrante para $r = 4 \text{ cm}$.

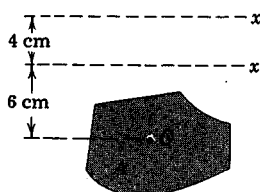


Problema 8/10

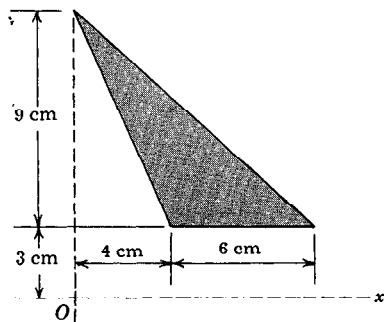
8/11. Para la superficie del cuadrante objeto del problema 8/10, determinar el radio polar de giro respecto al punto A .

Resp. $k_A = 0,807 r$

8/12. Los momentos de inercia de la superficie A respecto a los ejes x y x' difieren en 3650 cm^4 . Calcular el área A de la superficie sombreada cuyo centroide está en C .



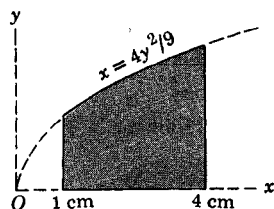
Problema 8/12



Problema 8/13

8/13. Calcular el momento de inercia de la superficie triangular respecto al eje x .

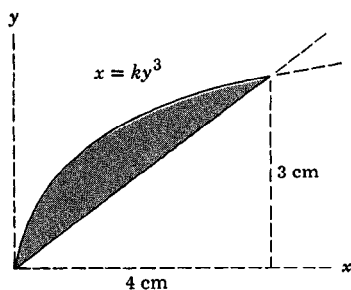
Resp. $I_x = 1093 \text{ cm}^4$



Problema 8/14

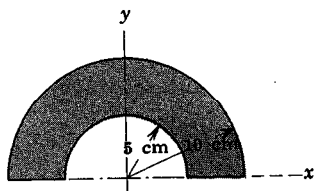
8/14. Calcular el momento de inercia de la superficie sombreada respecto al eje x .

Resp. $I_x = 13,95 \text{ cm}^4$



Problema 8/15

8/15. Calcular el momento de inercia de la superficie sombreada respecto al eje x .

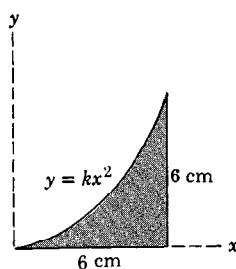


Problema 8/16

8/16. Obtener por integración directa el momento polar de inercia de la superficie del anillo semicircular respecto al punto O y utilizar el resultado para hallar el momento de inercia respecto al eje x .

Resp. $I_x = 3682 \text{ cm}^4$

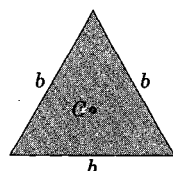
8/17. Calcular por integración directa el momento de inercia de la superficie sombreada respecto al eje x . Resolver el problema, primero, utilizando una tira horizontal de área infinitesimal y, segundo, utilizando una tira vertical de área infinitesimal.



Problema 8/17

8/18. Determinar el radio polar de giro de la superficie del triángulo equilátero de lado b respecto a su centroide C .

$$\text{Resp. } \bar{k} = \frac{b}{2\sqrt{3}}$$

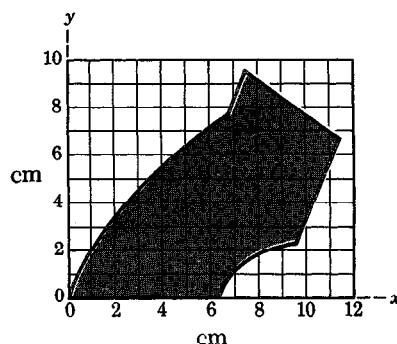


Problema 8/18

8/19. Aproximar el resultado del momento de inercia respecto al eje x de la superficie sombreada del problema 8/16 dividiendo la superficie en cinco fajas horizontales de igual anchura. Tratar el momento de inercia de cada faja como producto de su área por el cuadrado de la distancia de su centro al eje.

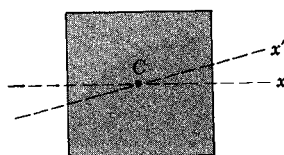
8/20. Determinar el momento de inercia de la superficie irregular del problema 5/51, que reproducimos, respecto al eje x .

$$\text{Resp. } I_x = 1230 \text{ cm}^4$$



Problema 8/20

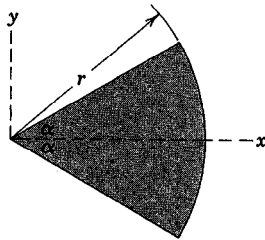
8/21. Demostrar que el momento de inercia de la superficie del cuadrado respecto a un eje cualquiera x' que pase por su centro es igual que el momento de inercia respecto a un eje central x paralelo a un lado.



Problema 8/21

8/22. El área de un anillo circular de radio interior r y radio exterior $r + \Delta r$ es aproximadamente igual al producto de la longitud de la circunferencia de radio igual al radio medio multiplicada por la anchura Δr . El momento polar de inercia del anillo se puede aproximar multiplicando dicha área por el cuadrado del radio medio. ¿Qué error porcentual se comete si $\Delta r = r/10$?

Resp. Error = 0,226 %

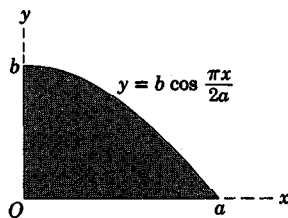


Problema 8/23

8/23. Determinar los momentos de inercia de la superficie del sector circular respecto a los ejes x e y .

$$\text{Resp. } I_x = \frac{r^4}{4} \left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} \right)$$

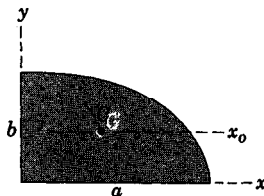
$$I_y = \frac{r^4}{4} \left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2} \right)$$



Problema 8/24

8/24. Determinar el momento polar de inercia de la superficie sombreada respecto al origen O .

$$\text{Resp. } J_O = \frac{2ab}{\pi} \left[\frac{2b^2}{9} + a^2 \left(1 - \frac{8}{\pi^2} \right) \right]$$



Problema 8/25

8/25. Determinar el momento de inercia de la superficie del cuadrante elíptico respecto al eje centroidal x_0 . Hallar también el momento polar de inercia respecto al centroide C .

$$\text{Resp. } J = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) (a^2 + b^2) ab$$

45. Superficies compuestas. Frecuentemente es necesario calcular momentos de inercia de una superficie constituida por varias partes distintas de forma geométrica sencilla y calculable. Como un momento de inercia es la integral o suma de los productos del cuadrado de la distancia por el área del elemento de superficie, se deduce que el momento de inercia de una superficie compuesta respecto a un eje particular no es más que la suma de los momentos de inercia respecto a dicho eje de las distintas partes que la componen. A menudo convendrá considerar la superficie total como compuesta de partes positivas y negativas. El momento de inercia de una superficie negativa es una cantidad negativa.

Cuando la sección esté compuesta de un gran número de partes, convendrá tabular los resultados de éstas atendiendo a su área A , momento centroidal de inercia \bar{I} , distancia d del eje centroidal al eje respecto al cual se calcula el momento de inercia de toda la sección, y producto Ad^2 . Para cada una de las partes, el momento de inercia buscado es $\bar{I} + Ad^2$ y por tanto el correspondiente a la sección total podrá expresarse en la forma $I = \Sigma \bar{I} + \Sigma Ad^2$.

Problema tipo

8/26. Calcular el momento de inercia y el radio de giro respecto al eje x de la superficie sombreada que se indica.

Solución. La superficie total está compuesta de la superficie positiva del rectángulo (1) y de las superficies negativas del cuadrante circular (2) y del triángulo (3). Por el problema tipo 8/1 sabemos que el momento de inercia del rectángulo respecto al eje x es

$$I_x = \frac{1}{3}Ah^2 = \frac{1}{3}(8)(6)(6^2) = 576 \text{ cm}^4.$$

Según el problema tipo 8/2, el momento de inercia de la superficie negativa del cuadrante circular respecto al eje x' de su base es

$$I_{x'} = -\frac{1}{4}\left(\frac{\pi r^4}{4}\right) = -\frac{\pi}{16}(3^4) = -15,90 \text{ cm}^4.$$

Llevando este resultado a una distancia $\bar{r} = 4r/3\pi = 4(3)/3\pi = 1,273 \text{ cm}$ y aplicando el teorema de Steiner se tiene para el momento de inercia centroidal de la parte (2)

$$[I = I - Ad^2] \quad I_x = -15,90 - \left[-\frac{\pi(3^2)}{4}(1,273)^2\right] = -4,45 \text{ cm}^4.$$

El momento de inercia respecto al eje x del cuadrante circular será, pues,

$$[I = I + Ad^2] \quad I_x = -4,45 + \left[-\frac{\pi(3^2)}{4}\right](6 - 1,273)^2 = -162,4 \text{ cm}^4.$$

Por último, el momento de inercia de la superficie triangular negativa (3) respecto a su base, según el problema tipo 8/3, es

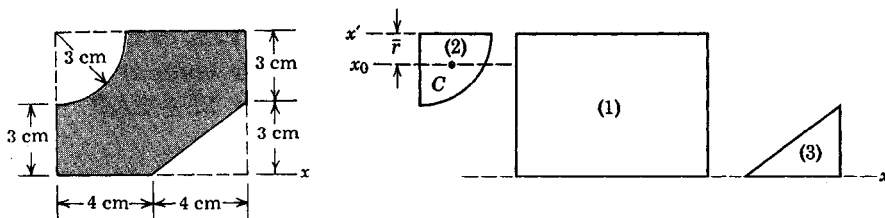
$$I_x = -\frac{1}{12}bh^3 = -\frac{1}{12}(4)(3^3) = -9 \text{ cm}^4.$$

En consecuencia, el momento de inercia total de la superficie compuesta, respecto al eje x será

$$I_x = 576 - 162,4 - 9 = 404,6 \text{ cm}^4. \quad \text{Resp.}$$

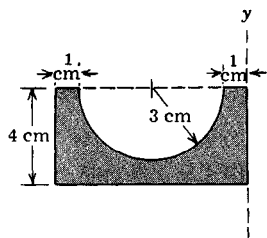
El área total de la figura es $A = 6(8) - \frac{1}{4}\pi(3^2) - \frac{1}{2}(4)(3) = 34,93 \text{ cm}^2$ con lo que el radio de giro respecto al eje x será

$$k_x = \sqrt{I_x/A} = \sqrt{404,6/34,93} = 3,40 \text{ cm}. \quad \text{Resp.}$$



Problema 8/26

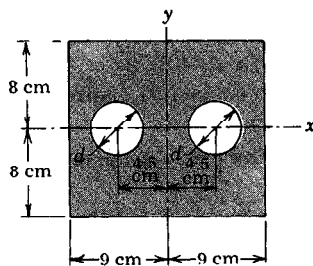
Problemas



Problema 8/27

8/27. Calcular el momento de inercia respecto al eje y de la superficie sombreada.

$$\text{Resp. } I_y = 425 \text{ cm}^4$$

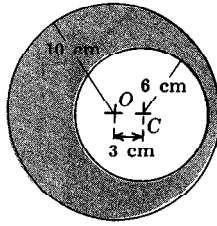


Problema 8/28

8/28. Calcular el diámetro d de cada uno de los dos agujeros que haga iguales los momentos de inercia de la superficie sombreada respecto a los ejes x e y .

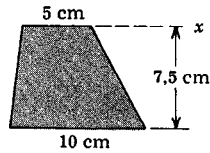
8/29. Calcular el momento polar de inercia de la superficie sombreada respecto al punto O .

Resp. $J_O = 12\,654\text{ cm}^4$



Problema 8/29

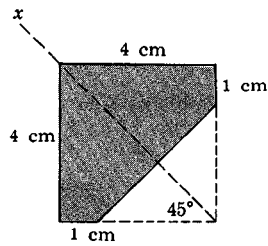
8/30. Calcular el momento de inercia respecto al eje x de la superficie del trapecio.



Problema 8/30

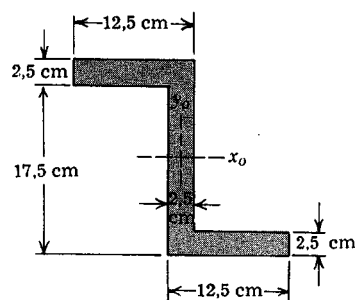
8/31. Hallar el momento de inercia de la superficie sombreada respecto al eje de simetría x .

Resp. $I_x = 17,96\text{ cm}^4$

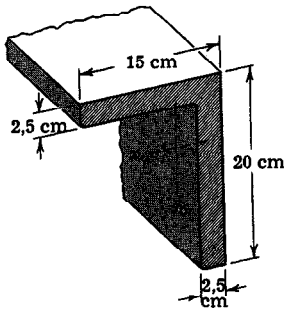


Problema 8/31

8/32. Determinar los momentos de inercia del perfil en Z respecto a sus ejes centroidales x_0 e y_0 .



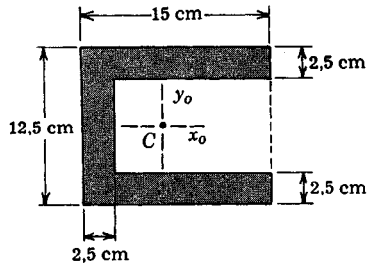
Problema 8/32



Problema 8/33

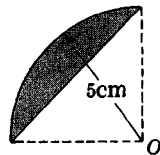
8/33. Calcular el momento de inercia de la sección recta de la viga respecto a su eje centroidal x_0 .

Resp. $I_{x_0} = 3125 \text{ cm}^4$



Problema 8/34

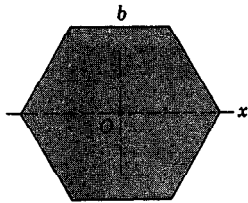
8/34. Calcular el radio polar de giro del perfil en U respecto a su centroide C.



Problema 8/35

8/35. Calcular el radio polar de giro de la superficie sombreada respecto al punto O.

Resp. $k_O = 4,45 \text{ cm}$



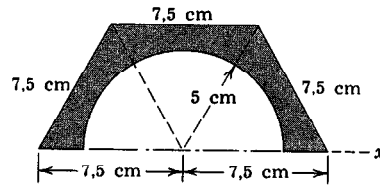
Problema 8/36

8/36. Desarrollar una fórmula para el momento de inercia de la superficie exagonal regular de lado b respecto a su eje diametral x .

8/37. Determinar la expresión del radio de giro de la superficie exagonal del problema 8/36 respecto a un eje polar que pase por O.

8/38. Calcular el momento de inercia de la superficie sombreada respecto al eje x .

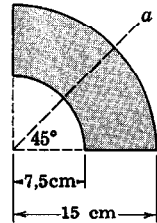
Resp. $I_x = 611 \text{ cm}^4$



Problema 8/38

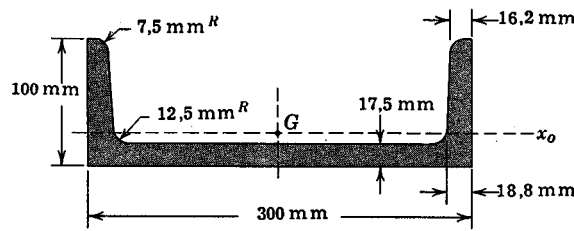
8/39. Calcular el momento de inercia del anillo cuartocircular respecto al eje a de simetría. (Sugerencia: Utilizar los resultados del problema 8/23.)

Resp. $I_a = 3386 \text{ cm}^4$



Problema 8/39

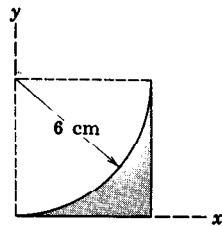
8/40. Calcular el momento de inercia de la sección normalizada de $300 \times 100 \text{ mm}$ de un canal respecto a su eje centroidal x_0 . Despréciense las curvas y los radios y compárese el resultado con el de $I_x = 625 \text{ cm}^4$ que dan los manuales.



Problema 8/40

8/41. Calcular el momento de inercia de la superficie sombreada respecto al eje x .

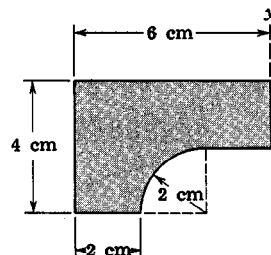
Resp. $I_x = 23,7 \text{ cm}^4$



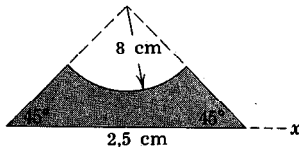
Problema 8/41

8/42. Calcular el momento de inercia de la superficie de la figura respecto al eje y .

Resp. $I_y = 256 \text{ cm}^4$

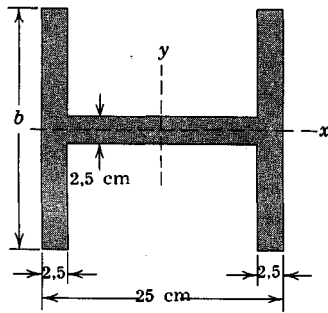


Problema 8/42



Problema 8/43

8/43. Calcular el momento de inercia de la superficie de la figura respecto a su base. (Sugerencia: Utilizar los resultados del problema 8/23.) Resp. $I_x = 933 \text{ cm}^4$



Problema 8/44

8/44. Para el perfil de la viga en H, determinar la anchura b del ala de la viga que haga iguales los momentos de inercia respecto a los ejes centroidales x e y . Resp. $b = 40,25 \text{ cm}$

46. Productos de inercia y rotación de los ejes. En ciertos problemas en los que intervienen secciones rectas asimétricas al calcular los momentos de inercia respecto a ejes girados aparece una expresión de la forma

$$dI_{xy} = xy \, dA,$$



$$I_{xy} = \int xy \, dA, \quad (71)$$

donde x e y son las coordenadas del elemento de superficie dA . A la cantidad I_{xy} se le da el nombre de *producto de inercia* de la superficie A respecto a los ejes

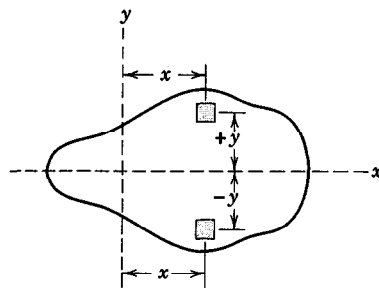


Figura 98

x - y . A diferencia de los momentos de inercia, los productos de inercia pueden ser positivos o negativos.

Refiriéndonos a la figura 98 podemos ver que para un eje de simetría, tal como el eje x , la suma del término $x(-y) dA$ con el $x(+y) dA$ correspondiente al elemento simétrico, se anula. Como podemos considerar la superficie total descompuesta en pares de elementos que cumplan lo anterior, se deduce que el producto de inercia será nulo.

Existe un teorema de cambio de ejes para los productos de inercia, análogo al teorema de Steiner. Por definición, el producto de inercia de la superficie A de la figura 97 respecto a los ejes x e y en función de las coordenadas x_0, y_0 de los ejes centroidales es,

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int (x_0 + d_x)(y_0 + d_y) dA \\ &= \int x_0 y_0 dA + d_x \int x_0 dA + d_y \int y_0 dA + d_x d_y \int dA, \\ I_{xy} &= \bar{I}_{xy} + d_x d_y A, \end{aligned} \quad (72)$$

donde \bar{I}_{xy} es el producto de inercia respecto a los ejes centroidales $x_0 - y_0$ paralelos a los ejes x - y .

El producto de inercia encuentra su empleo cuando sea necesario calcular el momento de inercia de una superficie respecto a ejes inclinados. Esta consideración conduce directamente al importante problema de determinar los ejes respecto a los cuales el momento de inercia es máximo o mínimo.

En la figura 99 los momentos de inercia de la superficie respecto a los ejes x' e y' son,

$$\begin{aligned} I_{x'} &= \int y'^2 dA = \int (y \cos \theta - x \sin \theta)^2 dA, \\ I_{y'} &= \int x'^2 dA = \int (y \sin \theta + x \cos \theta)^2 dA. \end{aligned}$$

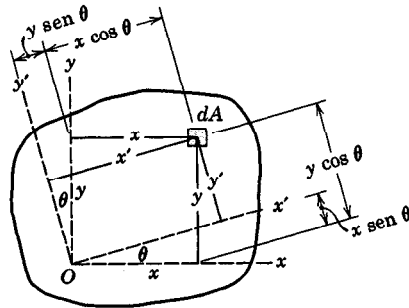


Figura 99

Desarrollando y sustituyendo las identidades trigonométricas

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}, \quad \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2},$$

y las relaciones de definición de I_x , I_y , I_{xy} se tiene,

$$\begin{aligned} I_{x'} &= \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta, \\ I_{y'} &= \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (73)$$

En forma análoga,

$$I_{x'y'} = \int x'y' dA = \int (y \cos \theta - x \sin \theta)(y \sin \theta + x \cos \theta) dA.$$

Desarrollando y sustituyendo las identidades trigonométricas

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta, \quad \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$$

y las relaciones de definición de I_x , I_y , I_{xy} se tiene

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta. \quad (73a)$$

Sumando las ecuaciones 73 se tiene $I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y = I_z$, como expresión del momento polar de inercia respecto a O , lo cual comprueba el resultado de la ecuación 67.

El ángulo que hace máximo o mínimo a $I_{x'}$ o $I_{y'}$ se puede determinar anulando la derivada de $I_{x'}$ o $I_{y'}$ respecto a θ . Así.

$$\frac{dI_{x'}}{d\theta} = (I_y - I_x) \sin 2\theta - 2I_{xy} \cos 2\theta = 0.$$

Llamando α a este ángulo crítico, se tiene

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}. \quad (74)$$

La ecuación 74 da dos valores de 2α que difieren en π , ya que $\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg} (2\alpha + \pi)$. En consecuencia, las dos soluciones de α diferirán en $\pi/2$. Un valor define el eje de momento de inercia máximo y el otro el de momento de inercia mínimo. Estos dos ejes rectangulares reciben el nombre de *ejes principales de inercia*.

Sustituyendo la ecuación 74 del valor crítico de 2θ en la ecuación 73a, se ve que el producto de inercia correspondiente a los ejes principales de inercia es nulo. Sustituyendo los valores de $\sin 2\alpha$ y $\cos 2\alpha$, obtenidos de la ecuación 74,

en $\sin 2\theta$ y $\cos 2\theta$, respectivamente, en las ecuaciones 73, se obtienen las magnitudes de los momentos principales de inercia, las cuales son

$$I_{\text{máx.}} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2},$$

$$I_{\text{mín.}} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}. \quad (75)$$

Las relaciones de las ecuaciones 73, 73a, 74 y 75 pueden representarse gráficamente mediante un diagrama conocido por círculo de Mohr. Para valores dados de I_x , I_y e I_{xy} , pueden determinarse, mediante el diagrama, los valores correspondientes de $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$, para el valor que se quiera del ángulo θ . Se toman, en primer lugar, un eje horizontal para la medida de momentos de inercia y un eje vertical para la medida de productos de inercia (véase figura 100). A continuación, se localizan el punto A de coordenadas (I_x, I_{xy}) y el punto B de coordenadas $(I_y, -I_{xy})$. Con estos dos puntos como extremos de un diámetro, se traza una circunferencia. El ángulo que forma el radio OA con el eje horizontal es 2α , o sea, el doble del ángulo que forma el eje x de la superficie en cuestión con el eje del momento de inercia máximo. Tanto el ángulo sobre el diagrama como el ángulo sobre la superficie se miden en el mismo sentido, según se indica. Las coordenadas de un punto C cualquiera son $(I_{x'}, I_{x'y'})$ y las del punto correspondiente D son $(I_{y'}, -I_{x'y'})$. El ángulo entre OA y OC es 2θ , o sea, el doble del ángulo que forman los ejes x y x' .

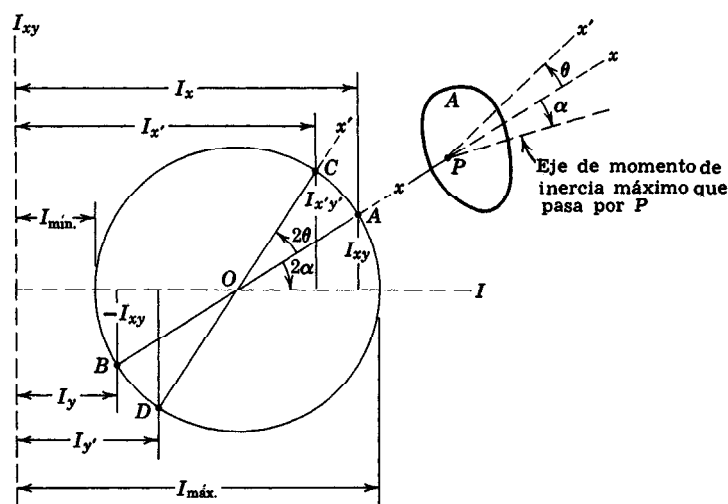


Figura 100

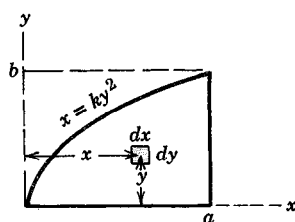
Ambos ángulos se miden, también, en el mismo sentido según se indica. Por consideraciones trigonométricas puede verificarse que las ecuaciones 73, 73a y 74 están de acuerdo con lo enunciado.

Problemas tipo

8/45. Determinar el producto de inercia I_{xy} de la superficie limitada bajo la parábola de la figura.

Solución. La ecuación de la curva puede escribirse en la forma $x = ay^2/b^2$. El producto de inercia para el elemento $dA = dx dy$ es $dI_{xy} = xy dx dy$ y para la superficie total es,

$$I_{xy} = \int_0^b \int_{ay^2/b^2}^a xy dx dy = \int_0^b \frac{1}{2} \left(a^2 - \frac{a^2 y^4}{b^4} \right) y dy = \frac{1}{6} a^2 b^2. \quad \text{Resp.}$$



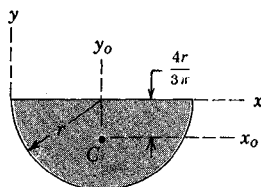
Problema 8/45

8/46. Determinar el producto de inercia de la superficie semicircular respecto a los ejes x - y .

Solución. Podemos utilizar el teorema del cambio de ejes para los productos de inercia (ec. 72) y escribir

$$[I_{xy} = \bar{I}_{xy} + d_x d_y A] \quad I_{xy} = 0 + \left(-\frac{4r}{3\pi} \right) (r) \left(\frac{\pi r^2}{2} \right) = -\frac{2r^4}{3} \quad \text{Resp.}$$

donde las coordenadas x e y del centroide C son $d_x = +r$ y $d_y = -4r/3\pi$. Como uno de los ejes centroidales es eje de simetría, $\bar{I}_{xy} = 0$.



Problema 8/46

8/47. Situar los ejes centroidales principales de inercia y hallar sus correspondientes momentos de inercia máximo y mínimo para la sección de ángulo.

Solución. El centroide se localiza fácilmente en la forma que se indica. El producto de inercia para cada rectángulo respecto a sus propios ejes centroidales paralelos a los ejes x y y es nulo por simetría. Luego el producto de inercia para la parte A es,

$$[I_{xy} = I_{xy} + d_x d_y A] \quad I_{xy} = 0 + (-\frac{3}{4})(+\frac{3}{4})(4) = -3,75 \text{ cm}^4.$$

Análogamente para B,

$$[I_{xy} = I_{xy} + d_x d_y A] \quad I_{xy} = 0 + (\frac{3}{4})(-\frac{3}{4})(4) = -3,75 \text{ cm}^4.$$

Para el ángulo completo,

$$I_{xy} = -3,75 - 3,75 = -7,50 \text{ cm}^4.$$

Los momentos de inercia para la parte A son,

$$[I = I + Ad^2] \quad I_x = \frac{1}{12}(4)(1^3) + (\frac{3}{4})^2(4) = 6,583 \text{ cm}^4,$$

$$I_y = \frac{1}{12}(1)(4^3) + (\frac{3}{4})^2(4) = 7,583 \text{ cm}^4.$$

Operando de igual forma, los momentos de inercia para la parte B resultan ser $I_x = 11,583 \text{ cm}^4$, $I_y = 2,583 \text{ cm}^4$. Luego, para toda la sección,

$$I_x = 6,583 + 11,583 = 18,167 \text{ cm}^4,$$

$$I_y = 7,583 + 2,583 = 10,167 \text{ cm}^4.$$

La inclinación de los ejes principales de inercia viene dada por la ecuación 74. Por tanto,

$$\left[\text{tg } 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} \right] \quad \text{tg } 2\alpha = \frac{-2(7,50)}{10,167 - 18,167} = 1,875,$$

$$2\alpha = 61^\circ 56', \quad \alpha = 30^\circ 58'.$$

Resp.

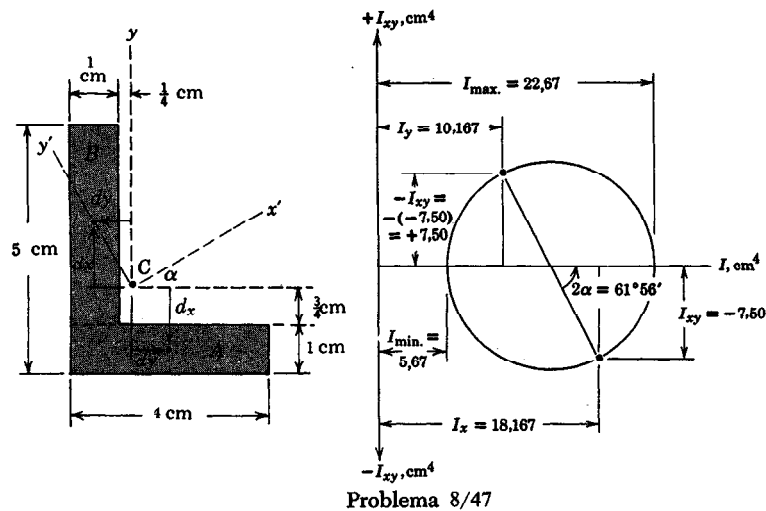
$$I_{\text{máx.}} = I_{x'} = \frac{18,167 + 10,167}{2} + \frac{18,167 - 10,167}{2} (0,4705) + (7,50)(0,8824) \\ = 22,67 \text{ cm}^4;$$

Resp.

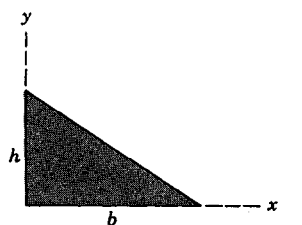
$$I_{\text{mín.}} = I_{y'} = \frac{18,167 + 10,167}{2} - \frac{18,167 - 10,167}{2} (0,4705) - (7,50)(0,8824) \\ = 5,67 \text{ cm}^4.$$

Resp.

Estos resultados podrían también obtenerse directamente de las ecuaciones 75 o gráficamente con la construcción del círculo de Mohr, según puede verse en la parte derecha de la figura.



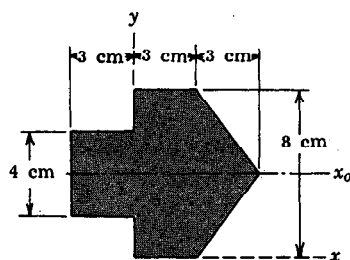
Problemas



Problema 8/48

8/48. Calcular el producto de inercia de la superficie del triángulo rectángulo de la figura respecto a los ejes x - y .

Resp. $I_{xy} = h^3 b^2 / 24$

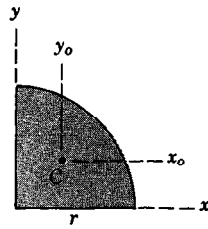


Problema 8/49

8/49. Aprovechando la simetría de la superficie sombreada respecto al eje x_0 calcular el producto de inercia respecto a los ejes x - y .

Resp. $I_{xy} = 264 \text{ cm}^4$

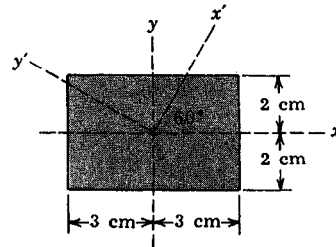
8/50. Obtener el producto de inercia de la superficie del cuadrante circular respecto a los ejes x - y y utilizar este resultado para obtener el producto de inercia respecto a los ejes centroidales paralelos a aquéllos.



Problema 8/50

8/51. Una superficie tiene los momentos de inercia $I_x = 28 \text{ cm}^4$ e $I_y = 12 \text{ cm}^4$ respecto a un sistema de ejes x - y . El ángulo medido en sentido horario del eje x al eje de máximo momento de inercia que pasa por el origen O es de 20° . Determinar el momento de inercia mínimo de la superficie respecto a un eje que pase por O .

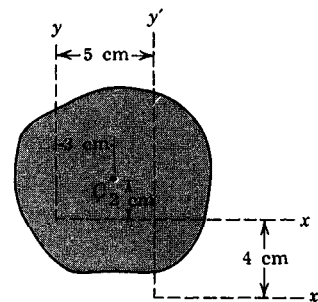
Resp. $I_{\min} = 9,56 \text{ cm}^4$



Problema 8/52

8/53. Los productos de inercia de la superficie sombreada respecto a los ejes x - y y x' - y' son 490 cm^4 y -920 cm^4 , respectivamente. Calcular el área de la figura sabiendo que su centroide es C .

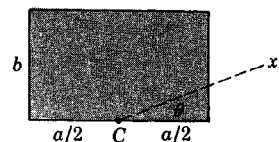
Resp. $A = 78,3 \text{ cm}^2$



Problema 8/53

8/54. Si es $I_x = I_y$ para una superficie que sea simétrica respecto al eje x o al y , demostrar que el momento de inercia será el mismo respecto a todos los ejes que pasan por el origen.

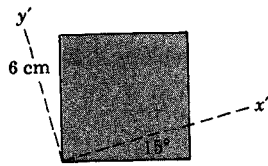
8/55. Determinar las proporciones de la superficie rectangular para la cual el momento de inercia respecto a un eje x' que pase por el punto medio C del lado mayor tenga un valor constante independiente de θ . (Véase prob. 8/54.)



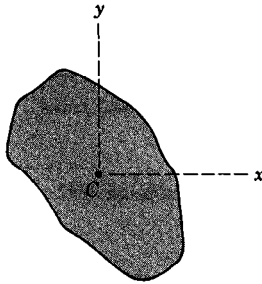
Problema 8/55

8/56. Calcular la base b y la altura h de un triángulo isósceles de área 100 cm^2 si son iguales los momentos de inercia respecto a todos los ejes que pasan por el vértice del triángulo. (Véase prob. 8/54.)

Resp. $b = 26,32 \text{ cm}$, $h = 7,60 \text{ cm}$



Problema 8/57



Problema 8/58

8/57. Calcular los momentos y el producto de inercia de la superficie cuadrada respecto a los ejes $x'-y'$.

8/58. Los momentos de inercia máximo y mínimo de la superficie sombreada son 15 cm^4 y 5 cm^4 , respectivamente, respecto a ejes que pasan por el centroide C , y el producto de inercia respecto a los ejes $x-y$ es $-5\sqrt{3}/2 \text{ cm}^4$. Partiendo de las ecuaciones apropiadas, calcular I_x y el ángulo α medido en sentido anti-horario del eje x al eje de momento de inercia máximo.

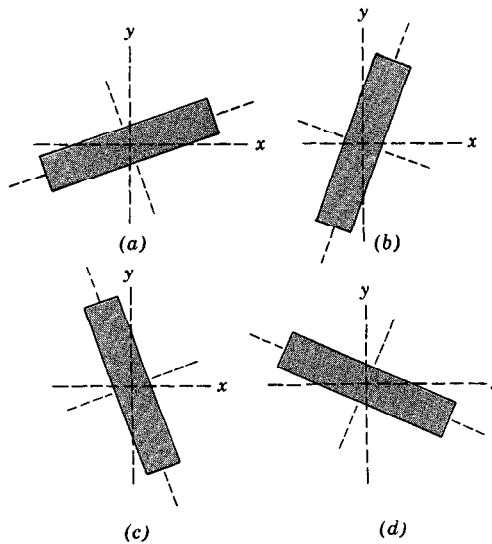
Resp. $I_x = 12,5 \text{ cm}^4$, $\alpha = 30^\circ$

8/59. Resolver el problema 8/58 construyendo el círculo de inercia de Mohr.

8/60. Los momentos de inercia de una superficie respecto a los ejes principales de inercia correspondientes a un punto P son $I_x = 10 \text{ cm}^4$ e $I_y = 60 \text{ cm}^4$. Determinar el momento de inercia $I_{x'}$ y el producto de inercia $I_{x'y'}$ de la superficie respecto a los ejes $x'-y'$ que pasan por P y están girados 20° en sentido horario respecto a los ejes $x-y$. Representar también los resultados sobre un círculo de Mohr.

Resp. $I_{x'} = 15,85 \text{ cm}^4$
 $I_{x'y'} = 16,07 \text{ cm}^4$

8/61. Dibujar el círculo de inercia de Mohr correspondiente a cada una de las cuatro superficies rectangulares cuyas proporciones y posiciones son las de la figura. Indicar sobre cada diagrama el punto A de coordenadas I_x , I_{xy} y el ángulo 2α , donde α es el ángulo que forma el eje x con el eje de momento de inercia máximo.

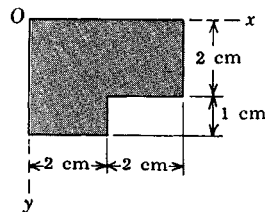


Problema 8/61

8/62. Demostrar que la magnitud del producto de inercia se puede calcular mediante la relación

$$I_{xy} = \sqrt{I_x I_y - I_{\max} I_{\min}}.$$

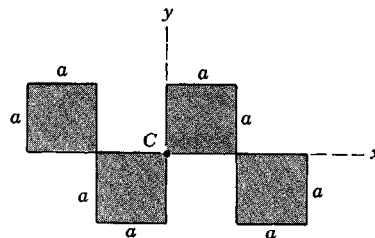
8/63. Calcular el momento de inercia mínimo respecto a un eje que pase por el punto O de la superficie sombreada. Especificar el ángulo α medido en sentido horario del eje x al eje de mínimo momento de inercia.



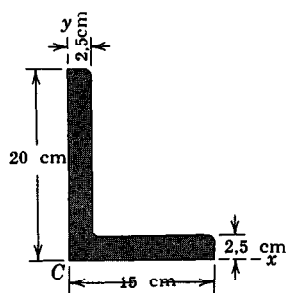
Problema 8/63

8/64. Determinar los momentos de inercia máximo y mínimo respecto a los ejes centroidales que pasan por C de la figura compuesta por las cuatro superficies cuadradas representadas. Hallar el ángulo α medido del eje x al eje de máximo momento de inercia.

$$\begin{aligned} \text{Resp. } I_{\max} &= a^4 \left(\frac{10}{3} + \sqrt{5} \right) \\ I_{\min} &= a^4 \left(\frac{10}{3} - \sqrt{5} \right) \\ \alpha &= 76^\circ 43' \end{aligned}$$



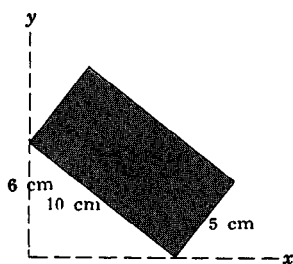
Problema 8/64



Problema 8/65

8/65. Calcular los momentos de inercia máximo y mínimo del ángulo estructural respecto a ejes que pasen por su vértice C y hallar el ángulo α medido en sentido antihorario del eje x al eje de máxima inercia. Despreciar los radios pequeños y las curvas.

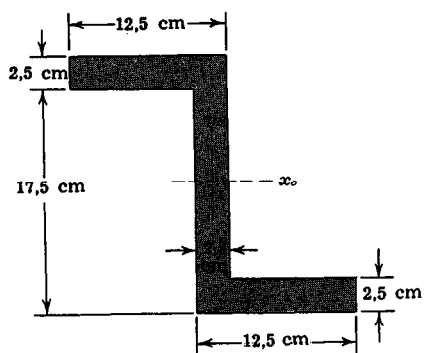
Resp. $I_{\max} = 6960 \text{ cm}^4$
 $I_{\min} = 2672 \text{ cm}^4$
 $\alpha = -13^\circ 24'$



Problema 8/66

8/66. Calcular el producto de inercia de la superficie rectangular respecto a los ejes x - y .

Resp. $I_{xy} = 1225 \text{ cm}^4$



Problema 8/67

8/67. Calcular los momentos de inercia máximo y mínimo respecto a ejes centroidales del perfil en Z . Indicar el ángulo α medido a partir del eje x_0 en sentido antihorario que forma el eje de momento de inercia máximo.

Resp. $I_{\max} = 6105 \text{ cm}^4$
 $I_{\min} = 808,5 \text{ cm}^4$
 $\alpha = 30^\circ 8'$

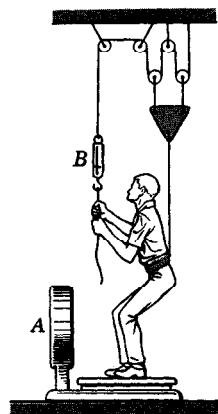
Apéndices

A Problemas de repaso

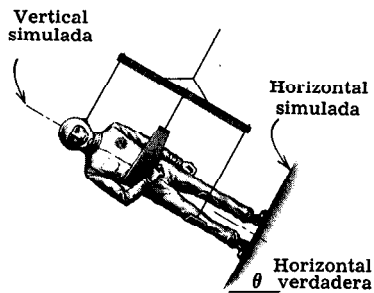
En los capítulos anteriores, los problemas que acompañan a los diversos apartados ilustran la aplicación de los temas en ellos tratados. De esta manera, la categoría y el método de solución de dichos problemas quedan en gran manera indicados automáticamente por su asociación con el apartado. El estudiante de Mecánica debe desarrollar su capacidad para clasificar un problema nuevo reconociendo el tema o temas que en él intervienen y seleccionando el método o métodos de solución adecuados. Para desarrollar esta capacidad se incluyen los siguientes problemas de repaso en el Apéndice A. Los problemas se han dispuesto sin atender al tema o al método de solución, si bien se han ordenado aproximadamente en orden creciente de dificultad. Algunos problemas contienen en sí más de un tema y deben resolverse utilizando más de un método de solución. Se sugiere al estudiante que emplee el tiempo bosquejando la solución de cuantos problemas le sea posible en lugar de concentrarse en la solución completa de solamente un número limitado de ellos. De esta manera podrá cubrir una mayor extensión. Se han incluido, para aquellos que lo deseen, las respuestas a todos los problemas.

A1. Un alumno novato de Mecánica quiere pesarse pero sólo dispone de una báscula *A* de capacidad limitada a 50 kp y un pequeño dinamómetro *B* para medir hasta 10 kp. Descubre que con el dispositivo indicado, cuando tira de la cuerda de manera que *B* señale 9 kp, la báscula indica 33,5 kp ¿Cuál es su peso verdadero?

Resp. $P = 78,5 \text{ kp}$



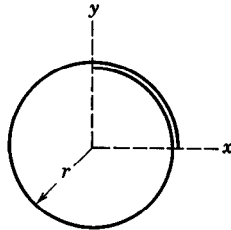
Problema A1



Problema A2

A2. Un simulador para el estudio de la locomoción humana en condiciones de gravedad reducida consiste en un arnés situado al extremo de un hilo largo y que soporta el peso del sujeto. Determinar el ángulo θ que simulará las condiciones en la Luna, donde la gravedad es una sexta parte de la terrestre.

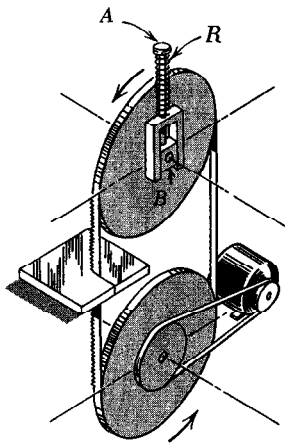
Resp. $\theta = 80^{\circ}24'$



Problema A3

A3. Determinar por integración directa la situación del centro de gravedad del alambre circular de radio r con un cuarto de vuelta superpuesto.

Resp. $\bar{x} = \bar{y} = \frac{2r}{5\pi}$

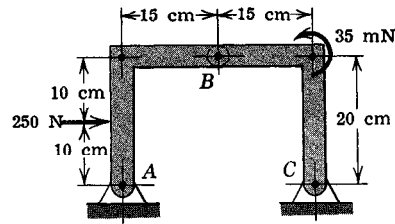


Problema A4

A4. En la hoja de la sierra continua se mantiene una tensión mediante el resorte R el cual empuja hacia arriba a la varilla A la cual, a su vez, está conectada al bloque del cojinete B de la polea tensora. Si para romper un diente de la sierra se necesita una fuerza de 250 N, determinar la fuerza F del resorte que puede permitirse para asegurar que la hoja desliza sobre la polea antes de que se rompa el diente. Supóngase que la fuerza se aplica sólo a un diente cada vez. El coeficiente de rozamiento entre el fleje y la polea puede considerarse igual a 0,40. Despréciase el peso de la polea superior.

Resp. $F = 199 \text{ N}$

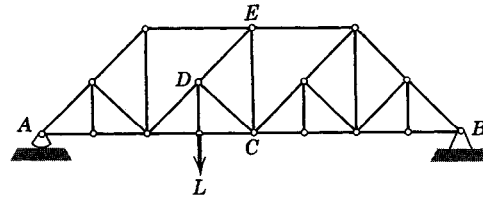
el entramado de dos
cargado por la fuerza y el
se indican, determinar la
fuerza que soporta el pasador en A.
Resp. $A = 105,5 \text{ N}$



Problema A5

A6. Todos los elementos de la estructura son triángulos rectángulos isósceles. Determinar las fuerzas en los miembros CD, DE y CE en función de la carga L.

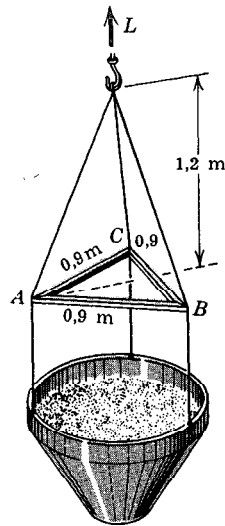
Resp. $CD = L/\sqrt{2}, \quad C$
 $DE = L\sqrt{2}/8, \quad C$
 $CE = L/8, \quad T$



Problema A6

A7. La tensión del cable de la grúa que eleva el cubo de hormigón es de 420 kp a plena carga. La estructura equilátera ABC separa los cables de manera que en todo momento se aplican al cubo fuerzas verticales iguales. Calcular la compresión P en cada miembro de dicha estructura.

Resp. $P = 35 \text{ kp}$



Problema A7

un punto A cuyo vector posición desde el punto O es $-\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ cm se ejerce una fuerza $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ kp. Calcular:

- el momento \mathbf{M} de \mathbf{F} respecto a O y su módulo M ,
- la componente M_n de \mathbf{M} en la dirección del vector unitario $\mathbf{n} = 0,5\mathbf{i} + 0,5\mathbf{j} + 0,5\sqrt{2}\mathbf{k}$,
- el trabajo U efectuado por \mathbf{F} cuando se mueve A una distancia de 6 cm en la dirección de \mathbf{n} .

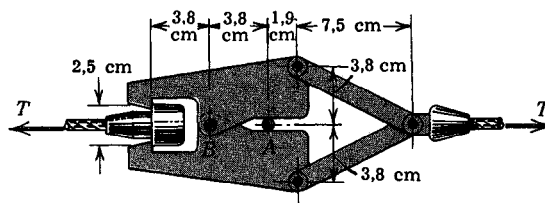
Resp. (a) $\mathbf{M} = -2\mathbf{i} + 20\mathbf{j} + 14\mathbf{k}$ cm.kp

(b) $M_n = 9,45(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \sqrt{2}\mathbf{k})$ cm.kp

(c) $U = -1,970$ cm.kp

A11. Un dispositivo para limitar la tensión de un cable consiste en las mordazas representadas en la figura que cortan la varilla A cuando la tensión del cable supere un valor prefijado. Si la varilla puede resistir una fuerza cortante de 1200 kp antes de romperse, determinar la tensión máxima T que el dispositivo permitirá que tenga el cable y la fuerza cortante total Q que soportará el pasador B en estas condiciones.

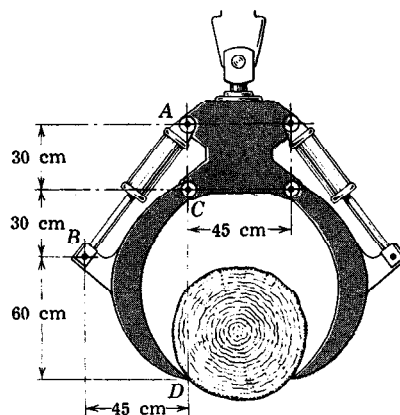
Resp. $T = 1700$ kp, $Q = 777$ kp



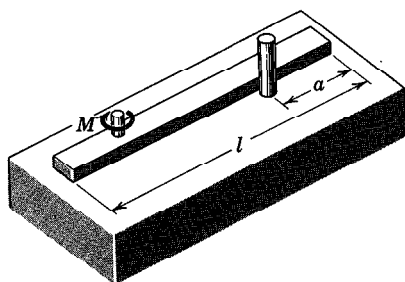
Problema A11

A12. El mecanismo de agarre de la grúa para troncos está activado por dos cilindros hidráulicos. En la posición particular representada, y con un tronco de 1500 kg, la presión que el aceite ejerce sobre cada uno de los émbolos de 94 cm² de los cilindros, es de 14,4 kp/cm². Calcular la fuerza total que soporta el pasador C . Despreciar los pesos de los miembros.

Resp. $C = 2125$ kp



Problema A12

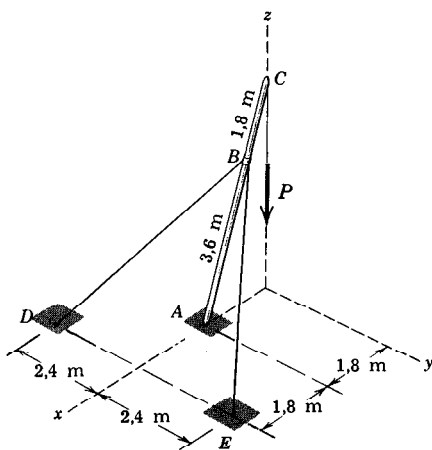


Problema A13

A13. La barra uniforme de peso P y longitud l descansa sobre la superficie horizontal y toca a la varilla vertical fija en el punto que se indica. Si es f el coeficiente de rozamiento entre la barra y la superficie, determinar el valor del momento M que haría deslizar la barra. Supóngase que el peso de la barra está soportado uniformemente a lo largo de ella. Especificar el menor valor posible de M que inicie la rotación de la barra y el valor de a correspondiente.

$$\text{Resp. } M = fPl \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{l} + \frac{a^2}{l^2} \right)$$

$$M_{\min} = \frac{fPl}{4} \text{ para } a = \frac{l}{2}$$



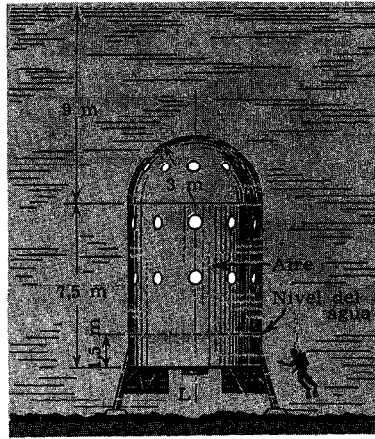
Problema A14

A14. Los dos tirantes BD y BE mantienen en posición la pluma ABC que soporta una carga vertical P . El peso de la pluma es despreciable frente a P . Calcular el mínimo coeficiente de rozamiento f que puede existir entre la pluma y el plano horizontal para que no deslice el extremo A .

$$\text{Resp. } f_{\min} = 0,442$$

A15. Un laboratorio submarino que deben ocupar biólogos marinos consiste en una campana sumergida hasta la profundidad que se indica. El agua penetra por debajo a través de una compuerta abierta en la base y se mantiene a un nivel de 1,5 m por acción del aire comprimido en la parte superior del espacio interior. La estructura total menos el lastre de plomo pesa 72500 kg fuera del agua. Determinar el exceso de presión p del aire en el interior del laboratorio y el peso fuera del agua L del lastre de plomo que hay que sujetar a la base de la campana para producir una fuerza de 4500 kp entre las patas soportantes y el fondo del mar. La densidad del aire a la temperatura en cuestión y a la presión atmosférica de $1,033 \times 10^4$ kp/m² es $1,206 \times 10^{-3}$ g/cm³.

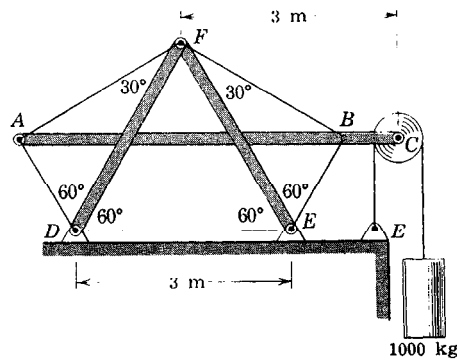
Resp. $p = 15\,600$ kp/m²
 $L = 19\,2000$ kp



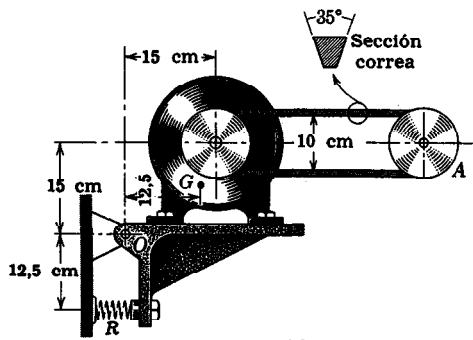
Problema A15

A16. En el entramado de la figura, el miembro horizontal está soportado por los cuatro cables flexibles y no toca a los miembros DF y EF . Calcular la fuerza en cada uno de estos dos miembros cuando se aplique la carga de 1000 kp en la forma que se indica. Antes de aplicarla, la tensión de los cables es despreciable. También lo son los pesos de los miembros.

Resp. $EF = 3464$ kp C,
 $DF = 1155$ kp C



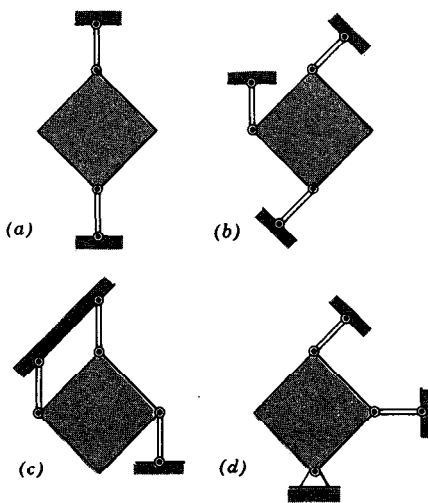
Problema A16



Problema A17

A17. Se proporciona un ajuste en la compresión del resorte R para acomodar diversas tensiones a la correa trapezoidal. Si el motor transmite un par a celeridad constante de $2 \text{ m}\cdot\text{kp}$ a la polea A y al mecanismo que acciona, y si la correa está en condición de deslizamiento inminente (v. prob. 6/83), determinar la fuerza F del resorte para el caso de rotación en sentido (a) horario y (b) antihorario. El coeficiente de rozamiento entre la correa y cada polea es $0,30$. El peso combinado del motor y el soporte es de $37,5 \text{ kp}$, con centro de gravedad en G .

Resp. (a) 74 kp , (b) $F = 106 \text{ kp}$



Problema A18

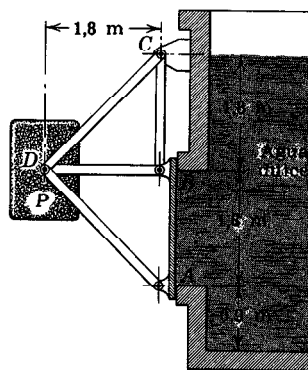
A18. En cada uno de los cuatro casos representados, la placa está confinada al plano de representación y está soportada en él por los enlaces que se indican. Las placas están sometidas a diversas fuerzas (no representadas) en sus planos. Identificar las placas que corresponden a cada una de las siguientes categorías:

- (A) Inmovilización total en el plano con el mínimo número posible de ligaduras
- (B) Inmovilización parcial en el plano con ligaduras inadecuadas
- (C) Inmovilización total en el plano con ligaduras superabundantes.

Resp. (A) b
 (B) a, c
 (C) d

A19. Una compuerta para limitar la altura del agua en un depósito pequeño consta de una placa plana que cierra herméticamente una abertura rectangular de 1,8 m de altura y 1,2 m de anchura. La placa y el entramado a ella solidario tienen un peso despreciable y están articulados en C y contrapesados de la manera que se indica. Determinar el contrapeso P que limite la altura del agua al nivel que se indica. Hallar también la fuerza en el puntal DB .

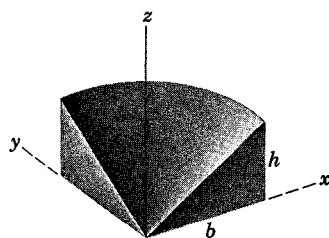
Resp. $P = 9500 \text{ kp}$,
 $DB = 2700 \text{ kp}$



Problema A19

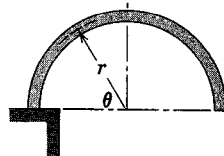
A20. Determinar las coordenadas del centroide del volumen obtenido haciendo girar 90° el triángulo rectangular alrededor del eje z .

Resp. $\bar{x} = \bar{y} = \frac{3b}{2\pi}$, $\bar{z} = \frac{3h}{8}$



Problema A20

Vertical

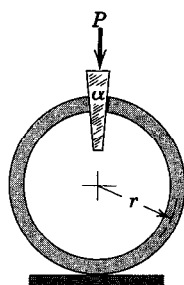


Problema A21

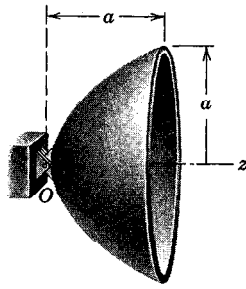
Resp. $M = \frac{Pr}{\pi} [(\pi - \theta) \cos \theta + \sin \theta]$

A22. Se intercala en el anillo hendido la cuña con una fuerza P . El coeficiente de rozamiento entre la cuña y el anillo es f y la cuña está en condiciones de irreversibilidad ($\alpha < 2 \arctan f$). Si se suprime la P aplicada a la cuña, determinar el momento flector residual máximo M del anillo.

Resp. $M = \frac{2Pr}{2f \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin \alpha}$



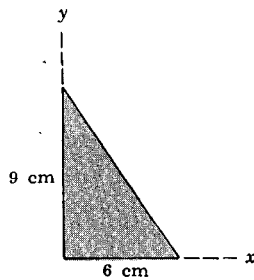
Problema A22



Problema A23

A23. Determinar el momento M , aplicado al cojinete O , necesario para evitar la rotación de un plato reflector en el plano vertical a causa de su propio peso. El plato es una cáscara parabólica de revolución respecto al eje z y tiene un peso μ por unidad de superficie.

Resp. $M = 2,98 \mu a^3$



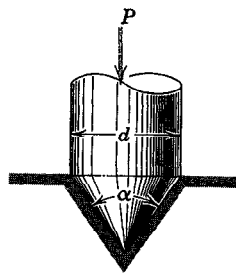
Problema A24

A24. Calcular los momentos de inercia máximo y mínimo respecto a ejes que pasen por el centroide de la superficie triangular y especificar el ángulo α medido en sentido antihorario a partir del eje x al eje de momento de inercia máximo. Dibujar el correspondiente círculo de inercia de Mohr.

Resp. $I_{\text{máx}} = 140,5 \text{ cm}^4$

$I_{\text{mín}} = 35,0 \text{ cm}^4$

$\alpha = 25^\circ 6'$



Problema A25

A25. El pivote cónico de la figura soporta un empuje compresivo P del árbol. Deducir una expresión del momento M que hay que aplicar a dicho árbol para vencer el rozamiento suponiendo (a) superficies de contacto nuevas con distribución uniforme de la presión y (b) superficies desgastadas donde el desgaste constante es proporcional al producto de la presión normal por la distancia radial al eje del árbol.

Resp.

$$(a) M = \frac{fPd}{3 \sin \frac{\alpha}{2}}, \quad (b) M = \frac{fPd}{4 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

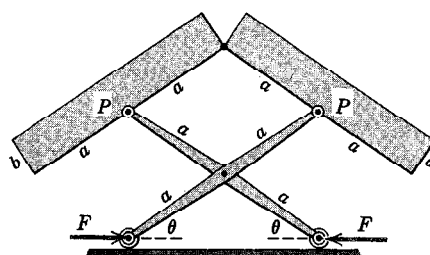
A26. Determinar las fuerzas F necesarias para mantener la configuración de equilibrio de los pesos articulados de la figura. El centro de gravedad de cada peso se encuentra en el centro de su rectángulo respectivo. Despreciar los pesos de las patas. Para $b = a$, ¿a qué ángulo θ' se tendrá equilibrio con $F = 0$?

Resp.

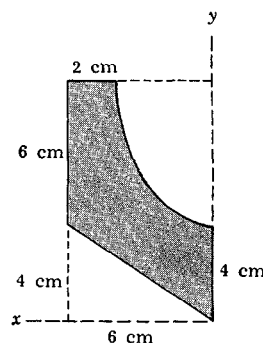
$$F = P \left(2 \operatorname{ctg} \theta - \frac{b}{2a} \right), \quad \theta' = 75^\circ 58'$$

A27. Determinar la coordenada x del centroide de la superficie sombreada y hallar el radio de giro de la misma respecto al eje centroidal vertical. El contorno curvo es parabólico con pendiente nula en el eje y .

Resp. $\bar{X} = 3,38 \text{ cm}$, $\bar{k}_y = 1,66 \text{ cm}$



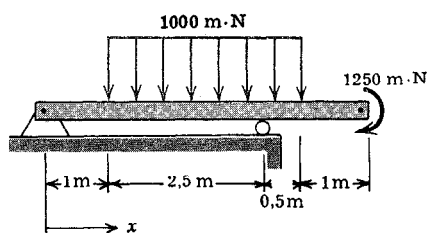
Problema A26



Problema A27

A28. Construir los diagramas de fuerza cortante y momento flector de la viga cargada representada en la figura. Indicar la magnitud máxima $|M|$ del momento flector y la distancia x entre el punto donde se tiene y el extremo de la izquierda.

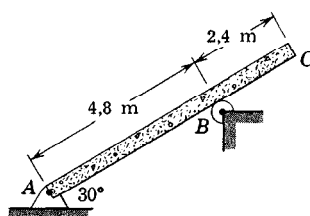
Resp. $|M|_{\max} = 1375 \text{ m}\cdot\text{N}$
en $x = 3,5 \text{ m}$



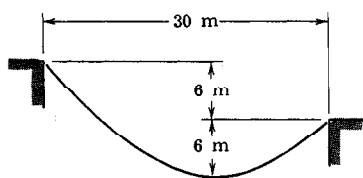
Problema A28

A29. La viga de hormigón de sección recta uniforme pesa 250 kg por metro de longitud y está apoyada en la forma que se indica. Representar gráficamente el momento flector de la viga en función de la distancia a lo largo de ella y determinar la magnitud máxima de M y su situación en la viga.

Resp. $|M|_{\max} = 623,6 \text{ m}\cdot\text{kp}$ en B

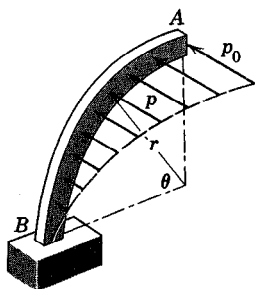


Problema A29



Problema A30

A30. El cable pende bajo la acción de su propio peso y está suspendido de los dos puntos que se indican. Sin llevar a cabo la resolución, esbozar un procedimiento para determinar la tensión máxima T del cable y su longitud total S , utilizando las relaciones exactas.

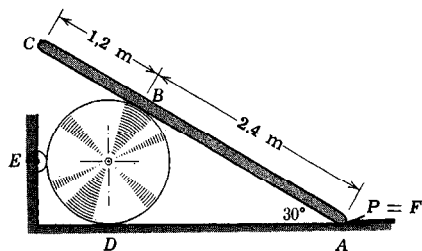


Problema A31

A31. La viga curvada está sometida a una fuerza p cuya intensidad en kilopond por metro de longitud del arco varía linealmente con θ desde cero en la base de la viga hasta p_0 en el extremo en donde $\theta = \pi/2$. Determinar la fuerza cortante V , el momento flector M y el momento torsor T inducidos por p en la base de la viga.

$$\text{Resp. } V = \frac{\pi}{4} p_0 r, \quad M = \frac{2}{\pi} p_0 r^2$$

$$T = p_0 r^2 \left(\frac{\pi}{4} - 1 + \frac{2}{\pi} \right)$$



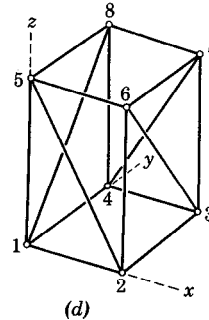
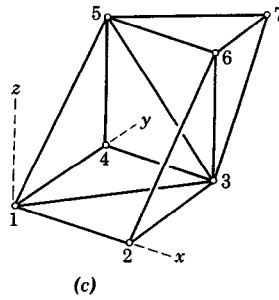
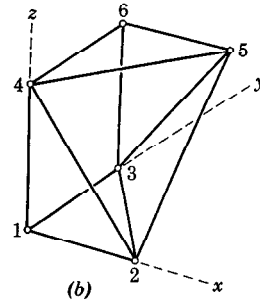
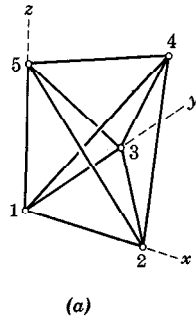
Problema A32

A32. El tablón uniforme ABC pesa 100 kg y se apoya en B sobre el gran cilindro de 150 kg y en A sobre el plano horizontal. El coeficiente de rozamiento entre las superficies en A y en B es 0,40 y el correspondiente a las superficies en D es 0,60. Calcular la fuerza F necesaria para iniciar el movimiento del extremo A hacia la izquierda. Calcular también la fuerza de rozamiento correspondiente que se ejerce en D. El pequeño rodillo guía situado en E gira con rozamiento despreciable.

$$\text{Resp. } F = 77,5 \text{ kp}, \quad F_D = 26,0 \text{ kp}$$

Indicar, para cada una de las figuras espaciales de la figura, si es rígida isostática o hiperestática, o si es inestable. Indicar además la adición o supresión de uno o más miembros que dé lugar a una estructura rígida sin miembros superfluos.

- Resp. (a) Hiperestática
(b) Inestable
(c) Inestable
(d) Inestable

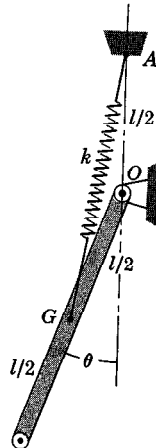


Problema A33

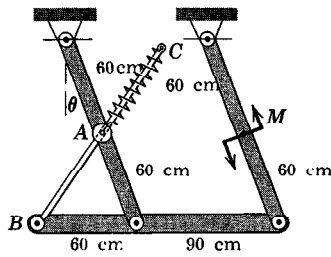
A34. La barra delgada de longitud l y peso P gira libremente alrededor de un eje horizontal que pasa por O . El resorte tiene una longitud natural $l/2$. Determinar las posiciones de equilibrio, excluyendo la $\theta = \pi$, y determinar el valor máximo de la constante k del resorte para que haya estabilidad en la posición $\theta = 0$.

Resp. $\theta = 0, \theta = 2 \arccos \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{2P}{kl}}$

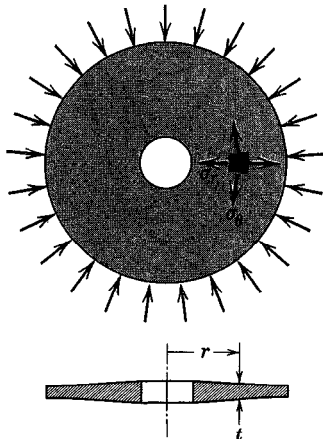
$k_{\text{máx.}} = \frac{4P}{l}$



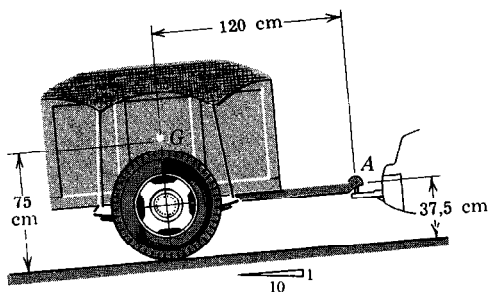
Problema A34



Problema A35



Problema A36



Problema A37

A35. El mecanismo representado está confinado a oscilar en el plano vertical y en la posición $\theta = 0$ no está deformado el resorte. Al crecer θ bajo la aplicación gradual del par de momento $M = 6 \text{ m}\cdot\text{kp}$, la varilla BC desliza a través del bloque giratorio situado en A y estira al resorte. Si éste tiene una constante $k = 16,7 \text{ kp/m}$, determinar el valor de θ correspondiente al equilibrio. Cada una de las barras paralelas uniformes pesa $7,5 \text{ kp}$ y la barra horizontal uniforme pesa 10 kp . Despréciase el peso de la varilla, resorte y bloque horadado.

Resp. $\theta = 14^{\circ}7'$

A36. El disco circular con orificio central está sometido a un esfuerzo compresivo uniforme distribuido por todo su borde. El espesor e del disco es función exclusiva de r , pero es siempre pequeño frente a r . Deducir la ecuación diferencial del equilibrio en la dirección radial para un elemento diferencial del disco. El esfuerzo radial es σ_r y el tangencial σ_θ .

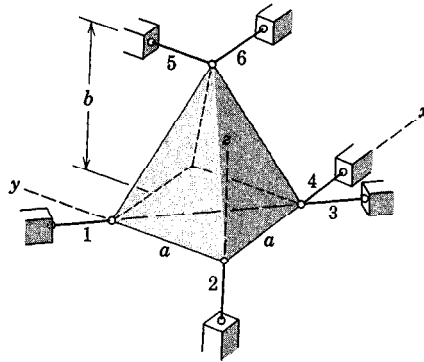
$$\text{Resp. } \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\sigma_r}{e} \frac{de}{dr} = 0$$

A37. El remolque de 500 kg con centro de gravedad en G se remolca a una velocidad constante de $4,4 \text{ m/s}$ hacia arriba del plano inclinado. De pronto, se traba una de sus dos ruedas. Si se mantiene la misma velocidad con una rueda frenada, calcular la fuerza total que se ejerce sobre la bola de conexión A. Las ruedas del remolque están separadas $1,5 \text{ m}$ y su carga está repartida simétricamente respecto al plano vertical central. Utilizar el valor $0,8$ para el coeficiente de rozamiento cinético entre la goma y el pavimento.

Resp. $A = 240 \text{ kp}$

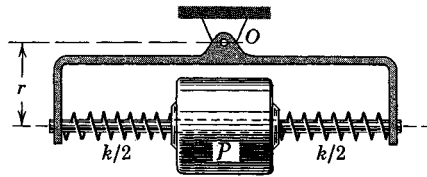
◀A38. La pirámide maciza de base cuadrada tiene su vértice superior situado encima del centro de la base a una distancia b de éste y está soportada por los seis enlaces que se indican. Examinar la adecuación de la configuración de ligaduras.

Resp. Ligaduras inadecuadas para inmovilización total.



Problema A38

◀A39. El peso P desliza con rozamiento despreciable a lo largo de la varilla lisa montada en el bastidor que gira libremente alrededor de un eje horizontal que pasa por O . Cuando la varilla se halla en posición horizontal, el peso se halla centrado debajo de O y los resortes no están deformados. Cada uno de ellos tiene una constante $k/2$ y está sujeto al bastidor y al peso deslizante. Los pesos de todas las partes son despreciables frente a P . Determinar las posiciones de equilibrio definidas por el ángulo θ de rotación del bastidor a partir de la posición indicada y el desplazamiento x del peso a lo largo de la varilla medida a partir de la posición central. Estudiar la estabilidad del equilibrio para cada posición de equilibrio.



Problema A39

Resp. (a) $x = 0$, $\theta = 0$

punto de silla para $P > kr$

equil. estable para $P < kr$

(b) $\theta = \arccos \frac{kr}{P}$, $x = \frac{P}{k} \sqrt{1 - \left(\frac{kr}{P}\right)^2}$

vale para $k < P/r$; estable

B Análisis vectorial

B1. Notación. Las cantidades vectoriales pueden describirse mediante una notación cualquiera que tenga en cuenta adecuadamente sus magnitudes, direcciones y sentidos. Puede emplearse el Álgebra de los escalares para manejar las relaciones entre las magnitudes y pueden utilizarse esquemas geométricos con la trigonometría apropiada para exponer las propiedades direccionales. Un tal análisis suele ser adecuado e incluso preferible, en el caso de problemas con una o dos dimensiones geométricas. Resulta mucho más ventajosa la notación vectorial inventada por GIBBS * la cual tiene una amplia aplicación. La materia que vamos a tratar a continuación está destinada a servir tanto de introducción como de resumen conciso de las relaciones del Álgebra y el Cálculo

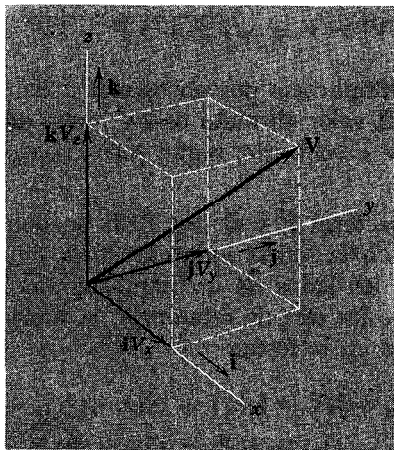


Figura B1

* JOSIAH WILLARD GIBBS (1839-1903), profesor de Física Matemática de la Universidad de Yale.

de vectores tal como se utilizan en la Mecánica aplicada empleando la notación de Gibbs. Lo tratado en los apartados B1 a B5 encuentra aplicación directa tanto en estática como en dinámica, especialmente en los problemas tridimensionales. La materia que se estudia en los apartados B6 a B11 halla su utilización en la Dinámica y en otros campos de la Mecánica aplicada de carácter más elevado y se ha incluido a fin de ofrecer un estudio más completo.

Es absolutamente necesario adoptar una notación sistemática que distinga siempre las cantidades vectoriales de las escalares. En el texto, para las cantidades vectoriales se utilizará siempre letra negrita y para las escalares letra cursiva. Al escribir a mano, para distinguir las cantidades vectoriales deberá utilizarse algún símbolo distintivo, tal como subrayar la letra o ponerle una flecha encima.

En el espacio tridimensional (fig. B1) un vector \mathbf{V} se representa en función de sus tres componentes mutuamente ortogonales

$$\mathbf{V} = iV_x + jV_y + kV_z \quad (\text{B1})$$

donde i, j, k son vectores unitarios según las direcciones x, y, z , respectivamente. Un vector unitario, también llamado *versor*, es un vector que tiene una dirección y un sentido especificados y módulo unidad. Así, la cantidad vectorial iV_x tiene una dirección especificada por el versor i , un sentido igual u opuesto al de i según que V_x sea positiva o negativa, respectivamente, y un módulo igual al valor absoluto de la componente V_x del vector \mathbf{V} .

El módulo de \mathbf{V} es

$$|\mathbf{V}| = V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}. \quad (\text{B2})$$

Todo vector \mathbf{V} puede multiplicarse por un escalar a dando el vector Va ó $a\mathbf{V}$, cuyo módulo será igual al valor absoluto de aV , cuya dirección será la de \mathbf{V} y cuyo sentido será el de \mathbf{V} o contrario, según que a sea positivo o negativo, respectivamente.

B2. Adición. Dos vectores \mathbf{P} y \mathbf{Q} (fig. B2a) pueden sumarse dando su resultante o suma $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$ en la forma indicada en la figura B2b en la que los dos vectores constituyen los lados de un paralelogramo. Para una orientación conveniente cualquiera de los ejes de referencia, la suma puede escribirse atendiendo a las componentes en la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{P} + \mathbf{Q} &= (iP_x + jP_y + kP_z) + (iQ_x + jQ_y + kQ_z) \\ &= i(P_x + Q_x) + j(P_y + Q_y) + k(P_z + Q_z). \end{aligned} \quad (\text{B3})$$

Según puede observarse en la figura B2b, la suma se puede obtener colocando un vector a continuación de otro *en uno u otro orden*, formando un triángulo. De ello resulta

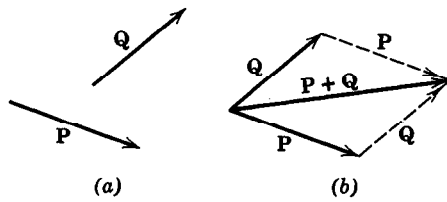


Figura B2

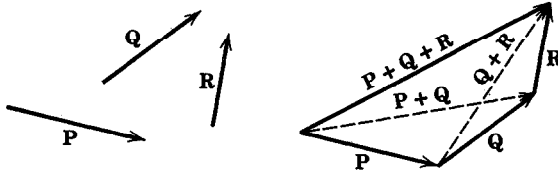


Figura B3

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{Q} + \mathbf{P} \quad (\text{B4})$$

y vemos que la suma vectorial es *conmutativa*.

La suma vectorial también es *asociativa* según se observa en la figura B3, de donde puede verse que se puede llegar a la suma de los tres vectores \mathbf{P} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} , sumando \mathbf{P} a la suma de \mathbf{Q} y \mathbf{R} , o sumando a \mathbf{R} la suma de \mathbf{P} y \mathbf{Q} . Así

$$\mathbf{P} + (\mathbf{Q} + \mathbf{R}) = (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) + \mathbf{R} \quad (\text{B5})$$

La sustracción de un vector es lo mismo que la adición de un vector negativo (vector opuesto). Así, la diferencia vectorial entre \mathbf{P} y \mathbf{Q} de la figura B4 es $\mathbf{P} - \mathbf{Q} = \mathbf{P} + (-\mathbf{Q})$.

B3. Producto escalar. Dos vectores pueden multiplicarse de dos maneras diferentes. La primera de ellas, llamada *producto escalar* de los dos vectores \mathbf{P} y \mathbf{Q} (fig. B5a) se define de la manera siguiente

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta \quad (\text{B6})$$

donde θ es el ángulo que forman los dos vectores. Este producto puede considerarse como el del módulo de \mathbf{P} por la componente $Q \cos \theta$ de \mathbf{Q} según la dirección \mathbf{P} (fig. B5b), o como el producto del módulo de \mathbf{Q} por la componente $P \cos \theta$ de \mathbf{P} según la dirección de \mathbf{Q} (fig. B5c). El producto escalar goza de la propiedad conmutativa

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P} \quad (\text{B7})$$

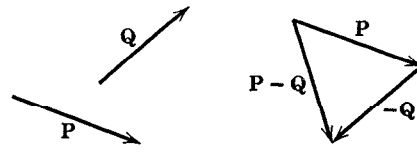


Figura B4

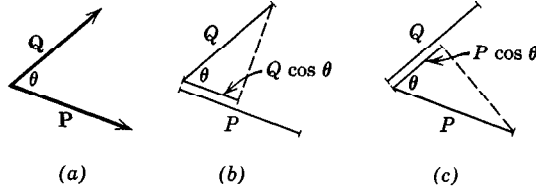


Figura B5

ya que se pueden permutar los factores escalares de la multiplicación escalar sin que se altere el producto.

De la definición de producto escalar, se deduce que

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = 0.$$

Luego

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} &= (\mathbf{i}P_x + \mathbf{j}P_y + \mathbf{k}P_z) \cdot (\mathbf{i}Q_x + \mathbf{j}Q_y + \mathbf{k}Q_z) \\ &= P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z \end{aligned} \quad (\text{B8})$$

y

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2.$$

De la definición de producto escalar se deduce que dos vectores \mathbf{P} y \mathbf{Q} serán perpendiculares cuando se anule su producto escalar, $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = 0$.

El ángulo θ que formen dos vectores \mathbf{P}_1 y \mathbf{P}_2 puede hallarse a partir de la expresión $\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 = P_1P_2 \cos \theta$ de su producto escalar, teniéndose

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2}{P_1P_2} = \frac{P_{1x}P_{2x} + P_{1y}P_{2y} + P_{1z}P_{2z}}{P_1P_2} = l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2$$

donde l, m, n representan los cosenos directores de los vectores. También se observa que dos vectores serán perpendiculares cuando sus cosenos directores cumplan la relación $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$.

El producto escalar goza también de la propiedad distributiva, según se ve fácilmente en el siguiente desarrollo

$$\begin{aligned}\mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q} + \mathbf{R}) &= (iP_x + jP_y + kP_z) \cdot (i[Q_x + R_x] + j[Q_y + R_y] + k[Q_z + R_z]) \\ &= P_x(Q_x + R_x) + P_y(Q_y + R_y) + P_z(Q_z + R_z) \\ &= (P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z) + (P_xR_x + P_yR_y + P_zR_z)\end{aligned}$$

con lo que

$$\mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q} + \mathbf{R}) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{R}. \quad (\text{B9})$$

B4. Producto vectorial. La segunda manera de multiplicar dos vectores se conoce con el nombre de *producto vectorial*. Para los vectores \mathbf{P} y \mathbf{Q} de la figura B6 dicho producto se escribe en la forma $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ y se define como un vector cuyo módulo es igual al producto de los módulos de \mathbf{P} y \mathbf{Q} multiplicado por el seno del ángulo θ (menor que 180°) que forman. La dirección de $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ es normal al plano definido por \mathbf{P} y \mathbf{Q} , y el sentido de $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ es el de avance de un tornillo a derechas al girar de manera que lleve \mathbf{P} sobre \mathbf{Q} a través del menor de los dos ángulos que determinan. Si es \mathbf{n} un versor cuya dirección y sentido sean los de $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$, el producto vectorial podrá escribirse en la forma

$$\mathbf{P} \times \mathbf{Q} = nPQ \text{ sen } \theta. \quad (\text{B10})$$

Utilizando la regla de la mano derecha e invirtiendo el orden de la multiplicación vectorial, de la figura B6 vemos que $\mathbf{P} \times \mathbf{Q} = -\mathbf{Q} \times \mathbf{P}$. Por tanto, el producto vectorial no goza de la propiedad conmutativa.

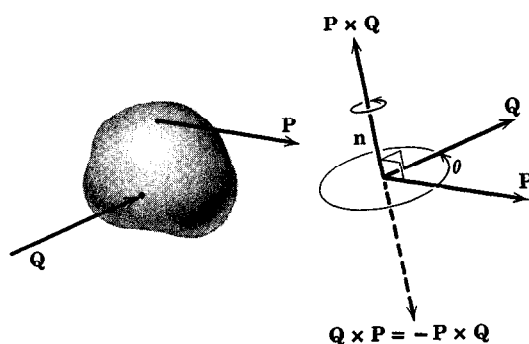


Figura B6

Sí cumple la distributiva, según puede demostrarse geométricamente. En la figura B7 se ha formado un prisma triangular 1-2-3-4-5-6 a partir de los vectores \mathbf{P} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} en la forma indicada. El área de la cara 1-4-5-2 es el producto de la base $|\mathbf{Q}|$ por la altura, siendo ésta el producto de $|\mathbf{P}|$ por el seno del ángulo que forman \mathbf{P} y \mathbf{Q} . Por tanto esta área estará representada por el módulo del producto vectorial $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$. Al área de esta cara puede hacersele corresponder una dirección normal a su plano y un sentido positivo hacia afuera de la figura, con lo que vendría representada por el vector $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$. De manera análoga, el área 2-5-6-3 se representa por $\mathbf{P} \times \mathbf{R}$ y el área 1-3-6-4 por $(\mathbf{Q} + \mathbf{R}) \times \mathbf{P}$. Las caras triangulares paralelas corresponden a $\frac{1}{2}(\mathbf{Q} \times \mathbf{R})$ y $-\frac{1}{2}(\mathbf{Q} \times \mathbf{R})$. Como el prisma es una superficie cerrada, la suma de sus superficies representadas por vectores deberá anularse. Por tanto

$$(\mathbf{Q} + \mathbf{R}) \times \mathbf{P} + \mathbf{P} \times \mathbf{Q} + \mathbf{P} \times \mathbf{R} + \frac{1}{2}(\mathbf{Q} \times \mathbf{R}) - \frac{1}{2}(\mathbf{Q} \times \mathbf{R}) = \mathbf{0}.$$

Invirtiendo el orden de los factores y el signo del primer término y suprimiendo los dos últimos se tiene

$$\mathbf{P} \times (\mathbf{Q} + \mathbf{R}) = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} + \mathbf{P} \times \mathbf{R} \quad (\text{B11})$$

que demuestra la validez de la ley distributiva para el producto vectorial.

De la definición de producto vectorial resultan inmediatamente las siguientes relaciones entre los versores:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{i} &= -\mathbf{k} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} &= -\mathbf{i} & \mathbf{i} \times \mathbf{k} &= -\mathbf{j} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Con ayuda de estas identidades y de la propiedad distributiva, el producto vectorial se podrá escribir en la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \times \mathbf{Q} &= (\mathbf{i}P_x + \mathbf{j}P_y + \mathbf{k}P_z) \times (\mathbf{i}Q_x + \mathbf{j}Q_y + \mathbf{k}Q_z) \\ &= \mathbf{i}(P_yQ_z - P_zQ_y) + \mathbf{j}(P_zQ_x - P_xQ_z) + \mathbf{k}(P_xQ_y - P_yQ_x) \end{aligned} \quad (\text{B12})$$

tras reagrupar términos. Esta expresión puede escribirse de manera compacta en forma de determinante

$$\mathbf{P} \times \mathbf{Q} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \quad (\text{B12a})$$

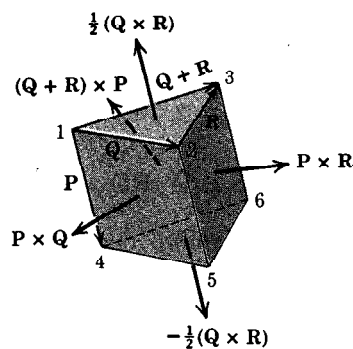


Figura B7

según puede comprobarse fácilmente desarrollándolo por los elementos de la primera fila.

B5. Otras relaciones. Vamos a dar otras dos relaciones del Álgebra vectorial sin demostración, si bien no es difícil su demostración geométrica.

El *producto mixto* es el producto escalar de dos vectores, uno de los cuales se especifica como producto vectorial de otros dos. Este producto es un escalar y viene simbolizado por una cualquiera de las siguientes expresiones equivalentes

$$(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) = -\mathbf{R} \cdot (\mathbf{Q} \times \mathbf{P}).$$

En realidad, los paréntesis son superfluos ya que carecería de sentido escribir $\mathbf{P} \times (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R})$. Puede demostrarse que

$$\mathbf{P} \times \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} \times \mathbf{R} \quad (\text{B13})$$

que establece la regla de que se pueden intercambiar punto y aspa sin que cambie el valor del producto mixto. Además, desarrollando puede verse que

$$\mathbf{P} \times \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} = \begin{vmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix} \quad (\text{B14})$$

El *doble producto vectorial* es el producto vectorial de dos vectores, uno de los cuales se especifica como producto vectorial de otros dos. Este producto es un vector y viene simbolizado por una cualquiera de las siguientes expresiones equivalentes:

$$(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \times \mathbf{R} = -\mathbf{R} \times (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) = \mathbf{R} \times (\mathbf{Q} \times \mathbf{P}).$$

En este caso es necesario el uso del paréntesis ya que la expresión $\mathbf{P} \times \mathbf{Q} \times \mathbf{R}$ sería ambigua por no especificar qué vectores hay que multiplicar vectorialmente. Puede demostrarse que el doble producto vectorial equivale a

$$(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \times \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{PQ} - \mathbf{R} \cdot \mathbf{QP}$$

o bien

$$\mathbf{P} \times (\mathbf{Q} \times \mathbf{R}) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{RQ} - \mathbf{P} \cdot \mathbf{QR}. \quad (\text{B15})$$

El primer término del segundo miembro de la expresión, por ejemplo, es el producto escalar $\mathbf{R} \cdot \mathbf{P}$, que es un escalar, multiplicado por el vector \mathbf{Q} . La validez de las ecuaciones B13 y B15 puede comprobarse fácilmente efectuando las operaciones indicadas con tres vectores arbitrarios con coeficientes numéricos o algebraicos.

B6. Derivadas de vectores. La derivada de un vector \mathbf{P} respecto a un escalar, tal como el tiempo t , es el límite al cual tiende el cociente entre el incremento $\Delta \mathbf{P}$ de \mathbf{P} y el incremento correspondiente Δt de t al tender a cero Δt . Así pues

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\mathbf{i} \frac{\Delta P_x}{\Delta t} + \mathbf{j} \frac{\Delta P_y}{\Delta t} + \mathbf{k} \frac{\Delta P_z}{\Delta t} \right) \end{aligned}$$

donde se ha expresado $\Delta \mathbf{P}$ en función de sus componentes. Se deduce que

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{i} \frac{dP_x}{dt} + \mathbf{j} \frac{dP_y}{dt} + \mathbf{k} \frac{dP_z}{dt}$$

y

$$\frac{d^n \mathbf{P}}{dt^n} = \mathbf{i} \frac{d^n P_x}{dt^n} + \mathbf{j} \frac{d^n P_y}{dt^n} + \mathbf{k} \frac{d^n P_z}{dt^n}. \quad (\text{B16})$$

La derivada de la suma de dos vectores es simplemente

$$\begin{aligned} \frac{d(\mathbf{P} + \mathbf{Q})}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta(\mathbf{P} + \mathbf{Q})}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta t} + \frac{\Delta \mathbf{Q}}{\Delta t} \right) \\ &= \frac{d\mathbf{P}}{dt} + \frac{d\mathbf{Q}}{dt} \end{aligned} \quad (\text{B17})$$

ya que el límite de la suma es igual a la suma de los límites de los términos.

La derivada del producto de un vector \mathbf{P} por un escalar u obedece a la

misma regla que el producto de dos cantidades escalares y es

$$\begin{aligned}
 \frac{d(\mathbf{P}u)}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{P} + \Delta\mathbf{P})(u + \Delta u) - \mathbf{P}u}{\Delta t} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{P}\Delta u + u\Delta\mathbf{P}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\mathbf{P} \frac{\Delta u}{\Delta t} + u \frac{\Delta\mathbf{P}}{\Delta t} \right) \\
 &= \mathbf{P} \frac{du}{dt} + u \frac{d\mathbf{P}}{dt}.
 \end{aligned} \tag{B18}$$

Las derivadas de los productos escalar y vectorial de dos vectores obedecen también las mismas reglas que el producto de dos cantidades escalares. Así, para el producto escalar

$$\begin{aligned}
 \frac{d(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q})}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{P} + \Delta\mathbf{P}) \cdot (\mathbf{Q} + \Delta\mathbf{Q}) - \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}}{\Delta t} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{P} \cdot \Delta\mathbf{Q} + \mathbf{Q} \cdot \Delta\mathbf{P} + \Delta\mathbf{P} \cdot \Delta\mathbf{Q}}{\Delta t} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\mathbf{P} \cdot \frac{\Delta\mathbf{Q}}{\Delta t} + \frac{\Delta\mathbf{P}}{\Delta t} \cdot \mathbf{Q} + \frac{\Delta\mathbf{P} \cdot \Delta\mathbf{Q}}{\Delta t} \right) \\
 &= \mathbf{P} \cdot \frac{d\mathbf{Q}}{dt} + \frac{d\mathbf{P}}{dt} \cdot \mathbf{Q}.
 \end{aligned} \tag{B19}$$

El tercer término se suprime por ser de orden superior a los restantes.

Análogamente, la derivada del producto vectorial cumple con

$$\begin{aligned}
 \frac{d(\mathbf{P} \times \mathbf{Q})}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{P} + \Delta\mathbf{P}) \times (\mathbf{Q} + \Delta\mathbf{Q}) - \mathbf{P} \times \mathbf{Q}}{\Delta t} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{P} \times \Delta\mathbf{Q} + \Delta\mathbf{P} \times \mathbf{Q} + \Delta\mathbf{P} \times \Delta\mathbf{Q}}{\Delta t} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\mathbf{P} \times \frac{\Delta\mathbf{Q}}{\Delta t} + \frac{\Delta\mathbf{P}}{\Delta t} \times \mathbf{Q} + \frac{\Delta\mathbf{P} \times \Delta\mathbf{Q}}{\Delta t} \right) \\
 &= \mathbf{P} \times \frac{d\mathbf{Q}}{dt} + \frac{d\mathbf{P}}{dt} \times \mathbf{Q}.
 \end{aligned} \tag{B20}$$

También ahora desaparece el tercer término al pasar al límite, ya que es de orden superior a los restantes. La única precaución que hay que observar en la derivación de productos vectoriales es conservar el orden de los factores, ya que las cantidades que intervienen en una multiplicación vectorial no son conmutativas.

B7. Integración de vectores. La integración de vectores no plantea ningún problema especial. Si es \mathbf{V} una función de x , y , y z y un elemento de volumen es $d\tau = dx dy dz$, la integral de \mathbf{V} extendida a un volumen puede escribirse como suma vectorial de las tres integrales de sus componentes. Así pues

$$\int \mathbf{V} d\tau = \mathbf{i} \int V_x d\tau + \mathbf{j} \int V_y d\tau + \mathbf{k} \int V_z d\tau. \quad (\text{B21})$$

B8. Gradiente. Considérese una función escalar definida por $\phi = f(x, y, z)$. Diferentes valores constantes sucesivos de ϕ tales como $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \dots$ definen superficies próximas (fig. B8). Partiendo de un punto cualquiera A de una de dichas superficies existe un camino n que va de superficie a superficie de la manera más directa. La cantidad

$$\mathbf{F} = \mathbf{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \phi}{\partial z},$$

llamada *gradiente* de ϕ , es un vector dirigido según n y representa la variación más rápida de ϕ en el espacio.

El gradiente de ϕ puede escribirse con notación compacta empleando el llamado operador "nabla" ∇ , con lo cual

$$\mathbf{F} = \nabla \phi$$

donde

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (\text{B22})$$

El hecho de que $\nabla \phi$ es normal a la superficie ϕ se pone de manifiesto tomando un vector unitario $\lambda = \mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy + \mathbf{k} dz$ contenido en ϕ y observando que los cosenos directores de λ y $\nabla \phi$ satisfacen la condición de perpendicularidad, por tanto

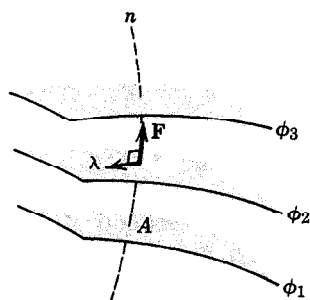


Figura B8

$$\lambda \cdot \nabla \phi = 0.$$

Así pues,

$$dx \frac{\partial \phi}{\partial x} + dy \frac{\partial \phi}{\partial y} + dz \frac{\partial \phi}{\partial z} = d\phi = 0$$

donde dx, dy, dz se encuentran sobre la superficie ϕ para la cual $d\phi = 0$.

El producto escalar del vector ∇ por sí mismo da el operador escalar

$$\nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{B23})$$

que recibe el nombre de *laplaciana*. La ecuación $\nabla^2 \phi = 0$ se conoce con el nombre de ecuación de Laplace.

B9. Divergencia. Cuando se multiplica escalarmente el operador ∇ por un vector \mathbf{V} , el resultado es

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \quad (\text{B24})$$

que se conoce con el nombre de *divergencia* de \mathbf{V} .

B10. Rotacional. Cuando se multiplica vectorialmente el operador ∇ por el vector \mathbf{V} , el resultado es

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{V} &= \mathbf{i} \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B25})$$

A esta operación se le llama *rotacional* de \mathbf{V} .

B11. Otras operaciones. Puede demostrarse que el rotacional del gradiente es idénticamente nulo

$$\nabla \times \nabla \phi = \mathbf{0}$$

y que la divergencia del rotacional también es idénticamente nula

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{V} = 0.$$

C Tablas útiles

Tabla C1. Propiedades

A. Densidades, g/cm³

Aceite	0,90	Madera (blanda, pino)	0,48
Acero	7,82	(dura, roble)	0,80
Agua (dulce)	1,00	Mercurio	13,6
(salada)	1,03	Oro	19,28
Aluminio	2,69	Plomo	11,4
Cobre	8,90	Tierra (mojada, med.)	1,76
Hielo	0,90	(seca, med.)	1,28
Hierro (colado)	7,20	Titanio	3,08
Hormigón (med.)	2,40	Vidrio	2,59

B. Coeficientes de rozamiento

(Los coeficientes de la tabla siguiente representan valores típicos sólo en condiciones ordinarias de trabajo. Los verdaderos coeficientes correspondientes a una situación dada dependerán de la naturaleza exacta de las superficies en contacto. Puede esperarse una variación del 25 % o más respecto a estos valores en las aplicaciones prácticas, según sean las condiciones de limpieza, pulido de la superficie, presión, lubricación y velocidad.)

Superficies en contacto	Valores típicos del coeficiente de rozamiento, <i>f</i>	
	Estático	Cinético
Acero sobre acero (seco)	0,6	0,4
Acero sobre acero (engrasado)	0,1	0,05
Teflón sobre acero	0,04	0,04
Acero sobre metal blanco (seco)	0,4	0,3
Acero sobre metal blanco (engrasado)	0,1	0,07
Latón sobre acero (seco)	0,5	0,4
Forro de frenos sobre hierro de fundición	0,4	0,3
Neumáticos de goma sobre pavimento liso (seco)	0,9	0,8
Cable sobre polea de hierro (seco)	0,2	0,15
Cuerda de cáñamo sobre metal	0,3	0,2
Metal sobre hielo	—	0,02
Coeficiente de rozamiento por rodadura, <i>f_r</i>		
Neumáticos sobre pavimento liso	0,02	
Llantas de acero sobre raíles de acero	0,006	

Tabla C2. Constantes del sistema solar

Constante de la Gravitación Universal	$\gamma = 6,67(10^{-8}) \text{ cm}^3/(\text{g} \cdot \text{s}^2)$
Masa de la Tierra	$m = 5,975(10^{27}) \text{ g}$
Período de rotación de la Tierra (1 día sidéreo)	$= 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4 \text{ s}$ $= 23,9344 \text{ h}$
Velocidad angular de la Tierra	$\omega = 0,7292(10^{-4}) \text{ rad/s}$
Velocidad angular del radio vector Tierra-Sol	$\omega' = 0,1991(10^{-6}) \text{ rad/s}$
Velocidad media del centro de la Tierra respecto al Sol	$= 107 \text{ 200 km/h}$

Cuerpo	Distancia media al Sol km	Excentricidad de la órbita e	Período de la órbita, días solares	Diámetro medio, km	Masa relativa a la Tierra	Gravedad en la superficie m/s^2	Velocidad de escape km/s
Sol	—	—	—	1392000	333000	274	618
Luna	384316*	0,055	27,32	3475	0,0123	1,62	2,37
Mercurio	57,2(10 ⁶)	0,206	87,97	4990	0,054	3,50	4,17
Venus	108(10 ⁶)	0,0068	224,70	12400	0,815	8,44	10,2
Tierra	149,6(10 ⁶)	0,017	365,26	12738†	1,000	9,82‡	11,2
Marte	227,8(10 ⁶)	0,093	686,98	6760	0,107	3,93	5,10

* Distancia media a la Tierra (entre centros)

† Diámetro de la esfera de igual volumen
diámetro polar = 12720 km
diámetro ecuatorial = 12753

‡ Para una Tierra esférica sin rotación, equivalente al valor absoluto al nivel del mar y una latitud de 37,5°.

Tabla C3. Relaciones matemáticasA. *Series* (la expresión entre corchetes a continuación de la serie indica el dominio de convergencia)

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots \quad [x^2 < 1]$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad [x^2 < \infty]$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad [x^2 < \infty]$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \quad [x^2 < \infty]$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \quad [x^2 < \infty]$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$\text{donde } a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

[Desarrollo de Fourier para $-l < x < l$]

B. Derivadas

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}, \quad \frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}, \quad \frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = \sin dx = \operatorname{tg} dx = dx$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos \Delta x}{\Delta x} = \cos dx = 1$$

$$\frac{d \operatorname{sen} x}{dx} = \cos x, \quad \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x, \quad \frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \sec^2 x$$

$$\frac{d \operatorname{senh} x}{dx} = \cosh x, \quad \frac{d \cosh x}{dx} = \operatorname{senh} x, \quad \frac{d \operatorname{tgh} x}{dx} = \operatorname{sech}^2 x$$

C. Integrales

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x$$

$$\int \sqrt{a+bx} dx = \frac{2}{3b} \sqrt{(a+bx)^3}$$

$$\int x \sqrt{a+bx} dx = \frac{2}{15b^2} (3bx - 2a) \sqrt{(a+bx)^3}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2\sqrt{a+bx}}{b}$$

$$\int \frac{x dx}{a+bx} = \frac{1}{b^2} [a+bx - a \ln(a+bx)]$$

$$\int \frac{x dx}{(a+bx)^n} = \frac{(a+bx)^{1-n}}{b^2} \left(\frac{a+bx}{2-n} - \frac{a}{1-n} \right)$$

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{artgh} \frac{x\sqrt{ab}}{a} \quad \text{o bien} \quad \frac{1}{\sqrt{-ab}} \operatorname{artgh} \frac{x\sqrt{-ab}}{a}$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2} [x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})]$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} \right)$$

$$\int x \sqrt{a^2 - x^2} dx = -\frac{1}{3} \sqrt{(a^2 - x^2)^3}$$

$$\int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = -\frac{x}{4} \sqrt{(a^2 - x^2)^3} + \frac{a^2}{8} \left(x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} \right)$$

$$\int x^3 \sqrt{a^2 - x^2} dx = -\frac{1}{5} (x^2 + \frac{2}{3} a^2) \sqrt{(a^2 - x^2)^3}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \log \left(\sqrt{a+bx+cx^2} + x\sqrt{c} + \frac{b}{2\sqrt{c}} \right)$$

$$\text{o bien} = \frac{-1}{\sqrt{-c}} \operatorname{arcsen} \left(\frac{b+2cx}{\sqrt{b^2-4ac}} \right)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln (x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a}$$

$$\int x \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 \pm a^2)^3}$$

$$\int x^2 \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{4} \sqrt{(x^2 \pm a^2)^3} \mp \frac{a^2}{8} x \sqrt{x^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8} \ln (x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \sqrt{x^2 - a^2}$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm \sqrt{a^2 \pm x^2}$$

$$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x$$

$$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x$$

$$\int \sec x dx = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4}$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4}$$

$$\int \operatorname{sen} x \cos x dx = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2}$$

$$\int \operatorname{sen}^3 x dx = -\frac{\cos x}{3} (2 + \operatorname{sen}^2 x)$$

$$\int \cos^3 x dx = \frac{\operatorname{sen} x}{3} (2 + \cos^2 x)$$

$$\int x \operatorname{sen} x dx = \operatorname{sen} x - x \cos x$$

$$\int x \cos x dx = \cos x + x \operatorname{sen} x$$

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = 2x \operatorname{sen} x - (x^2 - 2) \cos x$$

$$\int x^2 \cos x \, dx = 2x \cos x + (x^2 - 2) \operatorname{sen} x$$

$$\int \operatorname{senh} x \, dx = \cosh x$$

$$\int \cosh x \, dx = \operatorname{senh} x$$

$$\int \operatorname{tgh} x \, dx = \ln \cosh x$$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x$$

$$\int e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a}$$

$$\int x e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1)$$

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} px \, dx = \frac{e^{ax}(a \operatorname{sen} px - p \cos px)}{a^2 + p^2}$$

$$\int e^{ax} \cos px \, dx = \frac{e^{ax}(a \cos px + p \operatorname{sen} px)}{a^2 + p^2}$$

$$\int e^{ax} \operatorname{sen}^2 x \, dx = \frac{e^{ax}}{4 + a^2} \left(a \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} 2x + \frac{2}{a} \right)$$

$$\int e^{ax} \cos^2 x \, dx = \frac{e^{ax}}{4 + a^2} \left(a \cos^2 x + \operatorname{sen} 2x + \frac{2}{a} \right)$$

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} x \cos x \, dx = \frac{e^{ax}}{4 + a^2} \left(\frac{a}{2} \operatorname{sen} 2x - \cos 2x \right)$$

Radio de
curvatura

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{xy} = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \\ \rho_{r\theta} = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right]^{3/2}}{r^2 + 2 \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 - r \frac{d^2r}{d\theta^2}} \end{array} \right.$$

Tabla C4. Propiedades de las figuras planas

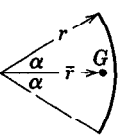
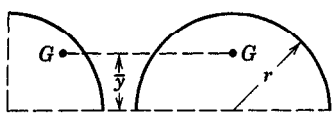
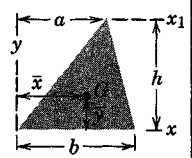
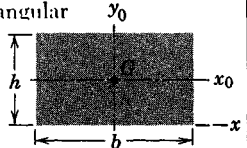
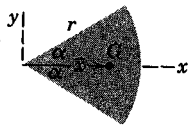
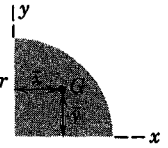
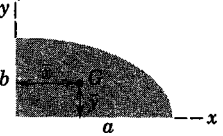
Figura	Centroide	Momento inercia de superf.
Arco de circunferencia 	$\bar{r} = \frac{r \operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$	—
Cuadrante y semicircunferencia 	$\bar{y} = \frac{2r}{\pi}$	—
Superficie triangular 	$\bar{x} = \frac{a+b}{3}$ $\bar{y} = \frac{h}{3}$	$I_x = \frac{bh^3}{12}$ $\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36}$ $I_{x_1} = \frac{bh^3}{4}$
Superficie rectangular 	—	$I_x = \frac{bh^3}{3}$ $\bar{I}_x = \frac{bh^3}{12}$ $J = \frac{bh}{12}(b^2 + h^2)$
Superficie de un sector circular 	$\bar{x} = \frac{2}{3} \frac{r \operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$	$I_x = \frac{r^4}{4} (\alpha - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha)$ $I_y = \frac{r^4}{4} (\alpha + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha)$ $J = \frac{1}{2} r^4 \alpha$
Superficie de un cuadrante circular 	$\bar{x} = \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$	$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{16}$ $J = \frac{\pi r^4}{8}$
Superficie de un cuadrante elíptico  $\text{Area } A = \frac{\pi ab}{4}$	$\bar{x} = \frac{4a}{3\pi}$ $\bar{y} = \frac{4b}{3\pi}$	$I_x = \frac{\pi ab^3}{16}$ $I_y = \frac{\pi a^3 b}{16}$ $J = \frac{\pi ab}{16}(a^2 + b^2)$

Tabla C5. Propiedades de sólidos homogéneos
(m = masa del cuerpo indicado)

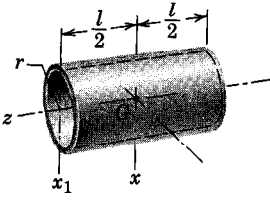
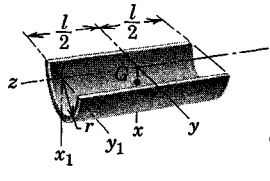
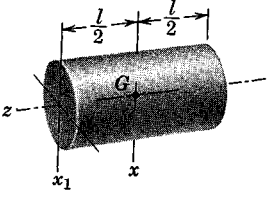
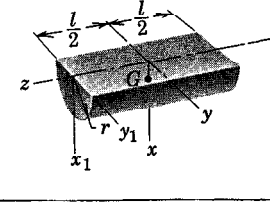
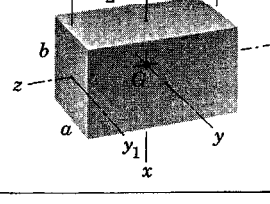
Cuerpo	Centro masa	Momentos de inercia
 <p>Cáscara cilíndrica de revolución</p>	—	$I_{xx} = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1} = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz} = mr^2$
 <p>Cáscara semicilíndrica de revolución</p>	$\bar{x} = \frac{2r}{\pi}$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1} = I_{y_1y_1} = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz} = mr^2$
 <p>Cilindro de revolución</p>	—	$I_{xx} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2$
 <p>Semicilindro</p>	$\bar{x} = \frac{4r}{3\pi}$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1} = I_{y_1y_1} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2$
 <p>Paralelepípedo rectángulo</p>	—	$I_{xx} = \frac{1}{12}m(a^2 + l^2)$ $I_{yy} = \frac{1}{12}m(b^2 + l^2)$ $I_{zz} = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$ $I_{y_1y_1} = \frac{1}{12}mb^2 + \frac{1}{3}ml^2$

Tabla C5. Continuación

(m = masa del cuerpo indicado)

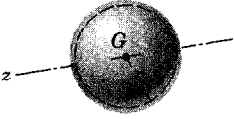
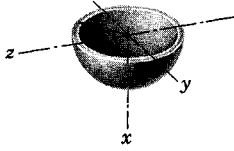
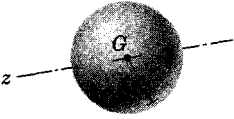
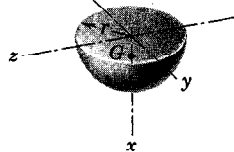
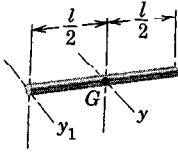
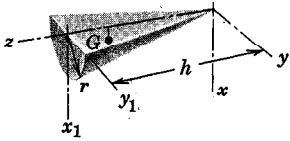
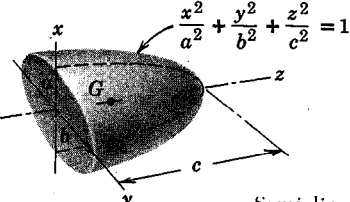
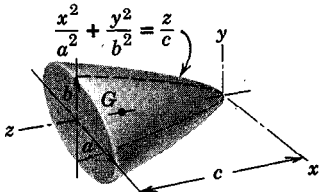
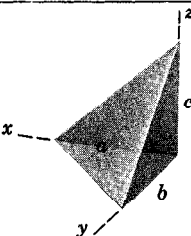
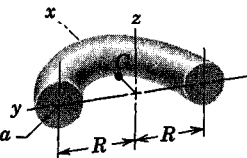
Cuerpo	Centro masa	Momentos de inercia
 <p>Cáscara esférica</p>	—	$I_{zz} = \frac{2}{3}mr^2$
 <p>Cáscara semiesférica</p>	$\bar{x} = \frac{r}{2}$	$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{3}{32}mr^2$
 <p>Esfera</p>	—	$I_{zz} = \frac{2}{5}mr^2$
 <p>Semiesfera</p>	$\bar{x} = \frac{3r}{8}$	$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{83}{320}mr^2$
 <p>Varilla delgada uniforme</p>	—	$I_{yy} = \frac{1}{12}ml^2$ $I_{y_1y_1} = \frac{1}{3}ml^2$

Tabla C5. Continuación
(m = masa del cuerpo indicado)

Cuerpo	Centro masa	Momentos de inercia
<p>Varilla en cuarto de circunferencia</p>	$\bar{x} = \bar{y}$ $= \frac{2r}{\pi}$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2}mr^2$ $I_{zz} = mr^2$
<p>Cilindro elíptico</p>	—	$I_{xx} = \frac{1}{4}ma^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{yy} = \frac{1}{4}mb^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{zz} = \frac{1}{4}m(a^2 + b^2)$ $I_{y_1y_1} = \frac{1}{4}mb^2 + \frac{1}{3}ml^2$
<p>Cáscara cónica</p>	$\bar{z} = \frac{2h}{3}$	$I_{yy} = \frac{1}{2}mr^2 + mh^2$ $I_{y_1y_1} = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{2}{3}mh^2$ $I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2$
<p>Cáscara semicónica</p>	$\bar{x} = \frac{4r}{3\pi}$ $\bar{z} = \frac{2h}{3}$	$I_{xx} = I_{yy}$ $= \frac{1}{2}mr^2 + mh^2$ $I_{x_1x_1} = I_{y_1y_1}$ $= \frac{1}{2}mr^2 + \frac{2}{3}mh^2$ $I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2$
<p>Cono de revolución recto</p>	$\bar{z} = \frac{3h}{4}$	$I_{yy} = \frac{3}{80}mr^2 + \frac{3}{8}mh^2$ $I_{y_1y_1} = \frac{3}{80}mr^2 + \frac{1}{10}mh^2$ $I_{zz} = \frac{3}{10}mr^2$

Tabla C5. Continuación

(m = masa del cuerpo indicado)

Cuerpo	Centro masa	Momentos de inercia
 <p>Semicono</p>	$\bar{x} = \frac{r}{\pi}$ $\bar{z} = \frac{3h}{4}$	$I_{xx} = I_{yy}$ $= \frac{3}{20}mr^2 + \frac{3}{8}mh^2$ $I_{x_1x_1} = I_{y_1y_1}$ $= \frac{3}{20}mr^2 + \frac{1}{10}mh^2$ $I_{zz} = \frac{3}{10}mr^2$
 <p>Semielipsoide</p>	$\bar{z} = \frac{3c}{8}$	$I_{xx} = \frac{1}{8}m(b^2 + c^2)$ $I_{yy} = \frac{1}{8}m(a^2 + c^2)$ $I_{zz} = \frac{1}{8}m(a^2 + b^2)$
 <p>Paraboloide elíptico</p>	$\bar{z} = \frac{2c}{3}$	$I_{xx} = \frac{1}{8}mb^2 + \frac{1}{2}mc^2$ $I_{yy} = \frac{1}{8}ma^2 + \frac{1}{2}mc^2$ $I_{zz} = \frac{1}{8}m(a^2 + b^2)$
 <p>Tetraedro rectangular</p>	$\bar{x} = \frac{a}{4}$ $\bar{y} = \frac{b}{4}$ $\bar{z} = \frac{c}{4}$	$I_{xx} = \frac{1}{10}m(b^2 + c^2)$ $I_{yy} = \frac{1}{10}m(a^2 + c^2)$ $I_{zz} = \frac{1}{10}m(a^2 + b^2)$
 <p>Semitoro</p>	$\bar{x} = \frac{a^2 + 4R^2}{2\pi R}$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2}mR^2 + \frac{5}{8}ma^2$ $I_{zz} = mR^2 + \frac{3}{4}ma^2$

Índice alfabético

A

Acción y reacción, principio de, 6, 64, 149
 Aceleración, de la gravedad, 17
 de un cuerpo, 49
 Aerostática, 232
 Altura metacéntrica, 251
 Ángulo de reposo, 281
 de rozamiento, 276
 Apoyos superabundantes, 8, 121
 Armaduras de puentes, 120
 definición, 119
 determinación estática de, 124, 125, 142
 espaciales, 140
 estabilidad de, 124, 125, 142
 planas, 119
 simples, 121
 Arquímedes, 1, 251

B

Brazo de momento, 28

C

Cable, catenaria, 215
 flexible, 211
 longitud, 214
 parabólico, 213
 Cajori, F., 6
 Calculadora digital, 13
 Cambio de ejes para los momentos de inercia, 383
 para los productos de inercia, 399
 Campo de fuerzas, 181
 conservativo, 363
 Cantidades infinitesimales, orden de las, 10
 Cargas, concentradas en vigas, 168
 distribuidas en vigas, 223
 Catenaria, 215
 Centímetro (cm), 9

Centipoise, 271
 Centro, de empuje, 251
 de gravedad, 181, 183, 198
 de masa, 182, 184
 de presión, 235
 Centroides, 185
 de figuras compuestas, 198
 de volúmenes irregulares, 199
 por el teorema de Pappus-Guldin, 207
 por integración, 186
 tabla de, 442
 Cerchas, 120
 Cinemática, 1
 Cinética, 1
 Circulación turbulenta, 271
 Círculo de Mohr, 401
 Coeficiente de rozamiento, 275, 437
 de rozamiento estático, 275
 de rozamiento por rodadura, 271, 437
 de viscosidad, 271
 Cojinetes, de soporte, rozamiento en, 298
 rozamiento, 299
 Componentes, de un vector, 5, 426
 de una fuerza, 17, 64
 rectangulares, 5, 18, 426
 Compresión en los miembros de una armadura, 121
 Cono de rozamiento, 276
 Constante, de gravitación universal, 8, 438
 recuperadora de un resorte, 344
 Constantes del sistema solar, 438
 Coordenadas, elección de, 184, 381
 generalizadas, 362
 Correas, rozamiento, 302
 Cosenos directores, 5
 Coulomb, 270
 Cuerpo, deformable, 3
 rígido, 3
 rígido, equilibrio de un, 322
 Cuerpos, compuestos, centro de gravedad de, 198
 rígidos interconectados, 148, 324
 Cuñas, rozamiento en, 295

D

D'Alembert, 1
 da Vinci, 1
 Deformación, 273
 Densidades, tabla de, 437
 Derivadas, de vectores, 432
 tabla de, 439
 Descomposición de una fuerza, 18, 40
 y un par, 40
 Desplazamiento, 319
 virtual, 322
 Diagrama, de esfuerzo-deformación, 273
 de fuerzas, 171
 de fuerzas activas, 326
 de fuerzas cortantes, 171
 de Maxwell, 126
 del cuerpo libre, 12, 64, 67, 68
 del momento flector, 171, 192, 225
 Digital, calculadora, 13
 Dina (dyn), 9
 Dinámica, 1
 Discos, rozamiento, 299
 Divergencia, 435
 Doble producto vectorial, 431

E

Ecuación, de Laplace, 435
 diferencial de equilibrio, 212, 259, 262
 vectorial, 7
 Efectos, exteriores de una fuerza, 16
 internos de una fuerza, 16
 Eje de momentos, 28
 Ejes, elección de, 184
 inclinados, momento de inercia de una superficie respecto a, 399
 momento, 28, 30
 paralelos, teorema de los, 383
 principales de inercia, 400
 rotación de los, 398
 Elasticidad, teoría de la, 263
 Elemento diferencial, elección, 184
 Empuje, centro de, 251
 fuerza de, 251
 principio de, 251
 Energía, criterio para el equilibrio, 361
 criterio para la estabilidad, 364, 366
 elástica, 345
 potencial, 345, 357, 359, 363
 datos, 359
 de deformación elástica, 344
 elástica, 344
 gravitatoria, 359, 360
 mecánica, 360
 Entramados, equilibrio de, 148

Equilibrio, categorías de, 76
 con dos grados de libertad, 366
 concepto, 49, 74
 condiciones necesarias y suficientes, 79
 criterio de energía, 361
 de cuerpos rígidos interconectados, 148, 324
 de fuerzas, colineales, 75, 76
 concurrentes, 75, 76
 coplanarias, 75, 77
 paralelas, 76, 77
 de máquinas, 148
 de un cuerpo rígido, 322
 de una partícula, 322
 ecuaciones, 81, 82
 diferenciales, 212, 213, 259, 262
 en tres dimensiones, 75
 en función del trabajo virtual, 322, 324, 326, 345
 estabilidad del, 364, 367
 indiferente, 365
 inestable, 364
 de «silla de montar», 367
 Escalares, 3
 Esfuerzo, 170, 181, 259
 compresivo, 260
 cortante, 170, 260
 -deformación, diagrama, 273
 normal, 260
 notaciones empleadas, 260
 tensor, 170, 260
 Esfuerzos, en los miembros de una armadura, 121
 sistema plano de, 262
 Espacio, 1
 Estabilidad, de armaduras, 124, 141
 de cuerpos flotantes, 252
 de un sistema, con dos grados de libertad, 366
 con un grado de libertad, 365
 del equilibrio, 364
 Estática, 1
 Estructuras, estáticamente determinadas o isostáticas, 80, 121, 124, 141, 142, 168
 estáticamente indeterminadas o hiperestáticas, 80, 121, 126, 142, 168
 isostáticas o estáticamente determinadas, 80, 121, 124, 141, 142, 168
 tipos de, 120

F

Figuras compuestas, centroide de, 198
 Fluidos, 232
 compresibles, 234
 incompresibles, 233

Formulación de problemas, 11
 Fourier, series de, 439
 Fuerza, acción, a distancia, 66
 de una, 15
 mecánica de una, 64
 activa, 326
 aplicada, 15
 clases de, 16
 componentes de una, 17, 64
 concepto de, 2
 cortante, 171, 223
 de empuje, 251
 de gravedad, 6, 181
 aceleración, 8
 de rozamiento, 66, 181, 269
 definiciones, 15
 descomposición de una, 18, 40
 efectos, de una, 16
 exteriores, 16
 internos, 16
 eléctrica y magnética, 181
 inercia, 380
 intensidad de una, 181
 libra patrón, 17
 medida, 17
 momento de una, 28, 30
 polígono, 51
 reactiva, 16, 326
 representación de una, 65
 resultante, 17, 49, 50, 235, 238
 sistemas coplanarios, 51
 tensora, 170
 trabajo efectuado, 319
 Fuerzas, campo conservativo de, 363
 colineales, equilibrio de, 75, 76
 concentradas, 16, 181
 concurrentes, equilibrio de, 75, 76, 77
 resultante de, 53
 sistema de, 53
 coplanarias, resultante de, 51
 sistema de, 51
 distribuidas, 15, 181
 máscas, 181
 paralelas, equilibrio de, 76, 77
 resultante de, 52
 sistema de, 52
 reactivas, 16, 326
 sistema general de, 15, 49, 50
 Función potencial, 363
 Funciones hiperbólicas, 216, 438

G

Galileo, 1
 Gases, ley de los, 234
 Gato, rendimiento mecánico, 299
 Gibbs, Josiah Willard, 425

Gibbs, notación vectorial de, 425
 Giro, radio de, 239, 382
 Gradiente, 434
 Grados de libertad, 109, 326, 346
 Gravedad, aceleración debida a la, 8, 17
 centro de, 181, 183, 198
 Gravitación, constante de, 8, 438
 ley de la, 7
 Gravitatorio, sistema de unidades, 9
 Guldin, Paul, 206

H

Hidrostática, 232
 Histéresis, lazo de, 273
 Hooke, ley de, 346

I

Inercia, 2, 380
 ejes principales de, 400
 fuerzas de, 380
 momento de, 380
 momentos cartesianos de, 387
 producto de, 398
 tensor de, 261
 Integración de vectores, 434
 Integrales, tabla de, 439

K

Kilogramo (Kg), 9
 internacional, 17
 Kilopond (Kp), 9

L

Lagrange, 1
 Laplace, 1
 ecuación de, 435
 Laplaciana, 435
 Lazo de histéresis, 273
 Ley, de Hooke, 346
 de la gravitación, 7
 de los gases, 234
 del paralelogramo, 4
 del triángulo, 4, 5
 Leyes de Newton, 6
 del movimiento, 7
 Libertad, grados de, 109, 326, 346
 Libra patrón, 17
 Ligaduras, 79, 109, 324
 adecuadas, 109, 112, 114
 parciales, 110, 111

Ligaduras superabundantes, 110, 111
 Límites, condiciones en los, 212
 Línea de acción, 16
 Líquidos, 233
 Lubricación límite, 271
 Luz, velocidad de la, 2

M

Máquina ideal y real, 269
 Máquinas, equilibrio de, 148
 rozamiento en las, 295
 Masa, 2, 8
 centro de, 182, 184
 Materia, 2
 Maxwell, James Clerk, 126
 Mecánica, 1
 de los medios continuos, 259
 Mediciones absolutas, 2
 Metacentro, 251
 Método, de la carga unitaria, 346
 de las secciones, 126
 de los nudos, 122
 para solucionar los problemas, 12
 Metro (m), 9
 Miembro, de dos fuerzas, 77, 121
 de tres fuerzas, 77
 Miembros multifuerza, 148
 Modelo matemático, 11
 Módulo de Young, 346
 Mohr, círculo de, 401
 Momento de inercia, 380
 de una masa, tablas, 443
 de una superficie, 239, 379, 380
 cambio de eje, 382
 compuesta, 393
 tabulación de resultados, 393
 dimensiones y unidades, 381
 ejes principales, 400
 máximo y mínimo, 400
 por integración, 380, 381
 por presión de un líquido, 239
 radios de giro, 382
 rectangular, 379
 representación por el círculo de Mohr, 401
 respecto a ejes inclinados, 399
 tablas, 442
 Momento, de un par, 38
 de una fuerza, 28, 30
 flector, 170, 225
 polar de inercia de una superficie, 381
 tensor, 170
 torsor, 170
 Momentos cartesianos de inercia, 381
 Morin, 270
 Movimiento, inminente, 275, 277
 leyes del, 7

Multiplicación de vectores, 20, 30, 31, 319, 427, 429

N

Newton, Isaac, 1
 leyes de, 6
 (N), 9
 Nudos, método de los, 122

O

Orden de las cantidades infinitesimales, 10

P

Pappus, 206
 -Guldin, teorema de, 206, 207
 Par, 38
 representación vectorial, 39
 resolución, 41, 49
 resultante, 39, 50
 trabajo efectuado, 320
 Paralelogramo, ley del, 4
 Partícula, 3
 equilibrio de una, 322
 Pascal, principio de, 232
 Peso, 8, 16, 65, 182
 Plano inclinado, rendimiento, 358
 rendimiento mecánico, 299
 Plasticidad, teoría de la, 263
 Poise, 271
 Polígono, funicular, 52
 de fuerzas, 52
 espacial, 74
 Presión, 181
 atmosférica, 234
 centro de, 235
 en un fluido, 232
 manométrica, 234
 sobre superficies rectangulares sumergidas, 234
 Principio, de acción y reacción, 6, 64, 149
 de concurrencia de fuerzas, 77
 de empuje, 251
 de la máxima energía, 361
 de los momentos o de Varignon, 28, 29, 52, 183, 198
 de trabajo virtual, con rozamiento, 357
 para cuerpos interconectados, 324, 326
 para un cuerpo rígido, 323
 para un sistema elástico, 345
 para una partícula, 323
 de transmisibilidad, 4, 16
 Problemas, formulación de, 11
 método para solucionarlos, 12
 Producto, de inercia, 398

Producto de vectores, 20, 30, 31, 319, 427, 429
 escalar, 20, 319, 427
 mixto, 31, 431
 vectorial, 30, 31, 429
 Puente colgante, 213

R

Radio de giro, 239, 382
 Recuperación, constante de, 344
 Referencia, sistema de, 2
 Regla de la mano derecha, 29, 429
 Rendimiento, del tornillo, 358
 mecánico, 356
 de un gato, 299
 de un plano inclinado, 358
 Reposo, ángulo de, 281
 Resistencia de materiales, 16
 Resorte, constante de recuperación, 344
 elástico y no elástico, 66
 energía potencial, 345
 Resultante de fuerzas, concurrentes, 53
 coplanarias, 51
 en la sección recta de una viga, 170
 paralelas, 52
 Resultante, de la presión de un líquido, 237
 de un sistema de fuerzas, 50
 Rotacional, 435
 Rozamiento, ángulo de, 276
 cinético, 275
 círculo de, 298
 coeficiente de, 275, 437
 cono de, 276
 en cojinetes, 299
 de soporte, 298
 en correas, 302
 en cuñas, 295
 en discos, 299
 en las máquinas, 295
 en los filetes de los tornillos, 296
 en pivotes, 295
 estático, 276
 coeficiente de, 275
 fluido, 270
 interno, 272
 límite, 275
 por deslizamiento, tipos de problemas, 277
 por rodadura, 271, 437
 coeficiente de, 272, 437
 seco de Coulomb, 270, 273
 sistemas con, 356
 tipos de, 270
 trabajo útil realizado, 357

S

Secciones, método de las, 126

Segundo(s), 9
 momento de superficie, 380
 Series, tabla de, 438
 Silla de montar, equilibrio inestable, 367
 Sistema absoluto de unidades, 9
 astronómico de referencia, 2
 de fuerzas, 15, 49, 50
 coplanarias, 51
 concurrentes, 53
 paralelas, 52
 de referencia, 2
 inercial primario, 2
 mecánico, 63
 ideal, 324
 plano de esfuerzos, 262
 solar, tabla de constantes del, 438
 Sistemas con miembros elásticos, 344
 con rozamiento, 356
 conservativos, 361
 de fuerza tridimensionales, 50
 de unidades, 9
 Soluciones gráficas, 12
 Steiner, teorema de, 383
 Stevinus, 1
 Suma, de vectores, 4, 17, 50, 426
 vectorial, de fuerzas, 17, 50
 de pares, 40
 Superabundancia externa e interna, 124
 Superficies, compuestas, momentos de inercia, 393
 sumergidas, presión hidrostática sobre, 234
 Sustracción vectorial, 5, 427

T

Tabla, de centroides, 442
 de coeficientes de rozamiento, 437
 de constantes del sistema solar, 438
 de densidades, 437
 de momentos de inercia de superficies, 442
 de relaciones matemáticas, 438
 de unidades, 9
 Tablas matemáticas, 438
 Tensor de inercia, 261
 de las deformaciones, 261
 de los esfuerzos, 261
 orden del, 261
 simétrico, 262
 Teorema de Pappus-Guldin, 206
 de Varignon, 28, 32, 52, 183, 198
 Tiempo, concepto del, 2
 Tierra, 7, 438
 Tornillo, rendimiento, 358
 rozamiento, 296
 Torsor, 53
 Trabajo de rozamiento, 357
 de un par, 320
 de una fuerza, 319, 363

Trabajo para un cuerpo rígido, 323
 para un sistema elástico, 345
 para una partícula, 323
 Transmisibilidad, principio de, 4, 16
 Triángulo, ley del, 4, 5

U

Unidades, sistema absoluto, 9
 sistema de, 9
 gravitatorio, 9
 tabla de, 9

V

Varignon, 1
 teorema de, 28, 32, 52, 183, 198
 Vector deslizante, 3, 16
 fijo, 4
 libre, 3, 39
 Vectores, 3, 4, 425
 adición, 4, 17, 50, 426
 componentes, 5, 426
 derivada de, 432, 433

Vectores descomposición, 18
 integración de, 434
 multiplicación de, 20, 30, 31, 319, 427, 429
 producto escalar, 20, 319, 427
 representación, 4, 426
 suma de, 4, 17, 50, 426
 sustracción, 5, 427
 unitarios, 19, 426
 Velocidad de la luz, 2
 Vigas, cargas concentradas en, 168
 cargas distribuidas en, 223
 definición, 168
 diagrama de corte, 225
 isostáticas e hiperestáticas, 168
 relación de la fuerza cortante, 224
 resultante de fuerzas en la sección recta, 170
 tipos de, 169
 Viscosidad, 271
 coeficiente de, 271

Y

Young, módulo de, 346